

El sistema GPS

José A. López-Salcedo
José López Vicario
Gonzalo Seco Granados

PID_00185443



Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu copiar-los, distribuir-los i transmetre'ls públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), no en feu un ús comercial i no en feu obra derivada. La llicència completa es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.ca>

Índex

| | |
|---|----|
| Introducció | 5 |
| Objectius | 7 |
| 1. Segments del sistema GPS | 9 |
| 1.1. Segment espacial | 9 |
| 1.2. Segment de control | 12 |
| 1.3. Segment d'usuari | 14 |
| 2. Bandes freqüencials d'operació | 16 |
| 3. Estructura de senyal | 17 |
| 3.1. Format de senyalització | 17 |
| 3.1.1. Codi C/A | 20 |
| 3.1.2. Codi P | 24 |
| 3.2. Missatge de navegació | 25 |
| 3.3. Senyals modernitzats | 27 |
| 4. Arquitectura del receptor GPS | 29 |
| 4.1. Etapa d'adquisició de codi | 30 |
| 4.2. Etapa de <i>tracking</i> | 34 |
| 4.2.1. Discriminadors de DLL | 36 |
| 4.2.2. Discriminadors de PLL | 40 |
| 4.2.3. Filtres de laç | 42 |
| 4.2.4. Caracterització en laç tancat | 43 |
| 5. Càlcul de la posició | 50 |
| 5.1. Càlcul dels pseudorangs | 50 |
| 5.2. Càlcul de les fases de portadora | 54 |
| 5.3. Solució de navegació | 57 |
| 5.3.1. Mètodes basats en la linealització | 61 |
| 5.3.2. Mètodes amb solució tancada | 63 |
| 5.3.3. Algorismes complets per a la solució de navegació | 65 |
| 5.4. Fonts d'error | 68 |
| 5.4.1. Factors DOP. Factors geomètrics que afecten el càlcul de la solució de navegació | 70 |
| 5.4.2. Errors de mesura en els observables que afecten el càlcul de la solució de navegació | 73 |
| 5.4.3. Errors del segment de control: rellotge del satèl·lit i efemèrides | 74 |
| 5.4.4. Efectes de la propagació: la ionosfera | 76 |

| | | |
|--|--|------------|
| 5.4.5. | Efectes de la propagació: la troposfera | 83 |
| 5.4.6. | Efectes locals en el receptor: el soroll | 88 |
| 5.4.7. | Efectes locals en el receptor: les interferències | 90 |
| 5.4.8. | Efectes locals en el receptor: el multicamí | 95 |
| 5.5. | Posicionament diferencial | 107 |
| 5.5.1. | Classificació i reducció de les fonts d'error | 108 |
| 5.5.2. | Posicionament absolut basat en el codi | 113 |
| 5.5.3. | Posicionament relatiu basat en el codi | 114 |
| 5.5.4. | Posicionament relatiu amb fases de portadora | 116 |
| 5.5.5. | Resolució de les ambigüitats de fase | 121 |
| 5.5.6. | Mètodes de resolució de l'ambigüitat <i>geometry-free</i> | 124 |
| 5.5.7. | Mètodes de resolució de l'ambigüitat <i>geometry-based</i> | 132 |
| 5.5.8. | Posicionament absolut amb fases de portadora | 136 |
| 6. | Algorismes d'alta sensibilitat | 138 |
| 6.1. | Algorismes d'HS-GNSS basats en la DFT | 142 |
| Resum | | 148 |
| Exercicis d'autoavaluació | | 155 |
| Solucionari | | 159 |
| Abreviatures | | 160 |
| Bibliografia | | 162 |

Introducció

El sistema de radionavegació per satèl·lit GPS és certament un dels sistemes més estesos i utilitzats actualment. El seu origen prové de l'interès que es va suscitar entre diverses organitzacions governamentals dels Estats Units en la dècada dels seixanta per desenvolupar un sistema de posicionament d'alta precisió i amb cobertura global.

Tal com s'ha comentat en el mòdul "Fonaments dels sistemes de radionavegació", fruit d'aquest interès va néixer el primer sistema de radionavegació per satèl·lit, conegut com a Transit. No obstant això, aquest sistema sofria diverses limitacions, com l'obtenció de mesures de posició amb molt baixa freqüència (dependent de la latitud del blanc, el temps entre mesures disponibles podia variar entre 10 i 30 min) i el gran temps de càlcul requerit pel receptor per a determinar la posició en si (entre 10 i 15 min). Per aquest motiu, diverses institucions i organitzacions van dur a terme l'estudi de diferents alternatives. Entre aquestes institucions hi havia la desenvolupadora mateixa de Transit, és a dir, el Laboratori de Física Aplicada de la Universitat de John Hopkins, les Forces Aèries dels Estats Units i l'Armada dels Estats Units. Aquestes alternatives proposaven el càlcul de la posició mitjançant diferents mètodes basats en l'obtenció de distàncies a partir de l'estimació del temps d'arribada de senyals basats en seqüències pseudoaleatòries, la determinació d'angles o mesures basades en l'efecte Doppler, etc.

Finalment, el Departament de Defensa dels Estats Units va establir l'any 1969 el programa de DNSS (*defense navigation satellite system*) amb l'objectiu d'unir en un mateix sistema tots els esforços duts a terme fins al moment per les diferents organitzacions governamentals. Aquest sistema va ser denominat NAVSTAR (*navigation satellite time and ranging*) GPS, basat en la transmissió, per part dels satèl·lits, de senyals formats per seqüències pseudoaleatoris, a partir dels quals s'obté la distància entre el blanc i cada satèl·lit mitjançant l'obtenció del temps de propagació del senyal mateix. Una altra de les característiques d'aquest sistema és que els satèl·lits es troben equipats amb rellotges atòmics per a poder assegurar la sincronització del sistema.

El primer satèl·lit de la constel·lació GPS va ser llançat el 1978, i es va declarar l'any 1993 com a sistema amb capacitat operacional inicial. Al principi de l'any 1995, una vegada s'havien llançat ja 24 satèl·lits i s'havia testejat intensivament el segment de control terrestre, el sistema es va passar a declarar amb capacitat operacional total.

Temps de propagació

En anglès, *time of arrival* (TOA)

En aquest mòdul es presenten les característiques principals del sistema GPS. En primer lloc, es descriu l'arquitectura del sistema, basada en tres segments: el segment espacial, el segment de control i el segment d'usuaris. Fet això, es presenten les bandes freqüencials d'operació del sistema i l'estructura dels senyals de navegació.

En la segona part del mòdul es presenta el subsistema de processament de senyal del receptor. Aquest subsistema és l'encarregat de generar les mesures de retard i fase a partir del senyal rebut. Aquestes mesures donen lloc als observables, que constitueixen el punt de partida del càlcul de la posició, que s'estudia en l'última part del mòdul. S'analitzen les dues fases fonamentals del procés de sincronització, que són l'adquisició i el seguiment, i les arquitectures més habituals per a dur-les a terme.

En l'última part del mòdul s'explica detalladament el procés que permet calcular la posició a partir dels diferents observables generats pel subsistema de processament de senyal del receptor. Es presenten diferents mètodes de posicionament en funció del tipus d'observable que s'utilitza i de la precisió requerida. També s'analitzen les tècniques de processament de senyal i de dades que s'han d'adoptar si es volen utilitzar els sistemes GNSS en llocs on el senyal es rep fortament atenuat, com en zones urbanes o entorns interiors.

Objectius

Els objectius d'aquest mòdul són:

- 1.** Introduir l'arquitectura del sistema GPS basada en tres segments: segment espacial, segment de control i segment d'usuaris.
- 2.** Mostrar les bandes freqüencials utilitzades en el sistema.
- 3.** Descriure l'estructura del senyal GPS, tant el format de senyalització com el missatge de navegació.
- 4.** Descriure l'arquitectura d'un receptor GPS i el funcionament dels blocs que la integren.
- 5.** Descriure els fonaments matemàtics que permeten calcular la posició de l'usuari a partir de la solució de navegació.
- 6.** Conèixer les fonts d'error que afecten el posicionament.
- 7.** Comprendre els mètodes de processament de dades que permeten combatre aquestes fonts d'error.
- 8.** Formular diferents tipus d'equacions de navegació i deduir algorismes per a solucionar-les.
- 9.** Entendre els fonaments del posicionament diferencial i amb fases de portadora.
- 10.** Presentar els fonaments dels receptors GPS d'alta sensibilitat, aquells que operen en condicions de treball per a les quals el sistema GPS no va ser dissenyat inicialment.

1. Segments del sistema GPS

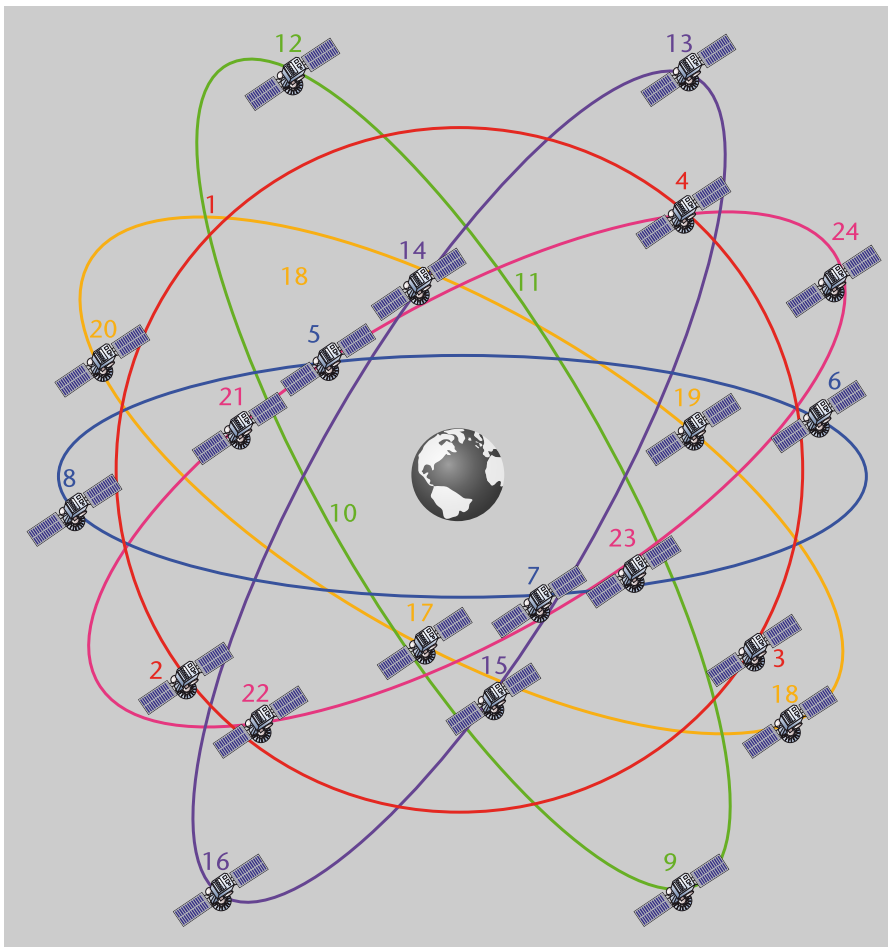
L'arquitectura del sistema GPS¹ està dividida en tres segments: segment espacial, segment de control i segment d'usuari. A continuació es descriu cada segment amb més detall.

⁽¹⁾GPS és la sigla en anglès de *global positioning system*.

1.1. Segment espacial

El segment espacial de GPS està format per la constel·lació de satèl·lits del sistema. Aquests satèl·lits són els encarregats de transmetre els senyals de radionavegació. La configuració base consta de 24 satèl·lits distribuïts en 6 plans orbitals amb 4 satèl·lits en cada pla (figura 1).

Figura 1. Constel·lació base de GPS



Les òrbites dels satèl·lits són pràcticament circulars (excentricitat de 0,02), amb uns 26.600 km de radi, i presenten una inclinació de 55° i un període orbital d'11 hores i 58 min (mig dia sideral). Aquesta òrbita permet que com a mínim

4 satèl·lits siguin visibles les 24 hores del dia en qualsevol punt de la Terra. Els paràmetres orbitals (o paràmetres keplerians) dels satèl·lits són els següents (subjectes a toleràncies):

- Semieix major de l'òrbita (a): 26.600 km.
- Excentricitat de l'òrbita (e): 0,02.
- Inclinació del pla d'òrbita (i): 55° .
- Longitud del node ascendent (Ω): $\pm 2^\circ$.
- Argument del perigeu o orientació (ω): $\pm 180^\circ$.

La identificació de cada satèl·lit es pot dur a terme de diferents maneres; les més comunes són:

- **Posició en pla orbital.** En aquest cas s'assigna una lletra a cada pla orbital (és a dir, A, B, C, D, E i F) i a cadascun dels satèl·lits en aquesta òrbita se li assigna un nombre de l'1 al 4. Per exemple, l'identificador A2 correspondria al segon satèl·lit del pla orbital A.
- **SVN².** És el nombre assignat per les Forces Aèries dels Estats Units. Un exemple seria que l'identificador d'un satèl·lit fos l'SVN 28.
- **Codi PRN.** Cada satèl·lit té un codi pseudoaleatori³ assignat. Per tant, una altra manera d'identificar els satèl·lits és mitjançant el nombre assignat a aquest codi.

⁽²⁾ SVN és la sigla de *space vehicle number*.

⁽³⁾ En anglès, *pseudorandom noise* (PRN).

Vegeu també

Els codis PRN s'estudien en l'apartat 3 d'aquest mòdul.

Tal com s'ha esmentat anteriorment, el primer satèl·lit del sistema GPS va ser llançat el 1978. Aquest satèl·lit corresponia al primer bloc de satèl·lits llançats a l'espai per a dur a terme tasques d'experimentació. En concret, el desenvolupament de GPS s'ha dut a terme de manera contínua des de mitjan anys setanta, i aquest desenvolupament s'ha dividit en diferents fases. Cadascuna d'aquestes fases té associat un conjunt o bloc de satèl·lits:

- **Bloc I.** És el bloc associat a la fase d'experimentació del sistema. Es van llançar 11 satèl·lits entre els anys 1978 i 1985; va quedar una constel·lació de 10 satèl·lits en fallar-ne un. Dels 10 satèl·lits, 4 disposaven de rellotges de quars, mentre que a la resta es van incorporar rellotges atòmics (3 de rubidi i 3 de cesi). Aquests satèl·lits estaven dissenyats per a tenir una vida de 5 anys, però alguns van arribar als 10 anys.
- **Bloc II.** És el bloc compost pels primers satèl·lits de la fase de producció. Gràcies a l'experiència acumulada en el desplegament dels satèl·lits del bloc I, es van poder introduir millores significatives per a allargar la vida dels satèl·lits i la seva fiabilitat. Alguns exemples són l'increment de la robustesa contra la radiació per a evitar el mal funcionament de la memòria de l'equip de bord a causa de rajos còsmics o modificacions en la senyalització utilitzada per a detectar errors en el sistema. En aquest cas es van

Vegeu també

En l'apartat 3 es presenten amb detall els principals tipus de nous senyals.

llançar 9 satèl·lits entre els anys 1989 i 1990. Tots els satèl·lits estaven proveïts de rellotges atòmics de rubidi o cesi i van ser dissenyats per a tenir una vida de 7,5 anys, que es va veure allargada una mitjana d'11,8 anys (amb algun cas que va arribar als 15 anys).

- **Bloc IIA.** Els satèl·lits d'aquest bloc eren molt similars als del bloc II però s'hi van introduir algunes modificacions per a permetre un període d'operació més llarg (180 dies enfront dels 14 dels satèl·lits del bloc II). D'altra banda, aquests satèl·lits tenien capacitat per a operar contínuament durant 6 mesos sense contacte amb el control de terra. No obstant això, la precisió del sistema es degrada a mesura que passa el temps si no s'apliquen correccions en les efemèrides (discutides en l'apartat 3). Per tant, es requereix una actualització diària per a aconseguir bones prestacions. En aquest bloc es van llançar 19 satèl·lits entre els anys 1990 i 1997. Encara que la vida esperada era igual a la del bloc II, encara queden 10 satèl·lits operatius en òrbita. Cal comentar que va ser l'any 1995, una vegada que es disposava ja de 24 satèl·lits operatius i s'havia validat el segment de control terrestre, quan es va declarar el GPS com a sistema amb capacitat operacional total.
- **Bloc IIR.** Aquest bloc es coneix com a bloc de satèl·lits de reposició, ja que un dels seus principals objectius era anar reposant els satèl·lits que havien estat llançats en els blocs previs. Aquests satèl·lits es van llançar entre els anys 1997 i 2004. En total es van llançar 13 satèl·lits, dels quals 1 va fallar i els 12 restants continuen estant operatius.
- **Bloc IIR-M.** El bloc IIR-M (modernitzat) està compost per un conjunt de satèl·lits proveïts d'un disseny millorat i funcionalitats addicionals. Alguns exemples són l'ús de nous senyals en la banda L, dissenyats especialment per a millorar la precisió del sistema, i un redisseny de les cadenes de radi-ofreqüència i de les antenes del satèl·lit. Quant als nous senyals (tal com es descriu en els apartats posteriors), s'introdueix un nou codi militar en les bandes L1 i L2, conegut com a codi M, i un nou senyal civil en la banda L2, conegut com a L2C. La banda L1 dels satèl·lits dels blocs previs s'utilitzava únicament per a transmetre un senyal civil, conegut amb el nom de codi C/A (*coarse acquisition*), i un codi militar, conegut com a codi P (*precision*), mentre que la banda L2 se centrava a transmetre únicament el codi P. Finalment, s'ha de comentar que entre els anys 2005 i 2009 es van llançar 8 satèl·lits, dels quals en queden 7 d'operatius.
- **Bloc IIF.** Tal com es comenta en el punt següent, es preveu llançar en el futur un bloc de satèl·lits orientat a oferir una arquitectura prou flexible per a satisfer els requisits del sistema durant les properes dècades. No obstant això, fins que aquest bloc no es trobi totalment operatiu, es disposa d'un programa de manteniment del sistema basat en els satèl·lits del bloc IIF. El primer d'aquests satèl·lits va ser llançat l'any 2010 i el segon va ser llançat el 2011. En total, el bloc constarà d'11 satèl·lits, els quals inclouen algunes millores, com la inclusió d'un nou senyal civil en L5 i processa-

dors embarcats a bord reprogramables que permeten actualitzacions del programari del satèl·lit.

- **Blocs III-A, III-B i III-C.** Tal com s'ha comentat en el punt anterior, el programa III de GPS té com a objectiu satisfer els requisits militars i civils que puguin aparèixer en les properes dècades. Teòricament, els satèl·lits del bloc III-A es començaran a llançar el 2014 i es té previst llançar un total de 12 satèl·lits. Encara no hi ha previsions per a les dates de llançament dels blocs III-B i III-C, que disposaran de 8 i 16 satèl·lits, respectivament.

Finalment, cal comentar que la constel·lació de satèl·lits actual (en el moment de redacció d'aquest material) està formada per 31 satèl·lits: 10 del bloc IIA, 12 del bloc IIR, 7 del bloc IIR-M i 2 del bloc IIF.

Plena capacitat del sistema GPS

El primer satèl·lit del sistema GPS va ser llançat l'any 1978 i, des de llavors, s'han llançat un total de 60 satèl·lits, dels quals 31 segueixen en òrbita. El sistema va ser declarat com a sistema amb capacitat operacional total l'any 1995, una vegada es disposava de 24 satèl·lits operatius i s'havia validat el segment de control terrestre. No obstant això, un dels primers casos en què el sistema va ser àmpliament utilitzat va ser durant la guerra del Golf en els anys 1990 i 1991.

1.2. Segment de control

El segment de control terrestre és l'encarregat de monitorar i controlar la constel·lació de satèl·lits de GPS. Concretament, les principals funcionalitats d'aquest segment són:

- Monitorar els senyals de navegació dels satèl·lits.
- Actualitzar els missatges de navegació.
- Resoldre anomalies dels satèl·lits.
- Monitorar l'estat de cada satèl·lit.

El segment de control està format pels elements següents:

1) **Estació de control mestra**⁴. És l'encarregada de centralitzar el control de la constel·lació GPS. Aquesta estació es troba sota el control de les Forces Aèries dels Estats Units i està localitzada a la base aèria Schriever, a Colorado Springs (Estats Units). Al seu torn, hi ha una estació redundat a Maryland. Les principals funcions de l'MCS són:

⁽⁴⁾En anglès, *master control station* (MCS).

- Monitorar l'estat dels satèl·lits i dur a terme accions de manteniment.
- Monitorar les òrbites dels satèl·lits.
- Estimar i predir els rellotges dels satèl·lits i les seves efemèrides.
- Generar els missatges de navegació.
- Mantenir la sincronització temporal del sistema GPS.
- Verificar les dades de navegació que es destinen als usuaris del sistema.

- Maniobrar els satèl·lits per a mantenir les òrbites i per a dur a terme reparacions dels satèl·lits defectuosos.

2) **Estacions de monitoratge**⁵. Estan encarregades de dur a terme les funcions de seguiment dels senyals de navegació dels diferents satèl·lits. Tal com es pot observar en la figura 2, les estacions es troben en emplaçaments propers a l'equador per a maximitzar-ne la cobertura.

⁽⁵⁾En anglès, *monitor stations*.

Figura 2. Distribució geogràfica del segment de control de GPS



Cadascuna d'aquestes estacions està controlada per l'estació MCS i s'encarreguen de recollir dades referents a les distàncies entre l'estació i els diferents satèl·lits, l'estat d'aquests i l'estat meteorològic del lloc (per a modelitzar el retard que introdueix la troposfera en el senyal GPS). Aquestes dades són enviades a l'MCS perquè les processi. Concretament, una estació de monitoratge està formada pel següent:

- Un receptor en la banda L.
- Dos rellotges atòmics de cesi.
- Sensors meteorològics.
- Un conjunt de servidors locals.
- Un equip de comunicacions (per a establir connexió amb l'MCS).

3) **Estacions de transmissió de dades**⁶. Estan encarregades de transmetre les ordres de control i els missatges de navegació generats per l'MCS als satèl·lits. Hi ha 4 estacions localitzades en el mateix emplaçament que el d'algunes de les estacions de monitoratge: illa de l'Ascensió, Diego Garcia, Kwajalein i cap

Sis estacions de monitoratge

Hi ha sis estacions de monitoratge repartides per tot el món: illa de l'Ascensió (Atlàntic), Diego Garcia (Índic), Kwajalein (Pacífic), Hawaii (Pacífic), Colorado Springs (Estats Units) i cap Canaveral (Estats Units).

⁽⁶⁾En anglès, *ground antennas*.

Canaveral (podeu veure la figura 2). Aquestes estacions operen en la banda S, ja que és la banda utilitzada per a l'enllaç de control entre el segment de la Terra i els satèl·lits. D'altra banda, aquestes estacions també reben en aquesta banda dades de telemetria dels diferents satèl·lits, que són, al seu torn, reenviats a l'MCS.

1.3. Segment d'usuari

El segment d'usuari està format pel conjunt de receptors GPS.

Hi ha diferents maneres de classificació, tal com es mostra a continuació:

1) Tipus d'usuari:

a) **Civil.** Són els receptors utilitzats per tots aquells usuaris "no autoritzats" pel Govern dels Estats Units. Tal com es mostra en l'apartat 3, aquests usuaris es troben limitats quant al tipus de senyals GPS que poden utilitzar i, per tant, les prestacions que obtenen del servei són menors.

b) **Militar.** És el grup d'usuaris format per les forces armades dels Estats Units i altres organitzacions amb autorització per part del Departament de Defensa dels Estats Units, com són, per exemple, les forces armades de l'OTAN. Disposen de més precisió en no patir de cap limitació del servei.

2) Tipus d'arquitectura de recepció:

a) **Canals independents.** Són els receptors que disposen d'un nombre determinat de canals que s'utilitzen de manera independent per a tractar els senyals dels satèl·lits sota seguiment. Normalment, el nombre de canals sol ser entre quatre i dotze.

b) **Seqüencial.** Són els receptors amb un únic canal que s'utilitza per a rebre el senyal d'un sol satèl·lit. El temps que el receptor opera amb el satèl·lit és d'almenys un segon, ja que és el temps mínim per a poder obtenir el senyal i la mesura de pseudorang. Passat el temps assignat a un satèl·lit, el receptor passa a rebre el senyal d'un altre i, d'aquesta manera, es van obtenint de manera seqüencial els pseudorangs o estimacions de pseudodistància de diferents satèl·lits per a poder calcular la mesura de posició.

c) **Múltiplex:** com en el cas anterior, el seguiment dels satèl·lits es fa a terme de manera seqüencial, però la freqüència de salt entre els diferents satèl·lits és més ràpida per a poder portar a terme, mitjançant multiplexació temporal, el seguiment de més d'un satèl·lit de manera simultània. Cada fracció de temps

utilitzada per a un satèl·lit ha de ser el múltiple del període d'un bit de senyal GPS (20 ms), i es pot dur a terme el seguiment de fins a 5 satèl·lits de manera simultània en l'interval d'un segon.

3) Capacitat freqüencial:

a) Monofreqüència. Són els receptors que operen amb una única banda de freqüència (banda L1).

b) Multifreqüència Són els receptors que poden tractar diferents bandes freqüencials (bandes L1, L2 i, per al cas més recent de satèl·lits del bloc IIR-M, L5). Aquesta capacitat multifreqüència permet que es puguin corregir efectes adversos introduïts per la ionosfera.

2. Bandes freqüencials d'operació

El sistema GPS utilitza tres bandes freqüencials per a transmetre els senyals dels satèl·lits. Aquestes bandes es troben en la banda L, localitzada a la regió UHF (*ultra high frequency*) de l'espectre electromagnètic. Concretament, s'utilitzen les bandes següents:

- L1: banda centrada en $f_{L1} = 1.575,42$ MHz (longitud d'ona $\lambda = 19$ cm), és utilitzada per a transmetre els codis C/A i P. En el cas dels satèl·lits corresponents al bloc IIR-M en endavant, s'utilitza també aquesta banda per a transmetre el nou codi militar M.
- L2: centrada en $f_{L2} = 1.227,60$ MHz ($\lambda = 24$ cm), és utilitzada per a transmetre el codi P. Igual que en el cas anterior, el nombre de senyals en aquesta banda es va veure incrementat en el moment de llançament dels satèl·lits del bloc IIR-M. En concret, es va passar a transmetre també el codi M i el nou senyal civil L2C.
- L5: centrada en $f_{L5} = 1.176,45$ MHz ($\lambda = 25$ cm). Aquesta banda es va començar a utilitzar molt recentment en el primer satèl·lit del bloc IIF. En concret, s'empra per a transmetre un nou senyal d'ús civil conegut amb el nom de *safety-of-life signal*.

Vegeu també

Els codis C/A i P es descriuen en l'apartat 3.

Cal destacar que aquestes freqüències s'obtenen a partir d'una freqüència fonamental de $f_0 = 10,23$ MHz, que és la freqüència utilitzada per l'oscil·lador atòmic del satèl·lit ($f_{L1} = 154f_0$, $f_{L2} = 120f_0$ i $f_{L5} = 115f_0$). Tal com s'ha comentat en l'apartat anterior, hi ha receptors que disposen de la capacitat d'operar amb diferents bandes simultàniament. Aquest fet ofereix la possibilitat de calcular el retard introduït per la ionosfera mitjançant la comparació de dos senyals en bandes diferents, ja que aquest retard és proporcional a la longitud d'ona del senyal.

Quant a les bandes utilitzades per a la comunicació entre les estacions de transmissió de dades (*ground antennas*) i els satèl·lits, s'utilitza la banda S. Concretament s'utilitza una banda freqüencial centrada en 1.783,74 MHz per a l'enllaç de pujada i una banda freqüència centrada en 2.227,5 MHz per a l'enllaç de baixada.

3. Estructura de senyal

En aquest apartat es descriu l'estructura dels senyals emesos pels satèl·lits de la constel·lació GPS per a oferir el servei de posicionament als usuaris. Tal com s'ha comentat anteriorment, els satèl·lits dels primers blocs transmetien únicament senyals basats en els codis C/A i P, i fins que es van llançar els primers satèl·lits modernitzats, del bloc IIR-M, no es van començar a introduir nous senyals, com els basats en el codi M i el senyal *safety-of-life*. Amb l'objectiu de presentar els conceptes fonamentals de l'estructura del senyal GPS, aquest apartat se centrarà principalment en la descripció dels senyals basats en els codis C/A i P, i presentem al final alguns detalls dels senyals modernitzats.

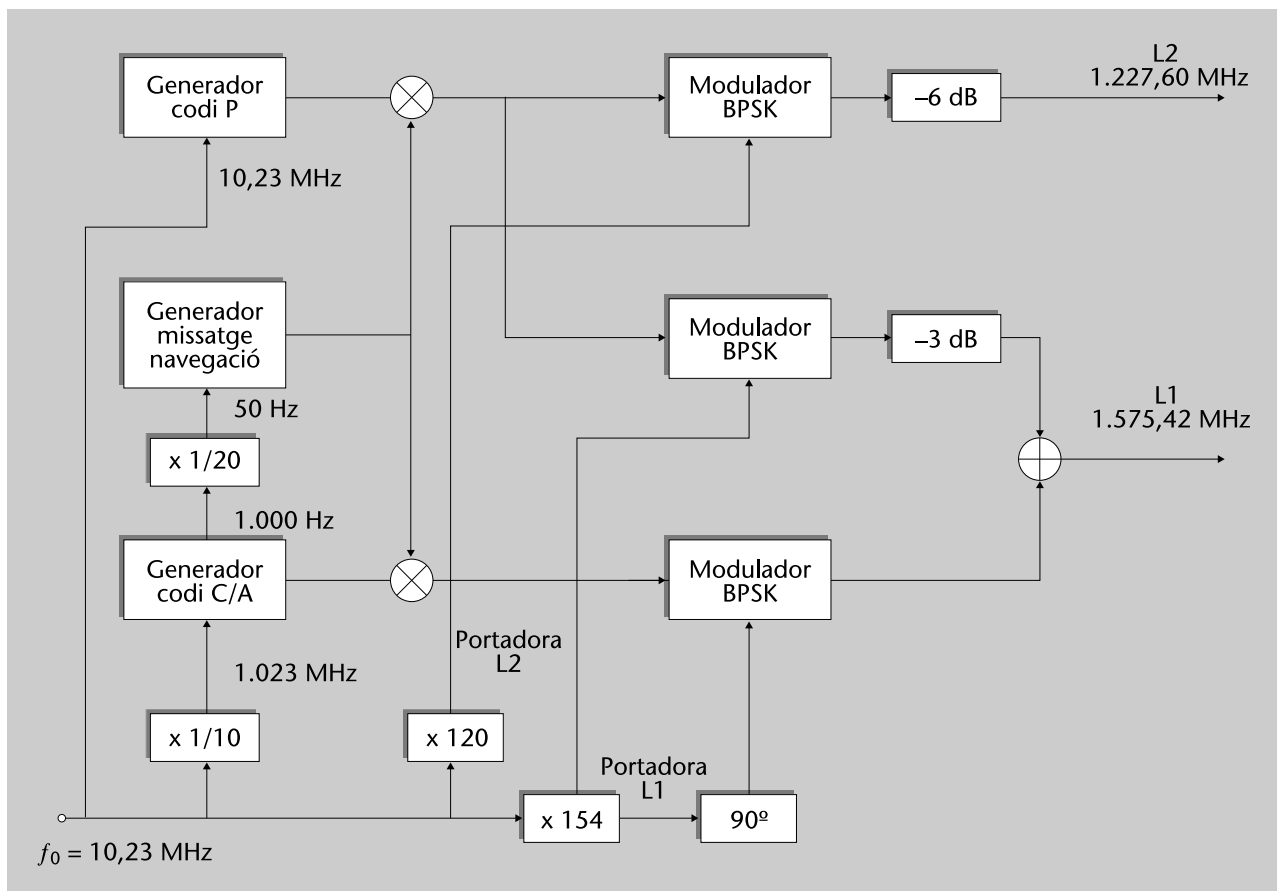
3.1. Format de senyalització

En la figura 3 es presenta l'esquema de generació dels senyals transmesos per un satèl·lit GPS, i ens centrem en el cas tradicional en què la banda L1 s'utilitzava únicament per a transmetre els codis C/A i P i la banda L2 per a transmetre el senyal P.

L2

Encara que L2 també es pot utilitzar per a transmetre el codi C/A, no és el cas normal i, per tant, no es té en compte.

Figura 3. Esquema de transmissió de senyals GPS (cas tradicional basat en transmissió de C/A en L1 i P en L1 i L2)



Tal com es pot observar, el senyal transmès per un satèl·lit, representat amb l'índex k , està determinat per l'expressió següent:

$$s_k(t) = \sqrt{2P_C} C_k(t) D_k(t) \cos(2\pi f_{L1} t) + \sqrt{2P_{PL1}} P_k(t) D_k(t) \sin(2\pi f_{L1} t) + \sqrt{2P_{PL2}} P_k(t) D_k(t) \sin(2\pi f_{L2} t) \quad (1)$$

en què P_C , P_{PL1} i P_{PL2} són les potències dels senyals associats als codis C/A, P en banda L1 i P en banda L2, respectivament. $C_k(t)$ i $P_k(t)$ són les seqüències temporals corresponents als codis C/A i P assignats al satèl·lit k -èsim, mentre que $D_k(t)$ és el missatge de navegació transmès per aquest satèl·lit.

Tal com es pot observar en l'expressió, les dades del missatge de navegació són combinades amb els diferents codis mitjançant l'operador producte. A causa que tant $D_k(t)$ com $C_k(t)$ i $P_k(t)$ són senyals de naturalesa binària, i es representa el "0" lògic amb una amplitud igual a -1 i un "1" lògic amb una amplitud $+1$ (o viceversa), el tipus de modulació utilitzada en aquests senyals és de tipus BPSK. És a dir, es modula una sèrie de portadores amb amplituds binàries $+1$ i -1 (equivalent a posar desfasaments de 0° o 180° en la portadora segons el símbol que es vulgui transmetre). D'altra banda, cal comentar que en el cas de la banda L1, el senyal BPSK associat al codi C/A s'envia al component en fase del senyal (mitjançant l'ús del $\cos(2\pi f_{L1} t)$) i el senyal BPSK⁷ associat al codi P en el component en quadratura (mitjançant l'ús del $\sin(2\pi f_{L1} t)$). Per tant, el receptor pot separar totes dues contribucions perfectament.

Els codis C/A i P, per la seva banda, són coneguts també amb el nom de codis d'eixamplament (*spreading*). Això es deu al fet que els senyals associats a aquests codis estan formats per unes seqüències de bits – denominats en l'argot GPS com a *xips* per a denotar que no transporten cap informació– amb un període de xip molt més petit que el període de bit del missatge de navegació.

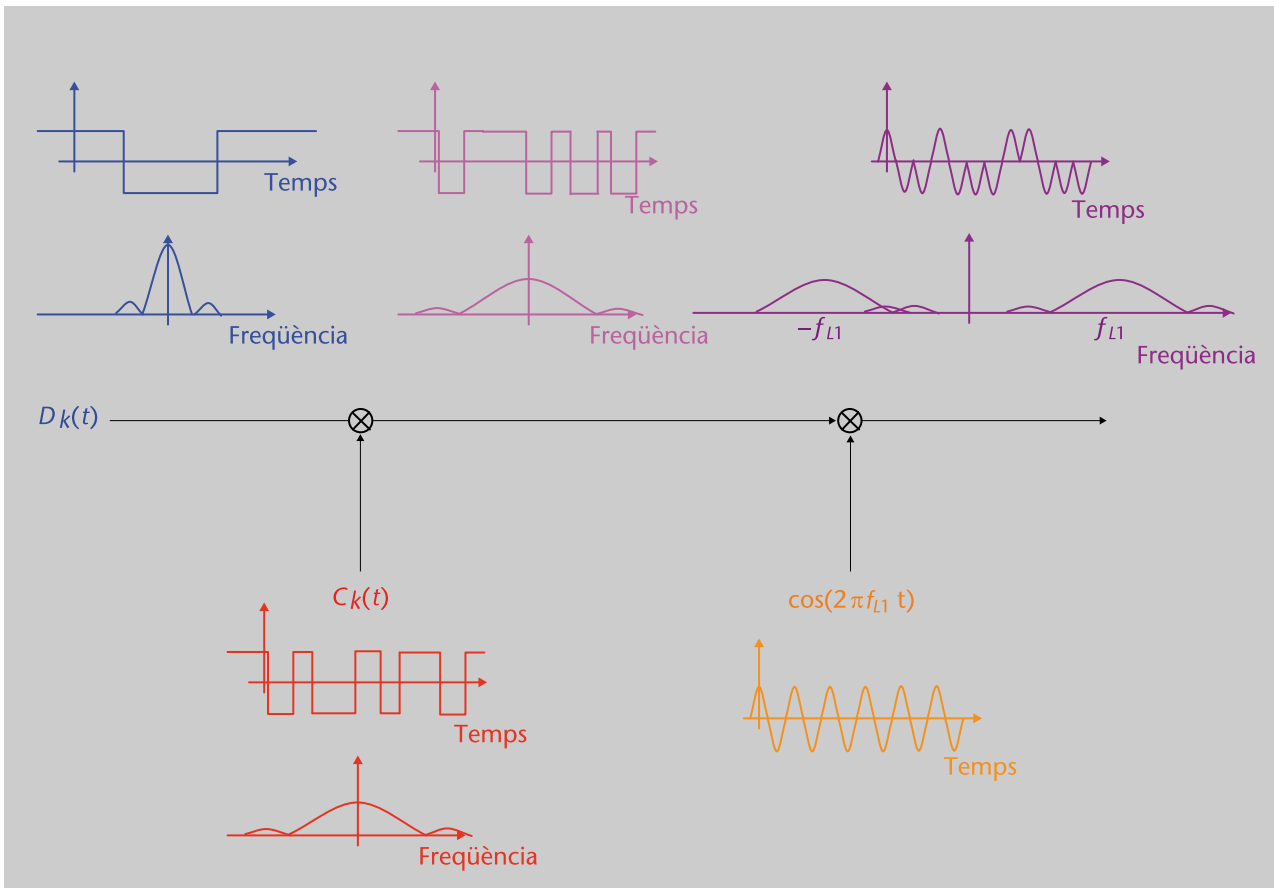
En el cas de C/A, per exemple, el període de xip és d'1/1.023 ms, mentre que, en el cas dels bits de navegació, el període de bit és de 20 ms. Per tant, en fer el producte del missatge de navegació $D_k(t)$ amb el senyal $C_k(t)$ s'obté com a resultat un senyal de navegació amb un temps de bit més petit que el del senyal original. Això en espectre es tradueix que es té un senyal de navegació amb l'espectre més ample, ja que l'amplada de banda del senyal, B , és proporcional a l'invers del període de bit, T_b , és a dir $B \propto 1/T_b$. En la figura 4 es presenta el procés de modulació comentat a dalt per al cas del senyal associat al codi C/A, i s'observa l'efecte d'eixamplament de l'espectre.

Vegeu també

Per a una descripció més detallada del missatge de navegació podeu veure el subapartat 3.2 d'aquest mòdul.

⁽⁷⁾ BPSK és la sigla de *binary phase-shift keying*.

Figura 4. Procés de modulació del senyal associat al codi C/A



Cada satèl·lit disposa dels seus codis propis C/A i P, que són diferents de la resta dels altres satèl·lits. L'objectiu d'usar aquests codis està motivat per les raons següents:

- Els codis estan basats en seqüències pseudoaleatòries que permeten obtenir bones precisions en les estimacions de les distàncies entre l'usuari i els satèl·lits.
- L'ús de diferents codis en cadascun dels satèl·lits permet que el receptor pugui distingir senyals rebuts de diferents satèl·lits simultàniament en la mateixa freqüència. Això es coneix com a tècnica d'accés al medi CDMA⁸.
- Distribuir l'energia del senyal en un espectre més ampli permet millorar la robustesa del sistema davant interferències de banda estreta. És a dir, una interferent de banda estreta distorsionarà part del senyal GPS però, atesa l'amplada de banda més gran d'aquest, la resta de l'espectre del senyal no es veurà afectat.

⁽⁸⁾CDMA és la sigla de *code division multiple access*.

A continuació es descriuen les característiques dels codis C/A i P amb més detall, i es mostra a més com la seva estructura compleix les propietats esmentades en els punts de dalt.

3.1.1. Codi C/A

El codi C/A està format a partir d'una seqüència $p_k(t)$ binària (+1 i -1) amb una longitud de 1.023 xips. El codi es transmet periòdicament mitjançant el senyal $C_k(t)$, de manera que una seqüència completa es transmet en el període temporal $T_{per} = 1$ ms.

És a dir, l'aspecte que presenta el senyal $C_k(t)$ és:

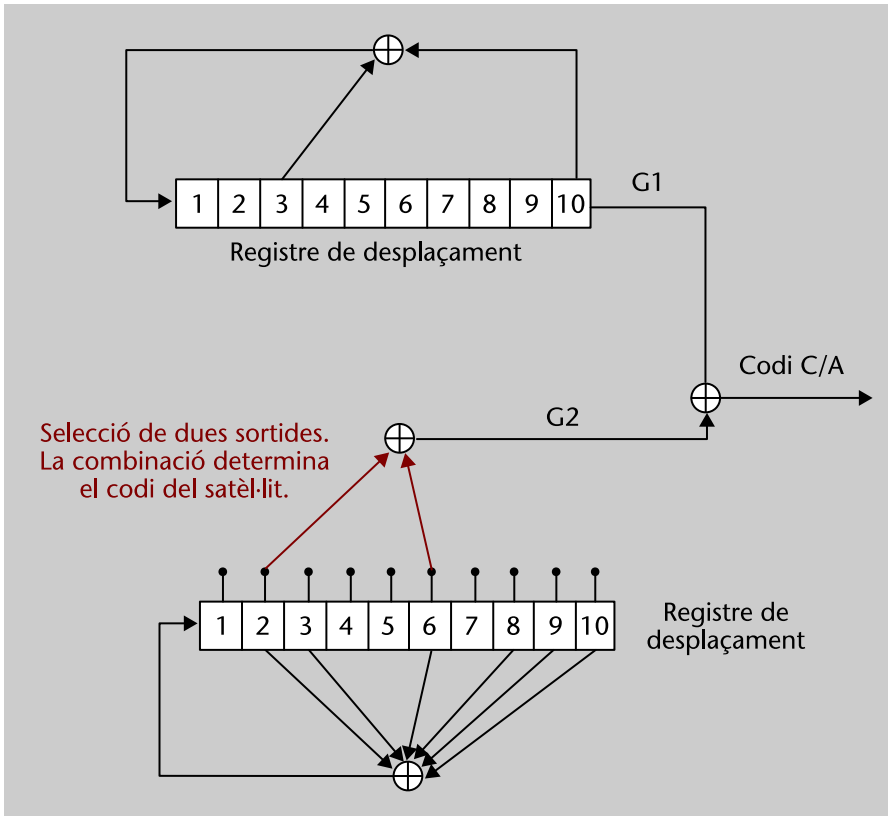
$$C_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_k(t - iT_{per}) \quad (2)$$

El temps de xip, per tant, és d'1/1.023 ms ≈ 1 μ s, la qual cosa dóna per tant una taxa de xip igual a 1,023 Mxips/s. Tal com s'ha comentat prèviament, aquest codi es multiplica en el missatge de navegació $D_k(t)$. Tenint en compte que les dades transmises en el missatge de navegació tenen una velocitat de bit igual a 50 bps, és a dir, cada bit ocupa 20 ms, s'obté com a resultat que un bit de navegació conté 20 períodes del codi C/A concatenats en el temps.

El codi C/A en si està basat en un tipus de seqüències conegudes com a seqüències pseudoaleatòries, denominades en anglès *pseudorandom noise (PRN) codes*. Aquestes seqüències són deterministes, però tenen propietats similars a les que té el soroll blanc (d'aquí ve la denominació). Aquestes característiques són que l'autocorrelació d'un senyal C/A presenta un màxim en 0, mentre que, per a la resta de valors, els nivells d'autocorrelació són molt baixos. Això s'assembla al comportament del soroll blanc, que té una funció d'autocorrelació igual a una delta de Dirac, ja que el soroll en un instant de temps determinat està totalment incorrelat amb l'existent la resta del temps. D'altra banda, si es calcula la correlació encreuada amb altres codis C/A (d'altres satèl·lits), s'obtenen uns valors de correlació molt baixos.

Els codis PRN utilitzats, concretament, es basen en els codis Gold. Aquests codis es generen usant dos registres de desplaçament de 10 bits, tal com es representa en la figura 5. Cadascun d'aquests registres de desplaçament genera una seqüència de longitud màxima, de longitud $2^{10} - 1$ bits, la qual ja presenta per si mateixa característiques de seqüència PRN. No obstant això, el codi Gold es basa a combinar aquestes seqüències fent la suma en mòdul 2 d'aquestes. Cal esmentar que considerem que els registres treballen amb nivells lògics "0" i "1" i, una vegada generat el codi Gold, es du a terme la transformació "0" \rightarrow -1 i "1" \rightarrow +1 per a generar la seqüència $p_k(t)$.

Figura 5. Esquema de generació d'un codi C/A



En la mateixa figura s'observa també que una de les seqüències, la seqüència G1, es genera sempre de la mateixa manera, mentre que la segona seqüència, G2, es genera de manera diferent depenent de les combinacions seleccionades a la sortida del segon registre de desplaçament. Això és a causa que cada satèl·lit genera una seqüència diferent variant les combinacions utilitzades. En la taula 1 es mostren les combinacions de sortides del segon registre utilitzades per a generar els codis C/A reservats per a l'ús en satèl·lits GPS.

Taula 1. Combinacions de sortides del registre G2 utilitzades en la generació de codis C/A reservats per a satèl·lits GPS

| Codi PRN | Combinació sortides G2 | Codi PRN | Combinació sortides G2 |
|----------|------------------------|----------|------------------------|
| 1 | $2 \oplus 6$ | 17 | $1 \oplus 4$ |
| 2 | $3 \oplus 7$ | 18 | $2 \oplus 5$ |
| 3 | $4 \oplus 8$ | 19 | $3 \oplus 6$ |
| 4 | $5 \oplus 9$ | 20 | $4 \oplus 7$ |
| 5 | $1 \oplus 9$ | 21 | $5 \oplus 8$ |
| 6 | $2 \oplus 10$ | 22 | $6 \oplus 9$ |
| 7 | $1 \oplus 8$ | 23 | $1 \oplus 3$ |
| 8 | $2 \oplus 9$ | 24 | $4 \oplus 6$ |
| 9 | $3 \oplus 10$ | 25 | $5 \oplus 7$ |

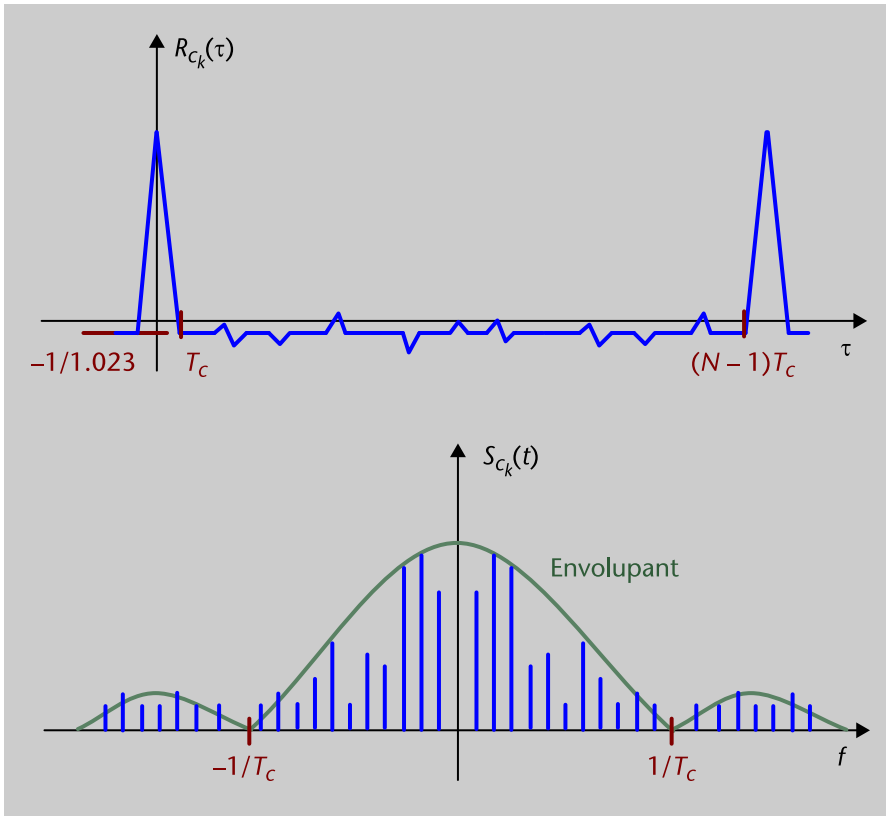
| Codi PRN | Combinació sortides G2 | Codi PRN | Combinació sortides G2 |
|----------|------------------------|----------|------------------------|
| 10 | 2 ⊕ 3 | 26 | 6 ⊕ 8 |
| 11 | 3 ⊕ 4 | 27 | 7 ⊕ 9 |
| 12 | 5 ⊕ 6 | 28 | 8 ⊕ 10 |
| 13 | 6 ⊕ 7 | 29 | 1 ⊕ 6 |
| 14 | 7 ⊕ 8 | 30 | 2 ⊕ 7 |
| 15 | 8 ⊕ 9 | 31 | 3 ⊕ 8 |
| 16 | 9 ⊕ 10 | 32 | 4 ⊕ 9 |

Les seqüències que apareixen en la taula són el conjunt de seqüències (de totes les seqüències possibles) que ofereixen les millors en termes de correlació encreuada, la qual cosa és interessant en l'aplicació GPS en oferir la possibilitat de separar de manera més eficient els senyals dels diferents satèl·lits. En termes d'autocorrelació, aquestes seqüències ofereixen un comportament similar al que ofereix una seqüència de longitud màxima convencional. Com a resultat,

s'obté que el valor d'autocorrelació del senyal resultant, $C_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_k(t - iT_{per})$, expressat com a:

$$R_{C_k}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T C_k(t) C_k(t + \tau) dt \quad (3)$$

presenta un aspecte com el mostrat en la figura 6.

Figura 6. Autocorrelació i densitat espectral de potència de $C_k(t)$ 

És a dir, el màxim està centrat en $\tau = 0$, i s'obté el valor:

$$R_{C_k}(0) = 1 \quad (4)$$

mentre que en el rang $-(N-1)T_c \leq \tau \leq (N-1)T_c$, en què $N = 1.023$ és la longitud de la seqüència Gold, s'obté un valor d'autocorrelació igual a $-1/1.023$ excepte algunes fluctuacions. Noteu que l'autocorrelació presentaria un valor constant en aquesta zona (igual a $-1/1.023$) en el cas que es tractés d'una seqüència de longitud màxima. Aquestes fluctuacions, no obstant això, compleixen el següent:

$$|R_{C_k}(\tau)| \leq \frac{2^{(10+2)/2} + 1}{1.023} = \frac{65}{1.023} \approx \frac{1}{16} \quad \text{si } -(N-1)T_c \leq \tau \leq (N-1)T_c \quad (5)$$

És a dir, l'autocorrelació presenta un comportament molt similar al del cas de la seqüència de longitud màxima. Quant a la correlació encreuada existent amb els codis d'altres satèl·lits, es compleix el següent:

$$|R_{C_k C_l}(\tau)| = \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T C_k(t) C_l(t + \tau) dt \right| \leq \frac{65}{1.023} \approx \frac{1}{16} \quad \forall \tau \quad (6)$$

que constitueixen uns nivells molt millors que els obtinguts amb les seqüències de longitud màxima convencionals. També cal comentar que gran part dels valors obtinguts en fer la correlació encreuada són de l'ordre d' $1/1.023$. –

Per tant, aquestes característiques ofereixen les propietats següents:

- Donada la forma de l'autocorrelació, es pot determinar amb gran precisió quin és el retard del senyal a l'entrada del receptor. És a dir, el receptor d'un sistema GPS utilitza una rèplica del codi del satèl·lit per a fer operacions de correlació entre aquesta rèplica i el senyal entrant. Per a això, s'utilitzen diferents retards de codi a l'hora de generar la rèplica. Aquell retard que ofereixi un màxim a la sortida del correlador és el retard que es considera retard del senyal d'entrada. Per tant, aquest codi facilita la tasca d'estimació de la distància a partir de l'estimació del retard de propagació (o TOA) del senyal d'entrada.
- D'altra banda, donades les propietats de l'autocorrelació, el sistema té una certa robustesa davant senyals multicamí, ja que la correlació encreuada existent entre el senyal de visió directa i els rebots del senyal que arribin amb retards diferents del del retard presentarà nivells baixos, és a dir, el correlador del receptor podrà cancel·lar els senyals multicamí. No obstant això, tal com es presenta més endavant en el mòdul, alguns efectes multicamí no poden ser totalment cancel·lats i presenten alguns problemes en el cas que es requereixin grans precisions.
- Tenint en compte l'aspecte de la correlació encreuada, els senyals provinents d'altres satèl·lits poden ser també cancel·lats pel correlador del receptor. Per tant, es poden rebre senyals de diferents satèl·lits de manera simultània i en la mateixa freqüència. Per a seleccionar-ne cadascun, el correlador del receptor s'ha de configurar perquè generi la rèplica del codi del satèl·lit esperat.

Quant a l'espectre d'aquestes seqüències, $S_{C_k}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{C_k}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$, s'observa l'aspecte representat en la figura 6. Tal com s'observa, gran part de la potència es concentra en la banda existent entre $-1/T_c$ i $1/T_c$. Per aquest motiu, quan s'aplica aquest codi al missatge de navegació i es modula després la portadora $\cos(2\pi f_{L1}t)$, es té com resultat un senyal amb un espectre més eixamplat que el del senyal de navegació original a 50 Hz, ja que es concentra el 90% de la potència del senyal en aproximadament 2 MHz ($= 2/T_c$) d'amplada de banda.

3.1.2. Codi P

Aquest codi, d'ús exclusivament militar, es construeix de manera similar als codis Gold usats en C/A, però, en aquest cas, s'utilitzen quatre registres de desplaçament de 12 bits. Concretament, el codi P té una longitud de $6,1871 \times 10^{12}$ xips i ocupa un període temporal de 7 dies, una velocitat de xip igual a 10,23 Mxips/s i, per tant, un període de xip T_c d'aproximadament 0,1 μ s. Atesa l'alta velocitat de xip i la gran longitud de la seqüència, el codi P presenta unes propietats d'autocorrelació i correlació encreuada excel·lents. Con-

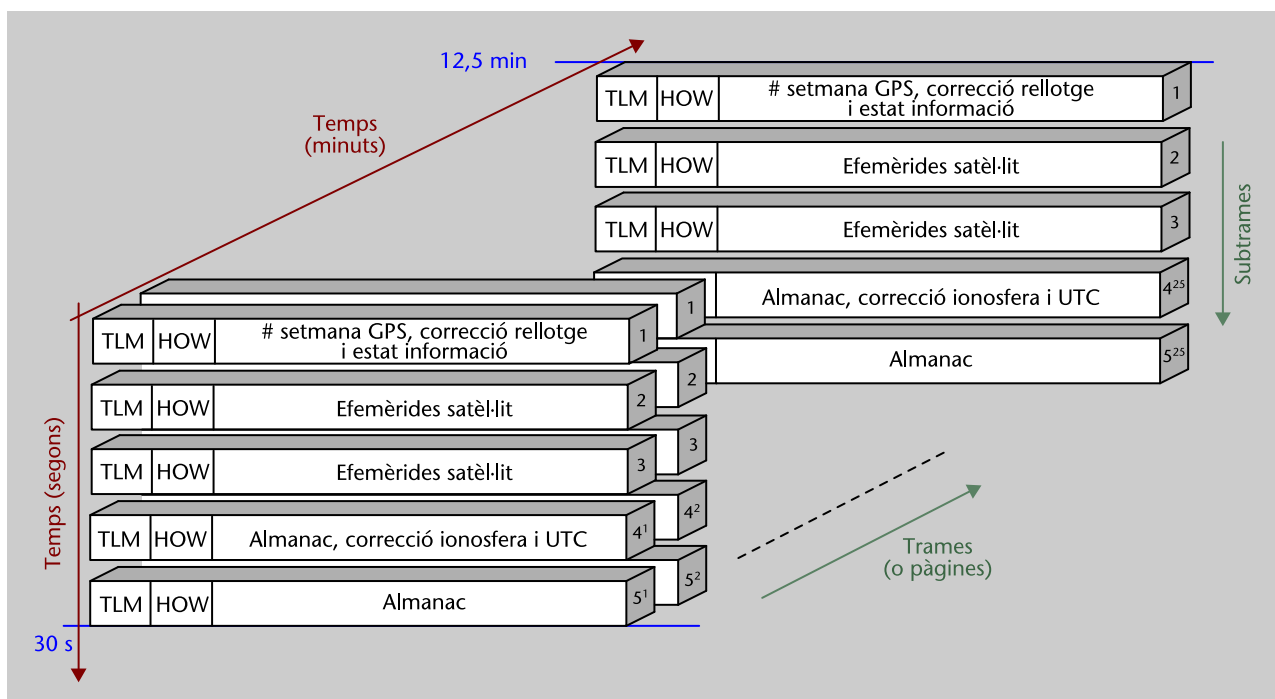
cretament, s'obtenen nivells d'autocorrelació de l'ordre d' $1/6,1871 \cdot 10^{12}$ a la zona $-(N-1)T_c \leq \tau \leq (N-1)T_c$, i es presenten els mateixos nivells en el cas de correlació encreuada amb els codis d'altres satèl·lits. Quant a l'espectre, la major part de la potència del senyal modulat amb aquest codi es concentra en una amplada de banda d'aproximadament 20 MHz. Per tant, l'eixamplament de l'espectre és encara més gran, la qual cosa ofereix al sistema més robustesa davant interferències.

El codi P és normalment xifrat, i activa un mode en el satèl·lit conegut com a mode AS (*antispoofing*), la qual cosa impossibilita que els usuaris civils el puguin utilitzar. Quan s'activa el mode AS, el codi P es transforma en el que es coneix com a codi Y. No obstant això, la velocitat de xip és la mateixa en tots dos casos i, per aquest motiu, la versió xifrada del codi se sol denominar codi P(Y). Finalment, cal comentar que el càlcul de posició no es pot obtenir amb el codi P(Y) per si sol. Concretament, es requereix una adquisició prèvia del codi C/A.

3.2. Missatge de navegació

El missatge de navegació $D_k(t)$ conté la informació necessària perquè l'usuari pugui calcular la posició del satèl·lit k -èsim i el temps de transmissió del senyal rebut. A part, també proporciona informació útil, com, per exemple, l'estat de les dades i la informació d'altres satèl·lits per a facilitar l'adquisició dels senyals d'aquests. Tal com s'ha comentat anteriorment, aquesta informació es transmet a 50 bps i s'organitza en trames (o pàgines) de la manera representada en la figura 7.

Figura 7. Estructura del missatge de navegació GPS



Cada trama, de 30 s de durada, es divideix al seu torn en 5 subtrames de 6 s i 300 bits. Organitzant-se els 300 bits en 10 paraules de 30 bits, tenim que les dues primeres paraules de cada subtrama són les paraules TLM (*telemetry*) i HOW (*handover word*), que es detallen a continuació:

- **TLM:** formada per 8 bits de preàmbul (seqüència 10001011) usats perquè el receptor pugui reconèixer l'inici d'una subtrama, seguits de 14 bits reservats per als usuaris autoritzats, 2 bits que es deixen buits i 6 bits de paritat.
- **HOW:** anomenat paraula *handover* perquè permet al receptor fer el pas d'un codi C/A a un codi P(Y). Està format per una versió truncada de 17 bits del TOW (*time of week*), que indica en quin instant de la setmana s'ha iniciat la transmissió de la subtrama (amb una resolució de 6 s pel truncament), seguit de 2 bits de *flag* (el primer per a indicar si el mode AS està actiu i el segon per a indicar que la precisió del senyal pot ser molt dolenta), 3 bits per a identificar la subtrama en si, 6 bits de paritat i 2 bits buits.

Quant a la resta de les paraules que conté cada subtrama, s'utilitzen per a transportar la informació següent:

- **Subtrama 1:** la informació conté el número de setmana GPS en la qual s'està transmetent el senyal, a més de termes de correcció del rellotge del satèl·lit i informació sobre l'estat de la informació. La informació d'aquesta subtrama s'actualitza en cada nova trama (o pàgina).
- **Subtrames 2 i 3:** contenen les efemèrides del satèl·lit, compostes pels paràmetres orbitals i les anomalies, per a poder determinar la posició. La informació d'aquestes subtrames també s'actualitza en cada trama.
- **Subtrames 4 i 5:** a diferència de les subtrames 1 a 3, la informació d'aquestes subtrames es distribueix en 25 trames (o pàgines). Per aquest motiu, en la figura 7, s'observa que aquestes subtrames tenen 25 versions (indicades amb el superíndex afegit). En concret, aquestes subtrames contenen els almanacs (efemèrides amb menys resolució) de tots els satèl·lits de la constel·lació per a permetre que el receptor pugui adquirir el senyal d'altres satèl·lits amb més facilitat. Contenen a més paràmetres de correcció ionosfèrics i paràmetres per a relacionar el rellotge del sistema GPS amb el sistema de temps UTC⁹.

⁹UTC és la sigla de *universal coordinated time*.

Tenint en compte l'estructura de les diferents subtrames, s'observa que per a enviar un missatge de navegació complet es requereixen 12,5 min (transmissió de 25 trames de 30 s).

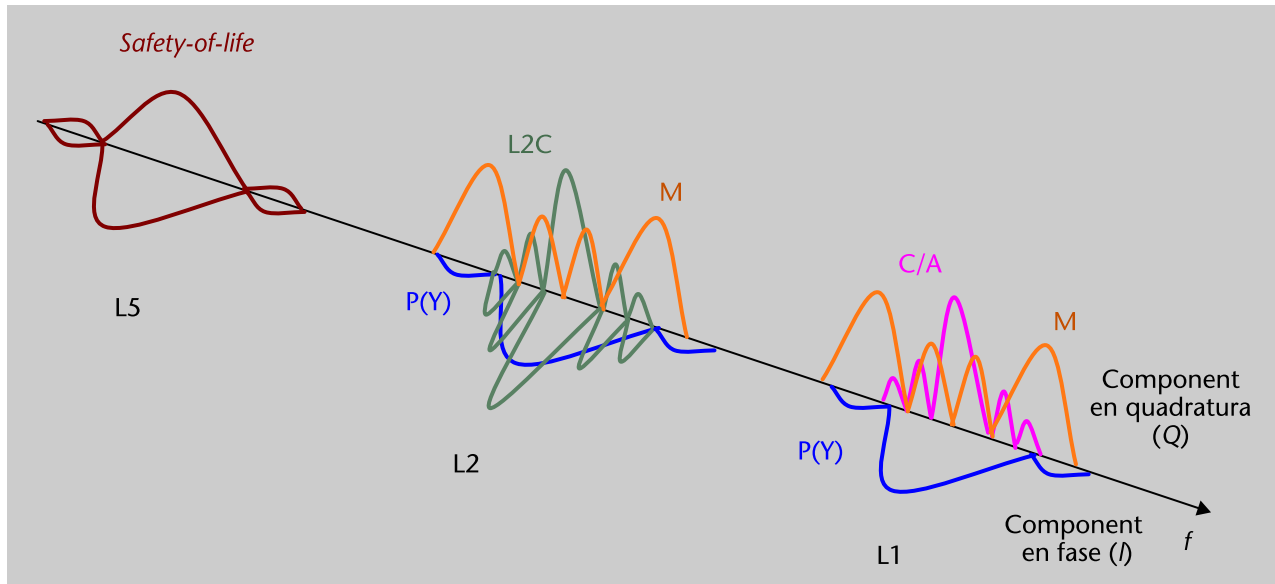
3.3. Senyals modernitzats

A part dels senyals C/A i P, hi ha també un conjunt de senyals coneguts com a senyals modernitzats: L2C, M i *safety-of-life* (podeu veure la figura 8). Concretament aquests senyals es van començar a utilitzar a partir dels llançaments dels satèl·lits dels blocs IIR-M (L2C i M) i IIF (*safety-of-life*).

Vegeu també

Els senyals C/A i P s'estudien en el subapartat 3.1 d'aquest mòdul.

Figura 8. Representació espectral del conjunt de senyals GPS



A continuació es presenten les principals característiques d'aquests senyals:

- **L2C.** Aquest nou senyal d'ús civil es transmet en la portadora L2. El seu objectiu és proporcionar més bones precisions que les ofertes pel senyal C/A. Està format per dues seqüències PRN, i se'n transmet una en el component en fase i l'altre en el component en quadratura, amb les propietats següents:
 - *CM (civilian moderate length code)*: codi amb longitud de 10.230 bits i període de repetició igual a 20 ms. Conjuntament, es transmet un nou missatge de navegació a 50 bps utilitzant sistema de correcció d'errors FEC (*forward error correction*) amb taxa de codi d'1/2. Per tant, la taxa de bits d'informació útil (informació de navegació exclusivament) és de 25 bps.
 - *CL (civilian long length code)*: codi amb longitud igual a 767.250 bits i amb 1.500 ms de període de repetició. No utilitza missatge de navegació.

- M: nou senyal militar transmès en les portadores L1 i L2 orientat a oferir millor robustesa *antijamming* i més nivell de seguretat. Les característiques principals són les següents:
 - El senyal s'ha dissenyat de manera que el seu espectre no interfereixi amb el dels senyals ja existents en aquestes bandes (podeu veure la figura 8). Això s'aconsegueix utilitzant un tipus de modulació coneguda com a BOC (*binary offset carrier*). En el cas del senyal M, concretament, s'utilitza el tipus de modulació BOC (10,5).
 - A diferència del codi P, el codi M es pot utilitzar per a calcular la posició de l'usuari sense necessitat d'adquirir el codi C/A prèviament.
 - En el futur, en els satèl·lits del bloc III, cada satèl·lit transmetrà dos codis M en dues antenes diferents. Un es transmetrà en una antena dissenyada per a oferir cobertura global i un altre en una antena més directiva (amb un guany 20 dB més gran) per a oferir millor cobertura en una zona determinada. Actualment, solament s'utilitza l'antena amb cobertura global.
- **Safety-of-life**: senyal transmès en la banda L5 orientat a oferir serveis de cerca i salvament. Per a això s'utilitzen dos codis, un en fase i un altre en quadratura, de 10,23 Mxip/s i longitud igual a 10.230 bits transmesos en 1 ms. Per tant, s'utilitza una amplada de banda 10 vegades superior a la del senyal C/A, la qual cosa ofereix més robustesa del senyal, i un codi 10 vegades més llarg, que dona millors prestacions quant a autocorrelació i correlació encreuada. D'altra banda, el satèl·lit empra el doble de potència de transmissió que la usada en les bandes L1 i L2 per a transmetre aquest senyal.

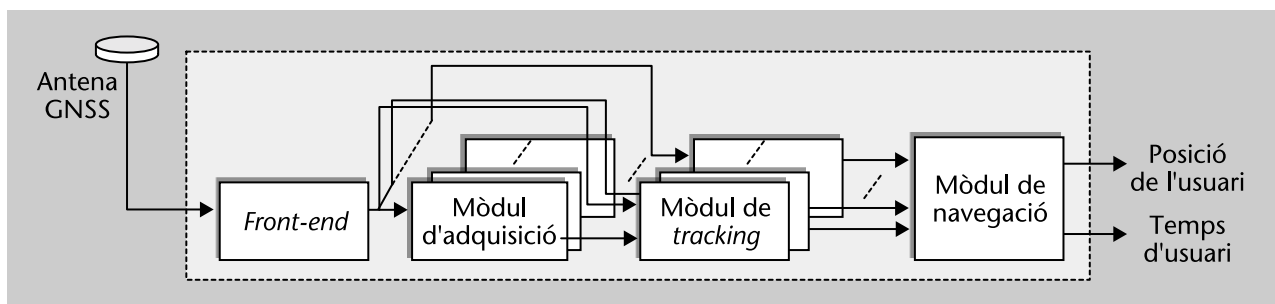
Vegeu també

La modulació BOC es descriu en el mòdul "Evolució de la navegació per satèl·lit: Galileo i sistemes híbrids" d'aquesta assignatura.

4. Arquitectura del receptor GPS

L'objectiu de tot receptor de GPS (o de GNSS, en general) és poder determinar la posició de l'usuari a partir d'analitzar una sèrie de senyals que són transmesos pels satèl·lits que formen el segment d'espai. El procediment que ha de seguir el receptor fins a arribar a determinar la posició de l'usuari no és directe, sinó que implica fer tot un seguit de tasques que s'han de dur a terme de manera seqüencial. A grans trets, aquestes tasques són les que s'il·lustren mitjançant els blocs que apareixen en la figura 9. En realitat, l'arquitectura mostrada en aquesta figura correspon al cas general d'un receptor GNSS qualsevol (ja sigui de GPS, Galileo o Glonass), ja que les tasques que s'han de dur a terme, deixant a un costat els detalls corresponents, es pot considerar que són comunes a tots aquests sistemes.

Figura 9. Arquitectura general d'un receptor de GNSS, com per exemple GPS



Tal com es pot apreciar en la figura 9, el primer pas, com en tot receptor de radiofreqüència, és fer el procés de conversió a banda base del senyal passa-banda captat per l'antena. Aquest procés el du a terme el bloc indicat com a *front-end*, el qual habitualment consta d'un amplificador de baix soroll (que de manera simultània filtra passabanda i amplifica el senyal resultant), una o diverses etapes de conversió a freqüència intermèdia, un filtratge *anti-aliasing* ja en banda base i una conversió analògic/digital (ADC). A la sortida del *front-end*, doncs, el receptor disposa d'un flux constant de mostres discretes quantificades, típicament a dos bits per mostra.

Quantificació de 2 bits

L'adopció d'una quantificació de tan sols 2 bits és habitual en sistemes d'espectre eixamplat (com GPS), en què la densitat espectral de senyal útil resulta estar habitualment per sota de la densitat espectral de soroll. En aquestes circumstàncies, utilitzar més de 2 bits per mostra no aporta cap avantatge substancial, ja que el senyal rebut està dominat per soroll. Una excepció seria el cas de receptors GPS operant en escenaris en què és possible la presència de senyals interferents; en aquest cas sí que interessa augmentar el nombre de bits de quantificació per a evitar que l'ADC se saturi en presència d'un senyal interferent de banda estreta i alta potència.

En l'altre extrem del receptor, el mòdul de navegació és l'encarregat pròpiament de resoldre la posició de l'usuari. A mig camí entre el *front-end* i el mòdul de navegació és on apareixen els mòduls d'adquisició i de *tracking*, que són realment els encarregats de processar el senyal rebut i d'extreure'n la informació necessària perquè el mòdul de navegació sigui capaç, posteriorment, de calcular la posició de l'usuari. L'adquisició i el *tracking* són els dos elements clau de l'arquitectura d'un receptor de GNSS, pel que fa al processament de senyal.

Vegeu també

El mòdul d'adquisició s'estudia en el subapartat 4.1 d'aquest mòdul i el de *tracking* en el subapartat 4.2.

4.1. Etapa d'adquisició de codi

Una vegada que el senyal rebut ha estat correctament condicionat, la primera tasca pròpia d'un receptor de GPS és buscar els satèl·lits que actualment té visibles i que, en cas d'estar-ho, hauran deixat la seva empremta en el senyal captat per l'antena. Aquests satèl·lits en vista serveixen com a punts d'ancoratge sobre els quals el receptor es recolzarà per calcular la posició de l'usuari, una missió que serà duta a terme a partir de mesurar el temps que triga el senyal transmès pels satèl·lits a arribar al receptor.

L'obtenció d'aquest retard, o almenys d'una estimació temptativa, és l'objectiu de l'etapa d'adquisició de codi, la qual rep aquest nom perquè el temps de retard es mesura en relació amb un inici del codi PRN que emet cada satèl·lit en qüestió.

En el procés de buscar els satèl·lits visibles i estimar el retard en el senyal rebut de cadascun, hi ha diversos factors que fan que aquesta tasca sigui més complicada del previst *a priori*. El factor més important és la presència d'un desplaçament de freqüència Doppler en la freqüència portadora que es rebí de cada satèl·lit. Aquest desplaçament Doppler varia de satèl·lit a satèl·lit, ja que depèn de la velocitat aparent que percep el receptor per a cadascun (és a dir, la projecció del vector velocitat del satèl·lit sobre el vector de posició que uneix el receptor amb el satèl·lit). L'existència d'aquest error de freqüència, desconegut, juntament amb el retard que experimenta el senyal rebut, també desconegut, fa que el procés d'adquisició de codi impliqui una cerca bidimensional en temps i en freqüència. Aquesta cerca s'implementa correlant el senyal rebut amb una rèplica local del codi del satèl·lit que s'analitza, la qual es genera amb un cert retard i amb una freqüència, totes dues temptatives. El procés es repeteix provant per a tots els possibles valors de retard de codi i de freqüència Doppler, fins que en una de les proves, el valor a la sortida de la correlació sigui suficientment gran per a superar un llindar de decisió. En aquest cas, el resultat confirma la presència del satèl·lit que s'està analitzant i, a més, indica el valor aproximat de retard de codi i d'error Doppler que presenta respecte a la rèplica local que està generant el receptor.

La figura 10 mostra un exemple de la representació que s'obtindria en la cerca temps-freqüència comentada anteriorment, en el cas que el satèl·lit sota anàlisi estigués present. Com es pot veure, el resultat del procés d'adquisició és una matriu en les cel·les de la qual s'emmagatzemen els valors a la sortida de la correlació. En aquelles cel·les la hipòtesi de retard de codi i error de freqüència de les quals s'apropi més al valor exacte que presenta el senyal, s'observa un pic que pot ser detectable fàcilment fixant un llindar prèviament dissenyat per a garantir una certa probabilitat de falsa alarma constant (això és, segons el criteri de detecció de Neyman-Pearson).

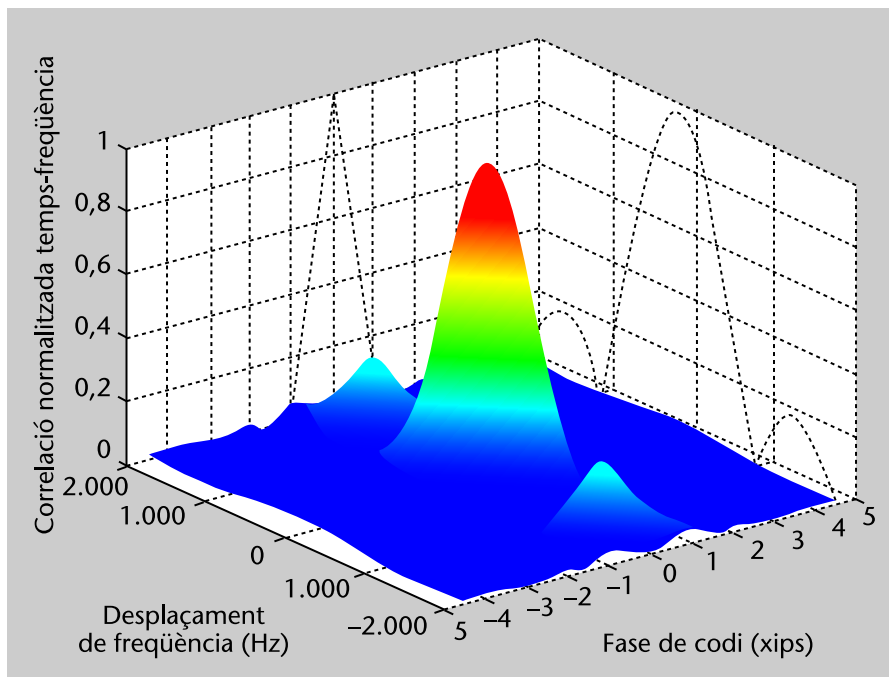
Vegeu també

El criteri de detecció de Neyman-Pearson s'estudia en el mòdul "Sistemes radar" d'aquesta assignatura.

Senyal detectable

Per a les cel·les la hipòtesi de retard de codi i error de freqüència de les quals s'apropi al valor exacte que presenta el senyal, s'observa un pic detectable fàcilment sempre que l'escenari d'operació del receptor sigui el previst en el disseny del sistema GPS, és a dir, principalment en entorns exteriors. En interiors o en escenaris amb dificultats de visió directa, el pic de correlació pot experimentar una gran atenuació que el faci pràcticament imperceptible. En aquest cas, és necessari aplicar tècniques d'alta sensibilitat com les que es presentaran en l'apartat 6.

Figura 10. Exemple de la resposta en temps-freqüència



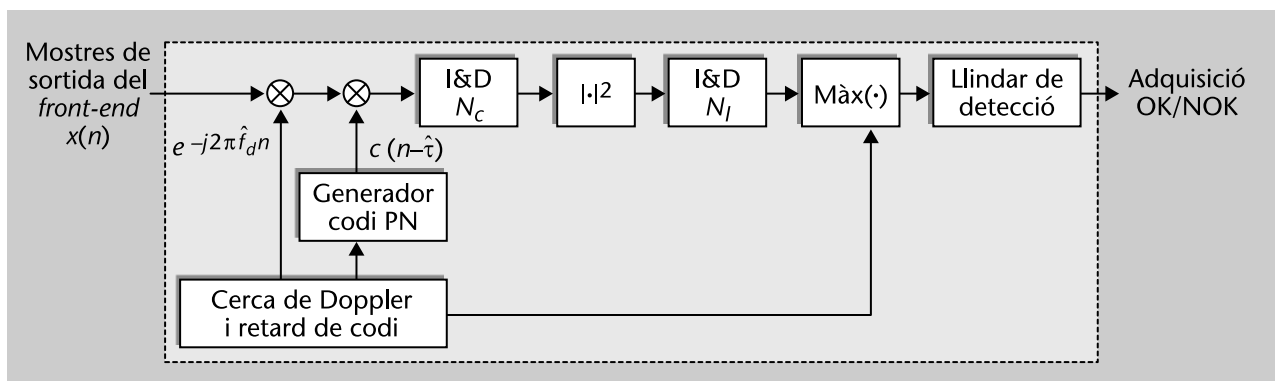
Pel que fa a l'arquitectura interna de l'etapa d'adquisició de codi, un exemple d'aquesta s'il·lustra en la figura 11. En aquesta figura es pot observar com les mostres discretes procedents del *front-end* són corregides en freqüència segons el valor temptatiu \hat{f}_d i posteriorment es du a terme la correlació amb el codi PRN del satèl·lit sota anàlisi. Aquesta correlació es pot entendre també com un procés de *despreading* o deseixamplament, ja que el que es fa és eliminar la modulació d'espectre eixamplat amb la qual el satèl·lit ha encapsulat el missatge d'informació que envia a la Terra. Aquesta correlació es mostra en la figura 11 com una multiplicació pel codi PRN seguida d'una integració coherent de N_{scode} mostres, que és precisament la longitud del codi PRN en mostres. La

integració es du a terme en el bloc indicat com a "I&D", nom que respon a les sigles en anglès d'*integrate and dump*, ja que es fa una integració, i una vegada finalitzada, és quan aboca el valor a la sortida i reinicia l'acumulació.

En definitiva, una de les operacions bàsiques en el procés per a detectar el senyal del satèl·lit és l'acumulació o integració de mostres, i el mínim nombre de mostres que es pot integrar de manera coherent (és a dir, sense utilitzar no-linealitats com el mòdul) és N_{scode} de mostres, que es correspon amb el temps d'un codi PRN, que per al cas de GPS-L1 és $T_{code}=1$ ms.

El diagrama de blocs de la figura 11, no obstant això, preveu la possibilitat que es puguin dur a terme integracions més llargues, acumulant de manera coherent N_c sortides de correlació. En aquest cas el temps total d'integració seria $N_c T_{code}$ de segons (o ms, segons les unitats de T_{code}). És possible estendre encara més el temps d'integració en cas que el senyal rebut arribi molt atenuat i sigui necessari augmentar la integració per a aconseguir reduir l'efecte del soroll i fer així visible el pic de la correlació. En aquest cas, la correlació s'estén de manera no coherent (utilitzant el mòdul al quadrat, habitualment) per a evitar que l'error Doppler residual es vagi acumulant i acabi plegant la fase. Si això succeís, la integració total, lluny d'anar augmentant progressivament, aniria disminuint, la qual cosa impossibilitaria una detecció fiable del senyal del satèl·lit. Els receptors que incorporen aquest tipus de correlació *estesa* mitjançant l'ús d'integracions no coherents es coneixen com a receptors GPS d'*alta sensibilitat* i el seu diagrama de blocs es mostra en la figura 11.

Figura 11. Arquitectura interna de l'etapa d'adquisició de codi d'un receptor GPS d'alta sensibilitat, el qual incorpora integracions no coherents per a augmentar el temps total de correlació



L'encarregat de fer la integració no coherent és el bloc d'I&D de N_I mostres que apareix després del bloc d'elevat al quadrat en la figura 11. Noteu que per al cas de receptors GPS tradicionals, en què s'assumeixen condicions de treball ideals (entorns exteriors, habitualment), no és necessari fer integracions no coherents i simplement el mateix diagrama de blocs de la figura 11 continua essent vàlid, amb l'excepció que es fixa $N_I=1$.

És important esmentar que el procés de correlació i acumulació (coherent o no coherent) es fa per a tots i cadascun dels valors temptatius de retard de codi i freqüència Doppler que formen part de la cerca bidimensional esmentada anteriorment.

Els resultats de les acumulacions solen ser desats en una matriu temps-freqüència i quan tots els valors ja han estat emmagatzemats, es procedeix a seleccionar el valor màxim de tots. A continuació, aquest valor acumulat màxim es compara amb un llindar per a determinar si el satèl·lit que s'analitza està realment present o no. Si aquest procés de detecció resulta negatiu, es considera que el satèl·lit no està present i es torna a iniciar tot el procés d'adquisició per a buscar un altre satèl·lit diferent. Si, per contra, el procés de detecció és positiu i el valor acumulat supera el llindar, es determina que el satèl·lit està present. La probabilitat que aquesta afirmació sigui falsa (és a dir, que el satèl·lit realment no estigui present encara que el valor acumulat superi el llindar) està determinada per la probabilitat de falsa alarma sota la qual ha estat fixat el llindar de detecció, tal com ja es va esmentar en els fonaments de teoria de detecció.

En qualsevol cas, una detecció de senyal positiu ens permet assumir que el satèl·lit està present i, per tant, dedicar més atenció a afinar amb precisió els paràmetres de sincronització del senyal rebut. Això és necessari perquè durant la fase d'adquisició, els valors de retard de codi τ i freqüència Doppler f_d que s'han avaluat són simplement valors temptatius, resultants de discretitzar l'eix de temps i l'eix de freqüència amb una certa granularitat.

Per exemple, la cerca en freqüència se sol fer en passos de 500 Hz per al cas d'utilitzar correlacions coherents d' 1 ms^{10} i la cerca en retard de codi en passos d'un xip, un temps que en distància equivaldria a uns 300 m. Noteu que aquesta granularitat és suficientment gran perquè l'espai de cerca es divideixi en un nombre raonable d'hipòtesis per testejar, i per tant, que el temps total de cerca no sigui massa elevat. No obstant això, aquesta discretització no aporta tota la precisió que un receptor de GPS necessita. Cal tenir en compte que l'objectiu últim d'un receptor GPS és determinar la posició de l'usuari amb la major precisió possible, partint de mesures de temps de retard que obté dels satèl·lits visibles. Aquestes mesures de temps de retard han de ser convertides posteriorment en distàncies, i per a això són multiplicades per $\beta \text{ m/s}$, la velocitat de la llum, el qual és un nombre certament gran. Per tant, qualsevol error o imprecisió en les mesures de temps de retard queda enormement amplificat quan és convertit a distància. És per això perquè els valors temptatius de retard de codi (i també de freqüència Doppler) obtinguts en el procés d'adquisició han de ser refinats i monitorats per poder seguir qualsevol petita variació que puguin experimentar al llarg del temps. Aquest procés de *seguiment* de precisió és el que es coneix com a *tracking* i serà objecte d'estudi en el subapartat següent.

Vegeu també

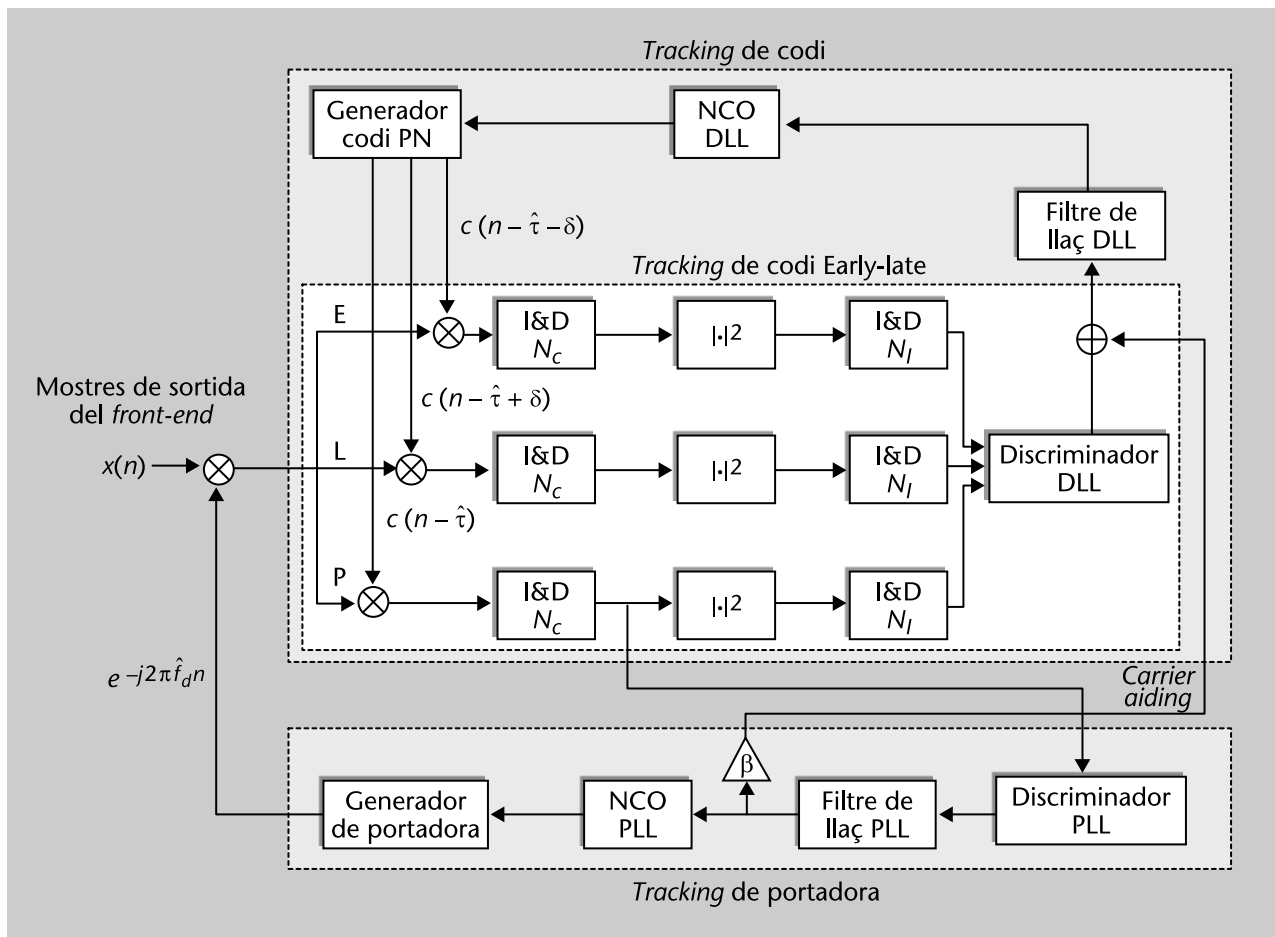
Els fonaments de la teoria de detecció s'exposen en el mòdul "Sistemes radar" d'aquesta assignatura.

⁽¹⁰⁾Vegeu la secció 7.4 de l'obra de J. B.-Y. Tsui (2004).

4.2. Etapa de tracking

Tal com s'acaba d'esmentar en el subapartat anterior, els valors temporals de retard de codi i freqüència Doppler obtinguts durant la fase d'adquisició han de ser refinats i seguits al llarg del temps per a monitorar qualsevol petita variació que puguin experimentar. Aquesta tasca és la missió de l'etapa de *tracking*, la qual consta principalment de dues arquitectures en paral·lel: una dedicada al seguiment del retard de codi, coneguda com a *delay lock loop* (DLL), i una altra dedicada al seguiment de la freqüència, coneguda com a *phase lock loop* (PLL). Totes dues arquitectures es mostren en la figura 12.

Figura 12. Arquitectura interna de l'etapa de tracking



Tant el DLL com el PLL són arquitectures en llaç tancat, les quals obtenen una estimació precisa del paràmetre d'interès a força de comparar el senyal d'entrada amb una rèplica local. El senyal d'error resultant s'utilitza per a corregir les estimacions dels paràmetres que s'han usat per a generar la rèplica, fins que s'aconsegueix una alineació amb l'entrada el més precisa possible (això és, fent que el senyal d'error resultant sigui el més proper a zero).

Per al cas del DLL, la rèplica local és simplement la sortida d'un generador de codi PRN que està controlat per un NCO¹¹, el qual no deixa de ser més que la versió discreta d'un tradicional oscil·lador per tensió o VCO¹².

⁽¹¹⁾NCO és la sigla de *numerically controlled oscillator*.

⁽¹²⁾VCO és la sigla de *voltage controlled oscillator*.

Per al cas del PLL, la rèplica local és la sortida d'un generador de portadora, el qual ofereix a la seva sortida el component en fase i el component en quadratura d'una exponencial complexa segons la fase indicada per un NCO. En tots dos casos, la rèplica local es correla amb el senyal d'entrada i el resultat s'introdueix a un discriminador, a la sortida del qual s'obté un senyal proporcional (en mitjana) a l'error del paràmetre que s'està seguint. Tal com es mostra en la figura 12, el *tracking* del codi necessita tres correladors: un conegut com a *prompt* i centrat en el retard d'interès, i dos correladors més situats simètricament abans i després del *prompt*, i coneguts, per tant, com a correladors *early* i *late*. Aquesta configuració forma part de la família de mètodes basats en la filosofia d'*early-late* (Kaplan; Hegarty, 1996, cap. 5). La sortida del discriminador és posteriorment filtrada amb l'objectiu de ser suavitzada, i per a això s'utilitza un filtre de llaç a la sortida del qual s'alimenta l'NCO, i es tanca així el llaç.

En la figura 12 es pot observar que hi ha una connexió entre el mòdul de *tracking* de portadora i el mòdul de *tracking* de codi. Aquesta connexió és el que es coneix com a *carrier aiding* i, mitjançant aquesta, el PLL ajuda el DLL proporcionant-li un senyal de referència. Aquest senyal de referència incorpora les variacions temporals que experimenta el senyal rebut com a conseqüència de la dinàmica de l'usuari i es tracta, a més, d'un senyal de gran precisió, ja que el PLL treballa amb un soroll de fase ordres de magnitud inferior al que pateix el DLL. Per això, des del punt de vista del DLL, és interessant poder aprofitar aquesta informació *a priori* que aporta el *carrier aiding* per a, així, reduir l'amplada de banda del llaç, aconseguir més rebuig al soroll i centrar-se a seguir les variacions de codi que sorgeixen a causa de la dinàmica de la ionosfera (Kaplan; Hegarty, 1996, secció 5.2.4).

Abans de poder utilitzar el senyal de *carrier aiding*, és important aplicar-li un factor d'escala per a tenir en compte el diferent efecte que té la freqüència Doppler sobre la portadora i sobre el codi. És a dir, el factor β que apareix en la figura 12 està determinat per $\beta=R_c/F_L$, en què R_c és la freqüència de xip i F_L és la freqüència de portadora. Com es pot deduir, la relació entre un terme i l'altre és de diversos ordres de magnitud, i per això és important aplicar correctament aquest factor d'escala abans d'introduir la informació de portadora en el DLL.

Després d'aquesta breu introducció als elements que formen l'etapa de *tracking*, s'està ja en posició d'endinsar-se en els fonaments i principis d'operació de cadascun, la qual cosa us aportarà una visió més detallada sobre el funcionament global d'un receptor GNSS. En primer lloc, començarem per descriure els diferents tipus de discriminadors que es poden utilitzar tant en el DLL (subapartat 4.2.1) com en el PLL (subapartat 4.2.2). A continuació, en el subapartat 4.2.3, es presentarà l'estructura dels filtres de llaç i la motivació d'aquest ti-

pus d'elements dins d'una arquitectura de *tracking*. Finalment, en el subapartat 4.2.4, es farà un breu repàs de les propietats d'estabilitat dels sistemes en llaç tancat i es proporcionaran unes regles senzilles per a la caracterització d'aquest tipus de sistemes.

4.2.1. Discriminadors de DLL

El discriminador és una peça clau de tot esquema de sincronització en llaç tancat, ja que és l'encarregat de generar el senyal d'error que serveix com a referència per a aplicar les correccions necessàries i alinear així la rèplica local amb el senyal d'entrada.

En el cas del DLL, el discriminador s'encarrega de proporcionar a la seva sortida una valor proporcional a l'error de retard de codi τ que presenta el senyal d'entrada respecte del codi PN local. Per al cas del codi C/A de GPS-L1, i suposant, per simplificar, que la portadora està perfectament adquirida, la sortida del correlador *prompt* es pot expressar segons:

$$y_P(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_c}, & |\tau| < T_c \\ 0, & |\tau| \geq T_c \end{cases} \quad (7)$$

amb T_c el temps de xip. Per al cas dels altres dos correladors que es mostren en la figura 12, els correladors *early* i *late*, les seves sortides estan determinades respectivament per

$$y_E(\tau) \doteq y_P(\tau + \frac{\Delta}{2}), \quad (8)$$

$$y_L(\tau) \doteq y_P(\tau - \frac{\Delta}{2}) \quad (9)$$

en què la separació Δ entre *early-late* sol ser habitualment igual a T_c . A partir de les sortides d'aquests tres correladors es defineixen diferents tipus de discriminadors, però principalment es poden dividir en dues categories: discriminadors coherents i discriminadors no coherents.

El **discriminador coherent** més habitual és el conegut com a *early-minus-late* (E-L), el qual, com el seu nom indica, consisteix a prendre com a senyal d'error la resta entre el correlador *early* i el correlador *late*. Si representem la sortida del discriminador de codi com $\Delta\tau(\tau)$, per al cas E-L coherent tenim:

$$\Delta\tau_{E-L,c}(\tau) = \frac{1}{2} [y_E(\tau) - y_L(\tau)]. \quad (10)$$

Els **discriminadors no coherents** són utilitzats quan la hipòtesi que s'ha suposat anteriorment, sobre que la portadora està perfectament adquirida, no és certa. En aquest cas, la sortida del correlador es veu afectada per diversos

efectes: una atenuació α deguda a la integració de la correlació en presència d'errors residuals de freqüència, i una rotació complexa θ_ε resultat de la integració de mostres complexes. Tots dos efectes s'indiquen a continuació en un model de senyal més realista que l'utilitzat en l'expressió 7 per a la sortida del correlador *prompt*:

$$y_p(\tau) = \begin{cases} \alpha \left(1 - \frac{|\tau|}{T_c}\right) e^{j\theta_\varepsilon}, & |\tau| < T_c \\ 0, & |\tau| \geq T_c. \end{cases} \quad (11)$$

L'atenuació que experimenta el senyal a la sortida del correlador és ja irreparable. Per això l'impacte ha de ser avaluat prèviament, ajustant de manera adequada el temps d'integració del correlador, a fi d'evitar que fins i tot el senyal a la sortida es pugui arribar a cancel·lar per a alguns valors d'error residual de freqüència. Pel que fa al terme de fase, es pot neutralitzar treballant amb l'envolupant del senyal en comptes de l'amplitud complexa. Aquest és el cas, per exemple, del discriminador *no coherent early-minus-late*, la sortida del qual proporciona el senyal d'error:

$$\Delta\tau_{E-L,nc}(\tau) = \frac{1}{2} [|y_E(\tau)|^2 - |y_L(\tau)|^2]. \quad (12)$$

Una variant d'aquest discriminador coneguda com a *early-minus-late d'envolupant normalitzada* inclou un terme de normalització per a reduir la sensibilitat del discriminador a canvis en amplitud del senyal d'entrada,

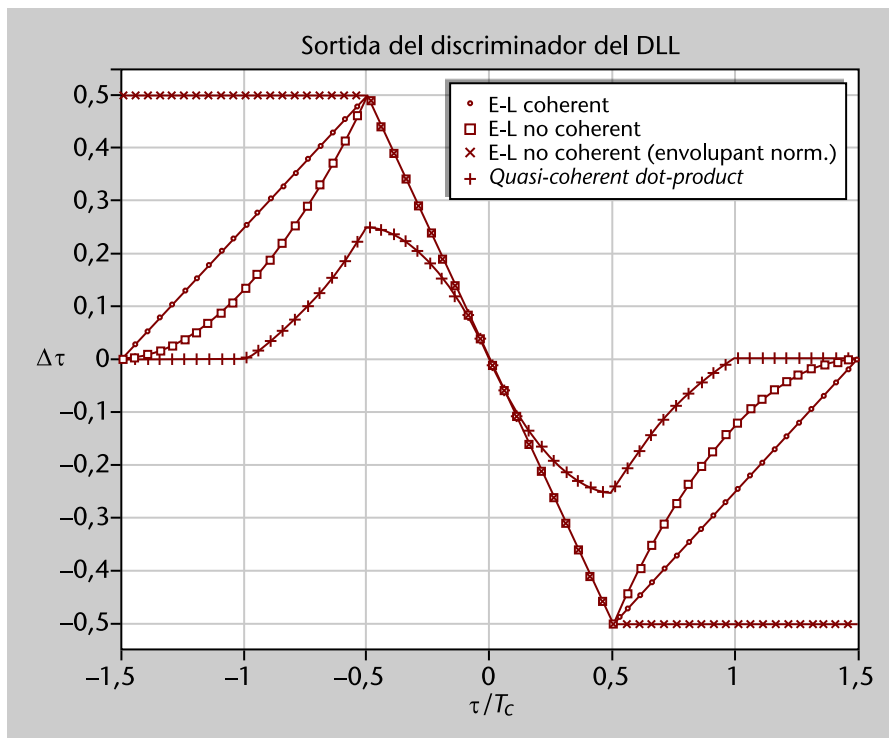
$$\Delta\tau_{E-L,env}(\tau) = \frac{1}{2} \frac{|y_E(\tau)|^2 - |y_L(\tau)|^2}{|y_E(\tau)|^2 + |y_L(\tau)|^2}. \quad (13)$$

Finalment, una altra de les opcions utilitzades és el conegut com a discriminador *quasicoherent*, denominat així a causa que evita utilitzar la no-linealitat d'elevant al quadrat la sortida del correlador. En lloc d'això, utilitza productes encreuats entre els tres correladors,

$$\Delta\tau_{E-L,qcoh}(\tau) = \frac{1}{2} [\text{Re}[y_E(\tau) - y_L(\tau)] \text{Re}[y_p(\tau)] + \text{Im}[y_E(\tau) - y_L(\tau)] \text{Im}[y_p(\tau)]]. \quad (14)$$

La resposta dels quatre discriminadors de codi que s'acaben de presentar es mostren en la figura 13.

Figura 13. Sortida de diferents discriminadors de DLL en funció de l'error de retard de codi τ entre el senyal d'entrada i la rèplica local. Representació que és coneguda com a *corba S*.



Segons s'observa en la figura 13, la principal característica dels discriminadors que s'han presentat és que proporcionen un comportament lineal per a valors petits de l'error de retard de codi τ (típicament, per a valors de $\tau/T_c \in [-0,5, 0,5]$). Encara que discriminadors com el de tipus E-L d'envolupant normalitzada posseeixen un marge de treball més petit, comprès amb prou feines entre $\tau/T_c \in [-0,25, 0,25]$.

Noteu que com més gran sigui el marge de visibilitat, més robust és el discriminador, pel que fa a seguir possibles canvis de τ . Si el marge és petit, un canvi significatiu en τ pot fer que el valor de sortida quedi fora de la zona de treball lineal i que el discriminador entri en una zona de fals equilibri, on la sortida del discriminador pot arribar a ser zero encara que l'error d'entrada no ho sigui. Aquest és el cas de la regió $|\tau/T_c| > 0,5$ o $|\tau/T_c| > 0,25$ per al cas del discriminador quasicohherent. Davant aquesta possible ambigüïtat, es fan necessaris mecanismes que s'encarreguin de confirmar si la sortida del discriminador realment val zero perquè l'error que es persegueix s'ha arribat a compensar per complet, o si per contra, s'ha entrat en una zona de fals equilibri. Aquests mecanismes es coneixen com a *detectors de lock*.

Lectura recomanada

Sobre els detectors de *lock* podeu veure la secció 5.11 de l'obra de Kaplan i Hegarty (1996).

De totes maneres, és important remarcar que reduir la zona lineal del discriminador fent que Δ sigui petit té com a resultat que el discriminador es torni més sensible a variacions en el retard de codi τ a l'entrada. Aquest augment de la sensibilitat fa que el discriminador es torni més precís i que, per tant, redueixi la variància en el senyal de correcció que ofereix a la sortida.

Encara que la reducció de Δ porta amb si també una reducció del marge de visibilitat del discriminador, això habitualment no és massa problema, ja que les variacions de l'error de retard de codi τ degudes a la dinàmica de l'usuari (és a dir, aquelles variacions que realment poden ocasionar que el discriminador se surti fora de la seva zona lineal) són compensades per mitjà del senyal de *carrier aiding* que assisteix el mòdul de *tracking* de codi. Aquesta pràctica és habitual en la majoria de receptors actuals i permet operar el discriminador de codi amb una separació més petita, la qual no solament aporta menys variància a la sortida del discriminador sinó que també el protegeix enfront del *multipath*.

Per al cas del discriminador *early-late no coherent*, que és el més utilitzat, la variància que ofereix a la sortida es pot expressar segons Gernot (2009),

$$\sigma_{\tau,E-L,nc}^2 \approx \frac{1}{\frac{C}{N_0} T} \left(\Delta + \frac{\Delta}{1-\Delta} \frac{1}{2\frac{C}{N_0} T} \right) \quad (15)$$

en què T és el temps d'integració del correlador. A partir de l'expressió 15 es pot apreciar com una disminució en Δ té com a conseqüència directa una disminució en la variància del discriminador. No obstant això, la millora que aporta reduir progressivament la separació Δ té un límit, el qual està determinat per l'amplada de banda del *front-end*. En aquest cas, la reducció de la separació Δ , especialment per a valors $\Delta < \frac{1}{2}$, ha d'anar acompanyada d'un augment de l'amplada de banda del *front-end*. En cas contrari, arribaria un moment en què els correladors *early-late* acabarien treballant en punts que han quedat suavitzats a causa del truncament que fa el *front-end* sobre l'amplada de banda del senyal rebut. En aquests punts s'ha perdut la precisió que posseeix la funció d'autocorrelació ideal (la qual presenta un pic abrupte), i per tant, ja no és possible millorar la precisió del discriminador per molt que s'apropin els correladors *early-late*.

Lectures recomanades

Pel que fa a la resta de discriminadors i les seves prestacions, trobareu una anàlisi detallada, per exemple, en la secció 5.6 de l'obra de Kaplan i Hegarty (1996), en la secció IV.2 de l'obra de Simon i altres (2002), o en els capítols 7 i 8 en les obres de Parkinson i Spilker (1996) o de Betz i Kolodziejcki (2009), i també en altres referències de la bibliografia en sistemes d'espectre eixampliat.

Front-ends i amplades de banda

Recordeu que, per exemple, l'amplada de banda del senyal GPS emesa pels satèl·lits és de prop de 20 MHz, mentre que els receptors *mass-market* solen tenir *front-ends* amb amplades de banda tan sols de prop de 2 MHz.

4.2.2. Discriminadors de PLL

El seguiment de la portadora es fa, segons mostra la figura 12, prenent la sortida del correlador *prompt*. El primer pas és introduir aquest senyal al discriminador del PLL per a obtenir un senyal d'error que proporcioni informació sobre la correcció que és necessària aplicar sobre la fase del generador de portadora local. Els dos discriminadors de fase més habituals són el basat en l'operació d'arctangent i el basat en el component en quadratura del correlador *prompt*. La sortida del primer es pot expressar segons,

$$\Delta\theta_{\text{atan}}(\theta_\epsilon) = \text{atan2}\left(\frac{\text{Im}[y_p(\hat{t})]}{\text{Re}[y_p(\hat{t})]}\right) \quad (16)$$

en què atan2 representa l'operació d'arctangent sobre els quatre quadrants i \hat{t} representa el valor correcte de retard de codi, per la qual cosa se suposa que el bloc de DLL ha assolit l'equilibri. En la pràctica, tots dos blocs (el DLL i PLL) solen operar en paral·lel, però, per simplificar el problema, suposarem primer que el DLL ja ha convergit mentre il·lustrem el funcionament del PLL. Pel que fa al discriminador del PLL basat en el component en quadratura, la sortida es pot expressar segons:

$$\Delta\theta_Q(\theta_\epsilon) = \frac{\text{Im}[y_p(\hat{t})]}{E_T[y_p(\tau)]} \quad (17)$$

en què $E_T[y_p(\tau)]$ representa la mitjana temporal durant un temps d'observació T , de l'envolupant del correlador *prompt*, i serveix de normalització per a fer al discriminador insensible enfront de variacions en l'amplitud del senyal rebut.

Encara que fins ara s'ha fet esment dels discriminadors de PLL, aquesta nomenclatura, en realitat, correspon només a un dels tres tipus de discriminadors que hi ha. Els altres dos corresponen al **discriminador de Costas** i al **discriminador de freqüència** o FLL. El primer és molt utilitzat en la pràctica perquè posseeix la propietat de ser robust als canvis de fase que presenta el senyal a causa de la modulació dels bits del missatge de navegació. Aquests salts de fase són inevitables en la majoria de casos, tret que es tingui accés al missatge de navegació (Kaplan; Hegarty, 1996, pàg. 166), la qual cosa no sol ser habitual en la pràctica. Hi ha diversos discriminadors de fase de tipus Costas, i els més habituals són els següents:

$$\Delta\theta_{\text{Costas, I} \times \text{Q}}(\theta_\epsilon) = \text{Re}[y_p(\hat{t})] \text{Im}[y_p(\hat{t})] \propto \sin 2\theta_\epsilon \quad (18)$$

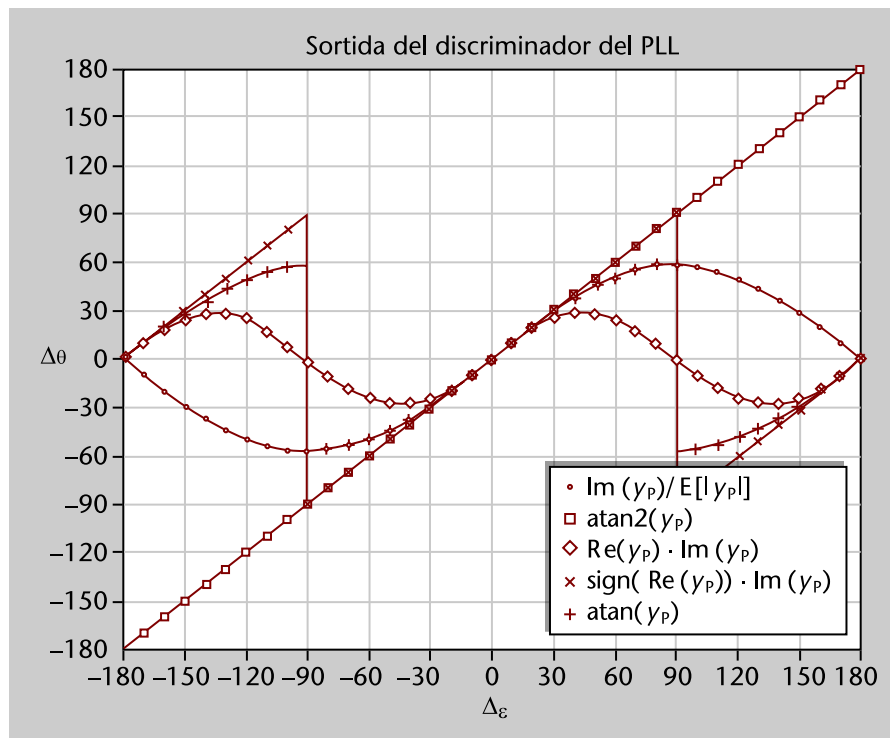
$$\Delta\theta_{\text{Costas, sign(I)} \times \text{Q}}(\theta_\epsilon) = \text{sign}(\text{Re}[y_p(\hat{t})]) \text{Im}[y_p(\hat{t})] \propto \sin \theta_\epsilon \quad (19)$$

$$\Delta\theta_{\text{Costas,atan}}(\theta_e) = \text{atan}\left(\frac{\text{Im}[y_p(\hat{t})]}{\text{Re}[y_p(\hat{t})]}\right) \propto \theta_e. \quad (20)$$

A *priori*, els dos primers discriminadors sembla que presenten una relació no lineal entre la sortida i l'error de fase θ_e . No obstant això, i suposant règim estacionari en què l'error de fase és ja petit, es pot utilitzar la relació $\sin(x) \stackrel{x \ll 1}{\approx} x$, deixant palesa la relació lineal entre la sortida d'aquests discriminadors i el valor d'interès, θ_e , almenys per a valors petits d'aquest.

La resposta dels discriminadors esmentats aquí es pot observar en la figura 14 per al marge de valors d'error de fase comprès entre $[-180, 180)$ graus. Com es pot apreciar, el discriminador basat en la funció atan2 és l'únic que proporciona un comportament lineal per a tots els valors de fase d'entrada. El segon comportament lineal més gran el proporciona el discriminador basat en la funció atan , el qual es limita al marge entre $[-90, 90)$, ja que aquesta funció queda definida únicament en els dos quadrants del semiplà positiu. Cal recordar, no obstant això, que malgrat oferir un bon comportament lineal, aquestes dues funcions són les que impliquen més nivell de complexitat. És per això que la resta de discriminadors presentats, els basats en operacions amb la part real i la part imaginària del correlador *prompt*, ofereixen una solució de baixa complexitat sota un compromís de reducció en el marge lineal a la sortida.

Figura 14. Sortida de diferents discriminadors de PLL en funció de l'error de fase entre el senyal d'entrada i la rèplica local



Quant a les prestacions del discriminador de PLL, la variància en llaç obert que ofereix quan a l'entrada hi ha únicament soroll, es pot expressar per al cas d'un discriminador basat en atan segons Kaplan i Hegarty (1996, cap. 5).

$$\sigma_{\theta, \text{atan}}^2 = \frac{1}{\frac{C}{N_0}} \left(1 + \frac{1}{2T \frac{C}{N_0}} \right). \quad (21)$$

Finalment, el discriminador FLL ofereix a la sortida un senyal proporcional a l'error de freqüència entre el senyal d'entrada i la rèplica local. Noteu que el discriminador de FLL monitora la freqüència, però no la fase, i encara que el valor de fase es pot obtenir artificialment integrant les correccions de freqüència, hi ha sempre una ambigüïtat que serà necessari compensar en etapes posteriors abans de procedir a la desmodulació del missatge de navegació.

4.2.3. Filtres de llaç

En els subapartats anteriors s'ha comentat que la sortida del discriminador ofereix un senyal de referència que resulta proporcional a l'error comès entre el senyal rebut i la rèplica local que està essent generada en el receptor. Aquest senyal de referència és de gran importància, ja que permet al sistema implementar les correccions necessàries per a generar la rèplica local amb la major semblança possible (en termes de retard de codi i fase de portadora) al senyal que està essent rebut i, així, aconseguir que tots dos senyals estiguin sincronitzats.

En la pràctica, no obstant això, cal tenir en compte que el senyal rebut estarà afectat per soroll tèrmic i, per tant, també ho estarà la sortida del discriminador. És per això que en la pràctica no és recomanable connectar directament la sortida del discriminador a l'NCO, ja que, en aquest cas, la generació de senyal absorbiria tota la inestabilitat i variabilitat del soroll d'entrada, i emmascararia la correcció que realment cal aplicar en cada cas. Per a evitar aquest problema, la majoria de sistemes de *tracking* o sincronització en llaç tancat implementen un filtratge de la sortida del discriminador amb l'objectiu de reduir la variabilitat del soroll i proporcionar un senyal suau amb què es pugui atacar l'NCO. Aquest bloc de filtratge és precisament el que es coneix com a *filtre de llaç* i apareix en la figura 12, tant en el mòdul de *tracking* de codi com en el de *tracking* de portadora.

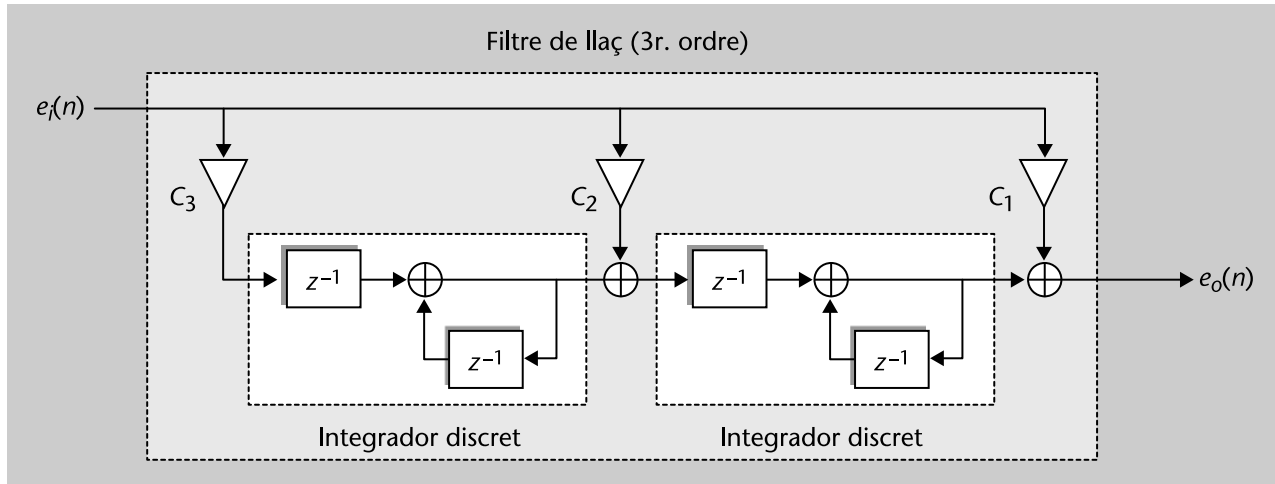
En el fons, un filtre de llaç no és més que un conjunt de factors d'escala i integradors que s'encarreguen de suavitzar el senyal d'entrada. L'estructura d'aquest filtre es mostra en la figura 15 per al cas d'ordre 3, a partir de la qual es pot obtenir l'estructura per al cas d'ordre 2 (el més habitual) i ordre 1, simplement fixant les constants $C_3=0$ i $\{C_3, C_2\}=0$, respectivament. A partir de la figura 15, es pot observar com el cas d'un filtre de llaç d'ordre 1 equival a aplicar únicament un factor d'escala al senyal d'entrada, sense dur-se a terme pròpiament un filtratge d'aquesta. En cas que la sortida del discriminador fos idealment zero (és a dir, en règim estacionari, una vegada ja s'ha sincronitzat

Lectures recomanades

Encara que l'adopció de discriminadors FLL no és tan habitual com el cas del PLL, si esteu interessats trobareu informació detallada en la secció 5.6 de l'obra de Kaplan i Hegarty (1996) i en l'obra de Juang i Chen (2009).

el senyal rebut amb la rèplica local) la sortida del filtre de laç també seria zero i l'NCO es mantindria fix, i generaria un senyal constant. Per tant, i en règim estacionari, un esquema de *tracking* que incorpora un filtre de laç d'ordre 1 únicament és capaç de seguir senyals constants.

Figura 15. Diagrama de blocs d'un filtre de laç de tercer ordre



Si el senyal d'entrada presenta una certa dinàmica, llavors és necessari augmentar l'ordre del laç. Per al cas d'ordre 2, el filtre de laç incorpora un integrador que va processant la sortida del discriminador escalada en un factor C_2 , tal com s'observa en la figura 15. Una vegada que la sortida del discriminador es fa zero en assolir el règim estacionari, el filtre de laç és capaç d'oferir una sortida constant gràcies al valor acumulat en el registre retroalimentat de l'integrador. Aquest valor constant a la sortida del filtre de laç farà moure de manera constant l'NCO que ve a continuació en l'esquema de *tracking*, amb la qual cosa la rèplica de senyal generat experimentarà una deriva constant. Per tant, i en règim estacionari, un esquema de *tracking* que incorpora un filtre de laç d'ordre 2 és capaç de seguir senyals amb dinàmica que presenta una derivada constant. Per exemple, el cas de seguir la fase d'un senyal afectat per error de freqüència constant. Aquest comportament es pot generalitzar per al cas d'ordre 3, en què el filtre de laç en règim estacionari és capaç de proporcionar a la sortida un senyal amb deriva constant, i per tant, l'esquema de *tracking*, incloent-hi l'efecte d'integració addicional de l'NCO, serà capaç de seguir senyals la dinàmica dels quals presenti una segona derivada constant i diferent de zero.

Filtres de laç d'ordre superior a tres

Els filtres de laç d'ordre superior a tres no són habituals en la pràctica i, a més, solen presentar problemes d'estabilitat. És per això que no seran considerats en aquesta assignatura.

4.2.4. Caracterització en laç tancat

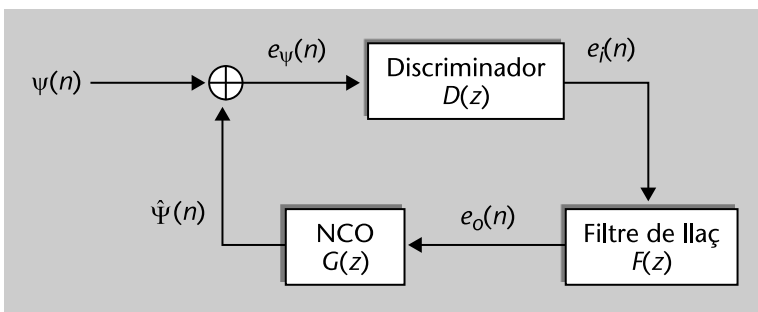
Una vegada s'ha presentat de manera intuïtiva el funcionament i comportament d'un filtre de laç, el pas següent és implementar-lo en la pràctica. Per a això, tanmateix, és necessari tenir en compte tots els blocs que formen el sistema en laç tancat. A partir d'aquesta anàlisi és possible trobar el valor de les constants corresponents $\{C_1, C_2, C_3\}$ que fan que tot el laç global de *tracking* sigui estable i proporcioni les prestacions que volem.

Lectures recomanades

Estudiar les prestacions del sistema de manera detallada és un tema que requereix una complexitat i una extensió que el fan quedar fora de l'abast de l'assignatura. És per això que aquí ens centrarem a abordar el problema des d'una visió pragmàtica, oferint una sèrie d'eines bàsiques i de propietats per a determinar si el sistema és estable o no i quines prestacions ofereix. Els que estiguen interessats en una anàlisi més profunda trobareu informació detallada sobre aquest tema en l'obra de Gardner (2005), en la de Mao i Chen (2008) per al cas de sistemes en temps discret, o en les de Perdikaris (1996) i de Jury (1964) per a una anàlisi més àmplia en el cas de sistemes en temps continu.

La metodologia tradicional consisteix a analitzar el sistema mitjançant la funció de transferència en el domini de la transformada Z. Això implica combinar la funció de transferència del filtre de llaç juntament amb la de la resta de blocs que formen el llaç global, el qual es representa de manera esquemàtica en la figura 16.

Figura 16. Representació general d'un esquema de seguiment en llaç tancat



A partir de l'esquema d'aquesta figura, el qual s'aplica tant al cas de mòdul de *tracking* de codi com de portadora, hi ha diverses relacions d'entrada-sortida que és interessant definir.

En primer lloc, es defineix la *funció de transferència del sistema* com,

$$H(z) \doteq \frac{\hat{\Psi}(z)}{\Psi(z)} \quad (22)$$

en què $\Psi(z) \doteq \text{TZ}\{\psi(n)\}$ és la transformada Z del senyal d'entrada i $\hat{\Psi}(z) \doteq \text{TZ}\{\hat{\psi}(n)\}$ la transformada Z de la rèplica generada pel llaç tancat.

De manera similar, la *funció de transferència en llaç obert* es defineix com,

$$U(z) \doteq \frac{\hat{\Psi}(z)}{E_{\psi}(z)} = D(z)F(z)G(z) \quad (23)$$

en què $E_{\psi}(z) \doteq \text{TZ}\{e_{\psi}(n)\}$ és la transformada Z del senyal d'error entre l'entrada i la rèplica, i les transformades Z representades per les funcions $D(z)$, $F(z)$ i $G(z)$ corresponen al discriminador, filtre de llaç i NCO, tal com s'indica en la figura 16.

Pel que fa al discriminador, és habitual suposar en primera instància que aquest opera a la seva zona lineal, i per tant, la seva funció de transferència està determinada únicament per un factor d'escala, $D(z)=\kappa_d$. Quant al filtre de llaç, la funció de transferència es pot obtenir fàcilment a partir d'analitzar l'esquema de la figura 15. Tenint en compte que la funció de transferència d'un integrador discret està determinada per

$$H_{\text{int}}(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}, \quad (24)$$

la funció de transferència del filtre de llaç resulta

$$F(z)=\frac{C_1(1-z^{-1})^2+C_2z^{-1}(1-z^{-1})+C_3z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}. \quad (25)$$

Finalment, l'NCO és un acumulador amb aritmètica modular, per la qual cosa arribat a un cert valor, es reinicia i torna a començar a acumular des de 0. Aquest comportament és certament no lineal, però a l'efecte de calcular la funció de transferència, aquest se sol ignorar i se suposa que l'NCO opera linealment. En aquest cas, es pot modelitzar com un integrador discret com els utilitzats en el filtre de llaç, i per tant, la seva resposta impulsional es pot modelitzar com $G(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$. Amb aquests tres ingredients, la funció de transferència en llaç obert resulta

$$U(z)=\kappa_d z^{-1} \frac{C_1(1-z^{-1})^2+C_2z^{-1}(1-z^{-1})+C_3z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}. \quad (26)$$

Mitjançant la resposta en llaç obert, la funció de transferència global del sistema es pot expressar segons

$$H(z)=\frac{U(z)}{1+U(z)}=\frac{\kappa_d z^{-1}[C_1(1-z^{-1})^2+C_2z^{-1}(1-z^{-1})+C_3z^{-2}]}{(1-z^{-1})^3+\kappa_d z^{-1}[C_1(1-z^{-1})^2+C_2z^{-1}(1-z^{-1})+C_3z^{-2}]}. \quad (27)$$

Perquè el sistema sigui estable, els coeficients $\{C_1, C_2, C_3\}$ s'han de fixar de manera que els pols de la funció de transferència $H(z)$, o el que és el mateix, els zeros del polinomi característic de $H(z)$, estiguin tots dins del cercle unitat. És per això que, a part que un pugui donar certs valors inicials¹³ a aquests coeficients en funció de l'amplada de banda o el temps de resposta del llaç que es vol, en última instància, cal verificar sempre que les condicions d'estabilitat següents es compleixen (Gardner, 2005, secció 4.3):

- **Ordre 1** ($C_2=C_3=0$). El sistema posseeix un únic pol situat en $z=1-\kappa_d C_1$, per la qual cosa perquè sigui estable s'ha de complir que $C_1 < 2/\kappa_d$. Aquest resultat contrasta amb el que s'obté per al cas de sistemes en llaç tancat en temps continu, en què per a ordre 1 el sistema és sempre estable mentre $\kappa_d C_1 > 0$. Aquest fet posa de rellevància les diferències que, en casos parti-

⁽¹³⁾Per exemple, la pràctica habitual recomana que C_2 sigui entorn d'un ordre de magnitud inferior a C_1 i al seu torn, que C_3 també sigui entorn d'un ordre de magnitud inferior a C_2 .

culars, poden ocórrer entre les versions en temps discret i en temps continu d'un mateix sistema en llaç tancat.

- **Ordre 2** ($C_3=0$). En aquest cas el sistema posseeix un parell de pols que estan situats en $z=1-\frac{\kappa_d C_1}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4C_2}{\kappa_d C_1^2}}\right)$. Tenint en compte que habitualment $\frac{C_2}{C_1^2}<1$, el sistema és estable mentre es compleixi que

$$2C_1 - C_2 < \frac{4}{\kappa_d}. \quad (28)$$

Noteu que en cas que $C_2=0$ i el sistema passi a ser d'ordre 1, la condició anterior es converteix en $C_1 < \frac{2}{\kappa_d}$, que és precisament la mateixa expressió que la ja presentada en el punt anterior.

- **Ordre 3**. A diferència dels casos anteriors, els sistemes d'ordre 3 resulten condicionalment inestables, la qual cosa indica que per a valors molt petits de $\kappa_d C_1$, el sistema pot deixar de ser estable. La condició d'estabilitat en aquest cas està determinada per l'interval següent de valors per al guany del llaç:

$$\frac{4C_1 C_2}{(4C_1 - C_2)(2C_1 - C_2)^2} < \kappa_d < \frac{32C_1}{(4C_1 - \frac{C_2}{2})^2} \quad (29)$$

Aquestes condicions d'estabilitat s'han de fer compatibles, tal com es comentava anteriorment, amb les prestacions que volem obtenir del sistema. Per a analitzar quines prestacions són aquestes i com es modelitzen, ens centrarem a continuació en el cas d'un sistema d'ordre 2, ja que són els sistemes més habituals en la pràctica. Fent l'analogia amb el cas de sistemes en llaç tancat en temps continu, els dos paràmetres que caracteritzen les prestacions d'un sistema de segon ordre són la freqüència natural ω_n i el factor d'esmoreïment ζ , els quals es poden expressar en temps discret com

$$\omega_n = \sqrt{\kappa_d C_1 C_2} \quad (30)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa_d}{C_1 C_2}} \quad (31)$$

A escala intuïtiva, ω_n està relacionada amb l'amplada de banda o equivalentment, el temps de resposta del sistema, mentre que ζ està relacionat amb el tipus de resposta que presenta el sistema davant una excitació en forma de graó.

En particular, per a valors de $\zeta > 1$ es diu que el sistema està **sobreemorteït**, i presenta una resposta molt lenta al graó. Per a $\zeta=1$ es diu que el sistema està en **esmoreïment crític**, i ofereix la resposta més ràpida possible. Finalment, per a $0 < \zeta < 1$ el sistema està **subemorteït** i presenta una resposta al graó molt ràpida, que n'excedeix l'amplitud i presenta oscil·lacions pronunciades.

Finalment, i a partir de la funció de transferència en l'expressió 27, és possible calcular també l'amplada de banda equivalent de soroll del sistema, B_n ,

$$B_n \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (32)$$

en què $S_n(e^{j\omega})$ és la densitat espectral de soroll a l'entrada del sistema, i $H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}$. Per al cas d'un sistema d'ordre 2, l'amplada de banda discreta resulta (Gardner, 2005, pàg. 130):

$$B_n = \frac{\kappa_d}{4} \frac{1 + C_1 C_2 \left(\frac{1}{\kappa_d} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} C_1 C_2 \right)}{1 - \frac{\kappa_d}{2} + C_1 C_2 \left(-1 + \frac{\kappa_d}{4} (1 - C_1 C_2) \right)} \quad (33)$$

en què es pot observar que el guany del discriminador en règim lineal, κ_d té un paper molt important en el valor que pren finalment l'amplada de banda del sistema. Tenint en compte que el producte $C_1 C_2$ és habitualment petit i suposant $\kappa_d \ll 1$ per a assegurar que el discriminador treballa a la zona lineal (en principi és suficient $\kappa_d < 0,2$), llavors l'amplada de banda de soroll es pot aproximar amb

$$B_n \approx \frac{\kappa_d + C_1 C_2}{4} \quad (34)$$

amb la qual cosa es pot observar que fixar constants $\{C_1, C_2\}$ amb valors grans tendeix a augmentar l'amplada de banda del sistema, i per tant, a fer-lo més sensible a canvis en l'entrada, mentre que fixar constants de valors petits tendeix a reduir l'amplada de banda. En cas que $C_2=0$, l'amplada de banda resulta $B_n \approx \kappa_d/4$, la qual coincideix amb l'amplada de banda d'un sistema de primer ordre en temps continu.

L'amplada de banda del llaç és un paràmetre clau en el disseny de sistemes de *tracking* i té un paper molt important en la definició del guany que es pot obtenir en llaç tancat, mesurat per mitjà de la relació senyal-soroll a la sortida del llaç, SNR_L . Si bé en general, la definició de la relació senyal-soroll no implica més dificultat que implementar un quocient entre la potència de senyal i la potència de soroll, en el cas d'un filtre de llaç la definició no és directa, ja que, pròpiament, no hi ha cap senyal dins del llaç. Això és a causa que l'entrada al

filtre de llaç és en realitat l'error entre el senyal rebut i la rèplica local, amb la qual cosa en règim estacionari i deixant de banda l'efecte del soroll tèrmic, és una entrada que tendeix a ser zero.

Com a conseqüència, la definició de la relació senyal-soroll a la sortida del llaç no és directa, i en la bibliografia es poden trobar diverses definicions o interpretacions. La més utilitzada és aquella que interpreta el filtre de llaç de la mateixa manera com si fos un filtre tradicional, amb una certa amplada de banda B_n , i que davant una entrada de soroll espectralment blanc amb densitat espectral $N_0/2$, proporciona una potència de soroll $P_n=N_0B_n$, amb la qual cosa la relació senyal a soroll a la sortida del llaç resulta

$$\text{SNR}_L \doteq \frac{C}{N_0 B_n}. \quad (35)$$

A partir del valor de $\frac{C}{N_0}$ d'entrada i de l'amplada de banda del llaç, és possible determinar l'impacte del soroll sobre les prestacions del mòdul de *tracking*. En particular, el soroll de fase a la sortida del llaç està determinat per $\sigma_\theta^2 = \frac{1}{\text{SNR}_L}$, el qual, traduït a variància en distància (mesurada en m^2), resulta

$$\sigma_{\theta \rightarrow \epsilon}^2 = \frac{1}{(2\pi F_L)^2 \text{SNR}_L}. \quad (36)$$

L'expressió 36 representa l'impacte del soroll en les mesures de distància que són obtingudes a partir de la portadora (mòdul de *tracking* de portadora). Aquesta expressió es pot convertir a mesures en distància però obtingudes a partir del codi (mòdul de *tracking* de codi) tenint en compte que, tal com s'ha esmentat anteriorment, els errors en codi són F_L/R_c vegades més grans que els que apareixen en portadora. Com a conseqüència, l'impacte del soroll en les mesures de distància obtingudes a partir del codi resulta

$$\sigma_\epsilon^2 = T_c \frac{1}{\text{SNR}_L}. \quad (37)$$

Tant l'equació 36 com la 37 són expressions que, com a primera aproximació, permeten conèixer per endavant les prestacions dels mòduls de *tracking*. Com es pot observar, totes dues depenen de l'amplada de banda del llaç, la qual cosa té un impacte directe en l'ajust de les constants $\{C_1, C_2, C_3\}$ que s'han descrit al llarg d'aquest subapartat. En la pràctica, i a partir d'uns requisits concrets en termes d'errors en distància (ja sigui a escala de portadora o a escala de codi), el procés de disseny del mòdul de *tracking* consisteix a ajustar els valors de les constants del llaç de manera que el sistema sigui estable, se satisfacin els requisits establerts, i el sistema sigui capaç de seguir la dinàmica d'usuari prevista,

fent que el llaç tingui capacitat de reacció suficient per a no perdre el seguiment de l'error d'entrada. És a dir, un compromís entre disposar d'una amplada de banda suficientment estreta per a filtrar el màxim possible de soroll, però suficientment ampla per a permetre seguir la dinàmica de l'entrada. Tot això és un procés complex que habitualment es resol mitjançant procediments de prova i error, fent extensos estudis numèrics i simulacions per ordinador per a confirmar que el disseny de les constants del llaç s'ajusta a l'escenari de treball i als requisits especificats.

5. Càlcul de la posició

En l'apartat anterior hem estudiat l'obtenció de les mesures de retard i fase. Aquest apartat es dedica a l'obtenció de l'estimació de la posició, que és l'objectiu últim en la majoria de les aplicacions GNSS. El punt de partida per al càlcul de la posició són els observables de codi (o pseudorangs) i de fase. La definició i caracterització d'aquests es tracta en els subapartats 5.1 i 5.2. Els mètodes que permeten passar dels pseudorangs a l'estimació de les coordenades s'estudien en el subapartat 5.3, mentre que en el subapartat 5.4 s'analitzen les diferents fonts d'error que intervenen en tot el procés i que fan que el posicionament no pugui ser perfecte. Les tècniques diferencials, explicades detalladament en el subapartat 5.5, són la base per a obtenir actualment les millors prestacions dels sistemes GNSS i aconseguir precisions centrimètriques.

5.1. Càlcul dels pseudorangs

La mesura bàsica feta per un receptor GPS és el temps aparent de propagació del senyal des del satèl·lit fins al receptor, definit com la diferència entre l'instant de recepció del senyal i l'instant de transmissió d'aquest. L'instant de recepció s'obté simplement llegint el rellotge que té el receptor. L'instant de transmissió és més complicat d'obtenir. Més endavant explicarem concretament com es fa això, però als efectes pràctics de comprendre el càlcul de la posició en GPS, el més convenient és pensar que el temps de transmissió està marcat en el senyal. Evidentment, tant l'instant de recepció com el de transmissió es refereixen a un mateix punt en el senyal, com, per exemple, l'inici d'un determinat xip. En definitiva, es tracta de calcular quan es va transmetre i quan es rep un determinat punt del senyal.

El producte d'aquest temps de trànsit per la velocitat de la llum en el buit proporciona l'observable bàsic de GPS, que es denomina pseudorang o pseudodistància.

El prefix *pseudo* s'afegeix perquè aquest observable no representa una veritable distància, sinó que està esbiaixat a causa que els instants de transmissió i de recepció fan referència a escales de temps diferents.

Reflexió

Penseu què passaria si en una cursa el temps de sortida d'un corredor es llegeix d'un rellotge i el temps d'arribada es llegeix d'un altre rellotge. Seria la diferència entre totes dues lectures el temps que realment ha trigat el corredor? Quina relació hi hauria entre la diferència de les lectures, el temps veritable que ha trigat el corredor i el retard o avançament que tenen els rellotges amb els quals s'han fet les mesures?

Concretament, hi ha tres escales de temps involucrades en el càlcul del pseudorang. Dues estan determinades pel rellotge del receptor i el del satèl·lit. La tercera és una escala de temps de referència, anomenada *temps GPS* (GPST), que es genera en el segment terraquí com una mitjana dels rellotges de tots els satèl·lits i de les estacions terràquies. Representarem les tres escales de temps amb les variables t_u (rellotge del receptor), t_s (rellotge del satèl·lit) i t (temps GPS), respectivament.

Considerem que una determinada transició del senyal arriba al receptor en l'instant t segons l'escala GPST i que el temps de trànsit o propagació veritable d'aquesta transició ha estat T . L'instant de recepció mesurat segons el rellotge del receptor és $t_u(t)$, i l'instant de transmissió (mesurat mitjançant el rellotge de satèl·lit) corresponent és $t_s(t - \tau)$. Llavors el pseudorang es calcula com

$$P(t) = c(t_u(t) - t_s(t - \tau)) \quad (38)$$

en què c és la velocitat de la llum en el buit. Tant t com T són desconeguts i s'han d'estimar.

Observació

Noteu que el model que estem presentant aquí és genèric i és vàlid per a qualsevol senyal de GPS (de la banda L1, L2 o L5) i, de fet, també per a un altre sistema GNSS.

La relació de les escales de temps del receptor i del satèl·lit amb el temps GPST són les següents:

$$t_u(t) = t + \delta t_u(t), \quad (39)$$

$$t_s(t - \tau) = (t - \tau) + \delta t_s(t - \tau), \quad (40)$$

en què $\delta t_u(t)$ i $\delta t_s(t)$ són els biaixos dels rellotges del receptor i del satèl·lit, respectivament, tots dos mesurats respecte a l'escala de temps GPST, i que en general poden variar amb el temps.

Segons la nostra notació, aquests biaixos representen l'avançament dels dos rellotges respecte a l'escala de referència del sistema. De fet, el segment terraquí estima el biaix del rellotge del satèl·lit (δt_s) i aproxima la seva evolució temporal mitjançant un polinomi. Els coeficients d'aquest polinomi es transmeten en el missatge de navegació. Per tant, es pot considerar que δt_s és una funció coneguda, però el que desconeixem de moment és l'instant $t - \tau$ en el qual s'ha d'avaluar.

Si introduïm les expressions 39 i 40 en la 38, el pseudorang es pot escriure com

$$\begin{aligned} P(t) &= c(t + \delta t_u(t) - (t - \tau + \delta t_s(t - \tau))) + \varepsilon_\rho(t) \\ &= c\tau + c(\delta t_u(t) - \delta t_s(t - \tau)) + \varepsilon_\rho(t) \end{aligned} \quad (41)$$

en què $\varepsilon_\rho(t)$ és un terme que engloba tota la resta dels fenòmens no inclosos explícitament en l'equació anterior. Aquests fenòmens són tant errors addicionals o soroll de mesura, o efectes no modelitzats, o fins i tot errors en el model.

El temps de trànsit multiplicat per la velocitat de la llum en el buit admet l'expressió següent:

$$c\tau = r(t, t - \tau) + I_\rho(t) + T_\rho(t), \quad (42)$$

en què $r(t, t - \tau)$ és la distància geomètrica (o distància veritable) entre la posició de l'usuari en l'instant t i el satèl·lit en l'instant $t - \tau$; I_ρ i T_ρ representen els retards deguts a la propagació del senyal a través de la ionosfera i de la troposfera. Tots dos termes són positius. Realment aquests retards apareixen en l'expressió 42 perquè el temps de trànsit es multiplica per la velocitat de la llum en el buit i, a causa de la presència de l'atmosfera, aquesta no és exactament la velocitat de propagació dels senyals.

Finalment, si introduïm l'expressió 42 en la 41 i, per senzillesa, obviem la referència explícita a l'instant de mesura t , obtenim l'equació **fonamental per al posicionament amb pseudorangs**:

$$P = r + c(\delta t_u - \delta t^s) + I_\rho + T_\rho + \varepsilon_\rho \quad (43)$$

Idealment ens hauria agradat tenir uns observables que fossin iguals a la distància geomètrica r . Però a causa dels principis intrínsecs de funcionament del sistema obtenim la pseudodistància P , que és una versió esbiaixada i sorollosa de la distància veritable. En els subapartats següents estudiarem com es pot obtenir realment una estimació molt precisa de la posició i del temps a partir d'aquestes mesures, que poden diferir notablement de la distància real.

Els receptors GPS calculen els pseudorangs de tots els satèl·lits visibles simultàniament i típicament a una freqüència entorn d'1 Hz (és a dir, mesuren un conjunt de pseudorangs una vegada per segon). Els receptors orientats a aplicacions en què hi ha una alta dinàmica prenen mesures més freqüentment (fins a arribar als 50 Hz) per poder seguir més fidelment el moviment de la plataforma a la qual van units. En aplicacions en què es monitora un fenomen que canvia molt lentament o si es vol reduir la quantitat de dades per processar, els receptors generen mesures a taxes inferiors a 1 Hz.

En la pràctica, el càlcul d'un pseudorang es fa utilitzant la definició mateixa donada per l'equació 38. L'obtenció de $t_u(t)$ és immediata, ja que el receptor solament ha de llegir un registre intern que manté la seva escala de temps pròpia. D'altra banda, el còmput de $t^s(t - T)$ és una mica més intricat i es fa de la manera següent.

Vegeu també

Tornarem sobre el tema dels errors quan analitzem les fonts d'error en el posicionament en el subapartat 5.4 d'aquest mòdul.

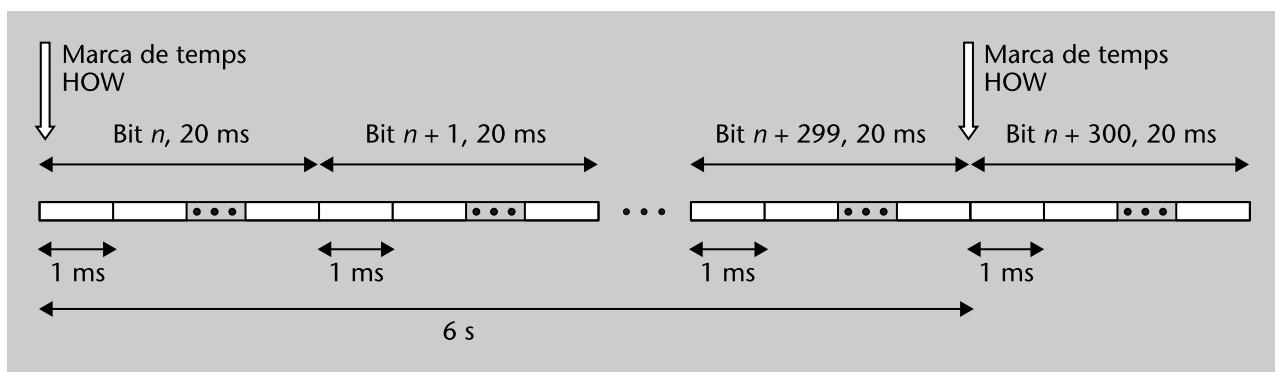
En la fase de seguiment o *tracking*, el receptor manté una rèplica del senyal GPS sincronitzat amb el senyal que està rebent realment. Per tant, el receptor coneix en tot moment quin xip o quina mostra corresponent a un xip està essent rebuda en un instant determinat, ja que coincideix amb la mostra que el receptor està generant per a la rèplica. L'instant en el qual ens hem de fixar és justament l'instant en el qual el receptor llegeix el seu registre intern per a calcular $t_u(t)$. Llavors el receptor ha de calcular l'instant de temps en el qual el satèl·lit va transmetre la mostra que ara està rebent (el terme *ara* l'entendem com el moment en el qual el receptor decideix mesurar el valor de t_u).

Per a calcular l'instant de transmissió corresponent a una mostra qualsevol del senyal, s'utilitzen les marques temporals que hi ha en el senyal GPS. El satèl·lit marca determinats esdeveniments del senyal; concretament marca l'inici de cada subtrama (*subframe*) mitjançant el TOW (*time of week*), tal com podeu veure en la figura 17. El TOW és un comptador de 19 bits que conté l'instant de transmissió de l'inici de la subtrama. El valor del bit menys significatiu és d'1,5 s. Realment, en el senyal únicament s'inclouen els 17 bits més significatius del TOW, que formen la denominada HOW (*hand-over word*). En haver eliminat els 2 bits menys significatius, el HOW compta en unitats de 6 s, que és justament la durada d'una subtrama.

Vegeu també

El *tracking* s'estudia en el subapartat 4.2 d'aquest mòdul.

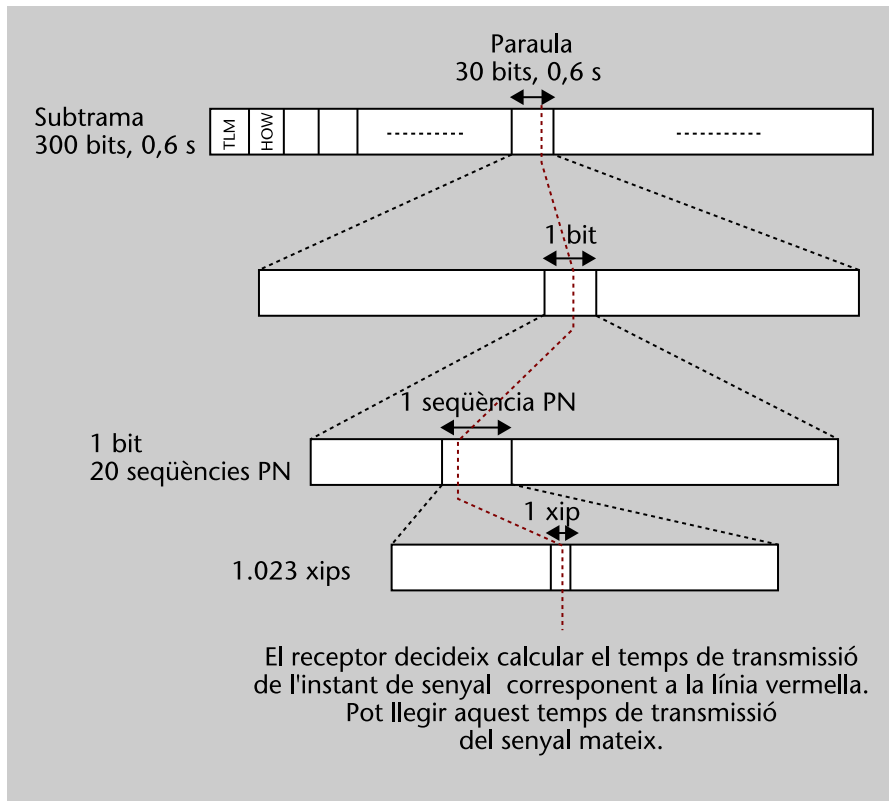
Figura 17. Marques de temps en el senyal GPS



Atès que el receptor està desmodulant i detectant els bits que conté el senyal, obté de manera immediata, per mitjà del HOW, el valor del temps de transmissió corresponent a l'inici de la subtrama en la qual es troba la mostra de la qual vol calcular el temps de transmissió. Per passar del temps d'inici de la subtrama al temps de transmissió de la mostra en qüestió, el receptor simplement ha de comptar la part entera i fraccional del nombre de xips que han passat des de l'inici de la subtrama fins a aquesta mostra¹⁴. Com la durada dels xips en transmissió és coneguda (per exemple, 1/1,023 μ s per al senyal GPS C/A), simplement s'ha de multiplicar el nombre de xips per la seva durada i així s'obté el temps que s'ha d'afegir al TOW per a calcular l'instant corresponent a la mostra en la qual es fa la mesura. Aquest procés s'explica de manera gràfica i simplificada en la figura 18.

⁽¹⁴⁾ Això és factible per al receptor perquè ell mateix està generant una rèplica del senyal rebut, i per tant coneix els xips que està generant en qualsevol moment.

Figura 18. Il·lustració del càlcul de l'instant de transmissió



5.2. Càlcul de les fases de portadora

Una estimació molt més precisa del retard de propagació es pot obtenir a partir de la mesura de la fase de la portadora del senyal rebut del satèl·lit. Aquest nou observable es denomina simplement fase de portadora o observable de fase. Per semblança, el pseudorang es denomina alternativament fase de codi, ja que s'obté calculant la posició o fase d'una determinada mostra dins de la seqüència pseudoaleatòria que forma el senyal. De manera similar, es pot interpretar que la fase de portadora es calcula a partir de la posició de la mostra en qüestió dins d'un cicle de la portadora.

Concretament l'observable de fase es defineix com la diferència en l'instant de mesura entre la fase del senyal rebut i la fase d'una portadora generada en el receptor.

No obstant això, aquesta diferència de fases no es mesura mòdul 1 cicle (o 2π radians), sinó que s'acumula de manera contínua des d'un determinat instant d'inici, per la qual cosa de vegades es denomina també *integrated Doppler* o *accumulated Doppler range* (però no s'ha de confondre amb una mesura directa de la freqüència del senyal, encara que s'utilitzi el terme *Doppler*). Com veurem a continuació, aquest observable és una mesura indirecta i ambigua del temps de trànsit. Se sol dir que la fase de portadora és una mesura precisa (*precise* en anglès) però no exacta (*accurate* en anglès), mentre que el pseudorang és el contrari, això és, és exacte però no precís. Això és així perquè el pseudorang és

una mesura no ambigua però amb un nivell de soroll més elevat, mentre que la fase de portadora proporciona una estimació de la distància amb un nivell de soroll molt baix però amb una ambigüitat determinada per un nombre desconegut de longituds d'ona.

La fase de la portadora, en unitats de cicles, generada pel receptor es pot expressar com

$$\phi_u(t) = f_0 t_u(t) + N_u = f_0 t + f_0 \delta t_u(t) + N_u \quad (44)$$

en què hem utilitzat l'expressió 39, N_u simbolitza un nombre enter arbitrari de cicles (atès que qualsevol fase instantània està definida excepte un nombre enter de cicles i f_0 és la freqüència portadora nominal del senyal). El terme $f_0 \delta t_u(t)$ representa la desviació de fase causada per la diferència entre la freqüència nominal i la freqüència real del receptor perquè una variació de l'error en $\delta t_u(t)$ temps equival a un error en freqüència, atès que el rellotge del receptor no és més que un oscil·lador i un comptador dels cicles d'aquest oscil·lador. D'altra banda, la fase del senyal transmès pel satèl·lit es pot escriure com

$$\phi^s(t) = f_0 t^s(t) + N^s = f_0 t + f_0 \delta t^s(t) + N^s \quad (45)$$

en què el significat de cadascun dels termes és el mateix que en l'expressió 44, però fent referència al satèl·lit. L'observable de fase es defineix com

$$\phi(t) = \phi_u(t) - \phi^s(t - \tau) \quad (46)$$

o sigui, la diferència entre la fase de la portadora local generada pel receptor en l'instant t i la fase del senyal rebut en aquest mateix instant, en què aquesta última coincideix amb la fase del senyal transmès T s abans, atès que T és el temps de trànsit o propagació. Substituint les expressions 44 i 45 en l'expressió 46, obtenim

$$\phi(t) = \frac{f_0}{c} r(t, t - \tau) + f_0 (\delta t_u(t) - \delta t^s(t)) + \frac{f_0}{c} (I_{\phi}(t) + T_{\phi}(t)) + N + \varepsilon_{\phi}(t), \quad (47)$$

en què $I_{\phi}(t)$ i $T_{\phi}(t)$ són els desplaçaments de fase, expressats en metres, causats per la ionosfera i troposfera, respectivament; $\varepsilon_{\phi}(t)$ representa el soroll de mitjana en $\phi^s(t)$, i també la resta dels efectes no modelitzats o errors en el model; i $N = N_u - N^s$ és l'ambigüitat i continua essent un nombre enter. Per les propietats físiques de la troposfera i de la ionosfera, l'efecte de la primera és el mateix en el codi (o sigui, en l'envolupant del senyal) que en la fase, mentre que la segona es comporta com un medi dispersiu i provoca un avançament de fase d'igual valor al retard que pateix en el codi.

Reflexió

Podem fer memòria dels continguts d'altres assignatures i recordar que les guies d'ona també es comportaven com a mitjans dispersius i les implicacions que això tenia per a la transmissió de senyals.

Per tant, es compleix que $T_\phi = T_\rho$ i $I_\phi = -I_\rho$. Finalment, tenint en compte que la longitud d'ona és $\lambda = \frac{c}{f_0}$ i ometent per senzillesa la dependència amb t , l'expressió final de l'observable de fase (en unitats de cicles) és

$$\phi = \frac{r}{\lambda} + \frac{c}{\lambda}(\delta t_u - \delta t^s) + \frac{1}{\lambda}(T_\rho - I_\rho) + N + \varepsilon_\phi \quad (48)$$

L'ambigüitat N es pot interpretar com el nombre enter de longituds d'ona entre el receptor i el satèl·lit, canviat de signe, en l'instant inicial de mesura. En aquest instant just, la primera mesura del fase del receptor és necessàriament un nombre entre 0 i 1 (expressat en cicles, ja que fases que difereixen entre si en un nombre enter de cicles són indistingibles), mentre que els termes deguts a la distància, errors de rellotges i efectes atmosfèrics en la part dreta de l'expressió 48 tindran en principi un valor molt allunyat de l'interval $[0,1)$.

Fixem-nos per exemple que r és de l'ordre de desenes de milers de quilòmetres, mentre que λ són desenes de centímetres; per tant, r/λ és de l'ordre de 10^8 . Perquè la part esquerra i dreta de l'expressió 48 puguin ser iguals en l'instant de la primera mesura, és necessari afegir un valor enter N . Per a les mesures successives, el receptor pot seguir l'evolució de les fases $\phi_u(t)$ i $\phi^s(t)$, de manera que la fase $\phi(t)$ pot seguir les evolucions dels termes de la dreta de l'equació 48 sense estar limitada a prendre valors en l'interval $[0,1)$.

Exemple

Per a il·lustrar això, considerem a títol d'exemple que el satèl·lit s'allunya del receptor en cinc longituds d'ona entre l'instant t_1 i l'instant t_2 . En absència de la resta dels efectes, l'observable de fase en t_2 satisfarà $\phi(t_2) = \phi(t_1) + 5$. Això és cert perquè l'ambigüitat entera present en $\phi(t_1)$ i $\phi(t_2)$ és la mateixa, la qual cosa equival a dir que totes dues fases estan referides al mateix instant inicial i que no s'ha perdut el seguiment o *tracking* de la fase entre t_1 i t_2 .

No obstant això, de vegades la fase estimada pel llaç de seguiment de fase (per exemple, el PLL) experimenta salts en un nombre enter de cicles a causa del soroll, interferències o altres perturbacions del senyal. Aquest fenomen és conegut com a *cycle slip*. Un *cycle slip* actua com una reinicialització de l'ambigüitat, de manera que es produeix un canvi en el valor de N . És a dir, si es produeix un *cycle slip* entre t_1 i t_2 , les fases $\phi(t_1)$ i $\phi(t_2)$ no són directament comparables (per exemple, la seva diferència no es deu solament a variacions de la distància, efectes dels rellotges i efectes de la propagació), sinó que contenen ambigüitats diferents. Per aquest motiu el posicionament amb fases de portadora és un procés delicat, ja que ha de tenir en compte que el valor de N en l'expressió 48 és solament constant mentre no es produeixin *cicles slip*, però canvia quan aquests ocorren, i això implica que és necessari fer un processament previ de detecció i correcció de *cicles slip*. Aquest processament és un pas essencial en la majoria dels mètodes de posicionament que treballen amb l'observable de fase.

La precisió més gran dels observables de fase es pot combinar amb l'absència d'ambigüïtat en els observables de codi per a obtenir estimacions que són al mateix temps precises i no ambigües. Aquesta manera de combinar les observacions de codi i fase es denomina *code-carrier smoothing* o simplement *carrier smoothing* (que es traduiria com suavització del codi utilitzant la fase).

5.3. Solució de navegació

El terme *solució de navegació* és la manera habitual de referir-se al càlcul de la posició i el temps a partir d'alguns dels observables GPS. Això també se sol denominar de manera genèrica estimació del PVT (posició, velocitat, temps), encara que moltes vegades no es calcula explícitament la velocitat. Hi ha multitud d'algorismes de posicionament depenent del tipus d'observables que s'utilitzen, de si es fa en temps real o en postprocessament, del nombre de senyals en diferents bandes que s'empren, de si s'inclou un model dinàmic, de si hi ha algun tipus de correcció diferencial o sistema d'augment, etc. No obstant això, per centrar la discussió, ara ens ocuparem del cas de posicionament instantani a partir dels pseudorangs mesurats a una única freqüència. Es tracta d'un cas bàsic, però resulta útil perquè les bases en les quals es fonamenta són comunes i extrapolables als casos més complicats, i a més permet analitzar d'una manera més clara els efectes de la geometria dels satèl·lits i dels errors dels observables sobre la precisió del posicionament.

El punt de partida és l'equació 43, en què d'ara endavant indicarem les magnituds que fan referència al satèl·lit k -èsim mitjançant el superíndex (k). Representarem com a $P_c^{(k)}$ el pseudorang corregit, això és, el pseudorang mesurat pel receptor ($P^{(k)}$) del qual s'han sostret les estimacions que disposi el receptor dels efectes del costat dret de l'expressió 43. Aquest sempre disposa almenys d'una estimació de l'*offset* del rellotge de satèl·lit ($\delta t^{(k)}$) perquè el transmet el satèl·lit mateix en el missatge de navegació. També és possible obtenir una mesura aproximada del retard de la ionosfera per mitjà dels coeficients del model de Klobuchar (també inclosos en el missatge de navegació) o es pot obtenir una mesura molt més precisa si disposa d'observacions a dues freqüències o correccions provinents d'un sistema d'augment. Suposant que el receptor solament tingui valors de l'*offset* del satèl·lit i de la ionosfera, el pseudorang corregit s'obtindria com a $P_c^{(k)} = P^{(k)} + c\delta t^{(k)} - I_{\rho}^{(k)}$. Això es comenta únicament a títol d'exemple. En el subapartat 5.5 explicarem amb més detall com es poden corregir o obtenir estimacions de cadascun dels efectes. És evident com es corregiria el pseudorang en altres casos. Observeu que utilitzem el símbol $\hat{}$ per a referir-nos als valors estimats o aproximacions, i així distingir-los dels valors reals.

La relació entre el pseudorang corregit i les posicions està determinada per

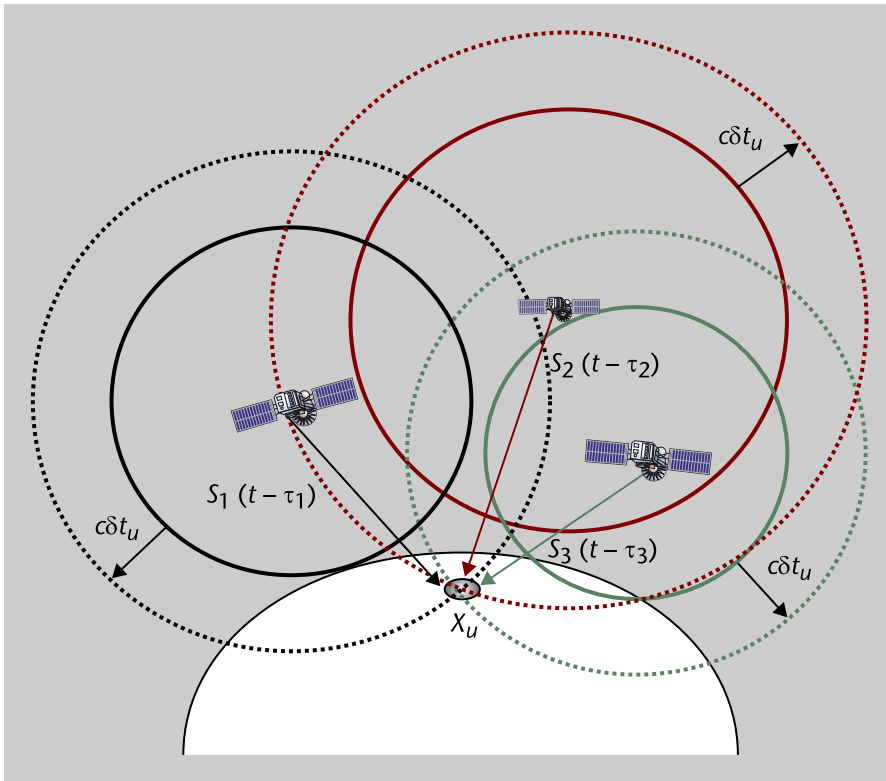
$$P_c^{(k)} = r^{(k)} + c\delta t_u + \varepsilon_{\rho,c} \quad (49)$$

en què $\varepsilon_{\rho,c}$ inclou el terme ε_ρ de l'expressió 43 més d'una banda tots els efectes que no s'han pogut corregir en $P_c^{(k)}$ (en l'exemple anterior, seria la troposfera) i, d'altra banda, els residus entre les estimacions dels efectes que s'han corregit i els efectes reals (en l'exemple anterior, seria el cas de $I_\rho^{(k)} - \hat{I}_\rho^{(k)}$). A grans trets, podem dir que la desviació estàndard de $\varepsilon_{\rho,c}$ és inferior a 1 m en el cas de disposar de correccions diferencials, i està entre 5 i 10 m per a un receptor que funciona de manera autònoma. La distància geomètrica és el mòdul del vector que va des de la posició del receptor $\mathbf{x}_u = [x_u, y_u, z_u]^T$ en l'instant de mesura i la posició del satèl·lit en l'instant de transmissió $\mathbf{x}^{(k)} = [x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}]^T$:

$$r^{(k)} = \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_u\| = \sqrt{(x^{(k)} - x_s)^2 + (y^{(k)} - y_s)^2 + (z^{(k)} - z_s)^2} \quad (50)$$

Es pot plantejar una equació del tipus de l'expressió 49 per a cadascun dels K satèl·lits que estigui rebent el receptor. Cada equació inclou 4 incògnites: l'*offset* del rellotge i les tres coordenades de la posició. Per tant, es necessita un nombre de satèl·lits $K \geq 4$ per a poder calcular la posició en 3 dimensions. En cas de posicionament en 2 dimensions, es necessitarien almenys 3 satèl·lits. La causa de necessitar almenys un satèl·lit més que el nombre de coordenades s'il·lustra en la figura 19. El receptor es troba en el punt d'intersecció de diverses circumferències en el cas de posicionament 2D o de diverses superfícies esfèriques en el cas de posicionament 3D, el radi del qual està determinat pel pseudorange corresponent menys l'*offset* del rellotge ($c\delta t_u$). Si ens centrem en el cas de 2D per senzillesa, veiem que els punts d'intersecció de qualsevol parell de circumferències canvia amb el valor $c\delta t_u$, i com aquest és desconegut, no es pot calcular la posició en 2D a partir de dos satèl·lits únicament. La clau del posicionament basat en GNSS és el fet que 3 circumferències s'intersecten en un únic punt per a un valor adequat de $c\delta t_u$, i això justifica que es necessitin almenys 3 satèl·lits en posicionament 2D.

Figura 19. Il·lustració de la solució de navegació i efecte de l'offset del rellotge del receptor



Si es disposa de més satèl·lits, no serà possible fer que totes les circumferències s'intersequin en un únic punt a causa del soroll de mesura, però el principi de funcionament continuarà essent el mateix: el valor de $c\delta t_u$ serà aquell que faci que un punt determinat (que serà l'estimació de les coordenades del receptor) estigui tan proper com sigui possible de totes les circumferències. En funció de com definim matemàticament "tan proper com sigui possible", s'obtidran diferents variacions del mètode de posicionament.

L'argumentació anterior ha deixat palesa que en el procés de càlcul de la posició en GNSS s'obté també necessàriament valor de l'offset $c\delta t_u$, encara que per a una aplicació de posicionament aquest paràmetre podria no ser necessari. No obstant això, això indica que sense cap complexitat addicional un receptor GNSS pot corregir la seva base de temps amb l'offset calculat i obtenir una estimació del temps del sistema (GPST en el cas de GPS). Aquesta és la base de les aplicacions de *timing* de GNSS, ja que els receptors es poden utilitzar com a generadors de freqüència o d'una base de temps molt precisa i teòricament idèntica per a tots els receptors encara que es trobin molt allunyats entre ells.

Abans de reprendre els mètodes per a solucionar el sistema d'equacions de posicionament, hem de fer una puntualització subtil però important sobre l'equació 50. Perquè l'expressió sigui correcta, les coordenades del receptor i dels satèl·lits han d'estar expressades en el mateix sistema de coordenades, que pot ser un sistema inercial (ECI) o un sistema rotatori amb la Terra (ECEF). Resulta molt més fàcil i intuïtiu expressar la posició de l'usuari en el sistema ECEF corresponent a l'instant de mesura t (en aquest sistema les coordenades d'un usuari estàtic no canvien amb el temps). Per tant, hem d'expressar la posició del satèl·lit ($x^{(k)}$) en l'instant d'emissió $t-\tau$ en el sistema de coordenades ECEF de

l'instant t , però les efemèrides del missatge de navegació ens permeten calcular la posició del satèl·lit en el sistema ECEF corresponent a l'instant $t - \tau$ (la denominarem $\bar{\mathbf{x}}^{(k)}$). Durant el temps que necessita el senyal per a viatjar des del satèl·lit fins a l'antena de l'usuari, la Terra i l'ECEF roten al voltant de l'eix z en un angle $\omega_E \tau$, en què ω_E és la velocitat angular de rotació de la Terra (7.29×10^{-5} rad/s). Per tant, la relació entre $\bar{\mathbf{x}}^{(k)}$ i $\mathbf{x}^{(k)}$ està determinada per

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos \omega_E \tau & \sin \omega_E \tau & 0 \\ -\sin \omega_E \tau & \cos \omega_E \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^{(k)} \quad (51)$$

Per a receptors situats en terra, el temps de trànsit T està entre 67 i 86 ms, la qual cosa implica una rotació entre $4,9 \times 10^{-6}$ i $6,3 \times 10^{-6}$ radians. Encara que un valor d'aquesta magnitud podria semblar menyspreable, realment no ho és, perquè si el menyspreem s'introdueix un error de 10-20 m en el càlcul de la distància segons l'expressió 50, la qual cosa es tradueix en un error de la mateixa magnitud en la posició en la direcció est-oest. El problema que es planteja és que T realment no és conegut perquè depèn de la distància entre el satèl·lit i el receptor, i la posició d'aquest últim és justament una de les incògnites del problema. Tornarem a la qüestió del càlcul de les posicions dels satèl·lits més endavant, després d'explicar els mètodes bàsics de posicionament.

Tornant a la solució de navegació, hem de resoldre el sistema següent, format per K equacions de la forma donada per l'expressió 49:

$$\begin{bmatrix} P_c^{(1)} \\ P_c^{(2)} \\ \vdots \\ P_c^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{(1)}(x_u) \\ r^{(2)}(x_u) \\ \vdots \\ r^{(k)}(x_u) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} c \delta t_u \quad (52)$$

en què, per facilitar la comprensió, hem explicitat la dependència de la distància veritable amb la posició del receptor. La principal dificultat és que es tracta d'un problema no lineal a causa de la presència de l'operador norma, i per tant la manera de resoldre'l no és immediata.

Hi ha en general dues grans famílies de mètodes per a calcular la solució de navegació:

- Una família es basa a linealitzar la dependència de la distància amb la posició.
- Els mètodes de la segona família calculen la posició de manera tancada i sense necessitar un procés iteratiu.

Els **mètodes basats en l'alineació** proporcionen més precisió però requereixen el coneixement d'un valor aproximat de la posició del receptor i són iteratius (per exemple, el resultat d'aplicar l'algorisme es pren com a nou valor *a priori* de la posició per a la iteració següent). Cap d'aquests aspectes no és un problema seriós perquè molt poques iteracions solen ser necessàries i perquè en la pràctica sol resultar senzill conèixer una posició aproximada inicial del receptor, bé utilitzant l'última posició que va calcular el receptor quan es va emprar per última vegada o bé aplicant un mètode de la segona família.

Els mètodes amb solució tancada proporcionen una precisió pitjor que els mètodes basats en la linealització, però no necessiten cap coneixement previ de la posició.

5.3.1. Mètodes basats en la linealització

Presentarem a continuació el mètode tradicional de posicionament basat en la linealització, que és representatiu de qualsevol altra variant dins d'aquesta primera família. Atès que el sistema d'equacions de l'expressió 52 no es pot complir amb igualtat a causa de l'existència del terme $\varepsilon_{p,c}$ en 49, és habitual plantejar un ajust de mínim quadrats. Per tant, la posició i *offset* temporal del receptor es calculen com els valors que proporcionen un millor ajust entre les mesures i el model. Això es pot formular com el valor que minimitza la funció de cost següent:

$$f(r_u, \delta t_u) = (p_c - r(x_u) - \mathbf{1}\delta t_u)^T \mathbf{W}(\mathbf{p}_c - \mathbf{r}(x_u) - \mathbf{1}\delta t_u) \quad (53)$$

en què hem definit els vectors següents $\mathbf{p}_c = [P_c^{(1)}, \dots, P_c^{(k)}]^T$, $\mathbf{r}(x_u) = [r^{(1)}(x_u), \dots, r^{(k)}(x_u)]^T$; $\mathbf{1}$ és un vector columna de tot uns, i la \mathbf{W} és una matriu de pesos¹⁵.

⁽¹⁵⁾Comentarem més endavant possibles alternatives per a construir aquesta matriu, però no obstant això la matriu identitat és una opció vàlida i senzilla.

Observem que la funció $f(\cdot)$ no és més que una suma ponderada dels residus. La minimització d'expressions com la 53 és un problema molt estudiat en matemàtiques, denominat regressió no lineal (Seber; Wild, 1989). En el nostre cas, a més de ser no lineal, la funció $f(r_u, \delta t_u)$ no és convexa, per la qual cosa pot tenir diversos mínims locals, la qual cosa sempre és una dificultat afegida. Una tècnica habitual per a resoldre problemes no lineals amb restriccions és el mètode de Newton-Raphson, que seria també aplicable en el nostre cas. No obstant això, un mètode similar és el de Gauss-Newton, que és el que habitualment s'utilitza en l'àmbit de la solució de navegació de GNSS. Aquest mètode es basa a linealitzar $r^{(k)}(x_u)$ al voltant d'un valor temptatiu de la posició de l'usuari, que denominarem $\mathbf{x}_{u,0} = [x_{u,0}, y_{u,0}, z_{u,0}]^T$, utilitzant el polinomi de Taylor de primer ordre. Es pot comprovar fàcilment que

$$\begin{aligned} r^{(k)}(x_u) &\approx r^{(k)}(x_{u,0}) - \frac{(x^{(k)} - x_{u,0})\Delta x_u + (y^{(k)} - y_{u,0})\Delta y_u + (z^{(k)} - z_{u,0})\Delta z_u}{\sqrt{(x^{(k)} - x_{u,0})^2 + (y^{(k)} - y_{u,0})^2 + (z^{(k)} - z_{u,0})^2}} \\ &= r^{(k)}(x_{u,0}) - \frac{(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_{u,0})^T}{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_{u,0}\|} \Delta \mathbf{x}_u \\ &= r^{(k)}(x_{u,0}) - (\mathbf{v}_u^{(k)}) \Delta \mathbf{x}_u \end{aligned} \quad (54)$$

en què $\Delta \mathbf{x}_u = [\Delta x_u, \Delta y_u, \Delta z_u]^T = \mathbf{x}_u - \mathbf{x}_{u,0}$ és la posició de l'usuari relativa al valor temptatiu *a priori*, i $\mathbf{v}_u^{(k)}$ és el vector unitari que va en la direcció del receptor al satèl·lit k -èsim.

Vector unitari

El vector unitari també se sol denominar com el vector de cosinus directors.

Introduint aquest desenvolupament en l'expressió 52, obtenim

$$\frac{\mathbf{p}_c - \mathbf{r}(\mathbf{x}_{u,0})}{\Delta \mathbf{p}_c} = \underbrace{\begin{bmatrix} -(\mathbf{v}_u^{(1)})^T & 1 \\ -(\mathbf{v}_u^{(2)})^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -(\mathbf{v}_u^{(k)})^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_u \\ c\delta t_u \\ \Delta c \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{c}} \quad (55)$$

És immediat identificar cadascun dels termes que apareixen en la formulació habitual de sistemes d'equacions lineals: les dades $\Delta \mathbf{p}_c$, les incògnites $\Delta \mathbf{c}$ i la matriu de coeficients \mathbf{H} . Si $K = 4$, el sistema és determinat i té una única solució (excepte en casos degenerats). Si $K > 4$, el sistema és, en general, sobredeterminat (presenta més d'una solució vàlida), i el que es fa en aquest cas és buscar una solució de mínims quadrats. Aquest valor és el que minimitza la suma de residus, que ara es pot expressar com

$$f(\Delta \mathbf{c}) = (\Delta \mathbf{p}_c - \mathbf{H}\Delta \mathbf{c})^T \mathbf{W}(\Delta \mathbf{p}_c - \mathbf{H}\Delta \mathbf{c}) \quad (56)$$

La solució és

$$\Delta \hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{x}}_u \\ c\delta \hat{t}_u \end{bmatrix} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \Delta \mathbf{p}_c \quad (57)$$

i la nova estimació de la posició és $\hat{\mathbf{x}}_u = \mathbf{x}_{u,0} + \Delta \mathbf{x}_u$. Aquest procediment es pot iterar de nou, linealitzant les equacions al voltant d'aquesta nova posició. La convergència sol ser ràpida, fins i tot si el primer valor temptatiu de la posició té un error de quilòmetres. Se solen fer entre dues i quatre iteracions, i dues és el valor més habitual.

La matriu \mathbf{W} s'hauria de triar de tal manera que es minimitzessin els errors en la posició calculada. Si els errors en els pseudorangs fossin de mitjana zero, la matriu \mathbf{W} que aconseguiria això seria la inversa de la matriu de correlació dels pseudorangs. No obstant això, aquesta matriu de correlació sol ser desconeguda, de manera que s'utilitzen algunes regles heurístiques per a construir la matriu \mathbf{W} . Aquesta matriu ha d'introduir idealment dos efectes:

- Reduir el pes d'aquelles equacions en les quals les mesures siguin més sorolloses o, el que és el mateix, donar més importància a aquelles equacions amb mesures de més qualitat.

- Acoblar les equacions les mesures de les quals estiguin correlades.

Per a aconseguir el primer efecte, és habitual fer que els components de la diagonal de \mathbf{W} siguin directament proporcionals a alguna magnitud relacionada qualitativament amb la qualitat dels pseudorangs, com pot ser la relació C/No o l'angle d'elevació. El segon efecte s'aconsegueix amb els components que estan fora de la diagonal de \mathbf{W} . No obstant això, obtenir una mesura qualitativa de la correlació sol ser complicat i és habitual que la matriu \mathbf{W} sigui diagonal.

5.3.2. Mètodes amb solució tancada

Presentarem un mètode pertanyent al que hem denominat anteriorment com la segona família de tècniques de posicionament, és a dir, aquelles que calculen la posició de manera tancada. Concretament, descriurem el **mètode de Bancroft**, que és possiblement el representant millor conegut d'aquesta família. Cadascuna de les equacions de l'expressió 52 es pot expressar com

$$P_c^{(k)} - c\delta t_u = \sqrt{(x^{(k)} - x_u)^2 + (y^{(k)} - y_u)^2 + (z^{(k)} - z_u)^2} \quad (58)$$

Si l'elevem al quadrat i desenvolupem tots els termes quadràtics, obtenim

$$\begin{aligned} (P_c^{(k)})^2 + (c\delta t_u)^2 - 2P_c^{(k)}c\delta t_u &= (x^{(k)})^2 + (y^{(k)})^2 + (z^{(k)})^2 \\ &+ (x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2 - 2x^{(k)}x_u - 2y^{(k)}y_u - 2z^{(k)}z_u \end{aligned} \quad (59)$$

Ara, definint $B = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2 - (c\delta t_u)^2$ i reagrupant termes, resulta

$$(P_c^{(k)})^2 - (x^{(k)})^2 - (y^{(k)})^2 - (z^{(k)})^2 = -2x^{(k)}x_u - 2y^{(k)}y_u - 2z^{(k)}z_u + 2P_c^{(k)}c\delta t_u + B \quad (60)$$

En aquest punt es pot procedir de dues maneres. La primera consisteix a suposar que B és una variable addicional, ometent la seva relació amb les coordenades i amb l'*offset*. En aquest cas podem plantejar el sistema següent d'equacions lineals

$$\begin{bmatrix} (P_c^{(1)})^2 - (x^{(1)})^2 - (y^{(1)})^2 - (z^{(1)})^2 \\ (P_c^{(2)})^2 - (x^{(2)})^2 - (y^{(2)})^2 - (z^{(2)})^2 \\ \vdots \\ (P_c^{(k)})^2 - (x^{(k)})^2 - (y^{(k)})^2 - (z^{(k)})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x^{(1)} & -2y^{(1)} & -2z^{(1)} & 2P_c^{(1)} & 1 \\ -2x^{(2)} & -2y^{(2)} & -2z^{(2)} & 2P_c^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2x^{(k)} & -2y^{(k)} & -2z^{(k)} & 2P_c^{(k)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ c\delta t_u \\ B \end{bmatrix} \quad (61)$$

que és determinat si $K = 5$. Per a $K > 5$, és un sistema sobredeterminat i es pot resoldre per mínims quadrats, com s'ha discutit anteriorment per al mètode basat en la linealització. No obstant això, part del peatge que paguem en

aquest cas per obtenir la posició sense requerir un valor temptatiu previ és que necessitem mesures d'almenys 5 satèl·lits; la resta del peatge és una precisió pitjor pel que fa als mètodes basats en la linealització.

La segona manera de procedir a partir de l'expressió 60 ens condueix al que es coneix pròpiament com a mètode de Bancroft, i permet evitar que es necessitin 5 satèl·lits com a mínim. Per a un valor determinat de B , el sistema d'equacions resultant és

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} (P_c^{(1)})^2 - (x(1))^2 - (y(1))^2 - (z(1))^2 \\ (P_c^{(2)})^2 - (x(2))^2 - (y(2))^2 - (z(2))^2 \\ \vdots \\ (P_c^{(k)})^2 - (x(k))^2 - (y(k))^2 - (z(k))^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}'} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} B = \\ & = \underbrace{\begin{bmatrix} -2x(1) & -2y(1) & -2z(1) & 2P_c^{(1)} & 1 \\ -2x(2) & -2y(2) & -2z(2) & 2P_c^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2x(k) & -2y(k) & -2z(k) & 2P_c^{(k)} & 1 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ \frac{c\delta t_u}{c} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

la solució de mínims quadrats del qual és

$$\hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_u \\ \hat{y}_u \\ \hat{z}_u \\ \hat{c\delta t}_u \end{bmatrix} = (\mathbf{H}'\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}'^T \mathbf{W}(\mathbf{p}' + 1B) \quad (63)$$

en què \mathbf{W} representa també aquí una determinada matriu simètrica de ponderació. El punt clau consisteix a imposar que B no és un valor arbitrari, sinó que ha de complir una determinada relació amb la resta de les variables, que es pot expressar com a $B = \hat{\mathbf{c}}^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{c}}$, i \mathbf{D} és una matriu diagonal amb uns en totes les posicions excepte en l'última, que val -1 . Aplicant això a l'expressió 63, obtenim

$$B = (\mathbf{p}' + 1B)^T \mathbf{W} \mathbf{H} (\mathbf{H}'^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{H}' \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}'^T \mathbf{W} (\mathbf{p}' + 1B) \quad (64)$$

que és una equació quadràtica en B :

$$1^T \mathbf{T}_1 B^2 + (1^T \mathbf{T}_p - 1)^{-1} B + \mathbf{p}'^T \mathbf{T}_p \mathbf{p}' = 0 \quad (65)$$

en què per simplificar la notació hem definit $\mathbf{T} = \mathbf{W}\mathbf{H}(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{W}$. Els passos següents de l'algorisme consisteixen a resoldre l'equació 65 i introduir el valor obtingut de B en la 63, que ja proporciona directament llavors les estimacions de les coordenades i del rellotge.

En general, els mètodes que calculen la posició de manera tancada impliquen elevar al quadrat les equacions del model per a eliminar l'arrel quadrada de l'expressió de la distància. En fer això també s'eleva al quadrat la contribució del soroll que hi ha en els pseudorangs, i qualitativament es pot entendre que això provoca que els errors augmentin amb aquests mètodes. A més, es modifica la distribució estadística del soroll. Per exemple, si el soroll és Gaussià, en elevar al quadrat el soroll deixa de ser Gaussià i llavors l'ajust de mínims quadrats no necessàriament ha de ser el mètode d'estimació òptim.

5.3.3. Algorismes complets per a la solució de navegació

Una dificultat afegida en el càlcul de la posició del receptor i que hem passat per alt en les explicacions anteriors és el càlcul de la posició dels satèl·lits. Això sorprèn altament a primera vista perquè pensem que les incògnites són les coordenades del receptor i que les coordenades dels satèl·lits són part de les dades. Això no és cert completament, i en general no es pot suposar que les coordenades dels satèl·lits siguin conegudes directament. Ja s'intueix aquí la dificultat del problema, perquè pot semblar impossible poder determinar la posició del receptor si simultàniament també s'ha de determinar la posició dels punts de referència, que són els satèl·lits. No obstant això, el funcionament mateix del sistema GPS demostra que sí que és factible.

La dificultat a determinar la posició de cada satèl·lit es deu al fet que hi ha dos moviments simultanis implicats: el moviment del satèl·lit mateix i el gir de la Terra, que implica que també giri qualsevol sistema de coordenades lligat a aquesta. Per tant, per a calcular la posició del satèl·lit cal saber l'instant de transmissió del senyal (en el temps GPS) per a calcular la posició del satèl·lit en el sistema ECI i també el temps de trànsit del senyal des del satèl·lit fins al receptor per a aplicar la rotació necessària al sistema de coordenades i poder expressar totes les coordenades en un sistema ECEF referit a un únic instant de temps (típicament el de l'instant de recepció). Ja es veu que el càlcul de l'angle de rotació necessari és complicat perquè el temps de trànsit depèn de la posició del satèl·lit i del receptor, i almenys aquesta última és una incògnita. Sembla que estem davant un "problema del gat i el ratolí" perquè per a calcular la posició del receptor necessitem les coordenades dels satèl·lits en un sistema de coordenades adequat, però per a obtenir això últim necessitem les coordenades del receptor... Per tant, el càlcul de la solució de navegació no és tan senzill

com resoldre alguns dels sistemes d'equacions presentats anteriorment, sinó que s'ha d'utilitzar algun algorisme per a solucionar aquesta interdependència entre "dades" i incògnites.

Hi ha diferents variacions d'aquests algorismes en funció de quines siguin les dades de partida. Presentarem els dos algorismes que corresponen a les situacions més habituals:

1) Algorisme 1. Correspon al cas en el qual la determinació de l'instant de transmissió del senyal és directa o gairebé directa. Això ocorre quan es treballa "dins del receptor" (és a dir, tenint accés a la part de processament de senyal del receptor) o quan es disposa dels pseudorangs. En la primera situació es calcula el temps d'emissió del senyal en el temps del satèl·lit simplement observant la posició de la mostra rebuda dins del senyal rebut. Com es coneix en quin instant comencen les subtrames segons el rellotge del satèl·lit i la durada dels xips, es pot calcular el temps d'emissió que correspon a una mostra donada (això es va discutir juntament amb la figura 18). En la segona situació, la definició mateixa de pseudorang (equació 38) ens proporciona l'instant d'emissió mesurat segons el rellotge del satèl·lit:

$$t^s = t_u - \frac{P}{c} \quad (66)$$

En totes dues situacions, podem calcular l'instant d'emissió en l'escala de temps GPS (t_{GPS}^s) corregint l'*offset* del rellotge del satèl·lit, que es transmet a través del missatge de navegació, i resulta en

$$t_{GPS}^s = t^s - \delta t^s \quad (67)$$

Una vegada que es disposa de t_{GPS}^s es pot aplicar l'algorisme següent:

- a) Calcular les coordenades del satèl·lit en l'instant t_{GPS}^s i en el sistema de coordenades ECI.
- b) Calcular una aproximació del temps de trànsit. Es pot suposar que és simplement 70 ms o calcular-lo a partir de la distància geomètrica entre la posició del satèl·lit calculada en el pas *a* i una estimació inicial de la posició del receptor (encara que en aquest punt els sistemes de coordenades en els quals s'expressen cadascuna de les posicions siguin diferents no hi ha cap problema).
- c) Una vegada calculat el temps de trànsit, es fa la rotació de la posició del satèl·lit en l'angle corresponent utilitzant l'expressió 51.
- d) Es poden fer diverses iteracions dels passos *b* i *c*. L'habitual és fer una sola iteració més o cap. En qualsevol cas, les iteracions consisteixen en el següent: calcular la distància geomètrica entre la posició del satèl·lit obtinguda en el pas *c* i la posició *a priori* del receptor; a partir d'aquí, s'obté un nou temps de trànsit, s'aplica la rotació corresponent a la posició obtinguda en el pas *a*, i es pot continuar iterant a partir de la posició resultant de la rotació.
- e) Es resolen les equacions de navegació i s'obté la posició del receptor.
- f) Amb la nova posició del receptor, es pot tornar al pas *b*. És habitual fer aquesta iteració una vegada.

2) **Algorisme 2.** Correspon al cas en el qual la determinació de l'instant de transmissió no és immediat i s'ha d'obtenir a partir de l'instant de recepció. La clau és que les posicions dels satèl·lits no són arbitràries (com ho és en principi la del receptor), sinó que cada satèl·lit solament es pot trobar en una corba de \mathcal{R}^3 que és funció del temps. Atès que l'instant de transmissió no és observable directament com en el cas anterior, sinó que s'ha d'estimar, les coordenades del satèl·lit en l'instant de transmissió i en el sistema ECI tampoc no es poden obtenir directament (a diferència de com es feia en el punt *a* de l'algorisme anterior). O sigui, a diferència del cas 1, en el qual calia esbrinar la rotació que s'havia d'aplicar a les coordenades del satèl·lit; ara, a més d'això, també cal esbrinar de manera implícita quin instant de transmissió és compatible amb l'òrbita que segueixen els satèl·lits i amb l'instant de recepció.

Un possible algorisme adequat per a aquesta situació és el següent:

- a) Calcular una estimació de l'instant de transmissió restant a l'instant de recepció (que és la dada de partida) una estimació del temps de trànsit. En la primera iteració, té sentit utilitzar com a temps de trànsit un valor de 70 ms o proper. En la resta de les iteracions, es pot obtenir a partir de la distància geomètrica entre l'última estimació de les coordenades del satèl·lit i del receptor.
- b) Calcular les coordenades del satèl·lit en el sistema ECI i en l'instant obtingut en el punt anterior.
- c) Calcular el temps de trànsit a partir de les coordenades obtingudes en el pas *b* i una posició *a priori* del receptor.
- d) Fer la rotació de les coordenades del satèl·lit.
- e) S'hi pot tornar en tornar al punt *a*. En aquest cas és habitual fer almenys una iteració més o unes quantes, i llavors parar les iteracions quan les posicions del satèl·lit obtingudes en iteracions successives difereixin menys que un cert lllindar.
- f) Es resolen les equacions de navegació, i s'obté la posició del receptor i l'*offset* del rellotge del receptor.
- g) Amb la nova posició del receptor i el temps de recepció corregit per l'*offset* calculat en el pas *f*, es pot tornar al punt *a*. És habitual fer aquesta iteració una vegada.

En el cas 2, l'instant de transmissió estimat estarà afectat pels *offsets* presents en l'instant de recepció i en la posició del receptor, i aquests *offsets* es traslladen també a les coordenades dels satèl·lits. Això provoca que les derivades parcials que formen el sistema d'equacions linealitzat (equació 55) s'hagin de modificar. No obstant això, aquest és un tema notablement avançat que excedeix el nivell d'aquest material.

5.4. Fonts d'error

Per a l'anàlisi dels errors reprendrem la solució de navegació obtinguda en l'expressió 57 i suposarem, com és habitual en la bibliografia, que els errors en $\Delta \mathbf{p}_c$ tenen mitjana zero i covariància \mathbf{c}_p . Llavors, els errors en les estimacions de les coordenades i de l'*offset* també té mitjana zero i la seva matriu de covariància és

$$\mathbf{c}_{\text{pos}} = \text{cov} \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{x}}_u \\ c \delta t_u \end{Bmatrix} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{C}_p \mathbf{W} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \quad (68)$$

A continuació analitzarem aquesta expressió per a uns valors determinats de les matrius \mathbf{W} i \mathbf{C}_ρ . Encara que siguin uns valors particulars, aquest és el tipus d'anàlisi més habitual en GNSS. L'objectiu no és tant fer una modelització o predicció precisos dels valors dels errors, sinó entendre qualitativament la dependència dels errors en la posició amb els diferents efectes físics, i per a això ens resultaran útils les suposicions que farem a continuació. Si triem la matriu de ponderació com $\mathbf{W} = \mathbf{C}_\rho^{-1}$, llavors

$$\mathbf{C}_{\text{pos}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{C}_\rho^{-1} \mathbf{H}) \quad (69)$$

Si suposem a més que els errors en els pseudorangs estan incorrelats i tenen la mateixa variància, la matriu de correlació adopta l'expressió $\mathbf{C}_\rho = \sigma_{\text{URE}}^2 \mathbf{I}$, i obtenim

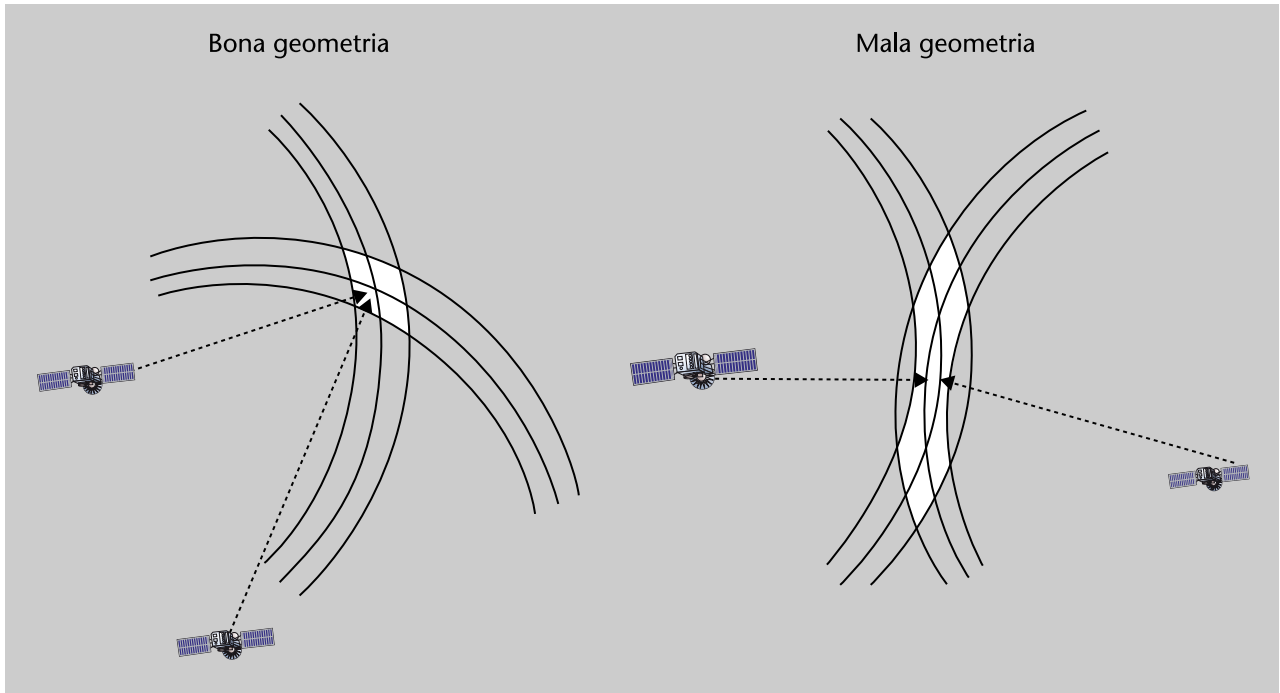
$$\mathbf{C}_{\text{pos}} = \sigma_{\text{URE}}^2 (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \quad (70)$$

en què UERE són les sigles corresponents a *user equivalent range error*. Al final obtenim que la magnitud dels errors depèn de dos factors per separat: dels errors en les mesures, σ_{URE}^2 i d'un terme que és funció únicament de la geometria, $\mathbf{G} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$. Aquest resultat que s'ha obtingut a partir de fórmules és en realitat intuïtiu.

Exemple

Per il·lustrar això, considerem un exemple molt senzill en el qual un usuari es vol posicionar fent mesures de distància (no de pseudodistància) a dos satèl·lits. La posició s'obté com el punt d'intersecció de dues circumferències centrades en les estacions. Això es representa en els esquemes de la figura 20. Els possibles errors en les mesures es mostren com una variació del radi de les circumferències, i és la mateixa en tots dos casos. El que varia és l'angle amb el qual es veuen els satèl·lits des de l'usuari. La zona ombrejada representa la regió de possibles errors en la posició causada pels errors en les mesures. Per a uns mateixos errors en les mesures, els errors en la posició canvien en funció de la posició relativa dels satèl·lits. Els errors augmenten quan els satèl·lits es veuen des de l'usuari en direccions properes o oposades, la qual cosa correspon a la idea intuïtiva que les mesures tenen menys diversitat espacial. D'altra banda, és evident que per a qualsevol de les dues geometries els errors augmentarien si creixés la zona d'incertesa de les mesures (és a dir, la distància entre les circumferències concèntriques).

Figura 20. Exemple simple per a il·lustrar la dependència de la precisió en la posició en els errors de mesura i en la geometria



5.4.1. Factors DOP. Factors geomètrics que afecten el càlcul de la solució de navegació

A continuació analitzarem detalladament cadascun dels factors que afecten els errors. Comencem pels termes lligats a la geometria, pels quals s'introdueixen els anomenats factors DOP (*dilution of precision*).

Els factors DOP són els factors d'escala entre els errors en les mesures i els errors en les variables d'interès (per exemple, posició i *offset* de rellotge).

Per exemple, l'error RMS en la posició (definit com l'arrel quadrada de la suma de variàncies en les tres coordenades) és:

$$\begin{aligned} \text{Error RMS en posició} &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \\ &= \sqrt{[\mathbf{C}_{\text{pos}}]_{1,1} + [\mathbf{C}_{\text{pos}}]_{2,2} + [\mathbf{C}_{\text{pos}}]_{3,3}} = \sigma_{\text{URE}} \sqrt{[\mathbf{G}]_{1,1} + [\mathbf{G}]_{2,2} + [\mathbf{G}]_{3,3}} \end{aligned} \quad (71)$$

Notació

L'element (m,n) d'una matriu es representa com $[\cdot]_{m,n}$.

Per tant, podem definir el PDOP (*position dilution of precision*) com a $\sqrt{[\mathbf{G}]_{1,1} + [\mathbf{G}]_{2,2} + [\mathbf{G}]_{3,3}}$. De la mateixa manera es poden definir altres factors, el significat dels quals és obvi a partir del nom. A continuació se'n mostra la llista completa.

$$\begin{aligned}
\text{Position dilution of precision (PDOP)} &= \sqrt{[\mathbf{G}]_{1,1} + [\mathbf{G}]_{2,2} + [\mathbf{G}]_{3,3}} \\
\text{Time dilution of precision (TDOP)} &= \sqrt{[\mathbf{G}]_{4,4}} \\
\text{Geometric dilution of precision (GDOP)} &= \sqrt{[\mathbf{G}]_{1,1} + [\mathbf{G}]_{2,2} + [\mathbf{G}]_{3,3} + [\mathbf{G}]_{4,4}}
\end{aligned} \tag{72}$$

Les coordenades amb les quals hem treballat fins ara corresponen al sistema ECEF, però des del punt de vista de l'usuari, a l'hora d'avaluar els errors, resulta molt més pràctic i intuïtiu pensar en els components horitzontal i vertical de l'error, que estan definits segons el sistema de coordenades local *east-north-up* (ENU). Les coordenades ECEF es poden transformar en coordenades ENU mitjançant una matriu unitària \mathbf{R}_L . Per tant, la solució de navegació en el sistema ENU és

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{x}_{u,L} \\ \Delta \hat{y}_{u,L} \\ \Delta \hat{z}_{u,L} \\ c \hat{\delta t}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_L & 0 \\ 0 & 1 \\ & \tilde{\mathbf{R}}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{x}_u \\ \Delta \hat{y}_u \\ \Delta \hat{z}_u \\ c \hat{\delta t}_u \end{bmatrix} \tag{73}$$

i la covariància és

$$\mathbf{C}_{\text{pos},L} = (\tilde{\mathbf{R}}_L \mathbf{C}_{\text{pos}} \tilde{\mathbf{R}}_L^T) = \sigma_{\text{URE}}^2 \tilde{\mathbf{R}}_L (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_L^T = \sigma_{\text{URE}}^2 (\tilde{\mathbf{R}}_L \mathbf{H}^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{R}}_L^T)^{-1} \tag{74}$$

en què en l'última igualtat hem utilitzat que $\tilde{\mathbf{R}}_L$ és una matriu unitària.

De manera similar a com hem fet amb la matriu \mathbf{G} , podem definir nous factors DOP a partir de la matriu $\tilde{\mathbf{G}} = (\tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}})^{-1} = (\tilde{\mathbf{R}}_L \mathbf{H}^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{R}}_L^T)^{-1}$. Són els següents.

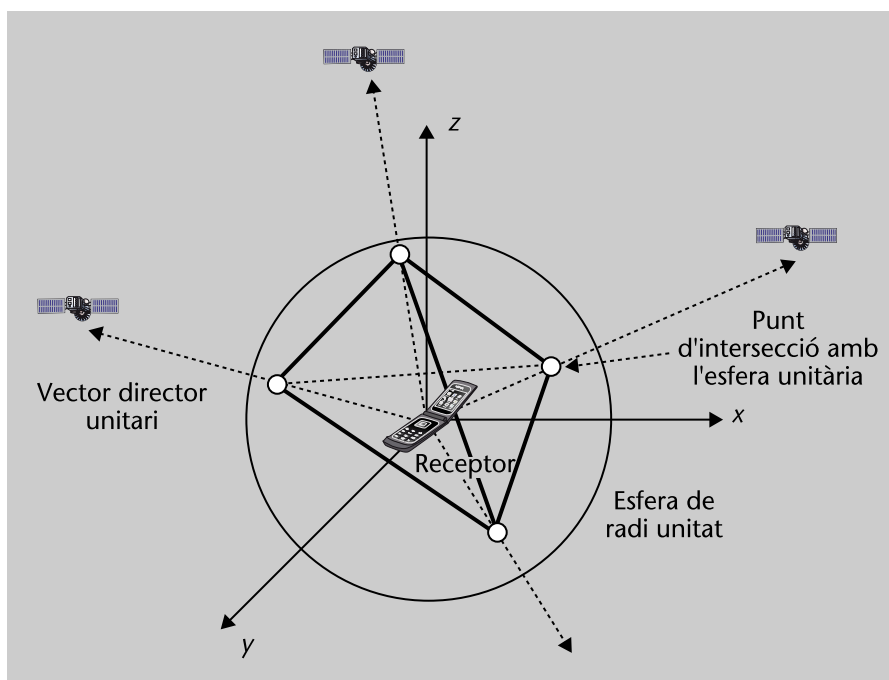
$$\begin{aligned}
\text{Horizontal dilution of precision (HDOP)} &= \sqrt{[\tilde{\mathbf{G}}]_{1,1} + [\tilde{\mathbf{G}}]_{2,2}} \\
\text{Vertical dilution of precision (VDOP)} &= \sqrt{[\tilde{\mathbf{G}}]_{3,3}}
\end{aligned} \tag{75}$$

Els valors de DOP es fan més petits en augmentar el nombre de satèl·lits visibles. HDOP i TDOP són típicament propers a 1, i generalment no sobrepassen el valor de 2, mentre que VDOP tendeix a ser superior a HDOP. Una explicació qualitativa d'això últim és que la precisió horitzontal sol ser millor que la vertical perquè els satèl·lits estan en azimuts distribuïts de manera més o menys uniforme al voltant de l'usuari, però solament amb elevacions positives. De fet, si la Terra fos un globus transparent, llavors, a causa de la simetria del problema, les precisions en les direccions nord, est i vertical serien molt similars. A grans trets, un bon valor (o sigui, un valor baix) d'HDOP requereix una distribució de satèl·lits raonablement uniforme en sentit azimutal i situats no

gaire per sobre de l'horitzó. Per a reduir el VDOP es necessita disposar d'algun satèl·lit proper al zenit. El VDOP es podria reduir més utilitzant satèl·lits situats per sota de l'horitzó, però aquests satèl·lits solament són visibles en receptors embarcats en altres satèl·lits.

En definitiva, un bon PDOP s'obté quan hi ha algun satèl·lit amb una elevació gran i la resta dels satèl·lits cobreixen tots els azimuts. Es pot demostrar que amb 4 satèl·lits el GDOP és mínim quan els vectors directors unitaris dels satèl·lits formen un tetraedre regular de volum màxim (podeu veure la figura 21), és a dir, quan hi ha tres satèl·lits en un pla perpendicular a la direcció d'un quart satèl·lit (els que estan en el zenit o a prop, per exemple) i separats 120° entre ells.

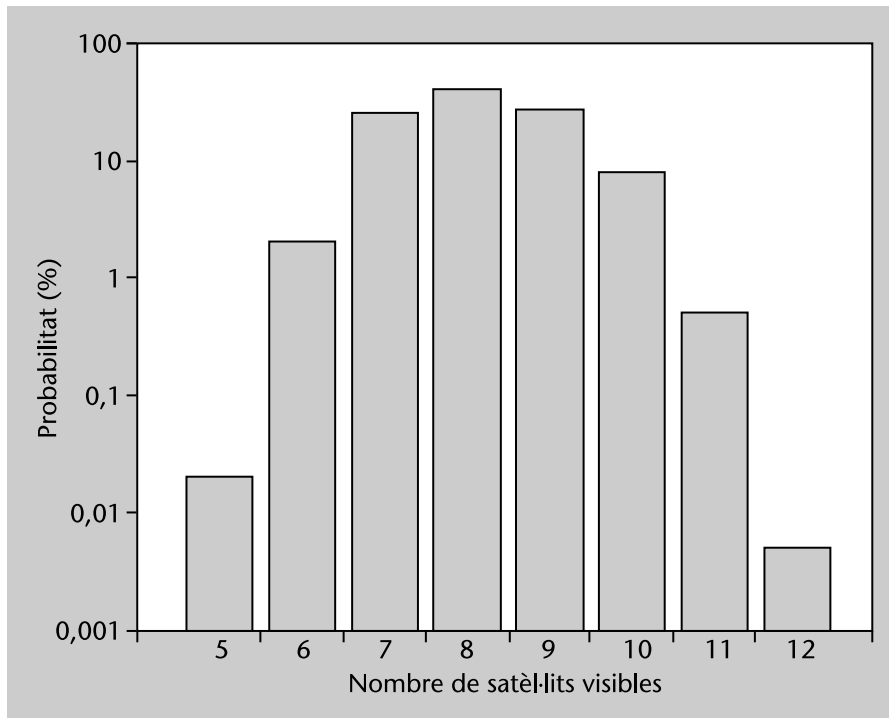
Figura 21. Geometria d'una constel·lació de 4 satèl·lits per a posicionament en 3D



Amb la constel·lació GPS completa, el valor mitjà i el percentil del 99% de l'HDOP són 1 i 1,6, respectivament; els valors corresponents per al VDOP són 1,6 i 3,7, respectivament. Podem observar l'estadística en la figura 22. No obstant això, cal tenir en compte que en la major part de les aplicacions els usuaris no gaudeixen d'una visibilitat sense obstacles de tot el cel, amb la qual cosa s'obtenen valors d'HDOP i VDOP més grans. Els receptors actuals solen tenir un nombre elevat de canals i llavors segueixen tots els satèl·lits visibles. En alguns casos, no obstant això, pot ser que aquest no sigui el cas, com per exemple per reduir el consum d'energia del receptor, en què es pot forçar que segueixi solament un nombre reduït de satèl·lits. En aquesta situació, s'ha de fer una selecció de satèl·lits per seguir. Això mateix ocorria en receptors més antics que tenien un nombre més petit de canals a causa de les limitacions tecnològiques. Per aquests motius, el problema de selecció de satèl·lits ha rebut tradicionalment molta atenció. Encara que hi ha molts criteris en els quals

podem basar la selecció d'un subconjunt de satèl·lits per seguir entre tots els visibles, la selecció basada en la minimització del PDOP o del GDOP és molt habitual.

Figura 22. Histograma del nombre de satèl·lits visibles per sobre d'una elevació de 5° per a un usuari en qualsevol punt de la Terra amb una visibilitat sense obstruccions i amb una constel·lació de 24 satèl·lits



Una vegada conclòs l'estudi de l'efecte de la geometria sobre els errors, analitzarem l'altre factor que hi contribueix. Com hem explicat abans, es tracta dels errors en les mesures mateixes, que en el model senzill que acabem de presentar s'engloben en el terme σ_{URE} . Veurem que aquest model presenta, no obstant això, algunes limitacions.

5.4.2. Errors de mesura en els observables que afecten el càlcul de la solució de navegació

Els errors en els observables (denominats de vegades *errors de mesura* o simplement *errors*) se solen classificar com a *soroll* o *biaix*.

El **soroll** es refereix generalment a un error que varia ràpidament i la mitjana del qual durant un "curt" interval de temps és zero, en què *correlació* es defineix amb relació o bé al temps d'integració o bé al temps de suavització dels observables del receptor.

El que hem denominat *soroll* és un concepte més general que l'efecte del soroll tèrmic, que comentarem més endavant. En comptes de *soroll* també podrém haver fet servir el terme *variabilitat aleatòria*, però *soroll* és una terminologia més habitual.

El **biaix** es refereix a un error que persisteix més enllà d'un període curt de temps.

Aquesta distinció entre soroll i biaix és útil per a entendre els efectes dels errors de mesura.

Depenent de l'origen, els errors es poden classificar en els següents:

- Errors en els valors dels paràmetres difosos pel satèl·lit en el seu missatge de navegació, dels quals el segment de control és responsable.
- Incertesa associada amb el medi de propagació, que afecta el temps de propagació del senyal entre el satèl·lit i el receptor.
- Interferències i soroll captats o generats pel receptor, que afecten la precisió de les mesures, i efectes locals de la propagació als voltants del receptor, que es refereixen fonamentalment a la propagació multicamí deguda als senyals reflectits en la proximitat de l'antena receptora.

Examinarem aquestes fonts d'error a continuació. El nostre objectiu és entendre la naturalesa i magnitud de l'error introduït per cada font, i analitzar l'eficàcia de diferents mètodes de mitigació.

5.4.3. Errors del segment de control: rellotge del satèl·lit i efemèrides

Les efemèrides i els paràmetres del rellotge difosos pel satèl·lit es calculen en el segment de control a partir de les mesures en les estacions monitores. Els valors s'obtenen mitjançant un complicat filtre de Kalman que inclou entre els seus estats variables que descriuen el moviment del satèl·lit (posició i velocitat) i el seu rellotge (biaix de fase, freqüència i de taxa de variació de la freqüència). A partir de les estimacions fetes pel filtre de Kalman, un altre model prediu les efemèrides i els paràmetres del rellotge, que s'han de carregar en els satèl·lits i que aquests difondran mitjançant el missatge de navegació a 50 bps (en el cas

de GPS). Per tant, hi ha errors associats tant a l'estimació dels valors actuals dels paràmetres com a la predicció dels valors futurs. L'error de predicció creix amb l'antiguitat de les dades (AoD, *age of data*), definit com el temps que ha transcorregut des de l'última càrrega dels paràmetres. Òbviament, com més precisos siguin els models utilitzats per a estimar i predir les efemèrides i els paràmetres del rellotge, i més freqüents siguin les recàrregues de la informació en els satèl·lits, més petits seran els errors associats al segment de control. Més densitat d'estacions monitores incrementaria la informació disponible en el filtre de Kalman i redundaria també en menys errors.

L'error rms en la distància atribuït a les efemèrides i al rellotge estava limitat a 6 m en l'especificació del PPS de GPS. Realment, les prestacions dels rellotges han estat millors que les seves especificacions i els errors de predicció s'han mantingut baixos gràcies a transmissions freqüents, i s'han limitat els errors originats en el segment terraquí a 3 m per als satèl·lits dels blocs II/IIA i IIR. Essent això així, finalment s'han reduït els errors a 3 m en l'especificació del servei a partir del bloc IIF.

L'error en les efemèrides se sol descompondre en els seus components segons tres direccions ortogonals definides a partir de l'òrbita del satèl·lit: radial, *along-track* i *cross-track*. En l'estimació d'una òrbita a partir de mesures de distància, l'error en la direcció radial sol ser diverses vegades més petit que en les altres dues direccions. Això és un aspecte favorable perquè l'error en els pseudorangs és la projecció de l'error de posició del satèl·lit en la direcció receptor-satèl·lit, i depèn fonamentalment de la component radial del vector, de manera que la contribució dels components *along-track* i *cross-track* és petita.

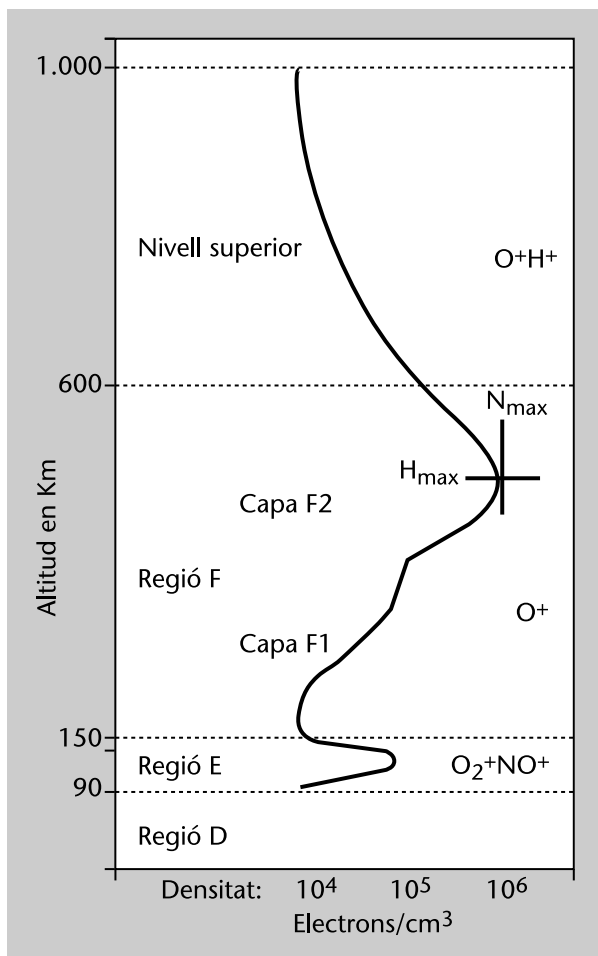
L'error en distància causat pels errors en el rellotge i en les efemèrides es defineix com l'arrel de la suma dels errors de rellotge i de l'error de la component radial de les efemèrides al quadrat. El segment de control monitora en temps real el valor aproximat d'aquest error amb una precisió d'1 m rms. Amb una recàrrega diària del missatge de navegació (que és la periodicitat habitual), l'error rms en les prediccions és aproximadament d'1,5 m a causa del rellotge i de la mateixa magnitud a causa de les efemèrides. Si el segment de control considera que l'error supera un determinat llindar, programa una recàrrega de contingència.

Els satèl·lits dels blocs IIR i IIF disposen d'un mode de funcionament denominat *Autonav* que els permet mantenir baixos els errors de rellotge i efemèrides encara que s'hagi perdut el contacte amb el segment de control (en el bloc IIF, l'error es manté per sota de 3 m –sense comptar el moviment polar i canvis en l'escala de temps UT1– fins i tot estant 60 dies sense contacte amb el control). En el mode *Autonav* s'utilitzen enllaços entre enllaços per a mesurar la distància entre ells. No obstant això, sembla que aquest mode no està operatiu habitualment.

5.4.4. Efectes de la propagació: la ionosfera

La ionosfera és una capa de l'atmosfera formada per gasos ionitzats (per exemple, electrons i ions lliures) situada a una altitud entre 50 km i 1.000 km. La radiació solar és la causa de la ionització i, per tant, l'estat de la ionosfera depèn principalment de la intensitat de l'activitat solar. La ionosfera es compon de diverses capes (denominades D, E, F1 i F2) a diferents altures, cadascuna amb diferents taxes de producció i pèrdua d'electrons lliures (podeu veure la figura 23). La màxima densitat d'electrons està en una franja entre 250 i 400 km d'altura (es tracta de la capa F2).

Figura 23. Capes de la ionosfera i valors típics del contingut d'electrons



Font: extret de Space Environment TOPICS ES-14, Space Environment Center 325 Broadway, Boulder, CO 80303-3326

Les característiques físiques de la ionosfera o, el que és el mateix, la densitat d'electrons lliures, varia entre un i dos ordres de magnitud entre el dia i la nit, i és evidentment més alta durant el dia. Hi pot haver també variacions importants entre diferents dies, estacions o anys, en funció, per exemple, de la fase del cicle solar (de periodicitat igual a 11 anys) en la qual ens trobem. Hi ha també una acusada dependència amb la latitud: la ionosfera presenta una

activitat molt més intensa a les zones equatorials i en els pols magnètics, i és més moderada a les zones temperades. La regió amb més retard ionosfèric és la franja de $\pm 20^\circ$ al voltant de l'equador magnètic.

L'efecte de la ionosfera en la propagació dels senyals electromagnètics es caracteritza quantitativament a partir del TEC (*total electron content*), que és el nombre d'electrons en un cilindre fictici de secció recta igual a 1 m^2 i que uneix el receptor amb el satèl·lit:

$$\text{TEC} = \int_{S \rightarrow R} n_e(l) dl \quad (76)$$

en què $n_e(l)$ és la densitat d'electrons al llarg del camí del senyal i en què la integració es fa per a la línia que uneix el satèl·lit i el receptor. És clar que el camí de propagació per l'interior de la ionosfera és més curt quan el satèl·lit es troba al zenit i, per tant, el valor del TEC en la direcció vertical (TECV) és més baix que el valor per a qualsevol altra elevació. Realment, la ionosfera se sol caracteritzar amb el valor TECV, ja que és independent de l'elevació, i és fàcil calcular, almenys de manera aproximada, el valor del TEC per a una determinada elevació a partir del valor del TECV. Tant és així, que és habitual referir-se al valor de TECV com a simplement TEC. La unitat de mesura del TEC (o del TECV) és el TECU (TEC units), definit com 10^{16} electrons/ m^2 . TECV típicament varia entre 1 i 150 TECU. Per a un lloc i instant donat, el TECV pot canviar un 20-25% pel que fa a la mitjana mensual, la qual cosa representa una variació molt important. La majoria dels models actuals de la ionosfera no proporcionen una representació suficientment realista de la variació diària del TEC per a servir de base per a la navegació de precisió.

Refracció i dispersió

La presència d'un medi diferent del buit canvia la velocitat (magnitud i direcció) de propagació de les ones electromagnètiques. Aquest fenomen es denomina *refracció*. El canvi en la velocitat de propagació modifica el temps de trànsit del senyal pel medi, que és el principal observable en GPS. L'índex de refracció (n) d'un medi es defineix com el quocient entre la velocitat de propagació de l'ona en el buit (c) i en el medi (v):

$$n = \frac{c}{v} \quad (77)$$

Simplement cal esmentar aquí que en l'expressió anterior la velocitat es refereix al que se sol denominar *velocitat de fase*. Més endavant s'entendrà per què fem aquesta puntualització. Molts medis, i en particular la ionosfera i la troposfera, no són uniformes quant a la seva composició i l'índex de refracció canvia al llarg del camí que segueix l'ona. Això provoca que la velocitat de propagació també canviï i, llavors, el temps de trànsit està determinat per:

$$\tau_\phi = \frac{1}{c} \int_{S \rightarrow R} n(l) dl \quad (78)$$

en què la integral es fa al llarg del camí que va del satèl·lit al receptor i $n(l)$ és l'índex de refracció en cada punt d'aquest camí. La variació de l'índex de refracció també causa una curvatura dels rajos (lleis de Snell). No obstant això, l'impacte d'això en GNSS en el temps de propagació és menyspreable.

Si l'índex de refracció també depèn de la freqüència, es diu que el medi és dispersiu. Per exemple, és ben conegut que un prisma de cristall o gotes d'aigua en suspensió en

l'aire són medis dispersius, i per això creen un arc de sant Martí quan la llum els creua. Considerem ara que transmetem un senyal modulat en amplitud en un medi dispersiu:

$$s(t) = \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_c t) \quad (79)$$

en què f_m és la freqüència moduladora, f_c és la freqüència portadora i es compleix que $f_m \ll f_c$. En el context de GPS, f_m podria correspondre a la velocitat de xip (per exemple, 1 MHz) i f_c a la portadora de la banda L1 (per exemple, 1,5 GHz). Recordem que el nombre d'ona es defineix com

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v|f} = \frac{2\pi}{c|(nf)} = nf \frac{2\pi}{c} \quad (80)$$

en què hem utilitzat l'expressió 77, i que la longitud d'ona és $\lambda = \frac{v}{f}$.

El senyal (es pot veure alternativament com la suma de dues portadores lleugerament desplaçades):

$$s(t) = \frac{1}{2} [\cos(2\pi(f_c + f_m)t) + \cos(2\pi(f_c - f_m)t)] \quad (81)$$

que es propaguen també a velocitats lleugerament diferents, i que estan determinades pels seus nombres d'ona respectius (els subíndexs + y - fan referència a les freqüències suma i diferència, respectivament):

$$\begin{aligned} k_+ &\approx k_c + \frac{dk}{df} f_m \\ k_- &\approx k_c - \frac{dk}{df} f_m \end{aligned} \quad (82)$$

En l'expressió anterior s'ha linealitzat la variació del nombre d'ona amb la freqüència. El valor del nombre d'ona en la freqüència portadora s'ha denominat k_c . Si el medi no fos dispersiu, la variació seria exactament lineal amb la freqüència, és a dir: $dk/df = n2\pi/c$.

Si la distància geomètrica entre el transmissor i el receptor és r , el senyal rebut és (ignorant per senzillesa canvis en l'amplitud):

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{2} [\cos(2\pi(f_c + f_m)t - k_+ r) + \cos(2\pi(f_c - f_m)t - k_- r)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(2\pi(f_c + f_m)t - k_c r - \frac{dk}{df} f_m r) + \cos(2\pi(f_c - f_m)t - k_c r + \frac{dk}{df} f_m r)] \\ &= \cos(2\pi f_m t - \frac{dk}{df} f_m r) \cos(2\pi f_c t - k_c r) \\ &= \cos(2\pi f_m (t - \frac{1}{2\pi} \frac{dk}{df} r)) \cos(2\pi f_c (t - \frac{1}{2\pi} \frac{k_c}{f_c} r)) \end{aligned} \quad (83)$$

Observem que els retards que experimenten l'envolupant (o moduladora) i la portadora són diferents, la qual cosa indica que viatgen a dues velocitats diferents (podeu veure la figura 24). Identificant els termes adequats en l'expressió anterior, es dedueix que la velocitat de la portadora és

$$v_p = 2\pi \frac{f_c}{k_c} \quad (84)$$

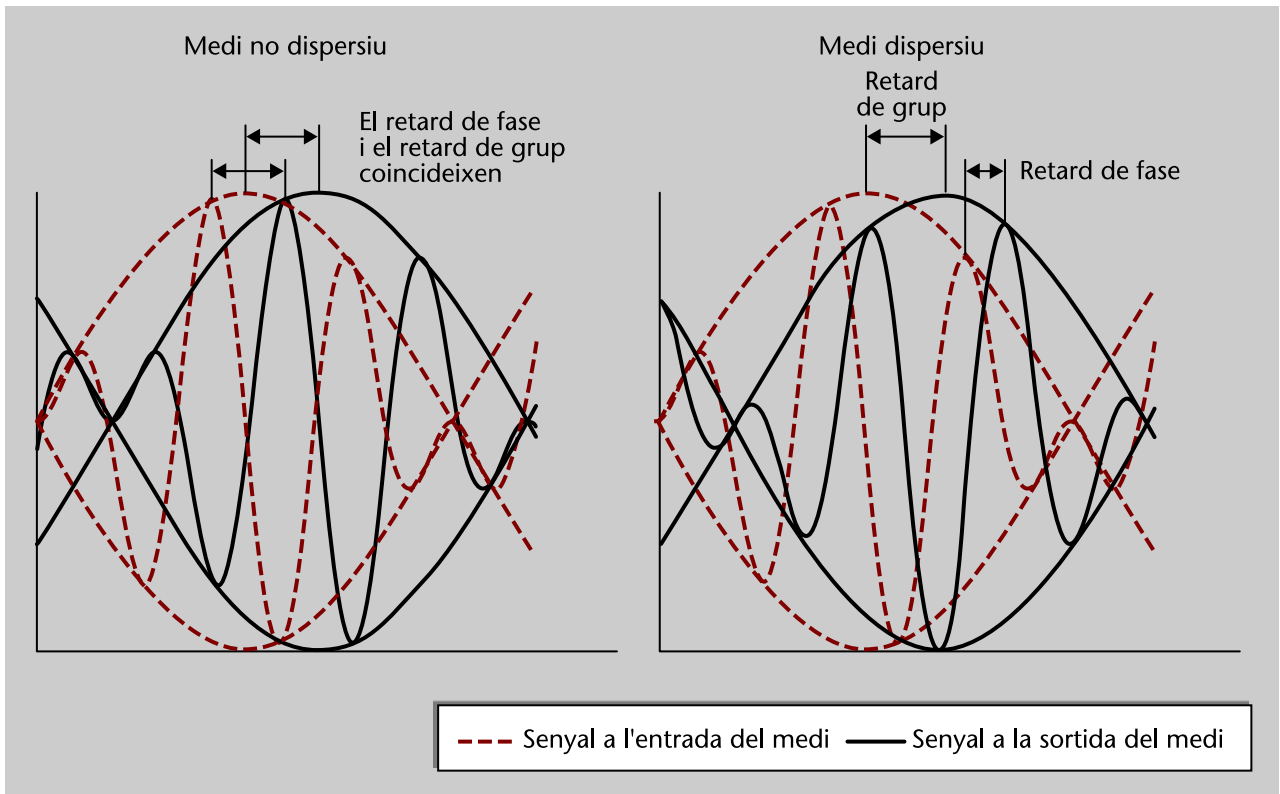
que se sol denominar *velocitat de fase*, i és la velocitat que ja havíem presentat anteriorment en introduir l'índex de reflexió en l'expressió 77, mentre que la velocitat de propagació de l'envolupant és

$$v_g = 2\pi \frac{df_c}{dk_c} \quad (85)$$

que rep el nom de *velocitat de grup*. Els retards respectius es denominen *retard de fase* i *retard de grup*. La velocitat de grup és realment la velocitat a la qual viatja l'energia del senyal i, per tant, sempre és més petita o igual que la velocitat de la llum en el buit. D'altra banda, la velocitat de fase és una velocitat aparent i pot ser més gran que c . És immediat

comprovar que si l'índex de refracció no depèn de la freqüència, llavors la velocitat de fase i de grup són iguals.

Figura 24. Propagació d'un senyal modulat en un medi no dispersiu i en un de dispersiu



Per coherència en la notació, l'índex de refracció que hem definit en l'equació 77 es pot anomenar també *índex de refracció de fase* (n_p) i es defineix de manera similar un nou paràmetre, denominat *índex de refracció de grup*, com

$$n_g = \frac{c}{v_g} \quad (86)$$

La ionosfera, com qualsevol gas ionitzat, és un medi dispersiu per a les ones electromagnètiques. El valor del seu índex de refracció és (menyspreant termes d'ordre superior en f):

$$n_p \approx 1 - \frac{40,3n_e}{f^2} \quad (87)$$

El retard de fase a l'excés (per exemple, a l'excés pel que fa a la propagació en l'espai buit) és

$$\Delta\tau_\phi = \frac{1}{c} \int_{S \rightarrow R} (n_p(l) - 1) dl = -\frac{1}{c} \int_{S \rightarrow R} \frac{40,3n_e}{f^2} dl = -\frac{40,3 \text{ TEC}}{c f^2} \quad (88)$$

i expressat en metres

$$I_\phi = c\Delta\tau_\phi = -\frac{40,3 \text{ TEC}}{f^2} \quad (89)$$

que és la magnitud que havíem utilitzat en l'expressió 47. Aquests retards són negatius (o sigui, són avançaments), que és coherent amb el fet que l'índex de refracció és més petit que 1 i, per tant, la velocitat de fase és més gran que en el buit.

Podem comprovar que l'índex de refracció de grup i el retard de grup en metres són

$$\begin{aligned} n_g &= 1 + \frac{40,3n_e}{f^2} \\ I_\rho &= -I_\phi = \frac{40,3\text{TEC}}{f^2} \end{aligned} \quad (90)$$

Un canvi del TEC en 1 TECU correspon aproximadament a un canvi de 16 cm en el retard ionosfèric a la freqüència L1.

Per a calcular el retard a una determinada elevació a partir del retard zenital es pot utilitzar el denominat model de capa fina (*thin shell model*), que consisteix a suposar que la ionosfera es concentra en una capa molt prima a una determinada altura h_I de la Terra (entre 300 i 400 km). D'aquesta manera, el càlcul de la longitud del camí de propagació dins de la ionosfera es redueix únicament a una qüestió geomètrica, representada quantitativament pel factor d'obliquïtat (OF), i s'evita haver de fer la integral de la densitat d'electrons al llarg del camí en qüestió. El factor d'obliquïtat és la constant de proporcionalitat entre el TEC per a una determinada elevació (el) i el TECV, o, el que és el mateix, entre el retard ionosfèric a una elevació i en direcció zenital:

$$\begin{aligned} \text{TEC}(el) &= \text{OF}(el) \cdot \text{TECV} \\ I_\rho(el) &= \text{OF}(el) \cdot I_\rho(90^\circ) \end{aligned} \quad (91)$$

L'expressió més habitual és

$$\text{OF}(el) = \left(1 - \left(\frac{R_E \cos(el)}{R_E + h_I} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (92)$$

El retard ionosfèric zenital típicament varia a latituds mitjanes d'1-3 m a la nit a 5-15 m al principi de la tarda. Valors tan alts com 36 m han estat observats prop de l'equador en el període més actiu del cicle solar. La magnitud d'aquests valors indica que la contribució de la ionosfera és significativa en els pseudorangs i no es pot obviar si es vol obtenir un error de posicionament per sota d'una desena de metres. Una opció per a eliminar els errors ionosfèrics és utilitzar algun model que proporciona una estimació del retard ionosfèric a partir de certs paràmetres. El model més habitual és el de Klobuchar, que és el que utilitza el sistema GPS mateix. Aquest model calcula el retard zenital a la freqüència L1 com una constant durant la nit i com un semiarc de cosinus en funció del temps durant el dia:

$$\hat{I}_\rho(t, 90^\circ) = \begin{cases} cA_1 + cA_2 \cos\left(\frac{2\pi(t-A_3)}{A_4}\right), & \text{si } |t - A_3| < \frac{A_4}{4} \\ cA_1, & \text{en cas contrari} \end{cases} \quad (93)$$

Els paràmetres de A_1 i A_3 prenen valors predeterminats, mentre que els valors de A_2 i A_4 es transmeten de manera indirecta en el missatge de navegació de GPS (concretament en la subtrama 4) per mitjà dels 8 coeficients de dos polinomis (4 coeficients per polinomi) que s'utilitzen per a aproximar aquests valors. El factor d'obliquïtat que s'utilitza en el model de Klobuchar és

$$\text{OF}_{kl}(el) = 1 + 16\left(0,53 - \frac{el}{\pi}\right)^3 \quad (94)$$

El model de Klobuchar és capaç de corregir aproximadament el 50% (rms) dels errors ionosfèrics. Això implica que a latituds mitjanes, l'error ionosfèric residual en la direcció del zenit pot arribar a 10 m durant el dia i ser molt més gran durant períodes d'alta activitat solar. Per tant, no es pot dir que el model de Klobuchar sigui la solució adequada quan es vol un posicionament precís. Hi ha altres models millorats, com el model de NeQuick, que corregeix aproximadament un 75% dels errors. Aquest és el model proposat per al sistema Galileo, que en contrapartida incrementa els requisits de memòria del receptor perquè és necessari desar un mapa d'informació ionosfèrica.

La solució més efectiva per a eliminar els errors ionosfèrics es basa a utilitzar observables a dues freqüències (per exemple, L1 i L2, però es pot utilitzar qualsevol altre parell de freqüències). Reescriurem l'equació 43 fent explícita la dependència amb la freqüència

$$\begin{aligned} P_{L1} &= r + c(\delta t_u - \delta t^s) + \frac{40,3\text{TEC}}{f_{L1}^2} + T_\rho + \varepsilon_{\rho,L1} \\ P_{L2} &= r + c(\delta t_u - \delta t^s) + \frac{40,3\text{TEC}}{f_{L2}^2} + T_\rho + \varepsilon_{\rho,L2} \end{aligned} \quad (95)$$

La contribució de la ionosfera no es pot eliminar directament perquè el valor del TEC és desconegut, però el punt clau aquí és aprofitar la dependència del retard ionosfèric amb $1/f^2$. Podem fer la combinació lineal següent dels pseudorangs

$$P_{IF} = \frac{f_{L1}^2 P_{L1} - f_{L2}^2 P_{L2}}{f_{L1}^2 - f_{L2}^2} = r + c(\delta t_u - \delta t^s) + T_\rho + \frac{f_{L1}^2 \varepsilon_{\rho,L1} - f_{L2}^2 \varepsilon_{\rho,L2}}{f_{L1}^2 - f_{L2}^2} \quad (96)$$

que es denomina combinació lliure d'ionosfera. Hem construït un nou pseudorang en què l'error ionosfèric ha desaparegut completament. Això és cert almenys per a la part de la contribució de la ionosfera que depèn de $1/f^2$, que és aproximadament un 99,9% de la contribució total. Hi ha termes d'ordre superior que no desapareixen en fer la combinació en l'expressió 96, però aquests termes solen prendre valors molt petits i solament és necessari considerar-los

en aplicacions molt concretes d'alta precisió. El preu que es paga per eliminar el biaix causat per la ionosfera és un increment del soroll. Per a determinar únicament l'ordre de magnitud d'aquest increment, suposem que $\varepsilon_{\rho,L1}$ i $\varepsilon_{\rho,L2}$ tenen la mateixa variància i fossin incorrelats; llavors la desviació típica de l'últim terme de l'expressió 96 seria un factor

$$\frac{\sqrt{f_{L1}^4 + f_{L2}^4}}{f_{L1}^2 - f_{L2}^2} \approx 2,98 \quad (97)$$

més gran que la dels termes corresponents en l'equació 95.

Hi ha aplicacions científiques en què l'interessant és estimar el retard ionosfèric (i, a partir d'això, el TEC), en lloc de cancel·lar-lo. Això també és possible quan es disposa d'observables a dues freqüències. Per a això s'utilitza la denominada *combinació ionosfèrica*

$$P_I = P_{L2} - P_{L1} = 40,3 \cdot \text{TEC} \cdot \left(\frac{1}{f_{L2}^2} - \frac{1}{f_{L1}^2} \right) + \varepsilon_{\rho,L2} - \varepsilon_{\rho,L1} \quad (98)$$

La combinació lliure d'ionosfera i la combinació ionosfèrica que hem definit per als pseudorangs també es pot aplicar a les fases de portadora. Per a això, definim l'observable de fase en metres (L) a partir de l'observable de fase en cicles (Φ) que presentem en l'expressió 48: $L = \lambda \times \Phi$. Les combinacions per a les fases són:

$$L_{IF} = \frac{f_{L1}^2 L_{L1} - f_{L2}^2 L_{L2}}{f_{L1}^2 - f_{L2}^2} = r + c(\delta t_u - \delta t^s) + cT_\rho + c \frac{f_{L1} N_{L1} - f_{L2} N_{L2}}{f_{L1}^2 - f_{L2}^2} + c \frac{f_{L1} \varepsilon_{\phi,L1} - f_{L2} \varepsilon_{\phi,L2}}{f_{L1}^2 - f_{L2}^2} \quad (99)$$

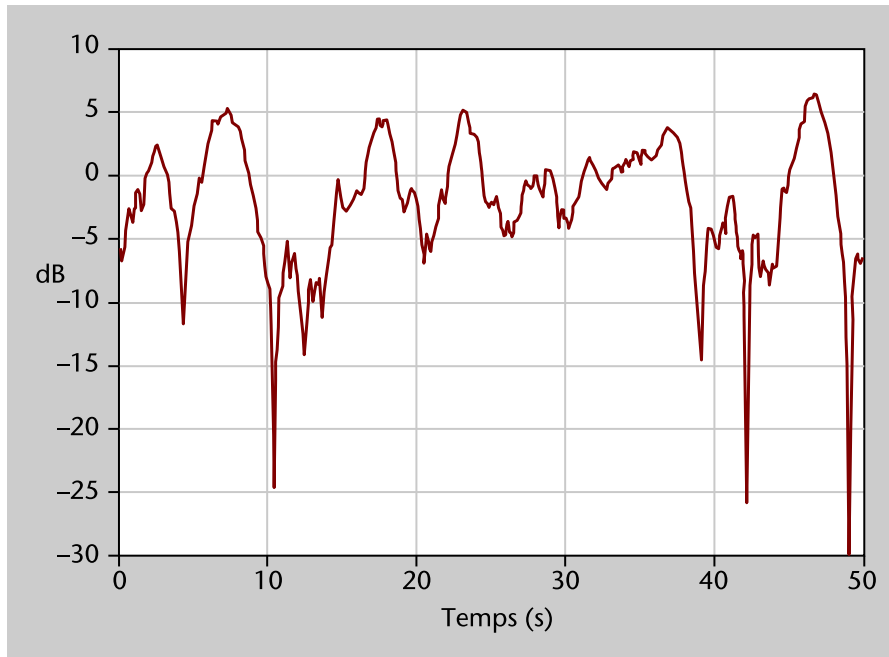
$$L_I = L_{L2} - L_{L1} = 40,3 \cdot \text{TEC} \cdot \left(\frac{1}{f_{L2}^2} - \frac{1}{f_{L1}^2} \right) + \lambda_{L2} N_{L2} - \lambda_{L1} N_{L1} + \lambda_{L2} \varepsilon_{\phi,L2} - \lambda_{L1} \varepsilon_{\phi,L1} \quad (100)$$

En L_I s'ha invertit l'ordre dels termes en la resta perquè la contribució de la ionosfera aparegui amb el mateix signe que en P_I . El comportament d'aquestes combinacions pel que fa a la ionosfera és el mateix que el comentat per als pseudorangs (per exemple, en una s'elimina la ionosfera i l'altra serveix per a estimar-la), però són ambigües. Un fet destacable és que les ambigüitats en aquests nous observables deixen de ser nombres enters de cicles, com ocorria en els observables de fase originals.

En fer combinacions d'observables mesurades a diverses freqüències cal considerar en els models un efecte que fins ara no havíem inclòs, i es tracta de l'*interfrequency bias (IFB)*. El receptor introdueix retards/desfasaments diferents dels senyals que arriben a diferents freqüències. La diferència d'aquests retards/desfasaments és l'IFB.

A més del retard de grup i de fase, que són constants en intervals curts de temps, la ionosfera també causa unes fluctuacions ràpides en la fase i en l'amplitud del senyal, que es denomina *centelleig ionosfèric* (*scintillation*, en anglès). Podem observar uns exemples d'això en la figura 25. Es deu a les irregularitats en la distribució d'electrons al llarg del camí de propagació, que al seu torn estan causades per flamarades i tempestes magnètiques originades al Sol.

Figura 25. Esvaïments en l'amplitud del senyal



Font: extret d'IEEA - GISM Global Ionospheric Scintillation Model RP_257_08/01/2008

5.4.5. Efectes de la propagació: la troposfera

Els senyals GPS pateixen també l'efecte de la refracció en les capes baixes de l'atmosfera a causa de la presència de gasos secs (principalment N_2 i O_2) i vapor d'aigua. Aquest últim es troba a altures inferiors a 12 km respecte al nivell del mar, i la concentració més gran es troba en els 4 km més baixos. Els gasos secs es troben en concentracions decreixents gradualment fins a altures de centenars de quilòmetres. Les tres quartes parts dels gasos secs es troben en la troposfera, que és la part més baixa de la ionosfera i té una altura aproximada de 16 km en l'equador i 9 km en els pols. L'efecte combinat dels gasos secs i el vapor d'aigua rep la denominació d'efecte troposfèric.

A diferència de la ionosfera, la troposfera no és dispersiva a les freqüències de GNSS (és a dir, l'índex de refracció no depèn de la freqüència). L'índex de refracció dels gasos és lleugerament superior a la unitat: $n \approx 1,003$ al nivell del mar, i està encara molt més proper a 1 a la zona superior de la troposfera. La velocitat de propagació (tant la de fase com la de grup, que en aquest medi són iguals) és lleugerament inferior a la de l'espai lliure i, en conseqüència, la distància aparent al satèl·lit és superior a la geomètrica en 2,5-25 m, depenent de l'elevació del satèl·lit. L'efecte de la troposfera és el mateix en els pseudorangs i en les fases (cosa que significa, en la nomenclatura utilitzada en els apartats

anteriors, que $T_\rho = T_\phi$), i també el mateix en les diferents freqüències. Aquest retard comú a totes les mesures que es fan a un satèl·lit no pot ser estimat a partir de les mesures mateixes, i és necessari recórrer a models per a corregir-lo.

La magnitud del retard troposfèric experimentat per un senyal depèn de l'índex de refracció de l'aire al llarg del camí de propagació. L'índex de refracció d'una massa d'aire és funció de la seva densitat, que es pot expressar com la suma de les densitats de l'aire sec i del vapor d'aigua. Aquestes densitats són al seu torn funció de la pressió dels gasos i del vapor d'aigua, i de la temperatura. Els gasos secs i el vapor d'aigua afecten de manera diferent la propagació d'un senyal d'RF i es modelitzen per separat. La composició dels primers varia amb la latitud, estació i altitud, però és moderadament constant al llarg del temps. No obstant això, el contingut de vapor d'aigua de la troposfera és molt més difícil de modelitzar, ja que canvia amb la situació meteorològica local i pot canviar ràpidament. Afortunadament, la major part del retard troposfèric (aproximadament el 90%) es deu als components secs, que són més predictibles.

Resulta apropiat definir la refractivitat com a $N = (n - 1) \times 10^6$, que es pot expressar com la suma dels components deguts als gasos secs i al vapor d'aigua en l'atmosfera

$$N_t = N_{t,d} + N_{t,w} \quad (101)$$

en què $N_{t,d}$ i $N_{t,w}$ es denominen refractivitat seca i humida, respectivament.

Seguint els mateixos passos que en el cas de la ionosfera, l'excés de retard (en metres) introduït per la troposfera és

$$T_\rho = 10^{-6} \int_{S \rightarrow R} N_t(l) dl = 10^{-6} \int_{S \rightarrow R} (N_{t,d}(l) + N_{t,w}(l)) dl = T_{\rho,d} + T_{\rho,w} \quad (102)$$

en què $T_{\rho,d}$ i $T_{\rho,w}$ es denominen *retard sec* i *humit*, respectivament. També, igual que en la ionosfera, menyspreem l'efecte de la curvatura dels rajos a causa de la variació de l'índex de refracció i ens centrem en el retard ocasionat per la reducció en la velocitat de propagació.

Els models de la troposfera intenten estimar les refractivitats seca i humida a partir de diversos paràmetres físics, com la pressió atmosfèrica total (P), la pressió parcial del vapor d'aigua (e) i la temperatura (T_a). Expressions aproximades amb uns coeficients determinats empíricament són:

$$N_{t,d} = 77,64 \frac{P}{T_a}, \quad N_{t,w} = 3,73 \cdot 10^5 \frac{e}{T_a^2} \quad (103)$$

en què les pressions estan en unitats de mil·libars i la temperatura en kelvins. El coneixement d'aquestes magnituds físiques al llarg del camí de propagació permet obtenir els retards troposfèrics de manera precisa a partir de l'expressió 102. Aquestes magnituds se solen determinar per a la direcció vertical a partir de mesures fetes amb globus sonda. El problema és que els usuaris de GPS poques vegades tenen accés a aquestes dades meteorològiques detallades (o no estan disposats a pagar-hi). Un procediment més senzill i barat consisteix a mesurar P , e i T_a en la posició del receptor i extrapolar-ne a partir de models l'evolució amb l'altura. No obstant això, això no deixa de ser també complex i solament és utilitzat per usuaris que necessiten una gran precisió (un exemple d'això són les estacions dedicades a mesurar el moviments de les plaques tectòniques). Per a un usuari convencional, fer mesures meteorològiques és poc pràctic, de manera que en la majoria de les situacions es recorre a estimar el retard troposfèric a partir de condicions meteorològiques mitjanes proporcionades per un model d'atmosfera *estàndard* per a un dia donat i uns valors de latitud i altitud.

Un model d'atmosfera *estàndard* és una especificació del perfil mitjà de pressió, humitat i temperatura en funció de l'altitud, i també les variacions amb les estacions i la latitud.

Suposem que disposem de valors de la temperatura i les dues pressions en la posició de l'antena obtingudes bé per mitjà de mesures o bé de models de l'atmosfera estàndard. Seguidament cal trobar una manera d'extrapolar aquests valors o els índexs de refracció corresponents al llarg de l'atmosfera i fer la integració en l'expressió 102. Hi ha dues alternatives principals, que es coneixen com el model de Saastamoinen i el model de Hopfield.

El **model de Saastamoinen** es basa en uns determinats gradients de pressió i temperatura segons l'altitud i conclou que els retards zenitals són

$$\begin{aligned} T_{\rho,d}(90^\circ) &= 0,002277 \left(1 + 0,0026 \cos(2\phi_{\text{lat}}) + 0,00028H \right) P \\ T_{\rho,w}(90^\circ) &= 0,002277 \left(\frac{1,255}{T_a} + 0,05 \right) e \end{aligned} \quad (104)$$

en què ϕ_{lat} és la latitud i H l'altura ortomètrica en km.

El **model de Hopfield** proposa les evolucions següents dels índexs de refracció

$$\begin{aligned} N_{t,d} &= N_{t,d0} \left(1 - \frac{h}{h_d} \right)^4, \quad \text{para } h \leq h_d \\ N_{t,w} &= N_{t,w0} \left(1 - \frac{h}{h_w} \right)^4, \quad \text{para } h \leq h_w \end{aligned} \quad (105)$$

en què h és l'altura sobre l'antena, $h_d = 43$ km i $h_w = 12$ km. Se suposa que els índexs de refracció són zero a partir d'aquestes altures. Els valors de $N_{t,d0}$ i $N_{t,w0}$ s'obtenen aplicant l'expressió 103 amb els valors de pressió i temperatura disponibles. Finalment, els retards zenitals són

$$\begin{aligned} T_{\rho,d}(90^\circ) &= 77,64 \cdot 10^{-6} \frac{P}{T_a} \frac{h_d}{5} \\ T_{\rho,w}(90^\circ) &= 0,373 \frac{e}{T_a^2} \frac{h_w}{5} \end{aligned} \quad (106)$$

En qualsevol cas, una vegada trobats els valors s'han de trobar els que corresponen a una determinada elevació del satèl·lit. Per a això s'utilitzen, igual que en la ionosfera, els factors d'obliquïtat, encara que en el context de la troposfera se solen denominar funcions de mapatge (*mapping functions*). Els retards troposfèrics són, llavors

$$\begin{aligned} T_{\rho,d}(el) &= T_{\rho,d}(90^\circ) m_d(el) \\ T_{\rho,w}(el) &= T_{\rho,w}(90^\circ) m_w(el) \end{aligned} \quad (107)$$

en què s'utilitzen en general funcions de mapatge diferents per als components secs i humits, a causa que la distribució dels gasos i del vapor d'aigua és diferent amb l'altura (independentment del perfil concret, el vapor d'aigua ocupa una regió de menys altura que els gasos).

Hi ha una gran varietat de funcions de mapatge. La més senzilla és $1/\sin(el)$, que ignora la curvatura de la Terra i, per tant, no funciona bé per a elevacions baixes ($el < 15^\circ$). Una altra opció una mica més precisa és utilitzar una funció del mateix tipus que el factor d'obliquïtat emprat en la ionosfera (equació 92):

$$m(el) = \left(1 - \left(\frac{\cos(el)}{1.001} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (108)$$

que es coneix com la funció de Black&Eisner. Avui dia la complexitat de càlcul no és una gran limitació i és habitual utilitzar funcions de mapatge basades en un desenvolupament truncat de funcions contínues. Si es trunca a partir del tercer terme, el resultat és:

$$m_i(el) = \frac{1 + \frac{a_i}{b_i}}{1 + c_i} \frac{1}{\sin(el) + \frac{a_i}{\sin(el) + \frac{b_i}{\sin(el) + c_i}}} \quad (109)$$

en què els coeficients a_i , b_i i c_i es calculen per separat per al component sec i per al vapor d'aigua, bé de manera empírica o bé a partir de les variables físiques: latitud, altura, temperatura i pressió en l'antena, i dia de l'any.

La funció de mapatge de la troposfera augmenta ràpidament en baixar l'elevació del satèl·lit, i són molt més grans que els factors d'obliquïtat de la ionosfera a baixes elevacions¹⁶. Valors típics de la funció de mapatge són dos a 30°, quatre a 15°, sis a 10° i deu a 5°. Un petit error de 5-10 cm en l'estimació del retard troposfèric vertical creix fins a 0,5-1 m si el satèl·lit està a 5° d'elevació, que no és vital en navegació a escala de metres però sí en navegació centimètrica.

El valor de $T_{\rho,d}(90^\circ)$ és de 2,3-2,6 m a escala del mar, i es redueix amb l'altitud, i és de 2 m aproximadament a 2 km d'altitud i d'1 m en els cims de l'Himàlaia. El seu valor es pot predir amb gran precisió (errors de pocs mil·límetres) si es disposa de mesures precises de la pressió en la superfície. El valor de $T_{\rho,w}(90^\circ)$ varia entre gairebé zero i 80 cm. Aquest valor és més difícil de calcular que el retard sec perquè la distribució del vapor d'aigua al llarg del camí del senyal és altament variable. Si es disposa de mesures meteorològiques de superfície, l'error és d'1-2 cm. Si s'utilitzen valors meteorològics mitjans en lloc de les mesures reals, l'error en l'estimació de l'error troposfèric vertical total pot ser de 5-10 cm.

L'enfocament que aquí hem adoptat és el d'un usuari que desitja calcular la posició amb GPS i, per tant, ha d'utilitzar models i/o mesures per a eliminar l'error ionosfèric dels observables GPS. Però també seria possible adoptar l'enfocament de l'observació de l'atmosfera, on la magnitud d'interès és justament el retard troposfèric (especialment el degut al vapor d'aigua) per a extreure a partir d'ell les variables meteorològiques. Es podria utilitzar una xarxa d'estacions GPS en posicions conegudes, que proporcionarien observables a partir dels quals s'estimaria l'efecte de la troposfera. Això substituiria el costós llançament de sondes que es fa avui dia per a monitorar l'atmosfera (solament als Estats Units el US Weather Service llança més de 160 sondes cada dia). No

⁽¹⁶⁾ Això és fàcil de justificar qualitativament observant la geometria del problema i els camins que segueix el senyal per dins de la troposfera i de la ionosfera.

$T_{\rho,w}(90^\circ)$

El valor de $T_{\rho,w}(90^\circ)$ varia bastant. És de mil·límetres en els pols, de pocs centímetres en els deserts, i de desenes de centímetres a les àrees tropicals.

obstant això, eliminar dels observables la resta dels efectes (efemèrides, ionosfera, multicamí, etc.) amb la precisió adequada per a estimar en temps real el retard nombre continua essent un repte tècnic i científic.

La taula 2 resumeix les principals característiques de la troposfera i de la ionosfera que hem explicat en aquests subapartats.

Taula 2. Resum de les característiques de la ionosfera i de la troposfera per a la propagació de senyals GNSS

| | Ionosfera | Troposfera |
|--|--|---|
| Variabilitat | Alta (depèn de l'hora del dia, de l'estació, dels cicles solars i de l'activitat solar, de la latitud) | Baixa (els canvis significatius solament es produeixen en el component del vapor d'aigua, que representa menys del 10% del total) |
| Retard zenital | Metres a desenes de metres | 2,3-3,4 m a nivell del mar |
| Factor d'obliquïtat (= 1 en la direcció del zenit) | 1,8 a 30° d'elevació, 2,5 a 15°, 3 a 5° | 2 a 30° d'elevació, 4 a 15°, 10 a 5° |
| Error de modelització per al retard zenital | 1-10 m, o més en situacions d'alta activitat | 5-10 cm (sense utilitzar dades meteorològiques) |
| Dispersiu a les freqüències de GNSS | Sí. El 99,9% de l'efecte es pot eliminar amb mesures a dues freqüències. | No |

5.4.6. Efectes locals en el receptor: el soroll

Els observables de codi i de fase de portadora estan afectats per les fluctuacions aleatòries que conté el senyal, que se solen englobar en el terme genèric de soroll del receptor. Aquest és un terme que inclou la radiació d'RF captada per l'antena diferent de la del senyal d'interès, el soroll generat en els components (antena, amplificadors, cables, filtres, mescladors, etc.) que formen el receptor, i també el soroll de quantificació en la conversió analogicodigital. El soroll a causa dels components té fonamentalment origen tèrmic, però també hi ha altres tipus de soroll en els components actius, com per exemple el soroll *flicker* en els oscil·ladors. La radiació d'RF conté la radiació de fons captada per l'antena (que normalment es caracteritza mitjançant la temperatura de soroll de l'antena) i la contribució de totes les altres fonts que estan transmetent en la mateixa banda. Aquesta contribució se sol englobar sota el terme *interferència*, i en aquest cas s'entén que el soroll inclou la resta dels efectes exceptuant les perturbacions causades pels senyals generats per altres transmissors.

Com en tots els sistemes i, per tant, també en GNSS, el soroll emmascara el senyal útil. Les conseqüències primordials en el cas de receptors GNSS són les següents:

- El DLL no pot identificar amb total precisió les transicions dels xips o, el que és el mateix, la mesura del retard del senyal no és perfecta, sinó que conté unes fluctuacions entorn del valor ideal. Aquestes fluctuacions se

Bibliografia

Les interferències es tracten en el subapartat 5.4.7 d'aquest mòdul.

solen denominar *jitter* i, a vegades, el terme *jitter* mateix es pren com a sinònim de la desviació típica d'aquestes fluctuacions.

- Les mesures proporcionades pel PLL també contenen un *jitter* de fase.

Hem de recordar que aquests dos efectes es produeixen realment en qualsevol receptor, però el que ocorre és que no són els efectes més rellevants en el cas habitual dels receptors de comunicacions. En aquests últims, el primordial són els errors que causa el soroll en la detecció de les dades. En canvi, en els receptors GNSS, la probabilitat d'error en la detecció del missatge de navegació no sol ser un factor de preocupació, bé perquè en escenaris benignes (per exemple, exteriors, sense bloquejos del senyal, etc.) és summament baix o fins i tot el senyal és un senyal pilot que no conté dades, o bé perquè quan el receptor no opera en escenaris benignes es pot complementar amb un sistema d'assistència (aquest és el concepte d'*assisted-GNSS*).

Vegeu també

El concepte d'*assisted-GNSS* s'explica en el mòdul "Introducció als sistemes de radionavegació i radiodeterminació" i es tracta també en l'apartat 6 d'aquest mòdul.

En l'àmbit de GNSS, se sol utilitzar una regla aproximada segons la qual un receptor pot mesurar el retard o desfasament d'un senyal amb una precisió inferior a 0,5% (aquí estem tenint en compte solament l'efecte del soroll tèrmic i al nivell nominal en GNSS) de la "longitud d'ona" associada al senyal, en què "longitud d'ona" s'entén en aquest cas com la separació que hi ha entre les transicions del senyal. En el cas del pseudorang, aquesta separació és la durada d'un xip, que per al senyal GPS L1 C/A és aproximadament 1 μ s o 300 m. Per tant, la regla diria que la precisió en els pseudorangs és almenys d'1,5 m (considerant solament el soroll tèrmic com a font de degradació). Per a l'observable de fase, la longitud d'ona és la corresponent a la freqüència portadora. De nou per a GPS L1, això és 19 cm, i la precisió de les mesures de fase de portadora és d'1 mm.

Reflexió

Podem observar que aquesta regla aproximada que s'utilitza en GNSS sobre la precisió dels pseudorangs té un paral·lelisme amb la que s'utilitza en radar, segons la qual la precisió en la mesura de distàncies és una fracció de l'invers de l'amplada de banda del senyal utilitzat pel radar. De fet, podem comprovar que realment diuen el mateix perquè l'invers de l'amplada de banda és una mesura qualitativa del temps entre transicions en el senyal, i aquest temps expressat en metres és la "longitud d'ona" que hem esmentat.

De fet, la regla anterior solament serveix per a fer càlculs aproximats de l'ordre de magnitud de la precisió perquè aquesta no depèn únicament de l'estructura del senyal (per exemple, de la longitud d'ona associada), sinó que depèn també de la relació senyal a soroll (SNR). En els sistemes de posicionament, la qualitat del senyal no se sol caracteritzar per l'SNR, com en els sistemes de comunicacions, sinó per la C/No, que és el quocient entre la potència del senyal esperat (C) i la densitat espectral de soroll (No). El motiu és que en els sistemes de comunicacions, el normal en la gran majoria dels casos és que el receptor tingui una amplada de banda que deixi passar tot el senyal esperat, perquè en cas contrari es filtraria el senyal i es produiria interferència inter-

simbòlica. Per tant, el receptor capta tota la potència del senyal i la potència de soroll que hi ha en l'amplada de banda que l'ocupa. En canvi, en els sistemes GNSS actuals es transmeten senyals formats per diferents combinacions de polsos rectangulars, que en l'espectre tenen nombrosos lòbuls secundaris. Encara que no es transmeten tots els lòbuls secundaris perquè això implicaria una amplada de banda infinita, és habitual transmetre'n un nombre elevat. El receptor té una amplada de banda que deixa passar més o menys lòbuls, però no necessàriament tota l'amplada de banda del senyal perquè, a diferència de les comunicacions, es pot filtrar el senyal i seguir mesurant el retard i la fase del senyal. La selecció de l'amplada de banda del receptor és una qüestió de disseny que respon al compromís entre precisió, complexitat i susceptibilitat a interferències. Mentre que en augmentar l'amplada de banda la precisió millora, la complexitat, el consum d'energia del receptor i la susceptibilitat a possibles interferències empitjoren. L'SNR realment depèn de l'amplada de banda del receptor perquè segons el seu valor es deixa passar més o menys potència de senyal i de soroll i, per tant, l'SNR no és un paràmetre que depengui únicament del senyal com a tal. En GNSS s'utilitza llavors habitualment la C/N_0 (que també es representa indistintament com CNo) per a tenir un paràmetre que caracteritzi la qualitat del senyal rebut independentment del receptor.

La relació exacta entre el *jitter* de codi i de fase amb la CNo depèn del tipus concret de DLL i PLL que s'utilitza. No obstant això, en condicions normals, no hi ha grans variacions per als diferents tipus de llaços, i es poden donar unes expressions vàlides en general que proporcionin valors aproximats d'aquests dos *jitters*:

$$\begin{aligned}\sigma_P &= cT_c \sqrt{\frac{B_{DLL} d_{E-L}}{2K C/N_0}} \text{ [m]} \\ \sigma_\phi &= \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{B_{PLL}}{C/N_0}} \text{ [m]}\end{aligned} \quad (110)$$

en què és la durada d'un xip, B_{DLL} és l'amplada de banda del DLL, B_{PLL} és l'amplada de banda del PLL, d_{E-L} és l'espaiament *early-late* del DLL en unitats de xips, i K és un factor que depèn del tipus de senyal utilitzat. Aquest factor mesura com d'agut és el pic de la corba de correlació en relació amb el cas d'un senyal BPSK (com per exemple el senyal C/A de GPS), i en aquest cas $K = 1$. Per a altres senyals, tenim els valors aproximats següents: $K = 3$ per a un senyal BOC(1,1), $K = 23$ per a un senyal BOC(15, 2,5), i $K = 6$ per a un senyal AltBOC(15,10).

5.4.7. Efectes locals en el receptor: les interferències

Els sistemes GNSS són vulnerables com qualsevol altre sistema a la presència de senyals no esperats en la mateixa banda.

En general, s'engloba sota el terme *interferència* qualsevol senyal que no sigui el del satèl·lit que es pretén rebre ni el soroll de fons que capta l'antena.

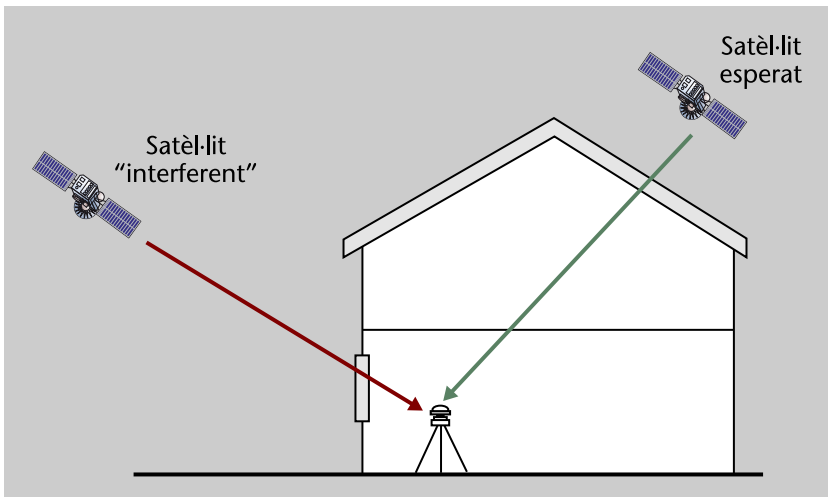
Hi ha diversos criteris per a classificar les interferències. Un és segons l'amplada de banda de la interferència comparada amb l'amplada de banda del senyal esperat, que dóna lloc als casos d'interferència de banda ampla (*wideband*) i de banda estreta (*narrowband*). Una mateixa interferència pot ser de banda ampla per al senyal GPS L1 C/A i de banda estreta per al senyal GPS L5. El cas límit d'interferència de banda estreta és un únic to, que es denomina *interferència d'ona contínua* (CW, *continuous wave*).

Els senyals rebuts de la resta dels satèl·lits del mateix sistema GNSS també interfereixen en el component que es pretén rebre. Això es denomina autointerferència o interferència intrasistema (*self-interference* o *intra-system interference*).

La interferència intersistemes (*inter-system interference*) fa referència a la interferència que diversos sistemes GNSS, com per exemple GPS i Galileo, es generen un a l'altre. En general, els sistemes estan dissenyats de manera que les interferències intrasistema i intersistemes tinguin un efecte gairebé menyspreable. Hi ha, no obstant això, excepcions en dues situacions. Una es dóna normalment en entorns urbans o interiors, en els quals el senyal esperat es rep atenuat a causa dels obstacles (podeu veure la figura 26), mentre que algun dels altres senyals del sistema mateix es reben amb una potència notablement més elevada. Per exemple, això ocorre quan el senyal esperat creua parets i els senyals d'altres satèl·lits es reben a través d'una finestra. Quan la diferència de potències és suficientment gran perquè no pugui ser compensada pel guany de processament dels senyals DS-CDMA, el sistema s'aparta de les condicions nominals de disseny i els components intrasistema deixen de ser menyspreables; llavors, s'han d'aplicar tècniques específiques per a combatre'n els efectes.

Aquest fenomen de desequilibri de potències a causa de les condicions de propagació se sol denominar *near-far*, per similitud amb l'efecte que es produeix en sistemes de comunicacions cel·lulars a causa de les diferències de distàncies dels mòbils a les estacions base.

En el cas que acabem de descriure sobre GNSS, la diferència de potències no es deu a la diferència de distàncies, però es continua mantenint el mateix nom de *near-far*.

Figura 26. Il·lustració de l'efecte *near-far*

En la segona situació, l'efecte *near-far* sí que està ocasionat per la diferència de distàncies a dos transmissors. Això ocorre quan s'utilitzen sistemes terrestres d'augment (GBAS) o *pseudolites*. El receptor pot estar molt proper al transmissor terrestre, i rep un senyal molt potent d'aquest, que emmascararia els senyals que arriben dels satèl·lits. Una solució habitual en aquests casos és que el senyal terrestre sigui polsat, perquè solament interfereixi en els satèl·lits durant una fracció del temps.

La interferència pot ser intencionada o no. El primer cas es denomina *jamming*, i a més, en algunes situacions, el seu objectiu no solament és interrompre el funcionament del receptor, sinó també fer que aquest calculi una posició incorrecta mitjançant la transmissió de senyals aparentment idèntics als senyals del sistema GNSS però falsos. Això últim s'ha denominat *spoofing*.

Hi ha nombroses tècniques de *spoofing*. Aquí solament esmentarem un exemple il·lustratiu, que rep el nom de *repeat-back spoofing*. Consisteix simplement a utilitzar equips que retransmeten els senyals reals que capten dels satèl·lits. Si un receptor proper s'enganxa als senyals retransmesos en lloc dels directes, calcularà la posició del retransmissor en lloc de la seva pròpia.

Els avenços que s'han produït recentment, tant en l'àmbit dels sistemes com en els receptors, han reduït significativament l'efecte de la resta de les fonts d'error i han provocat que el *jamming* i, especialment, l'*spoofing*, siguin uns dels elements que més preocupen avui dia en qualitat de ser la font de vulnerabilitat més greu dels sistemes GNSS. Anteriorment, aquest problema se circumscribia gairebé únicament a aplicacions militars, és a dir, en escenaris en què és normal esperar l'existència d'interferències intencionades. Però avui dia també és un problema en l'àmbit civil perquè els sistemes GNSS ja no s'utilitzen solament en aplicacions purament informatives o relacionades amb l'oci, sinó que cada vegada són més habituals en aplicacions en què la seguretat de per-

sones està en joc (que se solen denominar *safety-of-live applications*) o la seguretat d'un sistema crític es pot veure afectada (per exemple, la datació de les transaccions financeres). Per tot això, l'estudi i desenvolupament de tècniques d'*anti-jamming* i *anti-spoofing* està rebent gran atenció actualment.

Exemple d'interferències

L'any 2010, es va instal·lar a l'aeroport de Newark (Nova York) un sofisticat sistema GBAS per a utilitzar GPS en les operacions d'aproximació i de control del trànsit aeri. Es van observar problemes en el funcionament, i després de mesos d'investigacions es va arribar a la conclusió que els problemes es devien a uns petits transmissors que portaven els camions que passaven per una autopista propera. Aquests transmissors, extremadament senzills i que s'alimenten amb la presa de 12 V del vehicle, són utilitzats per a interferir el receptor GPS del camió i evitar que la seva posició vagi quedant registrada. Aquest és un exemple de com un sistema GBAS de diversos milions de dòlars pot deixar de funcionar a causa d'uns dispositius que costen 20 dòlars.

A la regió del Mediterrani, s'han reportat nombroses vegades problemes en la recepció de GPS causats per productes d'intermodulació generats en les estacions de televisió digital.

Encara que totes les bandes de GNSS estan exposades a interferències, n'hi ha de més problemàtiques que d'altres. La banda L1 està assignada als sistemes GNSS de diferents països i, per tant, està bastant protegida i lliure d'interferències externes. La situació és diferent en L2 i L5. La banda L2 està compartida amb alguns sistemes radar. La banda L5 s'encavalca parcialment amb la utilitzada per altres sistemes de navegació aèria, com són DME i TACAN.

La degradació que ocasiona una interferència depèn de molts factors, com el tipus d'interferència, el tipus de senyal esperat, l'arquitectura i les tècniques de mitigació del receptor, etc., per la qual cosa no és possible donar un resultat únic sobre l'augment del *jitter* de codi i fase per a una determinada potència d'interferència. Podem quantificar de manera genèrica l'efecte de la interferència, de potència P_I , per mitjà de la CNo efectiva, que es defineix com:

$$CN_{0,\text{eff}} = \frac{1}{CN_0^{-1} + \frac{P_I}{CT_c^{-1}Q}} \quad (111)$$

en què Q és el factor que mesura la resistència del senyal esperat enfront de la interferència, i recull tota la casuística esmentada abans. Aquesta CNo efectiva es pot utilitzar en les expressions 110 en lloc de la CNo original per a obtenir la desviació típica en el codi i en la fase¹⁷.

En la taula 3 podem veure exemples del valor de Q en alguns escenaris. Aquests valors corresponen a la situació en la qual el receptor no implementa cap contramesura especial enfront d'interferències (excepte en l'últim cas). A més, són valors aproximats perquè solament tenen en compte la forma del pols conformador de xip del senyal esperat i no la seqüència pseudoaleatòria que el forma. El primer cas de la taula, per al qual $Q = 1$, dóna el mateix resultat que l'anàlisi bàsica que se sol fer en estudiar els senyals DS-SS: en fer el procés de *despreading* en el receptor, s'eixampla l'espectre de tots els senyals que no

⁽¹⁷⁾ Això és vàlid òbviament si el receptor continua en seguiment, i la interferència no fa que el receptor es desenganxi o satura les etapes analògiques del receptor i n'impedeix completament el funcionament.

comparteixen la seqüència aleatòria del senyal esperat. Per tant, la interferència de banda estreta passa a ocupar una amplada de banda igual $1/T_c$ després del *despreading*, i es pot assimilar aproximadament a soroll blanc de densitat espectral $P_I T_c$.

Taula 3. Factor que mesura la protecció del senyal esperat enfront de la interferència Kaplan, (2006)

| Tipus d'interferència i senyal esperat | Q |
|--|---|
| Interferència CW i senyal esperat BPSK | 1 (pitjor cas) |
| Interferència CW i senyal esperat BOC | 1,9-2,5 (pitjor cas) |
| Interferència amb el mateix espectre que el senyal esperat, que és BPSK | 1,5 |
| Interferència amb el mateix espectre que el senyal esperat, que és BOC | 3-4,5 |
| Interferència és soroll blanc amb una amplada de banda B_I que inclou el senyal esperat | $B_I T_c^{-1}$ |
| Interferència és soroll blanc en una amplada de banda $B_I = 2/T_c$ centrada en el màxim espectral del senyal esperat BPSK | 2,22 |
| Interferència és soroll blanc en una amplada de banda $B_I = 2/T_c$ centrada en un dels dos lòbuls principals de la BOC esperada | 4,6-5,5 |
| Interferència polsada (suposant que el receptor utilitza <i>pulse blanking</i>) | Invers del cicle de treball (<i>duty cycle</i>) |

Si el receptor inclou alguna tècnica de mitigació d'interferències, el valor de Q es pot fer més elevat. Hi ha també una llarga varietat de tècniques de mitigació, la descripció detallada de la qual podria ser objecte d'un curs complet. Comentarem breument aquí algunes de les més representatives. En el cas d'interferències CW, es poden utilitzar filtres *notch* o filtres d'escissió, que situen un nul molt estret en l'espectre, cancel·lant la interferència però gairebé sense afectar el senyal. La posició del nul pot ser coneguda *a priori* o estimar-se de manera adaptativa. Si el filtre se situa després de l'ADC, aquest ha de tenir un marge dinàmic suficient (cosa que es tradueix en una profunditat de diversos bits) per a deixar passar el senyal amb poca distorsió; si no, la interferència bloquejaria completament l'ADC i el filtre no podria fer res per eliminar-la.

Si les interferències són polsades, és efectiu utilitzar *pulse blanking*. Consisteix a anul·lar el senyal que continua cap a etapes posteriors del receptor quan es detecta una amplitud molt gran a l'entrada. Se sol implementar just abans de l'ADC. L'alternativa que és útil davant qualsevol tipus d'interferència, incloses les intencionades i l'*spoofing*, són els *arrays* (agrupacions) adaptatius d'antenes, que permeten situar nuls de recepció en les direccions d'arribada de les interferències. Els *arrays* també permeten esbrinar les direccions dels senyals rebuts, la qual cosa és molt interessant, per exemple, enfront del *repeat-back spoofing* perquè es pot observar que tots els senyals aparentment desitjats arriben d'una

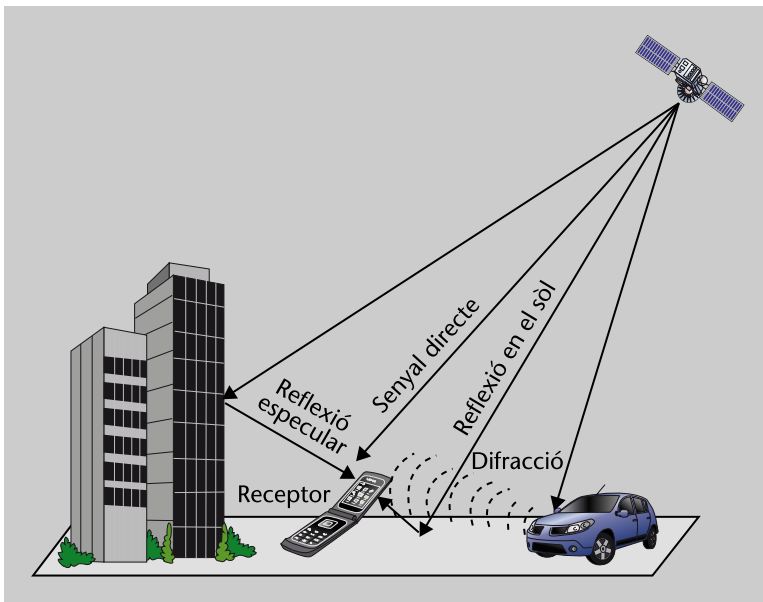
única direcció en lloc d'arribar de satèl·lits distribuïts de manera aleatòria en el cel. L'ús d'*arrays* d'antenes per a receptors GNSS està bastant estès en l'àmbit militar i, recentment, també s'està considerant seriosament per a algunes aplicacions civils.

5.4.8. Efectes locals en el receptor: el multicamí

La propagació multicamí¹⁸ consisteix que el senyal transmès pel satèl·lit arriba al receptor a través de diversos camins, de manera que aquest rep el senyal directe i diverses versions retardades i atenuades d'aquest (podeu veure la figura 27).

⁽¹⁸⁾En anglès, *multipath*.

Figura 27. Il·lustració de la propagació multicamí



Aquestes rèpliques sempre arriben amb un retard més gran que el del senyal directe pel motiu obvi que el senyal directe recorre el camí més curt entre el satèl·lit i el receptor. També solen arribar amb una amplitud més petita perquè el fenomen que les genera (normalment reflexió o difracció en alguna superfície o objectes propers al receptor) introdueix una certa atenuació. No obstant això, no necessàriament ha de ser sempre així, ja que de vegades també es dona l'efecte de *shadowing*, pel qual alguns objectes obstrueixen el camí directe i el senyal directe arriba atenuat. En aquest cas, alguns components multicamí (que denominarem de vegades, i per comoditat, *reflexions*, encara que com hem vist la reflexió no és l'únic procés que les produeix) poden ser més potents que el senyal directe mateix.

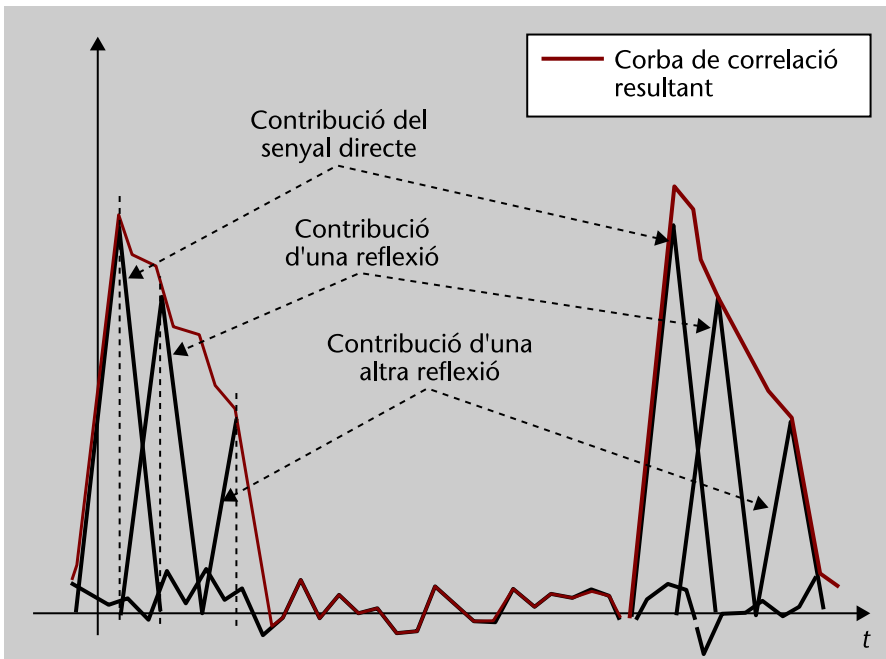
Per efecte multicamí se sol entendre l'error que causa la propagació multicamí en el seguiment de codi i de fase.

Encara que els components multicamí també afecten l'adquisició i la detecció del missatge, els efectes no són tan importants com en el *tracking* i, a més, no necessàriament han de ser negatius, com ocorre en sistemes de comunicacions.

L'error en el *tracking* de codi es produeix perquè en estar el senyal esperat superposat amb rèpliques retardades del senyal mateix, es distorsiona també la corba de correlació a partir de la qual el DLL determina el retard. Aquesta distorsió es pot observar qualitativament en la figura 28, que mostra la sortida d'un filtre adaptat al codi PN quan a l'entrada es rep el senyal directe i dues rèpliques retardades amb amplituds lleugerament més petites. El DLL acaba mesurant un retard que no depèn únicament de l'instant d'arribada del senyal directe, sinó també dels instants d'arribada de les rèpliques. Ens hem d'adonar que una reflexió no aporta cap informació útil per al posicionament mitjançant GNSS (hi ha algunes excepcions a aquesta afirmació en aplicacions científiques o de posicionament en interiors) perquè el retard de propagació no és una mesura de la distància geomètrica entre el receptor i el satèl·lit (que és la base del posicionament GNSS), sinó que correspon al camí que segueix el senyal des del satèl·lit fins a la zona en la qual es produeix la component multicamí més la distància des d'aquesta zona fins a l'antena del receptor. Aquesta és una situació manifestament diferent del que ocorre en comunicacions *spread spectrum* de seqüència directa (DS-SS). Si els retards relatius dels diferents components són comparables o més grans que el temps de xip, el multicamí és una font de diversitat que permet millorar les prestacions del sistema utilitzant esquemes RAKE que capturen i combinen l'energia que arriba a través dels diferents rajos. Si els retards relatius són més petits que temps de xip, el multicamí provoca bàsicament *fading*, és a dir, fluctuacions en l'amplitud del senyal.

Podem observar en la figura 28 que un punt qualsevol de la corba grisa a la zona dels pics de correlació conté la contribució del senyal directe i també de les reflexions. Per tant, la fase mesurada pel PLL tampoc no serà la fase del senyal directe, sinó que estarà afectada pels valors de la correlació de les reflexions.

Figura 28. Distorsió de la corba de correlació causada pel multicamí



Es mostra la contribució dels quatre components per separat en negre (senyal directe, dues reflexions i soroll) i el resultat global en gris.

Els errors causats pel multicamí depenen del següent:

- l'amplitud,
- el retard,
- la fase, i
- la desviació de freqüència o Doppler

de cada una les reflexions respecte a la del senyal directe.

Tots aquests paràmetres són diferents en general per a cadascun dels satèl·lits. Per això, el multicamí causa un error diferent en els observables de cada satèl·lit que es trasllada a la posició perquè no es pot incloure en el terme de l'error del rellotge del receptor.

Abans de passar a analitzar concretament aquests errors, comentarem possibles classificacions del multicamí. Pot estar compost per components especulars o components difusos, depenent de l'entorn físic del receptor. Els primers estan produïts per superfícies planes, com les ales d'un avió, la superfície del mar i de la Terra, i certs edificis. Els components difusos es poden interpretar com un conjunt de petites contribucions indistingibles entre si i normalment produïdes per difracció o reflexió en superfícies rugoses. Cal tenir en compte que la potència d'una determinada reflexió és normalment inferior (els casos excepcionals ja s'han comentat anteriorment) a la del senyal directe, però la potència de tot el conjunt de reflexions pot superar la d'aquesta última.

L'efecte que causa una determinada reflexió en els llaços de codi o de fase depèn de la velocitat de canvi de la seva fase pel que fa a la fase del senyal directe, que és justament la diferència entre les freqüències Doppler de la reflexió i del senyal directe. Si aquesta diferència és més petita que l'amplada de banda del llaç, es diu que està en el cas d'esvaïment lent (*slow fading*), i, en cas contrari, esvaïment ràpid (*fastfading*). El primer sol ser més perjudicial per al receptor. El rang de freqüències que cobreix totes les freqüències Doppler de totes les reflexions, incloent-hi el senyal directe, es denomina *amplada de banda d'esvaïments* o *fading bandwidth*.

La diferència entre les freqüències Doppler d'una reflexió i del senyal directe depèn de la geometria del conjunt satèl·lit-receptor-reflector i de la velocitat del receptor. A continuació presentarem uns valors aproximats per a aquesta diferència. Per a receptors estàtics, la freqüència Doppler de la reflexió en el receptor és la mateixa que en el punt de reflexió, ja que el procés de reflexió no canvia la freqüència del senyal si el reflector és estàtic. Per tant, si les posicions del receptor i del reflector són conegudes, la diferència Doppler es pot calcular per a una determinada òrbita del satèl·lit. La diferència és màxima quan el satèl·lit està en el zenit i el reflector està en el pla de l'òrbita. Si la distància del reflector al receptor és d , llavors la màxima diferència Doppler per a la constel·lació GPS (expressada en mHz) val:

$$\Delta f_{d,\max} = 1,38 d \text{ [mHz]} \quad (112)$$

en què d està expressada en metres.

Veurem que solament ens preocupen les reflexions amb un retard inferior a $1,5 T_c$, ja que les reflexions amb un retard més gran no afecten les mesures. Un temps d' $1,5 T_c$ per al codi C/A de GPS representa 450 m i, com es pot aproximar la distància entre el receptor i el reflector per la diferència de camins entre el raig directe i el reflectit, s'obté que la màxima diferència Doppler és:

$$1,38 \times 450 = 621 \text{ mHz} = 0,621 \text{ Hz} \quad (113)$$

Per a un altre tipus de geometries la diferència sempre és més petita. Si el satèl·lit, receptor i reflector estan alineats, la diferència és zero. Però és difícil predir durant quant temps estarà la diferència per sota d'un cert nivell perquè la geometria canvia contínuament, i amb això en resulta una freqüència Doppler també canviant.

Per a receptors mòbils, la diferència de freqüències Doppler és molt més gran. Un receptor amb velocitat v dona lloc a:

$$\Delta f_d = v \frac{f}{c} (\cos(\alpha_r) \cos(\beta_r) - \cos(\alpha_s) \cos(\beta_s)) \quad (114)$$

Reflectors mòbils

El cas dels reflectors mòbils es pot analitzar com el cas de receptor mòbil, que presentarem més endavant.

en què α_r , β_r i α_s , β_s són les diferències en elevació i azimuth entre el vector velocitat del receptor i els vectors que van del receptor al reflector i al satèl·lit, respectivament. Per exemple, si $v = 15$ m/s, la diferència pot valer 160 Hz. Per a geometries especials la diferència de freqüències pot ser zero, però és molt improbable que aquestes situacions durin més que alguns segons, ja que la geometria receptor-reflector canvia molt ràpidament a causa de la velocitat del receptor (o del reflector).

Cal tenir en compte que les reflexions que provenen de parts del mòbil mateix, com poden ser les reflexions en les ales d'un avió, es comporten com si el receptor fos estàtic.

El multicamí és especialment perjudicial perquè causa un biaix en les mesures del PLL i del DLL. Es diu que són biaixos perquè són errors constants, o almenys aproximadament constants, que no es poden reduir fent la mitjana dels observables durant intervals de temps relativament curts, com ocorre amb el soroll. En la pràctica, els errors causats per una reflexió es descorrelen a partir de temps superiors a l'invers de la diferència entre la freqüència Doppler de la reflexió i del senyal directe. En escenaris estàtics aquesta diferència pot ser molt petita, la qual cosa dóna lloc a durades de correlació molt llargues dels errors causats pel multicamí, la qual cosa provoca que aquests errors siguin a efectes pràctics gairebé constants.

Per a calcular els errors en l'observable de fase, considerem que el valor esperat de la mesura que proporciona el PLL és la fase de mostra de correlació *prompt* en absència de soroll:

$$R_p = \sum_{i=0}^M a_i e^{j\varphi_i} R_c(\hat{\tau}_0 - \tau_i) \quad (115)$$

en què M és el nombre de reflexions, cadascuna amb amplitud, fase i retard igual a a_i , φ_i i τ_i , respectivament. L'autocorrelació del codi és $R_c(\tau)$, i el subíndex 0 fa referència al senyal directe, l'estimació del retard del qual és $\hat{\tau}_0$. En el cas de *slow fading* podem suposar que l'amplitud i fase de les reflexions és constant a blocs (per exemple, durant l'interval entre mesures successives del PLL). Per a obtenir una expressió tancada de la fase, suposarem que solament hi ha una reflexió (per exemple, $M = 1$). Els màxims errors de fase es produeixen quan el desfasament entre el senyal directe i la reflexió compleix:

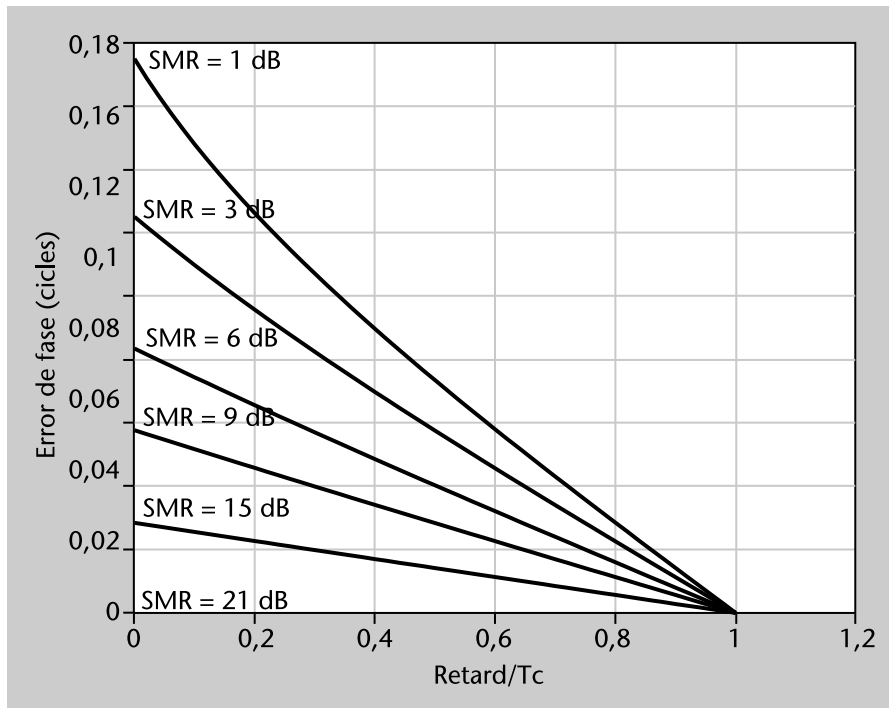
$$|\varphi_1 - \varphi_0| = \pi - \arccos\left(\frac{R_c(\hat{\tau}_0 - \tau_1)}{R_c(0)\sqrt{\text{SMR}}}\right) \quad (116)$$

en què és la relació senyal a multicamí. Llavors, l'error de fase (en metres) val

$$\varphi_e = \pm \frac{\lambda}{2\pi} \arcsen\left(\frac{R_c(\hat{\tau}_0 - \tau_1)}{R_c(0)\sqrt{\text{SMR}}}\right) \quad (117)$$

En la figura 29 es mostren els valors positius que pren aquesta expressió. Podem observar que els errors són relativament petits, ja que en cap cas no superen un quart de la longitud d'ona. En el cas de *fast fading*, els errors de fase són més difícils de quantificar, però més petits que en el cas aquí estudiat.

Figura 29. Errors de fase en funció de la diferència de retards entre la reflexió i el senyal directe

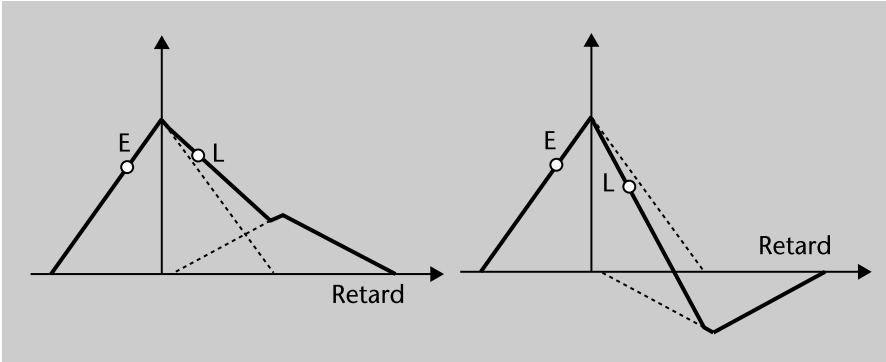


Encara que el model basat en un únic raig que hem utilitzat pot no ser gaire representatiu d'escenaris reals, és molt habitual en l'estudi de l'efecte del multicamí en GNSS perquè permet guanyar coneixement sobre el funcionament de diferents tècniques i serveix per a establir comparacions entre aquestes. Per aquests motius, aquest model de dos rajos és el que també utilitzarem per a analitzar els errors de codi.

La reflexió distorsiona la corba de correlació i, per tant, també la corba S, l'encreuament de la qual per zero es desplaça i deixa de coincidir amb el retard del senyal directe. Podem observar qualitativament la distorsió de la corba de correlació en la figura 30, que representa el que ocorreria en el cas de GPS, ja que s'han utilitzat correlacions individuals de manera triangular, la qual cosa equival a suposar que els polsos de xip són rectangulars. Quan les mostres *early* i *late* estan centrades en el retard del senyal directe, no tenen la mateixa amplitud, per la qual cosa no s'anul·la la corba S. Perquè tinguin la mateixa amplitud i la corba S s'anul·li, cal desplaçar les mostres lleugerament cap a la dreta en el cas que la reflexió estigui en fase o cap a l'esquerra en el cas que la reflexió estigui en contrafase amb el senyal directe. Això explica el resultat aparentment sorprenent que el retard mesurat és més petit que el retard real

del senyal directe quan es rep una reflexió que es combina destructivament, i fa l'efecte que el senyal total s'avança, quan en realitat la reflexió arriba retardada en tots els casos.

Figura 30. Distorsió de les corbes de correlació causada per una reflexió



En la primera gràfica, la reflexió i el senyal directe estan en fase, mentre que en la segona estan en contrafase. S'utilitza un pols conformador de xip rectangular.

Els valors *early* i *late* de la correlació es poden expressar com:

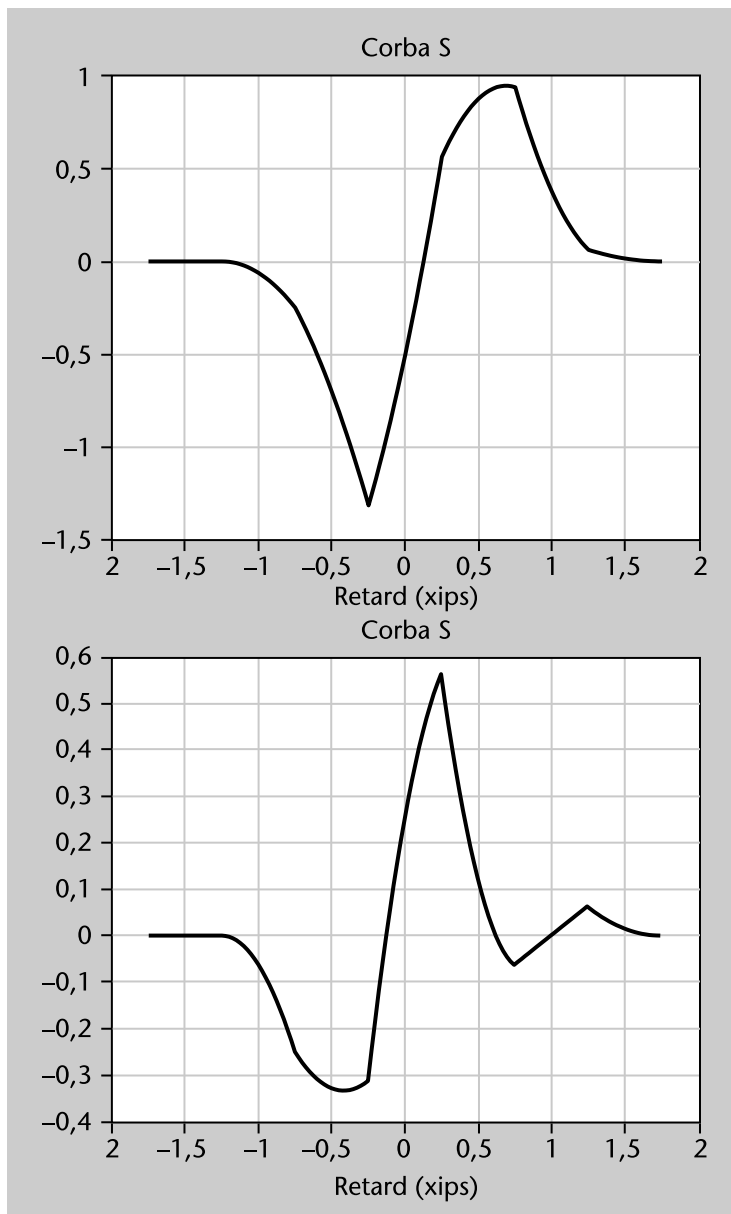
$$\begin{aligned} R_E &= a_0 e^{j\varphi_0} c\left(\hat{\tau}_0 - \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_0\right) + a_1 e^{j\varphi_1} c\left(\hat{\tau}_0 - \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_1\right) \\ R_L &= a_0 e^{j\varphi_0} c\left(\hat{\tau}_0 + \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_0\right) + a_1 e^{j\varphi_1} c\left(\hat{\tau}_0 + \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_1\right) \end{aligned} \quad (118)$$

Suposant que utilitzem un discriminador no coherent *early-minus-late*, la sortida queda com:

$$\begin{aligned} S(\hat{\tau}_0) &= |R_E|^2 - |R_L|^2 = a_0^2 \left(c^2\left(\hat{\tau}_0 - \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_0\right) - c^2\left(\hat{\tau}_0 + \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_0\right) \right) \\ &+ a_1^2 \left(c^2\left(\hat{\tau}_0 - \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_1\right) - c^2\left(\hat{\tau}_0 + \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_1\right) \right) \\ &+ 2a_0 a_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_0) c\left(\hat{\tau}_0 - \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_0\right) c\left(\hat{\tau}_0 - \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_1\right) \\ &+ 2a_0 a_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_0) c\left(\hat{\tau}_0 + \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_0\right) c\left(\hat{\tau}_0 + \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_1\right) \end{aligned} \quad (119)$$

Podem observar en la figura 31 la forma que adopta aquesta expressió en dos exemples concrets. A causa de la reflexió, la corba S perd la seva simetria i deixa de passar per zero en l'origen (que se suposa que és el retard que correspon al senyal directe). El punt en el qual es produeix l'encreuament per zero indica justament el biaix que produeix la reflexió en la mesura del pseudorang. Efectivament, es pot comprovar que quan el senyal directe i la reflexió estan en fase (gràfica de l'esquerra), es mesura un retard més gran que el del senyal directe; mentre que quan els senyals tenen signe diferent (gràfica de la dreta), es mesura un retard que indica que aparentment el senyal arriba fins i tot abans que el senyal directe.

Figura 31. Corba S en presència d'una reflexió retardada $0,5 T_c$ respecte al senyal directe

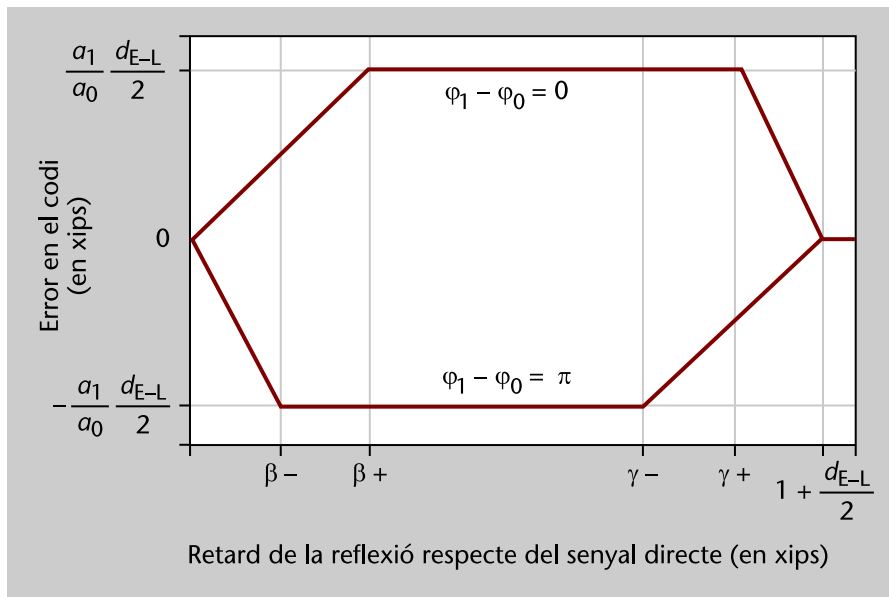


SMR = 6 dB. Espaiament *early-late* de mig xip. En la gràfica de l'esquerra, la reflexió i el senyal directe estan en fase, mentre que en la gràfica de la dreta estan en contrafase. S'utilitza un pols conformador de xip rectangular.

Aquest exemple que acabem de descriure el podríem repetir per a qualsevol retard de la reflexió, i podríem representar en cada cas l'error que obtindríem en la mesura quan la reflexió està en fase i en contrafase amb el senyal directe. Llavors obtindríem el resultat de la figura 32, que es denomina habitualment *envolupant dels errors multicamí* (*multipath envelope*). Els paràmetres que apareixen en els eixos d'aquesta figura valen:

$$\beta_{\pm} = \frac{a_0 \pm a_1}{a_0} \frac{d_{E-L}}{2}, \quad \gamma_{\pm} = 1 - d_{E-L} \left(1 - \frac{a_0 \pm a_1}{2a_0} \right) \quad (120)$$

Figura 32. Envolupant dels errors causats per una reflexió en el DLL. S'utilitza un pols conformador de xip rectangular



Aquesta gràfica representa els errors màxims en valor absolut que causa una reflexió en el DLL. Això és així perquè els casos més desfavorables ocorren quan la reflexió està en fase o en contrafase amb el senyal directe; per a altres desfasaments, l'error és més petit en valor absolut que els que es produeixen en aquests dos casos. Per això, l'error causat per una reflexió amb desfasament arbitrari sempre es troba dins de la regió delimitada per les línies de la figura 32, i d'aquí ve el nom d'envolupant dels errors. Atès que aquesta figura determina els errors màxims causats per una reflexió, és una eina molt habitual per a comparar els errors deguts al multicamí en diferents senyals.

Exemple

Calcularem un exemple d'error causat per una reflexió en el senyal C/A de GPS. Atès que aquest senyal conté xips rectangulars, podem utilitzar la figura 32. Suposem que la reflexió recorre 60 m més que el senyal directe i es rep amb una SMR de 6 dB. Assumim també que s'utilitza un DLL amb espaïament *early-late* de 0,3 xips.

Com la longitud equivalent dels xips del codi C/A és 300 m aproximadament, el retard de la reflexió és 0,2 xips. La seva amplitud és $a_1 = a_0/2$. Els valors que marquen l'inici de les diferents regions de l'envolupant són:

$$\beta^- = 0,075, \beta^+ = 0,225, \gamma^- = 0,0775, \gamma^+ = 1,075 \quad (121)$$

Per tant, per a un retard de 0,2 xips, ens trobem a la regió lineal de la part superior de l'envolupant i a la regió plana de la part inferior. Els errors resultants són 0,067 xips o -0,075 xips quan la reflexió està en fase o en contrafase, respectivament. Per a altres valors del desfasament, l'error es troba entre aquests dos valors, que, encara que poden semblar que són una fracció molt petita d'un xip, realment representen 20 i -22,5 m. Aquest càlcul revela la gran importància que tenen els errors de multicamí en GNSS, ja que una sola reflexió no excessivament potent i amb un retard de 0,2 μ s (cosa que fa que sigui una situació que es pot donar en la pràctica amb relativa facilitat) pot causar un error la magnitud del qual supera al de qualsevol de les altres fonts. Això no deixa de ser un exemple; per a un altre conjunt de paràmetres més desfavorables, una única reflexió pot arribar a causar errors que superen els 100 m.

Seguint amb els valors numèrics plantejats, l'envolupant s'anul·la a partir d'un retard d'1,15 xips, la qual cosa significa que reflexions que arriben amb un retard de fins a 345

m poden causar errors. Però si arriben amb un retard més gran, ja no afecten la mesura de distància.

A partir d'aquests càlculs es fa evident l'interès a utilitzar senyals amb freqüències de xip més grans, com en el component P de GPS o en el senyal I5a/b de Galileo. Com tots dos eixos de l'envolupant són proporcionals al temps de xip, en utilitzar freqüències de xip més altes es redueix tant la magnitud dels errors com el rang de reflexions que els causen. Això últim és especialment rellevant perquè la zona del voltant de l'antena que pot contenir objectes susceptibles de produir les reflexions també es redueix. En ser una zona més petita, és més fàcil controlar-la o buscar emplaçaments amb bones condicions. Per exemple, es pot afirmar que aproximadament els errors deguts al multicamí són 10 vegades més petits amb el senyal GPS-P que amb el senyal GPS-C/A, ja que el primer té una freqüència de xip 10 vegades superior.

En el context de GNSS és molt habitual dibuixar l'envolupant d'errors per a diferents tipus de senyals i es considera que aquells per als quals l'envolupant delimita una àrea (que se sol denominar *multipath envelope running average*) més petita són més robustes enfront del multicamí. Encara que, com ja s'ha comentat, el model d'una reflexió pot no ser representatiu d'un escenari real, no solament és interessant per la senzillesa, sinó també perquè es considera vàlid en general per a establir comparacions entre senyals, ja que si un senyal es comporta millor que un altre en presència d'una reflexió, probablement també es comportarà millor quan es rebin diverses reflexions. Observeu que hem dit "probablement" perquè no es pot fer l'afirmació en general, ja que l'error causat per una suma de reflexions no és la suma d'errors individuals; i això és així perquè no aplica el principi de linealitat o superposició als errors a causa de les operacions quadràtiques que fa el discriminador (podeu veure l'equació 119). De fet, que l'efecte de les reflexions no és lineal es pot observar en la figura 32 mateixa, on queda patent que un canvi del signe de la reflexió no causa únicament un canvi del signe de l'error en tots els casos.

Podem observar en la figura 32 que hi ha tres zones en funció del retard de la reflexió. En la primera, l'error augmenta (en valor absolut) amb el retard de la reflexió, a continuació s'arriba a la zona d'errors màxims, i després els errors disminueixen i s'anul·len a partir d'un retard de $(1+d_{E-L}/2)$ xips. Els punts d'inici i final de cada zona estan determinats per l'expressió 120. Es pot observar que en tots els casos els errors són proporcionals a l'amplitud de la reflexió, a_1 . A més, els errors màxims són també proporcionals a l'espaiament *early-late* d_{E-L} . Aquesta observació condueix a la tècnica més habitual de reducció d'errors multicamí, que es denomina *narrow-correlator spacing*. Simplement consisteix a utilitzar valors petits de d_{E-L} en el DLL. Per a valors petits s'entenen habitualment valors entorn de 0,1 xips, en contraposició del valor estàndard de 0,5 xips. Ens podríem preguntar si fent d_{E-L} arbitràriament petit, podríem reduir els errors tant com volguéssim. Això no és així perquè l'envolupant que hem dibuixat en la figura 32 pressuposa que l'amplada de banda del senyal és infinit. Quan l'amplada de banda és finita, l'envolupant se suavitzava i l'altura de la part plana de la corba és proporcional a d_{E-L} només a partir d'un cert valor mínim de d_{E-L} (i aquest valor mínim és inversament

proporcional a l'amplada de banda), de manera que per a valors de d_{E-L} inferiors a aquest valor mínim, una reducció de l'espaiament no es tradueix en una reducció dels errors en el pseudorang.

La tècnica del *narrow-correlator spacing* fa disminuir l'altura de l'envolupant, és a dir, la magnitud dels errors, però no redueix significativament el rang de retards de les reflexions que causen errors, ja que, fins i tot per a valors de d_{E-L} arbitràriament petits, totes les reflexions amb retards relatius de fins a un xip provoquen errors. Per a aconseguir que l'envolupant tingui menys amplitud (per exemple, menys errors per a un retard de la reflexió determinat) i també menys longitud (per exemple, un interval més curt de reflexions que causen errors) s'han d'utilitzar altres tècniques. A grans trets, es poden classificar en tres grups, segons es basin en el següent:

- 1) Utilitzar senyals de referència locals modificats en lloc d'un senyal idèntic al codi que es vol rebre.
- 2) Mètodes d'estimació paramètrics, que calculen els paràmetres (amplitud, retard, etc.) del senyal directe i també de les reflexions. El primer mètode d'aquest tipus que es va proposar va ser el MEDLL (*multipath estimating DLL*).
- 3) *Arrays* d'antenes intel·ligents, que permeten discriminar els senyals espacialment i no solament en funció del seu retard.

Tècniques de mitigació del multicamí

Una descripció detallada de les tècniques de mitigació del multicamí queda fora de l'abast d'aquesta assignatura. Encara que s'ha investigat àmpliament sobre aquest tema en els últims 20 anys, el problema de mitigar el multicamí que arriba amb retards petits continua essent una línia activa d'investigació.

En l'anàlisi anterior, hem suposat que la fase de la reflexió podia prendre un valor qualsevol, però que no variava amb el temps. És a dir, estàvem treballant sota la hipòtesi de *slow fading*. Comentarem breument què ocurriria en el cas de *fast fading*. La corba S es pot obtenir a partir de l'expressió 119 eliminant els dos últims termes. Els cosinus que hi ha en aquesta expressió depenen d'una diferència de fases que ara sí que varia durant un interval de temps igual a l'invers de l'amplada de banda del llaç. El llaç fa, per tant, un filtratge de la sortida del discriminador, i això es pot veure com el càlcul del valor mitjà d'aquesta sortida. El valor mitjà dels cosinus és zero si la diferència de fases té distribució uniforme (que és una hipòtesi raonable) i, finalment, l'expressió de la corba S és:

$$S(\hat{\tau}_0) = |R_E|^2 - |R_L|^2 = a_0^2 \left(c^2 \left(\hat{\tau}_0 - \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_0 \right) - c^2 \left(\hat{\tau}_0 + \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_0 \right) \right) + a_1^2 \left(c^2 \left(\hat{\tau}_0 - \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_1 \right) - c^2 \left(\hat{\tau}_0 + \frac{d_{E-L}}{2} T_c - \tau_1 \right) \right) \quad (122)$$

Lectura recomanada

Una bona revisió d'aquestes tècniques es pot trobar en l'obra de G. A. McGraw i M. S. Braasch (1999).

Lectura recomanada

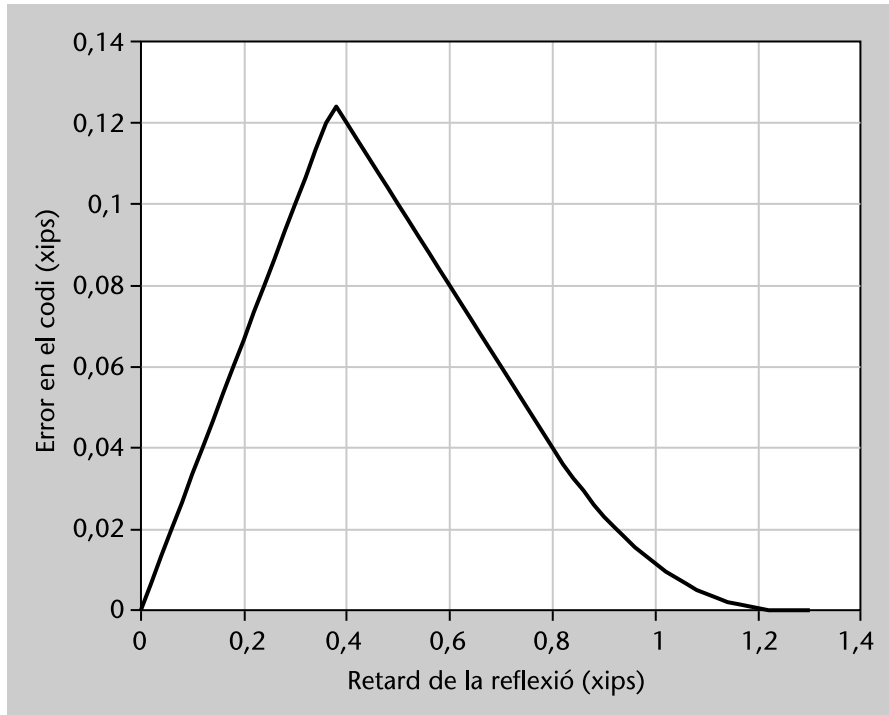
Una bona revisió d'aquestes tècniques es pot trobar en l'obra de Nee (1993).

Lectura recomanada

Una bona revisió d'aquestes tècniques es pot trobar en l'obra de Seco-Granados, Swindlehurst, Astely (2000) i en l'obra de Cebrián i altres (2010).

A diferència del cas de *slow fading*, ara la corba S sí que és la suma de les corbes S de cadascun dels components del senyal, cadascun afectat pel retard i l'amplitud corresponents. Com no hi ha canvi de signe en els termes que se sumen, en aquest cas el retard que es mesura (que està determinat per l'encreuament per zero de l'expressió 122) sempre serà més gran que el del senyal directe. Un exemple dels errors que provoca una reflexió en el cas de *fast fading* es mostra en la figura 33. Els errors són més petits que els donats per l'envolupant del cas *slow fading*.

Figura 33. Error causat per una reflexió amb SMR = 6 dB en el cas de *fast fading*



Efectes beneficiosos del multicamí

Malgrat els seriosos efectes que té el multicamí en la mesura dels pseudorangs, hi ha alguns casos en els quals sorprenentment les reflexions i el multicamí poden arribar a ser beneficiosos. No es tracta òbviament d'aplicacions de posicionament convencionals, ja que els errors en els pseudorangs es traduirien directament a errors en la posició, sinó d'aplicacions científiques de GNSS. Un exemple és l'estudi de l'estat del mar (altura, rugositat, salinitat, etc.). Les reflexions dels senyals GNSS sobre la superfície del mar poden aportar informació sobre aquest estat. A partir del retard i la freqüència Doppler d'aquestes reflexions es poden arribar a inferir diferents paràmetres físics. En aquest cas, les reflexions són senyals que es volen rebre.

Tradicionalment, sempre s'ha considerat que la ionosfera i el multicamí són els principals elements que limiten la precisió dels sistemes GNSS. Avui dia, amb l'existència de senyals a diverses freqüències o amb la disponibilitat d'informació precisa sobre la ionosfera, els errors ionosfèrics s'han cancel·lat o reduït en gran mesura fins i tot en aplicacions no diferencials. A més, tots els errors originats en el segment del control o d'espai del sistema també s'han reduït per la millora dels algorismes i equips en aquests segments. Això deixa el multicamí com la principal font d'errors i les interferències com la principal font de vulnerabilitat dels sistemes GNSS. Tant el multicamí com les interferències són difícilment controlables perquè es poden produir molt fàcilment, i tenen la capacitat d'ocasionar errors molt grans o fins i tot impedir el funcionament del receptor.

La taula 4 mostra un resum dels valors dels errors causats per diverses fonts en "condicions favorables". Amb "condicions favorables" ens referim al cas en el qual les diferents fonts d'error estan presents (o sigui, no són condicions ideals), però no de la pitjor manera possible. La taula representa el nivell d'errors que un pot esperar quan no es donen condicions extremes. Els errors poden variar notablement (en general, augmentar) segons l'escenari. Per exemple, en el cas del multicamí ja hem comentat que els errors poden superar fàcilment la desena de metres.

Vegeu també

Podeu consultar també la taula 5, en la qual es resumeix l'efecte de cada font d'error en el cas convencional i com es redueix en utilitzar alguna tècnica de mitigació.

Taula 4. Resum de les diferents fonts d'errors

| Font d'error | Error (desviació típica en metres) |
|---|------------------------------------|
| Relloctge de satèl·lit | 1,5 |
| Efemèrides | 1,5 |
| Ionosfera (models per a una freqüència) | 2,50-25 |
| Troposfera | 0,20-0,40 |
| Soroll en el pseudorang | 0,25-0,50 |
| Soroll en la fase | 0,001-0,002 |
| Multicamí en el pseudorang (entorn benigne) | 0,25-0,50 |
| Multicamí en la fase (entorn benigne) | 0,005-0,01 |

5.5. Posicionament diferencial

En aquest subapartat presentarem les bases del posicionament diferencial i les diferents famílies de tècniques que hi ha. Començarem analitzant com i en quina mesura es redueixen les diferents fonts d'errors en el subapartat 5.5.1. Els tres subapartats següents, del 5.5.2 al 5.5.4, presenten diferents maneres d'utilitzar el concepte de posicionament diferencial, segons si es persegueix

obtenir un posicionament absolut o relatiu, o si s'utilitzen únicament els pseudorangs o també les fases de portadora, per a tenir més precisió. Un pas clau per a poder utilitzar l'observable de fase és resoldre l'ambigüitat intrínseca que presenta (subapartat 5.5.5). S'introdueix l'estudiant en aquesta problemàtica utilitzant les tècniques més senzilles, que es denominen *tècniques lliures de la geometria* (subapartat 5.5.6), i seguidament es passa a les tècniques més avançades basades en la geometria (subapartat 5.5.7). Finalment, en el subapartat 5.5.8 es presenta breument una manera alternativa de posicionament precís absolut basat també en les fases. Encara que no és estrictament una tècnica diferencial, es presenta dins d'aquest subapartat perquè té molts elements comuns amb la resta de les tècniques tractades.

5.5.1. Classificació i reducció de les fonts d'error

La precisió que s'obté amb el servei SPS de GPS (que implica l'ús del pseudorang del codi C/A a una única freqüència) és de l'ordre de 10 m en posició i 20 ns en temps (tots dos valors referits a un percentil del 95%). No obstant això, hi ha multitud d'aplicacions que requereixen precisions molt millors, que no són ni tan sols assolibles mitjançant l'ús de mesures a dues freqüències. Una manera de reduir els errors en la posició o en la mesura del temps consisteix a reduir els errors presents en els observables. Una alternativa consisteix a utilitzar les mesures de fase en lloc de pseudorang, però això comporta complicacions addicionals a causa de la presència de les ambigüitats. Una altra alternativa, que serveix tant per a les mesures de codi com per a les de fase, implica canviar la manera com s'utilitza el sistema GNSS, passant del posicionament autònom basat en un únic receptor al posicionament diferencial.

Les alternatives no són excloents, sinó tot el contrari, ja que les mesures de fase normalment s'utilitzen en mode diferencial. En el cas particular de GPS, la manera d'utilització se sol conèixer com a *DGPS*, que serà el que assumirem per defecte. No obstant això, els principis del posicionament diferencial són idèntics en tots els sistemes GNSS, com veurem a continuació.

La idea bàsica que subjeu en el DGPS és aprofitar el fet que els errors associats al rellotge del satèl·lit, les efemèrides i l'atmosfera són similars per a usuaris separats desenes, o fins i tot centenes de quilòmetres, i aquests errors varien lentament amb el temps. És a dir, aquests errors exhibeixen una alta correlació espacial i temporal. Com més propers estan dos usuaris i més propers es troben els instants de mesura, més similars són els errors esmentats més amunt. Es diu que els errors es descorren quan augmenta la distància entre els usuaris o la separació entre els instants de càlcul dels observables.

Si la posició d'un receptor GPS és coneguda, en lloc de calcular realment la posició (com es fa en l'operació normal de GPS), es pot fer el procés invers, consistent a estimar l'efecte global dels errors esmentats abans en observables. Si aquestes estimacions estan disponibles per a altres receptors, les poden utilitzar per a corregir els seus observables, i d'aquesta manera mitigar aquests errors i millorar la qualitat de la posició i del temps calculats. Aquesta idea és aplicable tant a les mesures de fase com als pseudorangs. Veurem a més que no és imprescindible conèixer la posició del receptor GPS a partir de com es calculen les correccions. Aquest receptor se sol denominar *estació de referència*. El concepte de DGPS es pot estendre a diverses estacions de referència. Aquestes estacions poden transmetre diferents tipus d'informació:

- Estimacions dels errors, perquè serveixin com a correccions als observables (aquest cas correspon al principi bàsic de funcionament que hem comentat en els paràgrafs anteriors, però no és l'única opció).
- Dades que reemplacin el missatge de navegació dels satèl·lits en el càlcul de l'error de rellotge del satèl·lit i les efemèrides.
- Els observables mateixos de codi i fase.
- Informació d'integritat sobre cada satèl·lit (per exemple, una indicació sobre si es pot utilitzar o no el satèl·lit, o una mesura estadística del nivell de precisió de les correccions).
- Dades auxiliars, com la localització, la salut o les variables meteorològiques de les estacions de referència.

Tradicionalment, aquesta informació s'ha transmès mitjançant comunicacions sense fil (per exemple, enllaços de ràdio) en les bandes LF, MF, HF o UHF. El format de la informació ha estat habitualment el definit per l'estàndard RTCM SC-104, que defineix l'estructura dels paquets i la interfície entre el receptor dels missatges i el receptor GPS. La velocitat de transmissió necessària sol ser molt modesta, entorn de 100-200 bps.

No obstant això, l'avenç d'Internet i l'ús massiu de terminals mòbils amb connexió de dades han motivat el desenvolupament de mecanismes per a poder distribuir les correccions GPS a través de xarxes de dades i, en particular, per mitjà d'Internet. Aquesta és la idea darrere del projecte NTRIP.

NTRIP¹⁹ és un protocol de comunicació que permet la distribució de fluxos de dades GNSS des d'estacions de referència cap a usuaris fixos o mòbils, per mitjà d'Internet. La distribució d'informació es fa en mode difusió o *broadcasting*, amb la qual cosa diversos dispositius poden accedir de manera simultà-

⁽¹⁹⁾NTRIP són les sigles de *networked transport of RTCM via Internet protocol*.

nia a la informació. NTRIP s'ha desenvolupat com un protocol obert, no de propietat, basat en l'estàndard HTTP i que permet l'accés a dispositius mòbils mitjançant TCP/IP. Hi ha centenars de serveis a escala mundial que utilitzen les dades de correcció rebudes per NTRIP per a implementar aplicacions de navegació d'alta precisió. Altres dos exemples de transmissió de correccions per mitjà d'Internet són el sistema GDGPS (*NASA's global differential GPS*) i el sistema SISNET de l'Agència Espacial Europea, que permet accedir als missatges del sistema EGNOS. En l'altre extrem de la sofisticació trobem un altre mecanisme per a implementar DGPS, que encara es continua utilitzant avui dia i que consisteix a utilitzar dos receptors GPS que graven per separat els seus observables GPS. Més endavant, aquests observables es bolquen en un ordinador i s'hi apliquen els algorismes DGPS.

Projecte NTRIP

NTRIP és un projecte iniciat per l'Agència Federal Alemanya de Cartografia i Geodèsia (BKG) juntament amb la Universitat de Dortmund i l'empresa Trimble Terrasat GmbH.

Independentment del mecanisme de transmissió que s'utilitzi, l'aspecte crític en tots els casos és la latència, és a dir, el període de temps comprès entre l'instant al qual correspon la informació diferencial i l'instant en el qual s'aplica. Com més a prop està l'usuari de l'estació de referència i més petita és la latència, més bé funcionen les tècniques DGPS.

Observem que l'últim mecanisme explicat anteriorment és un mecanisme de postprocessament i, per tant, pot tenir un retard important en la generació de la posició, però té una latència en principi nul·la.

Les tècniques DGPS es poden classificar de diferents maneres:

- **Absolutes o relatives.** En el posicionament absolut diferencial es calcula la posició de l'usuari respecte a un sistema de coordenades ECEF, mentre que en el posicionament relatiu, la posició de l'usuari es calcula respecte a un punt de referència, les coordenades absolutes del qual no necessàriament han de ser conegudes (si es coneixen, llavors a partir de la posició relativa de l'usuari és evident calcular també la seva posició absoluta).
- **D'àrea local, regional o àmplia**²⁰. Aquest criteri fa referència a l'àrea a la qual dona servei el sistema DGPS. Els més senzills permeten que l'usuari estigui separat com a màxim entre 10 i 100 km de l'estació de referència, i es denominen *sistemes d'àrea local*. Quan es pretén cobrir regions més grans, és necessari utilitzar diverses estacions de referència. El terme *regional* se sol reservar per a distàncies de fins a 1.000 km (encara que això són valors merament qualitatiu), i per sobre d'aquest valor es parla de sistemes d'àrea àmplia, que poden arribar a tenir cobertura global.
- **Basades en el codi o en la fase**, en funció del tipus d'observables que s'utilitzin per al càlcul de la posició. Les tècniques diferencials basades en pseudorangs poden proporcionar precisions en el rang de metres, mentre que les tècniques basades en les fases aconseguen precisions de l'ordre

⁽²⁰⁾En anglès, *local, regional or wide area*.

de centímetres, però es necessiten algorismes notablement més complexos.

avisarem a continuació cadascuna de les fonts d'error que hem vist en subparats anteriors i com es mitiguen en mode diferencial:

- **Relotge del satèl·lit.** L'error en la modelització del rellotge de satèl·lit ja és petit en condicions normals (2 m rms, i es va reduint a mesura que el sistema es modernitza), i canvia lentament en un marc de temps d'hores. Aquest error no es descorrela amb la distància per motius evidents, i es pot corregir pràcticament per complet si la latència dels missatges és inferior a una hora.
- **Efemèrides.** També contenen un error petit (2 m rms, i va millorant amb la modernització dels sistemes) que canvia lentament a escala de minuts. Recordem que pràcticament solament la component radial de l'error de posició dels satèl·lits causa un error en els pseudorangs; i la component radial és la projecció de l'error de posició del satèl·lit sobre el vector unitari receptor-satèl·lit. La direcció d'aquest vector canvia amb la posició del receptor. Per tant, la component radial de l'error en les efemèrides no és exactament la mateixa vista des de l'usuari o des de l'estació de referència. No obstant això, es veu a simple vista que el canvi de direcció és molt petit fins i tot quan la separació entre usuari i estació de referència és de centenars de quilòmetres, atès que la distància als satèl·lits és de 20.000 km. Es pot comprovar que la separació angular entre els vectors que apunten a un satèl·lit des de dos punts a la Terra separats 100 km és com a màxim 0,3°. Una cota conservadora de la diferència d'errors en la component radial de les efemèrides és

$$\varepsilon_R \leq \frac{d \cdot \delta r}{r} \quad (123)$$

en què r és la distància al satèl·lit, δr és l'error en les efemèrides, i d és la distància entre l'usuari i la referència.

Per exemple, per a $d = 100$ km i $\delta r = 10$ m (que realment és un valor molt alt perquè, com hem dit, un valor raonable és 2 m rms), la contribució de l'error de les efemèrides en posicionament diferencial és inferior a 5 cm.

- **Ionosfera.** Recordem que el retard ionosfèric depèn del contingut total d'electrons (TEC) al llarg del camí de propagació. Si considerem dos receptors sobre la superfície terrestre separats una distància d , la separació entre els camins que segueixen els senyals que arriben a cadascun dels receptors en el seu trànsit per la ionosfera també és aproximadament d (gràficament es pot entendre fàcilment que això és així perquè la ionosfera es concentra a unes altures bastant inferiors als 20.000 km d'altura dels satèl·lits). Per tant, els errors diferencials causats per la ionosfera dependran de la seva correlació espacial. Un valor típic de l'error en la direcció zenital seria de

0,1-0,2 m (que s'ha d'escalar adequadament per a altres elevacions) per a $d = 100$ km, encara que hi ha una variabilitat important depenent de l'activitat solar i de les tempestes electromagnètiques, i es poden assolir valors superiors a 1 m. Tot això implica que en tècniques diferencials que utilitzen els observables de fase i pretenen resoldre les ambigüitats (això ho estudiarem més endavant), la distància entre usuari i estació de referència està limitada a 15-20 km per a latituds mitjanes, que és on es produeixen alts gradients en la ionosfera.

- **Troposfera.** El retard troposfèric depèn del perfil de densitat de l'aire al llarg del camí de propagació. Dos receptors separats pocs quilòmetres poden estar subjectes a condicions meteorològiques completament diferents. El contingut en vapor d'aigua mostra una variabilitat alta tant temporal com espacial. Evidentment, els errors diferencials són més grans per a satèl·lits observats a una elevació baixa, i un valor habitual és 0,1-0,2 m per a distàncies horitzontals de 10 km. No obstant això, aquests errors poden augmentar en un ordre de magnitud si la separació entre els receptors està determinada per l'altitud. A elevacions baixes, l'error residual per metre de diferència en altitud és de 2-7 mm. Per a separacions horitzontals superiors a 10 km o diferències importants en altitud, és preferible corregir per separat les mesures tant en el receptor de l'usuari com en l'estació de referència utilitzant un model troposfèric abans que confiar en la cancel·lació de manera diferencial.
- **Multicamí, soroll i interferències.** Aquests errors són completament locals i, per tant, incorrelats entre l'usuari i l'estació de referència. Hem d'observar que, a diferència del multicamí i del soroll (que són completament específics per a un receptor), una mateixa interferència sí que pot afectar els dos receptors. No obstant això, encara que la font de la degradació sigui comuna, els errors instantanis que produirà en cadascun dels receptors seran en general diferents. Això significa que els errors del multicamí, soroll i interferències no es poden combatre de manera diferencial. Més aviat és el contrari, ja que la posició de l'usuari calculada està afectada pels errors tant en les mesures de l'estació de referència com en les mesures de l'usuari, i hi ha el doble de fonts d'errors a causa del multicamí, soroll i interferències que en el posicionament estàndard. Per aquest motiu, en posicionament diferencial és fonamental fer una bona selecció dels emplaçaments de l'usuari i de l'estació de referència (almenys d'aquesta última, ja que pot ser que no es tingui control sobre l'usuari, i a més els errors en l'estació de referència afectarien tots els usuaris que la utilitzessin).

La taula 5 resumeix la discussió prèvia, i mostra l'efecte de cada font d'error en el cas convencional i com es redueix en utilitzar alguna tècnica de mitigació.

Taula 5. Comparació de les fonts d'error en posicionament estàndard i diferencial

| Font d'error | Error en els observables | Tècnica de mitigació i mida de l'error |
|----------------------|---|---|
| Relotge de satèl·lit | Error del model: 2 m (rms) | DGPS: cancel·lació perfecta |
| Efemèrides | Error del model: 2 m (rms) | DGPS: 0,1 m (rms) |
| Ionosfera | En la direcció zenital: 2-10 m. Factor d'obliquïtat: 1,8, 3 a 30° i 5° d'elevació, respectivament. Els errors en el pseudorang i en la fase tenen la mateixa magnitud però signes diferents. | DGPS: 0,2 m (rms) Utilitzant un receptor d'una única freqüència i el model de Klobuchar: 1-5 m. Receptor bifreqüència: cancel·la l'error ionosfèric en un 99,9%, però augmenta l'efecte del soroll a 1 m (rms) |
| Troposfera | Retard en la direcció zenital i a l'altura de mar: 2,3-2,5 m. Disminueix amb l'altura. Factor d'obliquïtat: 2, 4, 10 a 30°, 15° i 5° d'elevació, respectivament. Afecta per igual a pseudorang i fase. | DGPS: 0,2 m (rms) més 2-7 mm per metre de diferència en altura. Models basats en condicions meteorològiques mitjanes: 0,1-1 m. |
| Multicamí | En un entorn "net": Pseudorang: 0,5-1 m Fase: 0,5-1 cm | Incorrelat entre receptors, no es pot mitigar amb DGPS. Les tècniques de mitigació habituals són: disseny de l'antena i emplaçament adequat, tècniques de processament de senyal en el receptor, <i>carrier-smoothing</i> , <i>arrays</i> d'antenes. |
| Soroll | Pseudorang: 0,25-0,5 m (rms) Fase: 1-2 mm (rms) | Incorrelat entre receptors, no es pot mitigar amb DGPS. La seva influència es pot reduir mitjançant un disseny adequat del receptor. |

La comparació es fa sota la hipòtesi que la distància entre receptors és de desenes de quilòmetres i la latència de desenes de segons.

Presentarem, a continuació dues maneres bàsiques de posicionament DGPS utilitzant mesures de pseudorang en l'usuari i en l'estació de referència, que identificarem en la resta del mòdul amb els subíndexs u i r . Després tractarem el posicionament utilitzant les fases de la portadora.

5.5.2. Posicionament absolut basat en el codi

En el posicionament absolut basat en el codi és necessari conèixer les coordenades exactes de l'estació de referència: x_r . Partint de la notació del subapartat 5.3 i de l'expressió 43, podem expressar els pseudorangs dels dos receptors per a un determinat satèl·lit com:

$$\begin{aligned} P_u &= r_u + c(\delta t_u - \delta t^s) + I_{\rho,u} + T_{\rho,u} + \varepsilon_{\rho,u} \\ P_r &= r_r + c(\delta t_r - \delta t^s) + I_{\rho,r} + T_{\rho,r} + \varepsilon_{\rho,r} \end{aligned} \quad (124)$$

Atès que l'estació de referència coneix la seva posició pròpia \mathbf{x}_r , pot calcular $r_r = \|\mathbf{x}^s - \mathbf{x}_r\|$ i obtenir l'error en els pseudorangs com $e_r = r_r - P_r$, que resultarà ser igual a

$$e_r = -c(\delta t_r - \delta t^s) - I_{\rho,r} - T_{\rho,r} - \varepsilon_{\rho,r} \quad (125)$$

El valor de e_r es retransmet als usuaris, que l'utilitzen per a corregir els seus pseudorangs de la manera següent

$$\begin{aligned} P_{u,\text{corr}} &= P_u + e_r = r_u + c(\delta t_r - \delta t_u) + (I_{\rho,u} - I_{\rho,r}) + (T_{\rho,u} - T_{\rho,r}) + \varepsilon_{\rho,u} - \varepsilon_{\rho,r} \\ &\approx r_u + c(\delta t_r - \delta t_u) + \varepsilon_{\rho,u} - \varepsilon_{\rho,r} \end{aligned} \quad (126)$$

Així s'obté un pseudorang corregit en què ha desaparegut per complet el terme de l'error del rellotge de satèl·lit, i en bona mesura també els termes de la ionosfera i la troposfera si les mesures P_u i P_r s'han pres suficientment properes en temps i espai. Veiem que efectivament l'expressió 126 inclou dues contribucions de soroll. Encara que no s'observa explícitament en les equacions, els errors deguts a les efemèrides també es cancel·len aproximadament perquè l'efecte d'un error en \mathbf{x}^s és aproximadament el mateix en r_r i r_u (això s'entendrà millor en el subapartat següent). L'expressió 126 té el mateix aspecte que la d'un pseudorang convencional i permet aplicar les solucions de navegació que hem vist per a posicionament no diferencial, simplement considerant un nou terme de biaix $\delta t'_u = \delta t_u - \delta t_r$, que deixa de tenir el significat del biaix del rellotge del receptor, però que permet mantenir la formulació i el nombre d'incògnites igual que en el posicionament no diferencial (és a dir, el nombre d'incògnites no es veu incrementat en 1).

Hi ha nombrosos sistemes DGPS a tot el món que fonamentalment funcionen de la manera que acabem de descriure. Molts són comercials (per exemple, l'usuari s'hi pot subscriure per rebre les correccions) i altres s'ofereixen per a institucions públiques. Per exemple, el US Coast Guard ofereix correccions DGPS en totes les zones costaneres. Aquest sistema s'ha estès a la resta del territori dels Estats Units en el que s'ha denominat el Nationwide DGPS (NDGPS).

5.5.3. Posicionament relatiu basat en el codi

La tècnica diferencial descrita en el subapartat anterior també es pot aplicar amb certes modificacions a la situació en la qual es desconeix la posició de l'estació de referència. En aquest cas, s'obtindrà la posició relativa de l'usuari pel que fa a la referència. Però no és una limitació greu; a més, en moltes aplicacions realment el que interessa és obtenir un posicionament relatiu. Dos exemples d'això són els vols en formació o l'aterratge d'avions en portaavions. En aquest últim cas, difícilment es pot conèixer la posició del portaavions

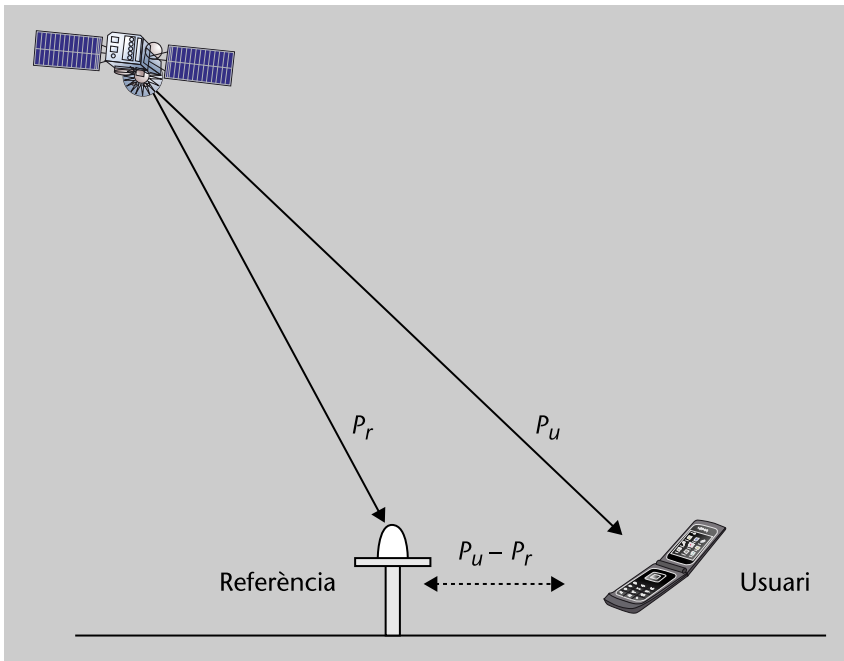
amb precisió centimètrica, però el realment important és tenir aquest nivell de precisió en la posició de l'avió relativa al portaavions quan es produeixi l'aterratge.

Si calculem la diferència dels dos observables en l'expressió 124, tenim

$$\begin{aligned} P_{ur} \equiv P_u - P_r &= (r_u - r_r) + c(\delta t_u - \delta t_r) + (I_{\rho,u} - I_{\rho,r}) + (T_{\rho,u} - T_{\rho,r}) + (\varepsilon_{\rho,u} - \varepsilon_{\rho,r}) \\ &\approx (r_u - r_r) + c\delta t'_u + \varepsilon'_{\rho,u} \end{aligned} \quad (127)$$

en què s'han cancel·lat (almenys de manera aproximada) de nou els termes de la ionosfera i de la troposfera, i s'han definit nous biaixos i sorolls equivalents, indicats amb el símbol de primer. Fer la diferència entre els observables mesurats en dos receptors diferents és una operació molt habitual en el processament de dades GNSS, i el resultat (P_{ur} , en aquest cas) té nom propi: diferència simple (SD, *single difference*).

Figura 34. Formació de la diferència simple



L'aspecte clau aquí és que la diferència $r_u - r_r$ depèn en primera aproximació del vector diferència $\mathbf{x}_{ur} \equiv \mathbf{x}_u - \mathbf{x}_r$, i no dels vectors \mathbf{x}_u i \mathbf{x}_r per separat, encara que això no sigui evident a partir de l'expressió:

$$r_u - r_r = \sqrt{(x_u - x^s)^2 + (y_u - y^s)^2 + (z_u - z^s)^2} - \sqrt{(x_r - x^s)^2 + (y_r - y^s)^2 + (z_r - z^s)^2} \quad (128)$$

Si aproximem la primera arrel pel seu desenvolupament de Taylor de primer ordre entorn de \mathbf{x}_r , obtenim

$$r_u - r_r \approx -\frac{x^s - x_r}{r_r} x_{ur} - \frac{y^s - y_r}{r_r} y_{ur} - \frac{z^s - z_r}{r_r} z_{ur} \quad (129)$$

En la pràctica, aquesta expressió depèn de les coordenades relatives de l'usuari pel que fa a la referència, (x_{ur}, y_{ur}, z_{ur}) , i no de les coordenades precises de la referència perquè els cosinus directors $(x^s - x_r)/r_r$, $(y^s - y_r)/r_r$, $(z^s - z_r)/r_r$ es poden calcular per a un valor aproximat de x_r sense cometre un error perceptible. A partir de les diferències simples en l'expressió 127 i de la linealització en la 129, és immediat plantejar la solució de navegació per a x_{ur} seguint els mateixos passos que en el posicionament estàndard.

5.5.4. Posicionament relatiu amb fases de portadora

Els mètodes anteriors, i també qualsevol altre mètode de posicionament diferencial o relatiu basat en el codi, proporcionen precisions entorn d'un metre. Per a fer el salt a pressions centrimètriques, és necessari processar les fases de portadora. Partirem de les equacions equivalents de l'expressió 124 però plantejades per a les fases de portadora per a descriure com podem utilitzar aquests observables per a posicionament:

$$\begin{aligned} L_u^s &= r_u^s + c(\delta t_u - \delta t^s) - I_{\rho,u}^s + T_{\rho,u}^s + R_u^s + \varepsilon_{L,u}^s \\ L_r^s &= r_r^s + c(\delta t_r - \delta t^s) - I_{\rho,r}^s + T_{\rho,r}^s + R_r^s + \varepsilon_{L,r}^s \end{aligned} \quad (130)$$

en què hem introduït dues modificacions pel que fa a la notació bàsica presentada en el subapartat 5.2. En primer lloc, expressem les equacions en metres, i per això representem la fase com a L , en lloc de Φ , que reservem per a la fase en cicles (no obstant això, la diferència entre una i l'altra és solament l'escalat per la longitud d'ona). En segon lloc, hem inclòs el terme R en lloc d'incloure simplement un nombre enter de longituds d'ona, perquè per a estudiar correctament el posicionament amb fases de portadora és necessari utilitzar un model més precís que el plantejat en els subapartats introductoris. El terme R inclou de fet l'ambigüitat en el nombre enter de longituds d'ona i a més els desfasaments/retards instrumentals que experimenta el senyal en el satèl·lit (k^s) i en el receptor (k_u):

$$\begin{aligned} R_u^s &= \lambda N_u^s + k^s + k_u \\ R_r^s &= \lambda N_r^s + k^s + k_r \end{aligned} \quad (131)$$

Per a eliminar els errors comuns entre l'usuari i la referència, és habitual procedir al càlcul de les diferències simples:

$$L_{ur}^s \equiv L_u^s - L_r^s = r_{ur}^s + c(\delta t_u - \delta t_r) + R_{ur}^s + \varepsilon_{L,ur}^s \quad (132)$$

En el terme corresponent a l'ambigüitat i als desfasaments instrumentals

$$R_{ur}^s = \lambda(N_u^s - N_r^s) + (k_u - k_r) = \lambda N_{ur}^s + k_{ur} \quad (133)$$

Nota

La mateixa discussió que la feta pels pseudorangs és vàlida aquí i les limitacions en la cancel·lació d'errors continuen essent les de la taula 5.

solament s'ha pogut eliminar el desfasament del satèl·lit. Per a eliminar les fonts d'error o d'indeterminació pròpies de cadascun dels receptors, quan es treballa amb fases de portadora, és molt habitual plantejar les dobles diferències (DD, *double difference*), que es defineixen com la diferència entre les SD corresponents a dos satèl·lits. Si els superíndexs s i v representen els dos satèl·lits involucrats, la doble diferència és

$$L_{ur}^{sv} \equiv L_{ur}^s - L_{ur}^v = r_{ur}^{sv} + R_{ur}^{sv} + \varepsilon_{L_{ur}}^{sv} \quad (134)$$

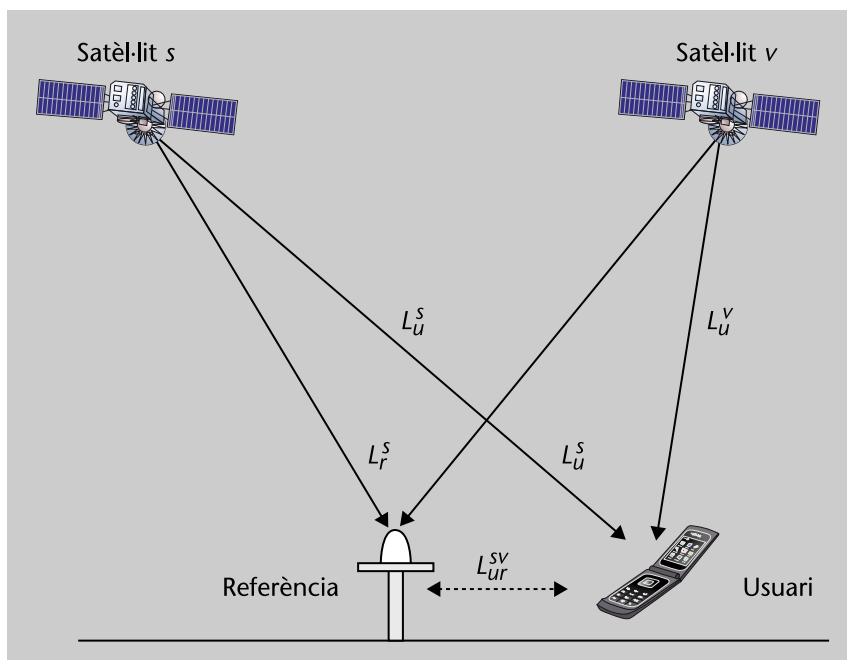
Gràcies a aquesta segona diferenciació s'han aconseguit eliminar els *offsets* dels rellotges dels receptors i els seus retards instrumentals. Aquest últim és l'aspecte clau pel qual és tan habitual treballar amb les diferències dobles; és a dir, en haver eliminat els retards instrumentals, el terme residual en les dobles diferències de fase és un nombre enter de longituds d'ona:

$$R_{ur}^{sv} = \lambda(N_{ur}^s - N_{ur}^v) = \lambda(N_u^s - N_u^v - N_r^s + N_r^v) = \lambda N_{ur}^{sv} \quad (135)$$

Explotar aquest fet és el que finalment permetrà obtenir la màxima precisió en el posicionament. Si es conegués el valor del nombre d'enter de longituds d'ona present en els observables de fase, aquests es comportarien com a pseudorangs (és a dir, com a mesures no ambigües) amb un nivell de soroll molt baix²¹.

⁽²¹⁾Entorn de pocs mil·límetres, en contrapartida del nivell de soroll d'un metre o una mica inferior en els pseudorangs pròpiament dits.

Figura 35. Formació de les diferències dobles



Hem presentat les dobles diferències com el resultat de restar dues diferències simples per a dos satèl·lits diferents, mentre que les diferències simples corresponen a la diferència dels observables entre dos receptors i un satèl·lit determinat. No obstant això, les dues dobles diferències també es poden obtenir calculant la diferència entre els observables per a dos satèl·lits i un receptor,

i fent a continuació la diferència per a dos receptors. Potser l'expressió mitjançant fórmules és més senzilla en aquest cas que el text. Per a una variable genèrica A (que pot ser la fase, l'ambigüitat, la distància, etc.) es compleix:

$$\begin{aligned} A_{ur}^{sv} &= A_{ur}^s - A_{ur}^v = (A_u^s - A_r^s) - (A_u^v - A_r^v) \\ &= A_u^{sv} - A_r^{sv} = (A_u^s - A_u^v) - (A_r^s - A_r^v) \end{aligned} \quad (136)$$

Hem d'observar que en fer qualsevol operació de diferenciació el soroll "s'acumula"; així, les SD contenen dos termes de soroll i les DD contenen quatre termes de soroll. Sota la hipòtesi raonable que els termes de soroll estan incorrelats i tenen la mateixa potència, podem afirmar que en fer un procés de diferenciació la desviació típica del soroll augmenta en un factor $\sqrt{2}$. Per tant, el nivell de soroll en les DD és el doble (o quatre vegades en potència) que en els observables originals que el formen. Aquest augment del soroll no és crític, especialment en els observables de fase, perquè és un preu relativament petit que s'ha de pagar per la cancel·lació de les altres fonts d'error que tenen valors més grans i que desapareixen gràcies a la diferenciació.

A títol d'exemple, si suposem que la desviació típica dels observables de codi i fase és 0,5 m i 5 mm, respectivament, en fer les dobles diferències, les desviacions es converteixen en 1 m i 1 cm.

Les equacions de navegació, quan s'utilitzen dobles diferències, segueixen els mateixos passos que en el cas estàndard de posicionament amb pseudorangs. El punt clau és la linealització de la distància r_{ur}^{sv} en funció del vector de posició relativa \mathbf{x}_{ur} . Com s'ha vist en el subapartat 5.5.2, la diferència simple de la distància es pot expressar com

$$r_{ur}^s \approx -(\mathbf{v}_u^s)^T \mathbf{x}_{ur} \quad (137)$$

en què \mathbf{v}_u^s és el vector unitari que apunta de l'estació de referència al satèl·lit (per a ser més precisos, caldria dir que el punt de partida hauria de ser el punt mitjà de la línia de base, encara que per a línies de base més curtes que 10 km, no es produeix cap variació notable en prendre qualsevol punt de la línia de base). Per tant, la doble diferència de la distància satisfà

$$r_{ur}^{sv} \approx -(\mathbf{v}_u^s - \mathbf{v}_u^v)^T \mathbf{x}_{ur} \quad (138)$$

Ara suposem que disposem de mesures a K satèl·lits, i llavors podem plantejar el sistema següent d'equacions lineals a partir de les dobles diferències de fase:

$$\begin{bmatrix} L_{ur}^{21} \\ L_{ur}^{31} \\ \vdots \\ L_{ur}^{K1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{v}_u^2 - \mathbf{v}_u^1)^T & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -(\mathbf{v}_u^3 - \mathbf{v}_u^1)^T & 0 & \lambda & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ -(\mathbf{v}_u^K - \mathbf{v}_u^1)^T & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ur} \\ N_{ur}^{21} \\ N_{ur}^{31} \\ \vdots \\ N_{ur}^{K1} \end{bmatrix} \quad (139)$$

Línia de base

La línia de base o *baseline* és el segment que va de l'usuari a l'estació de referència.

El vector d'incògnites conté $K + 2$ variables (les tres coordenades de la posició i les $K - 1$ ambigüitats). En utilitzar diferències dobles, l'*offset* del rellotge ja no apareix com a incògnita, a diferència del cas de posicionament no diferencial (també conegut com a *point positioning*).

Podem observar que hem identificat amb el superíndex 1 el satèl·lit triat com a referència. En teoria, a partir de les mesures a K satèl·lits, es posarien plantejar $K(K - 1)$ diferències dobles, però en realitat no té sentit treballar amb més de $K - 1$, ja que un conjunt més ampli de DD seria linealment dependent. Hi ha moltes maneres de generar $K - 1$ dobles diferències que siguin linealment independents, però és habitual utilitzar un mateix satèl·lit "de referència" en totes, i que aquest sigui el de més elevació. Això és així perquè en general més elevació comporta menys nivell de soroll, i és important que el satèl·lit "de referència" sigui el que proporciona un observable de més qualitat, ja que el seu soroll apareix en totes les DD i en totes les equacions.

El sistema d'equacions de l'expressió 139 està format per $K - 1$ equacions i $K + 2$ incògnites i, per tant, no és resoluble (és a dir, no té solució única). Per a contrarestar aquest problema, cal afegir noves equacions que no afegixin el mateix nombre d'incògnites. Hi ha moltíssimes maneres de fer això, de fet, es diria que infinites, ja que n'hi ha tantes com usuaris o fabricants, i cadascun pot proposar diferents maneres per a acabar calculant la posició relativa precisa a partir de les fases. Descriurem diferents alternatives, tenint en compte que les solucions pràctiques, més enllà dels detalls, utilitzen una o diverses d'aquestes alternatives.

El sistema d'equacions de navegació anterior es pot modificar o ampliar de diverses maneres:

- Inclouent equacions corresponents als pseudorangs, que depenen de les incògnites de posició, però no afegixen ambigüitats.
- Introduint mesures en diferents instants de temps (èpoques, en la nomenclatura de GNSS). Si l'usuari i la referència són estàtics, això no afegix incògnites de posició. Encara que aquest no sigui el cas i en cada època el vector de coordenades sigui diferent, encara hi ha un efecte net favorable perquè el nombre de mesures per època és, en condicions normals, més gran que el nombre de coordenades. Estem pressuposant que les ambigüitats són constants, o sigui, que no canvien entre èpoques, almenys durant períodes de temps relativament llargs. Això és així sempre que no es produeixin *cycle-slips*. Cada vegada que es produeix un *cycle-slip*, s'ha de determinar un nou valor de l'ambigüitat. Això no és problemàtic si són poc freqüents, perquè en cas contrari l'avantatge de processar diverses èpoques es dilueix. Quan s'utilitzen mesures de diferents èpoques no és habitual incloure-les totes en un sistema d'equacions, sinó que el normal és aplicar un mètode d'estimació seqüencial, com el mètode de mínims quadrats

seqüencial o la seva versió bayesiana, que és el filtre de Kalman. Aquesta última és l'opció més estesa.

- Utilitzant mesures a diverses freqüències. En teoria, això es pot fer de dues maneres. Una consisteix simplement a calcular les DD per a cada freqüència i incloure-les com a equacions en el sistema. L'altra consisteix a calcular una determinada combinació (per exemple, la combinació *wide-lane*, que veurem més endavant, la combinació lliure d'ionosfera, etc.) a partir dels observables d'una parella receptor-satèl·lit a dues freqüències, i llavors construir la DD de l'observable combinació, que és l'equació que finalment s'inclou en el sistema.
- Variant el caràcter de les ambigüitats entre nombre reals o enters. Si es resol el sistema de navegació sota la suposició que les ambigüitats són nombres reals, s'obté el que es denomina la solució flotant (*floating solution* i les *floating ambiguities*). És clar que en aquest cas les ambigüitats contribueixen a la dimensió de l'espai vectorial en el qual es troben les incògnites (i és ben conegut que es necessiten almenys tantes equacions com la dimensió d'aquest espai per a poder calcular la solució). Si s'imposa que les ambigüitats siguin realment nombres enters, llavors s'obté la solució fixa (*fixed solution* o les *fixed ambiguities*). El procés de determinar els valors enters de les ambigüitats es denomina fixar les ambigüitats (*to fix the ambiguities*). Com s'ha esmentat més amunt, en fixar les ambigüitats, l'observable de fase es comporta com un pseudorang ultraprecís (per exemple, amb soroll entorn de pocs mil·límetres).

Quan s'imposa en la resolució del sistema que les ambigüitats siguin enteres, aquestes solament contribueixen a l'augment de la dimensió de l'espai de les incògnites en una unitat (per exemple, una manera col·loquial d'expressar-ho seria dir que solament consumeixen un grau de llibertat). Això implica que el sistema es podria resoldre si el nombre d'equacions és igual o superior al nombre d'incògnites reals (en el cas de les DD que hem plantejat, les 3 coordenades de la posició relativa) més una (és a dir, amb quatre equacions es podria resoldre el sistema de l'expressió 139, almenys en teoria). Això és així perquè en absència de soroll, solament una combinació (o potser diverses, però serà fàcil identificar la correcta) de nombres enters faria que el sistema es complís amb igualtat. En presència de soroll, en general el sistema no es complirà exactament per a cap combinació, sinó que es complirà de manera aproximada per a un conjunt de combinacions, i el nombre d'elements d'aquest conjunt augmentarà a mesura que el soroll augmenti. Llavors en funció del nivell de soroll en les equacions, el nombre d'equacions necessàries per a identificar les ambigüitats enteres s'allunyarà més o menys del límit inferior que hem esmentat. I, en definitiva, la manera de contrarestar l'augment del nivell de soroll és afegir més equacions. Es pot interpretar de manera qualitativa que el fet de tenir més equacions permet fer una espècie de "mitjanament" que redueix el soroll.

5.5.5. Resolució de les ambigüitats de fase

Qualsevol tipus de posicionament diferencial precís amb fase de portadora i que resol les ambigüitats s'engloba habitualment sota el terme de *posicionament RTK (real-time kinematic position)*. Es tracta d'una nomenclatura molt estesa, encara que representa en realitat cert abús del llenguatge, perquè originalment el qualificatiu de *real-time* es referia a les tècniques que utilitzaven un sistema de comunicacions en temps real per a transmetre les mesures de l'estació de referència o de l'usuari i calcular la posició també en temps real. És l'oposat a tècniques de postprocessament. El qualificatiu *kinematic* s'associava a les tècniques en les quals el receptor de l'usuari no era necessàriament estàtic. A més, es va encunyar el terme *on-the-fly (OTF)*, que indicava que era possible resoldre les ambigüitats mentre l'usuari estava en moviment (això és, que la fase d'inicialització no necessàriament havia de ser estàtica).

Abans de passar a un exemple concret sobre com quedaria el sistema d'equacions de navegació en utilitzar alguna de les alternatives que acabem de plantejar, hem de comentar dos aspectes. En primer lloc, per a obtenir la màxima precisió (per exemple, centimètrica) del posicionament hi ha dues condicions necessàries:

1) S'ha de fixar el valor de les ambigüitats. Si es deixa que les ambigüitats surin, es pot afirmar en termes generals que la precisió estarà entorn del decímetre.

2) És necessari que el model que relaciona els observables de fase amb les ambigüitats i la resta de les variables sigui precís al nivell d'una fracció de centímetre. És a dir, no es pot pretendre fixar el valor de les variables enteres i obtenir una precisió centimètrica quan el model mateix no assoleix aquest nivell d'exactitud. Aquest aspecte fa referència fonamentalment als errors ionosfèrics i troposfèrics residuals presents en les mesures i les suposicions corresponents fetes en el model. Per exemple, si estem treballant amb dobles diferències, podem suposar que la contribució ionosfèrica s'ha cancel·lat. Si això és realment cert, no hi ha cap problema. Però realment hem vist anteriorment que l'error ionosfèric residual en fer la diferència d'observables depèn de l'activitat de la ionosfera i de la distància entre receptors, i s'acumula un error (com a màxim) de 2 cm cada 10 km de separació. Això implica que en termes generals solament podem dir que les diferències simples o dobles cancel·len l'error ionosfèric al nivell requerit per a fixar les ambigüitats quan la línia de base no supera els 10-20 km.

Es podria pensar que la ionosfera no hauria de ser un problema amb vista a determinar les ambigüitats quan es disposa de mesures a dues freqüències perquè en aquest cas es podria treballar amb les dobles diferències de l'observable de fase lliure d'ionosfera:

$$L_{IF,ur}^{sv} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{L1,ur}^{sv} - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{L2,ur}^{sv} = -(\mathbf{v}_u^s - \mathbf{v}_u^v)^T \mathbf{x}_{ur} + c \frac{f_1 N_{L1,ur}^{sv} - f_2 N_{L2,ur}^{sv}}{f_1^2 - f_2^2} \quad (140)$$

que es pot obtenir com la combinació lliure d'ionosfera de les dobles diferències (que correspon a com s'expressa en el segon terme de la igualtat anterior) o com la doble diferència de les combinacions lliures d'ionosfera. Per a alleugerir la notació, en l'expressió anterior i en algunes de les següents obviem el "soroll" que sempre apareix al final del model.

Efectivament és cert que la contribució ionosfèrica es cancel·la completament (entès com almenys el 99,9%, que és el percentatge del retard ionosfèric que és inversament proporcional a la freqüència al quadrat) en $L_{IF,ur}^{sv}$, i això ocorre fins i tot si $L_{L1,ur}^{sv}$ i $L_{L2,ur}^{sv}$ inclouen una contribució de la ionosfera deguda a la descorrelació espacial causada per la separació entre usuari i referència. El problema és llavors que en $L_{IF,ur}^{sv}$ l'ambigüitat no es pot expressar com un cert múltiple d'un nombre enter i , per tant, no és possible aplicar directament els algorismes de resolució d'ambigüitats a les combinacions lliures d'ionosfera.

En definitiva, hi ha una limitació intrínseca en la determinació de l'ambigüitat i la cancel·lació simultàniament de la ionosfera. La cancel·lació de la ionosfera destrueix el caràcter enter de les ambigüitats, mentre que conservar la naturalesa entera de les ambigüitats comporta mantenir un error ionosfèric residual en els observables. Aquesta limitació es fa manifesta especialment quan les línies de base són llargues (per exemple, superen els 10-20 km). El posicionament diferencial amb fases de portadora en àrees àmplies i amb l'usuari en moviment, que s'ha denominat WARTK (*wide area real-time kinematic*), és una àrea activa d'investigació. S'han proposat tècniques en aquesta direcció que es basen a utilitzar fonts addicionals d'informació ionosfèrica precisa (Hernández-Pajares i altres, 2004). La descripció d'aquestes tècniques està fora de l'abast d'aquesta assignatura.

Exemple

Una vegada feta aquesta discussió, passarem a plantejar un exemple de com quedaria el sistema d'equacions en unes condicions concretes. Suposarem que disposem de mesures de codi i fase, a dues freqüències, i en una única època. En aquest cas, les equacions de posicionament resulten:

$$\begin{bmatrix} P_{L1,ur}^{21} \\ \vdots \\ P_{L1,ur}^{K1} \\ L_{L1,ur}^{21} \\ \vdots \\ L_{L1,ur}^{K1} \\ P_{L2,ur}^{21} \\ \vdots \\ P_{L2,ur}^{K1} \\ L_{L2,ur}^{21} \\ \vdots \\ L_{L2,ur}^{K1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\sqrt{v_u^2 - v_u^1}) & f_1^{-2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\sqrt{v_u^k - v_u^1}) & 0 & \dots & f_1^{-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -(\sqrt{v_u^2 - v_u^1}) & -f_1^{-2} & \dots & 0 & \lambda_1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\sqrt{v_u^k - v_u^1}) & 0 & \dots & -f_1^{-2} & \dots & \dots & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ -(\sqrt{v_u^2 - v_u^1}) & -f_2^{-2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\sqrt{v_u^k - v_u^1}) & 0 & \dots & -f_2^{-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -(\sqrt{v_u^2 - v_u^1}) & -f_2^{-2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(\sqrt{v_u^k - v_u^1}) & 0 & \dots & -f_2^{-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ur} \\ b_{ur}^{21} \\ \vdots \\ b_{ur}^{K1} \\ N_{L1,ur}^{21} \\ \vdots \\ N_{L1,ur}^{K1} \\ N_{L2,ur}^{21} \\ \vdots \\ N_{L2,ur}^{K1} \end{bmatrix} \tag{141}$$

Per completesa hem inclòs explícitament el retard ionosfèric, modelitzat pels paràmetres b_{ur}^{sv} dividit per les freqüències al quadrat. Si es considera que el terme ionosfèric està suficientment atenuat per les dobles diferències, llavors simplement cal eliminar la variable corresponent en les equacions. A partir d'això és immediat deduir com es podrien obtenir els sistemes corresponents a altres casos, consistents, per exemple, a utilitzar una sola freqüència o més de dues freqüències, diverses èpoques, etc. El sistema anterior consta de $4(K - 1)$ equacions amb $3 + (K - 1)$ incògnites reals i $2(K - 1)$ incògnites que poden ser enteres o reals, amb la qual cosa si $K \geq 4$ és en teoria resoluble considerant que les ambigüitats són nombres reals. No obstant això, que el sistema sigui resoluble no garanteix que la determinació de les ambigüitats enteres hagin de tenir èxit perquè això últim depèn de manera genèrica del nivell de soroll present en les mesures pel que fa a la magnitud que representa un canvi d'una unitat en les ambigüitats ("tenir èxit" significa en aquest context que la probabilitat que el nombre enter calculat coincideixi amb el real és alta). Analtzarem això amb una mica més de detall a continuació.

La determinació de les ambigüitats ha rebut molta atenció gairebé des dels inicis de GPS; el primer treball és de Counselman i Gourevitch (1981), i des de llavors s'han publicat centenars d'articles. Una possible classificació de tots els mètodes proposats consisteix a agrupar-los en les categories de *geometry-free* o *geometry-based*.

Els mètodes lliures de la geometria (*geometry-free*) no exploten la dependència de la distància geomètrica amb les coordenades del receptor, sinó que consideren que cada distància és una variable independent. Es determina l'ambigüitat (o ambigüitats, si hi ha mesures a dues freqüències) per a cada satèl·lit de manera independent a les de la resta dels satèl·lits (per això de vegades aquests mètodes també es denominen mètodes de cerca en el domini de les mesures o mètodes d'un en un). Els mètodes basats en la geometria (*geometry-based*) pretenen determinar totes les ambigüitats en conjunt explotant el fet que hi ha un lligam entre aquestes determinat per la dependència de totes les distàncies amb les coordenades del receptor. La major part de la investigació en els últims anys s'ha centrat en aquest tipus de tècniques, ja que en aprofitar la dependència entre les mesures són les que proporcionen més bones prestacions, encara que també comporten en general més complexitat. No obstant això,

començarem explicant alguns casos representatius de tècniques *geometry-free*, no solament perquè ajuden a comprendre les altres tècniques, sinó perquè de vegades també es poden aplicar com un pas previ a la utilització d'una tècnica *geometry-based*.

5.5.6. Mètodes de resolució de l'ambigüitat *geometry-free*

La idea bàsica de les tècniques *geometry-free* queda recollida en aquest exemple senzill. Partim d'una mesura de pseudorang i de fase a una determinada freqüència, i considerem que utilitzem les dobles diferències per a eliminar o mitigar les fonts d'errors comuns (per exemple, considerarem aquí de moment que els errors ionosfèrics residuals són menyspreables). Podem expressar les mesures com:

$$\begin{aligned} P_{ur}^{sv} &= r_{ur}^{sv} + \varepsilon_p \\ L_{ur}^{sv} &= r_{ur}^{sv} + \lambda N_{ur}^{sv} + \varepsilon_L \end{aligned} \quad (142)$$

en què els termes ε representen els sorolls de mesura (fonamentalment el soroll tèrmic i possiblement interferències i multicamí). A partir d'aquestes equacions, es pot estimar l'ambigüitat entera com

$$\widehat{N} = \text{round}\left\{\frac{L_{ur}^{sv} - P_{ur}^{sv}}{\lambda}\right\} \quad (143)$$

en què $\text{round}\{\}$ és simplement l'operació d'arrodoniment. Es tracta d'un estimador tremendament senzill, però les seves prestacions no són satisfactòries perquè el soroll present en P_{ur}^{sv} té una desviació típica entorn d'1 m, i atès que el soroll en L_{ur}^{sv} és molt més petit (desviació típica d'1 cm) i que la longitud d'ona és $\lambda = 20$ cm (o un valor similar), la desviació típica de $(L_{ur}^{sv} - P_{ur}^{sv})/\lambda$ és entorn de 5 unitats. No es pot esperar que en quantificar en nivells separats una unitat amb una magnitud el nivell de soroll de la qual és 5 s'obtingui el valor correcte. Per a assolir una probabilitat d'error suficientment baixa, la desviació típica de la quantitat que es vol arrodonir hauria de ser almenys inferior a 0,2 cicles. Una manera de reduir la variància seria fer la mitjana de les mesures en diferents èpoques. Amb els nombres anteriors hauríem de fer la mitjana de 625 valors observables, que implica un temps d'observació almenys de 625 s, atès que el temps de correlació entre observables en un mode de funcionament normal del receptor és almenys d'un segon. En qualsevol cas, aquest exemple revela que la resolució de les ambigüitats no és un problema quan es disposa de temps i dades en abundància; el repte és fer-ho en unes poques èpoques (idealment en una sola).

Podem estendre l'exemple anterior al cas de dues freqüències. Les mesures es poden escriure llavors com

Nomenclatura

Al llarg d'aquest subapartat utilitzarem el símbol de l'accent circumflex $\hat{}$ per a representar els flotants, i el símbol d'ombreig \frown per als valors fixats.

$$\begin{bmatrix} P_{L1,ur}^{sv} \\ L_{L1,ur}^{sv} \\ P_{L2,ur}^{sv} \\ L_{L2,ur}^{sv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & -\gamma & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{ur}^{sv} \\ I_{L1,ur}^{sv} \\ \lambda_{L1} N_{L1,ur}^{sv} \\ \lambda_{L2} N_{L2,ur}^{sv} \end{bmatrix} \quad (144)$$

en què $\gamma = f_1^2 / f_2^2$. Hem inclòs explícitament l'efecte ionosfèric en les equacions, encara que també es podria haver omès si es considera que està suficientment atenuat pel càlcul de les dobles diferències. Es pot calcular la inversa de la matriu del sistema anterior, que val:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & -\gamma & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\gamma - 1} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma - 1 & \gamma - 1 & 2 & 0 \\ -2\gamma & 0 & \gamma + 1 & \gamma - 1 \end{bmatrix} \quad (145)$$

Per tant, les estimacions dels paràmetres són²²:

⁽²²⁾en què ometem els subíndexs i superíndexs corresponents als receptors i als satèl·lits per a alleugerir la notació, però és clar pel context que els observables es referiran a les dobles diferències; equacions similars es podrien plantejar per als observables originals, encara que no sigui tan habitual.

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_{L1} - \frac{1}{\gamma - 1} P_{L2} = \frac{f_1^2 P_{L1} - f_2^2 P_{L2}}{f_1^2 - f_2^2} \\ \hat{I}_{L1} &= \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} (P_{L2} - P_{L1}) \\ \hat{N}_{L1} &= \frac{1}{\lambda_1} (L_{L1} + \hat{I}_{L1} - \hat{r}) \\ \hat{N}_{L2} &= \frac{1}{\lambda_2} \left(L_{L2} + \frac{f_1^2}{f_2^2} \hat{I}_{L1} - \hat{r} \right) \end{aligned} \quad (146)$$

Observem que la primera equació és simplement la combinació de pseudorangs lliure d'ionosfera, i la segona equació és la combinació ionosfèrica. Podríem pensar que és possible fixar les ambigüitats arrodonint els resultats de la tercera i quarta equacions. No obstant això, fer-ho així té els mateixos inconvenients que el mètode d'una freqüència plantejat anteriorment. Com el nivell de soroll en \hat{r} i \hat{I}_{L1} és molt més gran que les longituds d'ona, la probabilitat de cometre un error en l'arrodoniment és molt alta. De fet, convé esmentar que el nivell de soroll en la combinació lliure d'ionosfera i en la combinació ionosfèrica són més grans que en els pseudorangs mateixos, perquè en aquestes combinacions els pseudorangs apareixen multiplicats pels factors $f_1^2 / (f_1^2 - f_2^2)$ i $f_2^2 / (f_1^2 - f_2^2)$, que són més grans que 1. Per contrarestar aquest problema, calculem la diferència entre l'equació tercera i quarta en l'expressió 146, que resulta

Freqüències i longituds d'ona

Recordem la relació entre les freqüències i les longituds d'ona, encara que ja és ben conegut a hores d'ara:

$$\lambda_{L1} = c / f_1, \quad \lambda_{L2} = c / f_2.$$

$$\begin{aligned}
\hat{N}_{L1L2} &\equiv \hat{N}_{L1} - \hat{N}_{L2} = \frac{1}{c}(f_1 L_{L1} - f_2 L_{L2}) + \frac{1}{c} \left(f_1 \hat{I}_{L1} - f_1 \hat{I} - \frac{f_1^2}{f_2} \hat{I}_{L1} + f_2 \hat{I} \right) \\
&= \frac{1}{c}(f_1 L_{L1} - f_2 L_{L2}) + \frac{1}{c} \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} (f_1 P_{L1} + f_2 P_{L2}) \\
&= \frac{1}{\lambda_w} \left(\frac{f_1 L_{L1} - f_2 L_{L2}}{f_1 - f_2} - \frac{f_1 P_{L1} + f_2 P_{L2}}{f_1 + f_2} \right)
\end{aligned} \tag{147}$$

en què hem utilitzat la definició $\lambda_w = c/(f_1 - f_2)$, que se sol denominar longitud ona *wide-lane* (perquè és molt més gran que λ_{L1} i λ_{L2}). Podem definir la combinació *wide-lane* de l'observable de fase i la combinació *narrow-lane* de l'observable de codi com:

$$\begin{aligned}
LW &\equiv \frac{f_1 L_{L1} - f_2 L_{L2}}{f_1 - f_2} \\
PW &\equiv \frac{f_1 P_{L1} + f_2 P_{L2}}{f_1 + f_2}
\end{aligned} \tag{148}$$

Llavors podem reescriure l'expressió 147 de la manera següent:

$$\hat{N}_{L1L2} = \frac{1}{\lambda_w} (LW - PW) \tag{149}$$

que és una expressió ben coneguda en l'àmbit de GNSS. Aquesta expressió se sol deduir habitualment de manera heurística, és a dir, simplement substituint en el terme de la dreta de l'expressió 149 les expressions dels observables i comprovant que proporciona una estimació de la diferència d'ambigüitats. La diferència $LW - PW$ se sol denominar combinació Melbourne-Wübbena. No obstant això, aquí hem seguit un procediment que permet mostrar que efectivament l'expressió 149 s'obté de la resolució del sistema d'equacions en 144. La combinació Melbourne-Wübb és molt interessant perquè hi desapareix completament l'efecte de la ionosfera. És fàcil comprovar que l'efecte de la ionosfera és el mateix en LW i PW , i, per tant, en fer la diferència desapareix.

L'avantatge d'aquest mètode és que ara sí que podem fixar l'ambigüitat N_{L1L2} simplement arrodonint i amb certa probabilitat d'èxit (o almenys, caldrà fer la mitjana de les dades durant menys èpoques per a obtenir una certa probabilitat d'èxit):

$$\widehat{N}_{L1L2} = \text{round} \left\{ \frac{1}{\lambda_w} (LW - PW) \right\} \tag{150}$$

perquè el soroll en PW en relació amb la longitud d'ona no és tan gran com en els casos anteriors. D'una banda, això ocorre perquè la longitud d'ona *wide-lane* és bastant gran, ja que correspon a la freqüència diferència entre L1 i L2, que en el cas de GPS és 347,82 MHz i, per tant, $\lambda_w = 86,2$ cm. D'altra banda, també

succeeix que el nivell de soroll en PW és millor que en els pseudorangs originals perquè aquests intervenen afectats pels factors $f_1/(f_1+f_2)$ i $f_2/(f_1+f_2)$, que són inferiors a 1.

Una vegada obtingut el valor de \widehat{N}_{L1L2} es poden plantejar dues opcions. Una consisteix a utilitzar LW com l'observable de fase en el qual cal basar el posicionament, ja que una vegada determinat \widehat{N}_{L1L2} , està lliure d'ambigüitat. El problema d'aquesta opció és que, a diferència del que ocorre en PW , el nivell de soroll en LW és més gran que en les fases originals, ja que aquestes estan afectades pels factors $f_1/(f_1-f_2)$ i $f_2/(f_1-f_2)$, que són més grans que la unitat. La segona opció consisteix a fixar les ambigüitats en els observables de fase originals, que tenen un nivell de soroll inferior i que, per tant, traslladaran menys nivell de soroll a la posició.

Per calcular el valor de les ambigüitats originals podem reprendre el sistema d'equacions original (expressió 144), i substituir una de les equacions per la nova equació $\widehat{N}_{L1L2} = N_{L1} - N_{L2}$. Si substituïm, per exemple, la tercera equació, ens queda

$$\begin{bmatrix} P_{L1} \\ L_{L1} \\ \widehat{N}_{L1L2} \\ L_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{L1}^{-1} & -\lambda_{L2}^{-1} \\ 1 & -\gamma & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ I_{L1} \\ \lambda_{L1} N_{L1} \\ \lambda_{L2} N_{L2} \end{bmatrix} \quad (151)$$

La inversa de la matriu del sistema d'equacions és:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{L1}^{-1} & -\lambda_{L2}^{-1} \\ 1 & -\gamma & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(1+\gamma)\lambda_{L1} - 2\lambda_{L2}} \begin{bmatrix} \gamma\lambda_{L1} - \lambda_{L2} & -\lambda_{L2} & \lambda_{L1}\lambda_{L2} & \lambda_{L1} \\ \lambda_{L1} - \lambda_{L2} & \lambda_{L2} & -\lambda_{L1}\lambda_{L2} & -\lambda_{L1} \\ (1-\gamma)\lambda_{L1} & (1+\gamma)\lambda_{L1} & -2\lambda_{L1}\lambda_{L2} & -2\lambda_{L1} \\ (1-\gamma)\lambda_{L2} & (1+\gamma)\lambda_{L2} & -(1+\gamma)\lambda_{L1}\lambda_{L2} & -2\lambda_{L2} \end{bmatrix} \quad (152)$$

Per tant, les estimacions de les ambigüitats originals es poden obtenir com:

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{L1} &= \frac{1}{\lambda_{L1}((1+\gamma)\lambda_{L1} - 2\lambda_{L2})} ((1-\gamma)\lambda_{L1}P_{L1} + (1+\gamma)\lambda_{L1}L_{L1} - 2\lambda_{L1}\lambda_{L2}\widehat{N}_{L1L2} - 2\lambda_{L1}L_{L2}) \\ \widehat{N}_{L2} &= \frac{1}{\lambda_{L2}((1+\gamma)\lambda_{L1} - 2\lambda_{L2})} ((1-\gamma)\lambda_{L2}P_{L1} + (1+\gamma)\lambda_{L2}L_{L1} - (1+\gamma)\lambda_{L1}\lambda_{L2}\widehat{N}_{L1L2} - 2\lambda_{L2}L_{L2}) \end{aligned} \quad (153)$$

Podem reescriure aquestes expressions de la manera següent:

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{L1} &= \frac{1}{\lambda_{L1}} \left(\frac{\lambda_{L1}^2 - \lambda_{L2}^2}{(\lambda_{L1} - \lambda_{L2})^2} P_{L1} + \frac{\lambda_{L1}^2 - \lambda_{L2}^2}{(\lambda_{L1} - \lambda_{L2})^2} L_{L1} - \frac{2\lambda_{L1}^2}{(\lambda_{L1} - \lambda_{L2})^2} (\lambda_{L2}\widehat{N}_{L1L2} + L_{L2}) \right) \\ \widehat{N}_{L2} &= \frac{1}{\lambda_{L2}} \left(\frac{\lambda_{L1}^2 - \lambda_{L2}^2}{(\lambda_{L1} - \lambda_{L2})^2} \frac{\lambda_{L2}}{\lambda_{L1}} P_{L1} + \frac{\lambda_{L1}^2 + \lambda_{L2}^2}{(\lambda_{L1} - \lambda_{L2})^2} \frac{\lambda_{L2}}{\lambda_{L1}} L_{L1} - \frac{2(\lambda_{L1}^2 + \lambda_{L2}^2)\lambda_{L2}}{(\lambda_{L1} - \lambda_{L2})^2} \widehat{N}_{L1L2} - \frac{2\lambda_{L1}\lambda_{L2}}{(\lambda_{L1} - \lambda_{L2})^2} L_{L2} \right) \end{aligned} \quad (154)$$

en què s'observa que el factor que multiplica els pseudorangs és:

$$\left| \frac{\lambda_{L1}^2 - \lambda_{L2}^2}{(\lambda_{L1} - \lambda_{L2})^2} \right| = \frac{f_{L1}^2 - f_{L2}^2}{(f_{L1} - f_{L2})^2} = \frac{f_{L1} + f_{L2}}{(f_{L1} - f_{L2})^2} = \frac{154 + 120}{154 - 120} = 8,06 \quad (155)$$

Es tracta d'un valor molt superior a la unitat, per la qual cosa fa que el nivell de soroll en els pseudorangs encara augmenti molt més pel que fa a les longituds d'ona de les portadores, i això provoca que no sigui fiable en absolut obtenir les ambigüitats enteres arrodonint les equacions en 154. Una alternativa consisteix a menysprear la contribució de la ionosfera (suposant, per exemple, que ja ha estat suficientment atenuada pel càlcul de les dobles diferències). D'aquesta manera, podem eliminar una incògnita i una equació en l'expressió 151, i en resulta

$$\begin{bmatrix} L_{L1} \\ \widehat{N}_{L1L2} \\ L_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{L1}^{-1} & -\lambda_{L2}^{-1} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \lambda_{L1} N_{L1} \\ \lambda_{L2} N_{L2} \end{bmatrix} \quad (156)$$

la solució de la qual és

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{L1} &= \frac{1}{\lambda_{L2} - \lambda_{L1}} (L_{L2} - L_{L1} + \lambda_{L2} \widehat{N}_{L1L2}) \\ \widehat{N}_{L2} &= \frac{1}{\lambda_{L2} - \lambda_{L1}} (L_{L2} - L_{L1} + \lambda_{L1} \widehat{N}_{L1L2}) \end{aligned} \quad (157)$$

En aquestes equacions no apareixen els pseudorangs, per la qual cosa el nivell de soroll és molt més petit i, per tant, és factible obtenir les ambigüitats enteres bé arrodonint directament aquestes expressions, o bé fent la mitjana un nombre no gaire elevat de vegades d'aquestes expressions i arrodonint a continuació.

Un altre algorisme proposat per Clyde C. Goad per a obtenir les ambigüitats consisteix en els passos següents (Strang; Borre; 1997):

$$\begin{aligned} K_2 &= \text{round}\{60\widehat{N}_{L1} - 77\widehat{N}_{L2}\} \\ \widehat{N}_{L2} &= \text{round}\left\{\frac{60\widehat{N}_{L1L2} - K_2}{77}\right\} \\ \widehat{N}_{L1} &= \widehat{N}_{L2} + \widehat{N}_{L1L2} \end{aligned} \quad (158)$$

en què \widehat{N}_{L1} i \widehat{N}_{L2} s'obtenen amb les expressions 154. Els factors 60 i 70 sorgeixen del fet que $\lambda_{L1}/\lambda_{L2} = 60/77$.

Les alternatives no s'esgoten aquí ni molt menys, perquè el tema de la resolució de les ambigüitats ha rebut molta atenció en els últims anys. Llavors podem esmentar una variació més. Es tracta d'una alternativa a l'expressió 150 esmentada en l'article "Wide-Area, Carrier-Phase Ambiguity Resolution Using a Tomographic Model of the Ionosphere", que permet calcular \widehat{N}_{L1L2} com

$$\widehat{N}_{L1L2} = \text{round}\left\{\frac{1}{\lambda_w}(LW - L_{IF} + \hat{R}_{IF})\right\} \quad (159)$$

Podem observar que hem substituït PW per $L_{IF} - \hat{R}_{IF}$, en què L_{IF} és la combinació de fases lliure d'ionosfera i \hat{R}_{IF} és una estimació del biaix a causa de les ambigüitats en aquesta combinació (no entrarem en com s'obté aquesta estimació). És clar que l'estimació del biaix ha de tenir un error petit comparat amb λ_w . L'avantatge de l'expressió 159 pel que fa a la 150 és que en aquella solament intervenen observables de fase (o sigui, amb menys soroll), però té el desavantatge que els errors ionosfèrics no es cancel·len completament en general. Això es deu al fet que si bé la ionosfera està cancel·lada en els termes lliures d'ionosfera (L_{IF} i \hat{R}_{IF}), no necessàriament ho ha d'estar completament en L_w . En canvi, en l'expressió 150, tant LW com PW inclouen exactament la mateixa contribució ionosfèrica, i en fer la diferència es cancel·la completament.

Finalment, presentarem una altra variació més perquè l'objectiu no és fer una descripció exhaustiva de totes les tècniques que hi ha (això podria ser objecte d'un curs complet), sinó que l'estudiant es familiaritzi amb el tipus de raonament que hi ha darrere de les diferents tècniques de resolució d'ambigüitats.

A partir de l'expressió 140 podem observar que el biaix en la combinació lliure d'ionosfera admet l'expressió

$$R_{IF} = c \frac{f_1 N_{L1} - f_2 N_{L2}}{f_1^2 - f_2^2} \quad (160)$$

Si al mateix temps definim $N_s = N_{L1} + N_{L2}$, llavors podem expressar $N_{L1} = 0,5(N_s + N_{L1L2})$ i $N_{L2} = 0,5(N_s - N_{L1L2})$, que en substituir-los en 160 resulta

$$R_{IF} = \frac{1}{2}\lambda_n N_s + \frac{1}{2}\lambda_w N_{L1L2} \quad (161)$$

en què s'ha definit $\lambda_n = c/(f_1 + f_2)$, que rep el nom de longitud d'ona *narrow-lane* (en el cas de GPS L1-L2 pren el valor de 10,7 cm). Si es disposa de \hat{R}_{IF} i \widehat{N}_{L1L2} en lloc de calcular les ambigüitats a les freqüències individuals mitjançant l'expressió 157, es pot calcular

$$\begin{aligned}
\widehat{N}_s &= \text{round}\left\{\frac{1}{\lambda_n}(2\widehat{R}_{IF} - \lambda_w\widehat{N}_{L1L2})\right\} \\
\widehat{N}_{L1} &= \text{round}\left\{\frac{1}{2}(\widehat{N}_s + \widehat{N}_{L1L2})\right\} \\
\widehat{N}_{L2} &= \widehat{N}_{L1} - \widehat{N}_{L1L2}
\end{aligned} \tag{162}$$

L'avantatge d'aquest procediment pel que fa a l'equació 157 és que, gràcies a disposar de \widehat{R}_{IF} , no és necessari pressuposar que els errors ionosfèrics són menyspreables (que és una suposició implícita en l'equació 157), però d'altra banda es necessita una gran exactitud en \widehat{R}_{IF} , ja que λ_n és una longitud d'ona molt petita.

Hem obtingut l'expressió 159 i les posteriors a aquesta de manera heurística, mentre que vam obtenir 150 de manera rigorosa partint del sistema d'equacions 144. Encara que ja no entrarem en els detalls, és fàcil comprovar que aquestes expressions es poden obtenir també a partir d'altres sistemes d'equacions. L'avantatge de derivar les expressions a partir de sistemes d'equacions en lloc de fer-ho de manera heurística és que les suposicions fetes per a obtenir-les queden clarament manifestes. Per exemple, l'expressió 159 es pot obtenir resolent

$$\begin{bmatrix} L_{L1} \\ L_{L2} \\ \widehat{R}_{IF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda_n\lambda_w/\lambda_{L1}^2 & -\lambda_n\lambda_w/\lambda_{L2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \lambda_{L1}N_{L1} \\ \lambda_{L2}N_{L2} \end{bmatrix} \tag{163}$$

en què queda patent que la contribució de la ionosfera s'ha menyspreat. Això ens permet recalcar una vegada més que el problema de totes aquestes tècniques és que per a acabar obtenint les ambigüitats enteres en les portadores originals, s'acaba en alguna d'aquestes dues situacions:

- Se suposa menyspreable la contribució de la ionosfera (que, en treballar amb diferències dobles, deixa de ser una bona aproximació per a línies de base de més de 10-20 km) i això permet resoldre les ambigüitats utilitzant expressions en les quals no intervenen (almenys, directament) els pseudorangs (podeu veure, per exemple, l'expressió 157 o la 162).
- Es considera explícitament la presència de la ionosfera, però llavors els pseudorangs apareixen en l'operació d'arrodoniment que condueix a les ambigüitats enteres (podeu veure, per exemple, 154). L'alt nivell de soroll en els pseudorangs comparat amb la longitud d'ona provoca que l'operació d'arrodoniment sigui molt poc fiable. El primer pas, consistent en el càlcul de \widehat{N}_{L1L2} mitjançant l'expressió 150, és bastant fiable perquè λ_w és gran, però el problema sorgeix en el càlcul de N_{L1} o N_{L2} , perquè N_{L2} i λ_{L1} són molt més petites que λ_{L2} .

Amb l'objectiu de superar les limitacions reflectides en els dos punts anteriors, es va proposar l'ús de senyals GNSS transmeses en tres freqüències portadores (en lloc de només dues), la qual cosa va donar lloc a les tècniques anomenades TCAR (*three-carrier ambiguity resolution*). La idea fonamental que hi subjeu és que l'ús de tres freqüències permet fer el pas de les longituds d'ona *wide-lane* a les longituds d'ona de les portadores de manera gradual, de manera que en cada pas la relació entre el soroll en els observables i la longitud d'ona és més petita que en el cas d'utilitzar solament dues freqüències.

Descriurem a continuació d'una manera qualitativa la lògica que hi ha darrere dels mètodes TCAR. Convé insistir que es tracta únicament d'una descripció qualitativa i no d'un algorisme que s'apliqui exactament d'aquesta manera en la pràctica. Suposem que tenim mesures a tres freqüències: L1, L2 i L5. Amb aquestes tres freqüències podem formar tres freqüències més *wide-lane*, que, suposant que utilitzem el cas de GPS, prenen els valors mostrats en la taula 6.

Taula 6. Freqüències portadores en GPS i les seves combinacions *wide-lane*

| Freqüència (MHz) | Longitud d'ona (cm) |
|----------------------------|-------------------------|
| $f_{L1} = 1.575,42$ | $\lambda_{L1} = 19,0$ |
| $f_{L2} = 1.227,60$ | $\lambda_{L2} = 24,4$ |
| $f_{L5} = 1.176,45$ | $\lambda_{L5} = 25,5$ |
| $f_{L1} - f_{L5} = 398,97$ | $\lambda_{w15} = 75,1$ |
| $f_{L1} - f_{L2} = 347,82$ | $\lambda_{w12} = 86,2$ |
| $f_{L2} - f_{L5} = 51,15$ | $\lambda_{w25} = 586,1$ |

En el primer pas s'aprofita que la combinació L2-L5 té una longitud d'ona molt gran per a calcular la diferència entre les ambigüitats en L2 i L5 mitjançant l'adaptació adequada de l'expressió 150:

$$\widehat{N}_{L2L5} = \text{round}\left\{\frac{1}{\lambda_{w25}}(LW_{25} - PW_{25})\right\} \quad (164)$$

en què la definició de cadascun dels termes és evident a hores d'ara:

$$\begin{aligned} \lambda_{w25} &= c / (f_{L2} - f_{L5}) \\ LW_{25} &= (f_{L2}L_{L2} - f_{L5}L_{L5}) / (f_{L2} - f_{L5}) \\ PW_{25} &= (f_{L2}P_{L2} + f_{L5}P_{L5}) / (f_{L2} + f_{L5}) \\ N_{L2L5} &= N_{L2} - N_{L5} \end{aligned} \quad (165)$$

En la descripció original del mètode (Forsell; Martín-Neira; Harris; 1997), en 164 s'utilitza P_{L5} (o el pseudorang a la freqüència que correspongui) en lloc de PW_{25} ; l'avantatge d'utilitzar aquesta última és que es cancel·len els errors ionosfèrics en aquest primer pas.

La probabilitat de triar l'enter adequat (equació 164) és elevada perquè λ_{w25} és diverses vegades superior al soroll en els pseudorangs. A partir de l'ambigüitat que acabem d'obtenir, podem deduir una mesura de distància millorada (per exemple, una mesura de fase amb l'ambigüitat fixada) com:

$$\widehat{L}_{L2L5} = LW_{25} - \lambda_{w25} \widehat{N}_{L2L5} \quad (166)$$

Ara podem repetir el procés amb la longitud d'ona *wide-lane* següent en ordre decreixent de valor. Obtenim una nova ambigüitat i una nova distància millorada com:

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{L1L2} &= \text{round}\left\{\frac{1}{\lambda_{w12}}(LW_{12} - \widehat{L}_{25})\right\} \\ \widehat{L}_{L1L2} &= LW_{12} - \lambda_{w12} \widehat{N}_{L1L2} \end{aligned} \quad (167)$$

Finalment, passem a resoldre l'ambigüitat en una de les portadores originals i obtenim la mesura de fase amb l'ambigüitat fixada:

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{L1} &= \text{round}\left\{\frac{1}{\lambda_{L1}}(L_{L1} - \widehat{L}_{L1L2})\right\} \\ \widehat{L}_{L1} &= L_{L1} - \lambda_{L1} \widehat{N}_{L1} \end{aligned} \quad (168)$$

Variacions de TCAR

La idea bàsica del TCAR ha donat lloc a múltiples variacions: *integrated three carrier ambiguity resolution* (ITCAR), *factorized multi-carrier ambiguity resolution* (FAMCAR), *multiple carrier ambiguity resolution* (MCAR). De totes maneres, totes les tècniques descrites anteriorment s'emmarquen dins de la categoria de tècniques *geometry-free*. La millora notable en les tècniques de resolució de l'ambigüitat s'obté amb les tècniques *geometry-based*, per a les quals també s'han proposat multitud de mètodes.

5.5.7. Mètodes de resolució de l'ambigüitat *geometry-based*

Presentarem el problema com un problema de mínims quadrats amb enters²³ amb l'objectiu de donar una descripció bastant genèrica. Moltes de les tècniques proposades es poden interpretar com una manera particular de solucionar un problema ILS. Un altre avantatge de la formulació ILS és que també és vàlida per a les tècniques *geometry-free*.

⁽²³⁾En anglès, *integer least squares* (ILS).

Resoldre el problema de l'ambigüitat com un problema ILS és la manera òptima de fer-ho, en el sentit que maximitza la probabilitat de trobar la combinació correcta d'ambigüitats. La dificultat dels problemes ILS és que són problemes combinatoris, la qual cosa vol dir que, per a trobar la solució exacta del problema en general, caldria avaluar totes les possibles combinacions de les variables enteres, la qual cosa computacionalment pot resultar molt cos-

tós. No obstant això, com veurem, hi ha alternatives per a fer la cerca de les combinacions de manera molt més ràpida. Algunes d'aquestes alternatives són subòptimes i d'altres són òptimes (vol dir que garanteixen que es troba el millor candidat a la regió de cerca).

Podem representar mitjançant un model molt general qualsevol problema que ens apareix relacionat amb l'estimació de la posició o les ambigüitats a partir dels observables. Es tracta del model següent:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{n} \quad (169)$$

en què $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$ són les mesures, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^p$ són les incògnites reals i $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}^q$ són les incògnites enteres. El soroll està representat per \mathbf{n} , i simplement reflecteix que en general no es pot trobar un ajust perfecte entre les mesures i les variables del model. Justament la dependència de les mesures amb aquestes variables està determinada per les matrius \mathbf{H} i \mathbf{A} , que són conegudes i depenen del problema concret que es tracti. Les mesures poden ser els observables de codi o de fase, qualsevol temps de combinació d'aquests (diferències simples, dobles, o altres), etc. Les incògnites reals normalment fan referència a les coordenades, però també poden incloure paràmetres relacionats amb la propagació, el relotge, etc. Perquè la dependència amb les coordenades sigui lineal, és necessari haver linealitzat prèviament la dependència de la distància amb la posició. Les incògnites enteres corresponen a les ambigüitats. És fàcil comprovar que tots els sistemes d'equacions presentats en el mòdul es poden obtenir particularitzant aquest model.

L'objectiu és trobar els valors de les variables reals i enteres que minimitzen l'error quadràtic entre les mesures i el model. És a dir, volem trobar els valors $\hat{\mathbf{x}}$ i $\hat{\mathbf{z}}$ que resolen

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^p, \mathbf{z} \in \mathcal{Z}^q} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 \quad (170)$$

en què \mathbf{Q}_y és la matriu de covariància de les mesures (si no es coneix, se suposa que és la identitat). Aquest problema no admet la solució tancada habitual dels problemes de mínims quadrats a causa de la restricció que \mathbf{z} ha de ser enter. Per explicar com es poden resoldre els problemes ILS, trobarem algunes expressions equivalents del problema de l'expressió 170.

El valor de \mathbf{X} que minimitza l'error quadràtic per a una \mathbf{Z} fixa és

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}) \quad (171)$$

Sumant i restant un mateix terme en l'error quadràtic, ho podem expressar com

$$\begin{aligned}
\|y - Hx - Az\|_{Q_y}^2 &= \left\| \left(I - H(H^T Q_y^{-1} H)^{-1} H^T Q_y^{-1} \right) (y - Az) - H(x - \bar{x}(z)) \right\|_{Q_y}^2 \\
&= \left\| \left(I - H(H^T Q_y^{-1} H)^{-1} H^T Q_y^{-1} \right) (y - Az) \right\|_{Q_y}^2 + \|H(x - \bar{x}(z))\|_{Q_y}^2 \quad (172) \\
&= \|P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} (y - Az)\|_{Q_y}^2 + \|x - \bar{x}(z)\|_{(H^T Q_y^{-1} H)^{-1}}^2
\end{aligned}$$

en què hem definit implícitament la matriu de projecció ortogonal $P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp$ com

$$P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp = I - Q_y^{-1/2} H (H^T Q_y^{-1} H)^{-1} H^T Q_y^{-1/2} \quad (173)$$

i hem utilitzat $P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} H = 0$ per a separar la norma inicial en dues normes.

Suposant que z pugui ser un vector real, el valor que minimitza l'error quadràtic s'obté a partir de la primera norma, que apareix en l'última expressió en l'equació 172:

$$\hat{z} = \left(A^T Q_y^{-1/2} P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} A \right)^{-1} A^T Q_y^{-1/2} P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} y \quad (174)$$

que es denomina *solució (float, en anglès)*. Podem sumar i restar el terme $A\hat{z}$ en la primera norma, i resulta que aquesta es pot expressar com

$$\begin{aligned}
&\|P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} (y - Az)\|_{Q_y}^2 \\
&= \|P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} (y - A\hat{z}) + Q_y^{-1/2} P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} A(\hat{z} - z)\|_{Q_y}^2 \\
&= \|P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} \left(I - A \left(A^T Q_y^{-1/2} P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} A \right)^{-1} A^T Q_y^{-1/2} P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} \right) y\|_{Q_y}^2 + \\
&+ \|Q_y^{-1/2} P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} A(\hat{z} - z)\|_{Q_y}^2 \quad (175) \\
&= \left\| \left(I - P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} A \left(A^T Q_y^{-1/2} P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} A \right)^{-1} A^T Q_y^{-1/2} P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} \right) P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} y \right\|_{Q_y}^2 + \\
&+ \|\hat{z} - z\|_{Q_y}^2
\end{aligned}$$

en què el primer terme del resultat és una constant (independent de z i x) i en què s'ha utilitzat la definició de $Q_z = \left(A^T Q_y^{-1/2} P_{Q_y^{-1/2} H}^\perp Q_y^{-1/2} A \right)^{-1}$. Substituint 175 en 172 obtenim l'expressió final de l'error quadràtic:

$$\|y - Hx - Az\|_{Q_y}^2 = cte + \|\hat{z} - z\|_{Q_z}^2 + \|x - \bar{x}(z)\|_{(H^T Q_y^{-1} H)^{-1}}^2 \quad (176)$$

La utilitat d'aquesta expressió és que ens permet descompondre la solució del problema ILS en tres passos:

Pas 1. Càlcul de la solució flotant de les variables enteres. Consisteix simplement a calcular la solució del problema sense la restricció que una part de les variables siguin enteres, de manera que es pot resoldre com un problema de mínims quadrats estàndard. La solució flotant està determinada per l'expressió 174. Alternativament, també es pot trobar $\hat{\mathbf{z}}$ resolent el problema original com un problema de mínims quadrats estàndard, la solució dels quals satisfà:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H} & \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H} & \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \\ \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{y} \quad (177)$$

Podem observar que el primer bloc de files de l'equació anterior implica que

$$\left(\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{A} \right) \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{y} \quad (178)$$

que és una relació útil per a derivar l'expressió 179.

Pas 2. Es minimitza el terme $\| \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z} \|^2_{\mathbf{Q}_z}$ sota la restricció que \mathbf{z} sigui enter. Aquest és el pas clau en la resolució del problema ILS perquè aquesta minimització és en general complexa i la manera de fer-la és el que diferencia uns mètodes d'altres. Més avall comentarem breument alguns d'aquests mètodes. El resultat d'aquest pas és el vector de variables enteres fixades (*fixed solution*), denominat $\bar{\mathbf{z}}$.

Pas 3. La minimització de l'últim terme en l'expressió 176 fixant el valor de \mathbf{z} a l'oposat en el pas anterior és directa, ja que no hi ha restriccions sobre \mathbf{x} . La solució final per a les incògnites reals tenint en compte el valor fixat per a les incògnites enteres és:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} \equiv \bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{z}}) &= \left(\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{A} \bar{\mathbf{z}}) \\ &= \hat{\mathbf{x}} - \left(\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{A} (\bar{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (179)$$

Podem observar que en general $\bar{\mathbf{x}}$ no coincideix amb $\hat{\mathbf{x}}$ (que seria la solució del problema si totes les incògnites fossin reals), sinó que se li aplica una correcció que depèn de la diferència entre la solució *float* i *fixed* per a \mathbf{z} . En el cas de posicionament, $\bar{\mathbf{x}}$ podrien ser les coordenades que s'obtenen una vegada que s'han fixat les ambigüitats al valor $\bar{\mathbf{z}}$.

La solució del pas 2 es pot veure com un mapatge entre \mathcal{R}^q i \mathcal{Z}^q , de manera que a cada vector real se li assigna un vector enter. Segons el criteri òptim de minimitzar la distància en la norma de \mathbf{Q}_z , les zones d'atracció o regions en la qual es divideix \mathcal{R}^q tenen una forma que depèn de \mathbf{Q}_z i que en general no

faciliten determinar a quina regió pertany un vector real donat. Hi ha diverses alternatives subòptimes per a evitar la complexitat del mapatge òptim, com l'arrodoniment de tots els components del vector $\widehat{\mathbf{z}}$ independentment (que equival a utilitzar com a zones d'atracció hipercubs) o el mètode de *bootstrapping*, que consisteix a resoldre el problema de mínims quadrats $\min_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}^q} \|\widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}\|_{\mathbf{Q}_z}^2$ de manera seqüencial, arrodonint un component en cada iteració.

L'arrodoniment de tots els components independentment és, sens dubte, el mètode més senzill, però solament és òptim quan la matriu \mathbf{Q}_z és diagonal. Justament en aquesta observació es basa el mètode LAMBDA (*least-squares ambiguity decorrelation adjustment*) (Teunissen, 1995), que és possiblement la tècnica més rigorosa i amb millors prestacions per a abordar el problema de resolució ambigüitats en GNSS. El mètode LAMBDA consisteix a resoldre el problema ILS aplicant en el pas 2 una transformació (denominada transformació Z) per a descorrelar les ambigüitats. D'aquesta manera, la matriu de correlació resultant és aproximadament diagonal i llavors es pot aplicar una tècnica similar (però no igual exactament) al *bootstrapping* i s'obtenen molt bones prestacions. De fet, està garantit que el mètode LAMBDA sempre troba la solució òptima si aquesta es troba dins de la regió de cerca.

Si es tenen coneixements de comunicacions digitals, un pot observar que el problema de resoldre les ambigüitats en GNSS és idèntic al problema de detecció de símbols que pertanyen a una constel·lació en comunicacions digitals. Aquest problema ha estat àmpliament estudiat, i s'ha assolit un nivell de sofisticació molt important. Les tècniques avançades consisteixen en dos passos: una etapa de reducció de la reixeta de cerca (els algorismes més coneguts són el LLL -Lenstra; Lenstra; Lovász; 1982- i el BKZ -Schnorr; Euchner; 1994-), seguida d'una cerca en arbre (utilitzant, per exemple, l'algorisme Schnorr-Euchner -Schnorr; Euchner; 1994-). Totes aquestes tècniques de comunicacions digitals es poden traslladar al problema de resolució d'ambigüitats (Hassibi; Boyd; 1998).

5.5.8. Posicionament absolut amb fases de portadora

Les tècniques RTK han estat l'estàndard de la indústria del posicionament per a obtenir precisions millors que 10 cm. En aquestes tècniques és necessari disposar d'un receptor de referència, i la capacitat per a resoldre les ambigüitats està determinada fonamentalment per la distància entre l'usuari i l'estació de referència, i els efectes atmosfèrics. En els últims anys ha aparegut una alternativa a RTK que encara està en una fase experimental però que està atraient moltíssim interès. Es tracta de les tècniques PPP (*precise point positioning*), que tenen el gran avantatge de no necessitar una estació de referència i que tenen l'objectiu de proporcionar una precisió similar a RTK (Bisnath; Gao; 2009). La base del funcionament de les tècniques PPP es basa a utilitzar informació de les òrbites i dels rellotges dels satèl·lits molt més precises que les transmeses pels satèl·lits mateixos. Aquesta informació es pot obtenir de sistemes que uti-

litzen xarxes denses de receptors i models més precisos per a estimar les òrbites i els rellotges, i normalment està disponible per mitjà d'Internet. La font d'informació més utilitzada és l'International GNSS Service (IGS). Els errors ionosfèrics s'eliminen utilitzant mesures a dues freqüències (encara que actualment s'està investigant sobre el PPP d'una freqüència).

6. Algorismes d'alta sensibilitat

En aquest apartat descriurem de manera succinta les estratègies per a augmentar la sensibilitat dels receptors GNSS i també una manera d'implementar aquestes estratègies.

Els sistemes GNSS han estat dissenyats per a funcionar correctament en condicions de visibilitat directa dels satèl·lits. No obstant això, hi ha molts interessos comercials i també qüestions relacionades amb el compliment de regulacions (com la normativa I911 als Estats Units o la recomanació I112 a Europa) que provoquen que sigui interessant estendre el funcionament dels receptors (encara que sigui amb una precisió en la posició molt més pobre) a entorns més complicats. Aquests entorns són bàsicament entorns interiors i escenaris urbans en què els senyals poden estar en més o menys mesura bloquejats pels edificis. El principal problema en aquests entorns és que la potència rebuda és molt més petita que l'esperada en condicions nominals (per exemple, entorns exteriors) i, per tant, perquè els receptors funcionin s'han d'utilitzar tècniques que en permetin augmentar la sensibilitat. D'aquí ve el terme HS-GNSS (*high-sensitivity GNSS*) utilitzat habitualment, que fonamentalment es refereix a tot el conjunt d'algorismes que es poden utilitzar perquè els receptors GNSS funcionin amb nivells de C/No diverses desenes de dB (des de 10 dB fins a valors de 40 dB o fins i tot superiors) per sota dels valors nominals.

A part de la integració amb altres sistemes de posicionament, la clau per a aconseguir que el receptor funcioni amb nivells de potència de senyal més baixos consisteix que el receptor capti més energia del senyal rebut, i això solament es pot aconseguir correlant el senyal durant intervals de temps més llargs. La primera opció per a allargar l'interval de correlació consisteix a augmentar el nombre d'acumulacions o integracions coherents N_c . No obstant això, hi ha diversos motius que impedeixen que N_c es pugui augmentar arbitràriament:

1) Si el senyal conté dades²⁴, hi ha el risc de cancel·lació del senyal si hi ha transicions de bit que ocorren durant la integració coherent del senyal. El valor mitjà de la degradació de l'SNR a causa d'aquest efecte és

$$L_c = -10 \log_{10} \left(1 - \frac{T_{coh}}{3T_{bit}} \right) \quad (180)$$

en què T_{coh} és la durada total de la integració coherent i T_{bit} és la durada d'un bit. Hi ha alternatives per a mitigar la pèrdua d'SNR causada per la falta d'alineació entre els bits i els intervals de correlació coherent. Una possibilitat és utilitzar el *half-bit method* (Psiaki, 2001), que consisteix a fer integracions coherents durant intervals de mig temps de xip. De cada parell d'intervals

Lectura recomanada

Aquest apartat solament és una introducció superficial al tema. Si hi esteu interessats hi podeu aprofundir en l'obra de Van Diggelen (2009) i en la de Seco-Granados; López-Salcedo; Jiménez-Baños; López-Rialler (2012).

Vegeu també

El concepte d'integració coherent s'explica en el subapartat 5.1 d'aquest mòdul.

⁽²⁴⁾Fet que no ocorre en els components pilot dels nous sistemes GNSS; podeu veure, per exemple, la descripció de Galileo en el mòdul "Evolució de la navegació per satèl·lit: Galileo i sistemes híbrids".

Vegeu també

En la segona part d'aquest apartat explicarem el mètode *double-DFT*, que permet alinear les integracions amb els bits.

consecutius, solament se n'acaba triant un (el de més valor) i l'altre es descarta, de manera que hi ha una gran probabilitat de triar els intervals que no experimenten transicions de xip i eliminar els que sí que n'experimenten. Una altra alternativa consisteix efectivament a alinear les integracions amb els bits, la qual cosa és el mateix que calcular la sincronització de bit. Aquesta és l'alternativa que proporciona prestacions millors a costa de més complexitat.

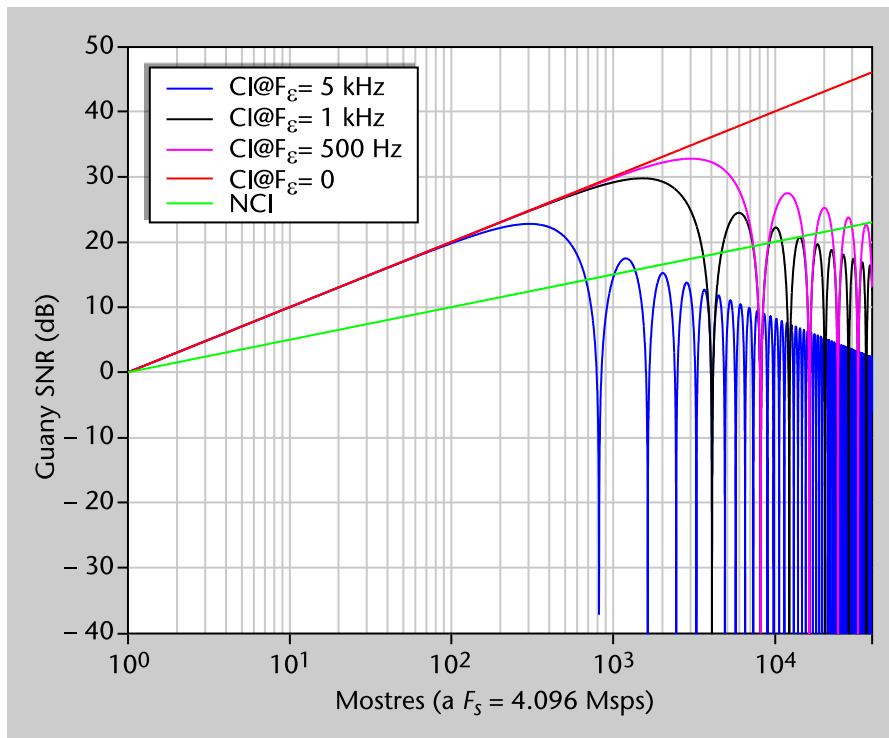
Per a estendre la integració coherent més enllà de la durada d'un bit, és necessari conèixer-ne el valor. Aquesta informació es pot incloure en informació d'assistència que es pot enviar al receptor GPS per mitjà d'un sistema de comunicacions mòbils (típicament un sistema WLAN o cel·lular, com Wi-Fi o UMTS/LTE). Aquest és el concepte denominat *A-GNSS* (*assisted GNSS*). No obstant això, no és gaire habitual utilitzar els bits que hi pot haver en la informació d'assistència, perquè per a utilitzar aquestes dades el receptor GPS ha d'utilitzar contínuament el sistema de comunicacions i es necessita una sincronització precisa entre les dades enviades pel sistema d'assistència i les dades que realment estan en el senyal GPS. Però sí que és molt habitual utilitzar el concepte A-GNSS per a enviar al receptor un altre tipus d'informació, com valors aproximats del retard i del Doppler dels satèl·lits (cosa que permet accelerar l'adquisició i augmentar la sensibilitat), i les dades del missatge de navegació (així pot calcular la posició fins i tot en el cas que no hagi rebut el missatge directament del senyal GPS a causa de l'atenuació) (Van Diggelen, 2009).

2) El senyal rebut està afectat per errors residuals de freqüència, i hi ha el risc de cancel·lació del senyal quan T_{coh} excedeix un cert valor. Aquest efecte es pot caracteritzar analitzant quant augmenta l'SNR en funció de T_{coh} i de l'error de freqüència F_ϵ en relació amb el cas d'integrar coherent solament durant la durada d'un codi PN T_{code} :

$$\Delta SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{T_{coh}}{T_{code}} \right) + 20 \log_{10} \left(\left| \frac{T_{code} \sin(\pi F_\epsilon T_{coh})}{T_{coh} \sin(\pi F_\epsilon T_{code})} \right| \right) \quad (181)$$

Aquesta expressió es dibuixa en la figura 36, on es pot observar que com més petit és l'error residual en freqüència, més llarg pot ser l'interval d'integració coherent abans que el guany en SNR es redueixi a causa dels plegaments de fase durant la integració. Aquest efecte indica que hi ha un compromís entre guany en SNR mitjançant integració coherent i la complexitat computacional, perquè per a poder augmentar el guany cal reduir la magnitud de l'error residual de freqüència, i això implica una cerca de freqüència més fina, que al seu torn implica més operacions.

Figura 36. Guany en SNR per a GPS de la integració coherent per a diferents errors de freqüència i també de la integració no coherent



3) La presència de soroll de fase deguda fonamentalment a l'oscil·lador del receptor també provoca, igual que l'error residual de freqüència, una autocancel·lació parcial del senyal a mesura que es van acumulant mostres coherentment.

Fins i tot en el cas favorable que el senyal no tingui dades i que no hi hagi limitació en la càrrega computacional, la durada de la integració coherent estaria limitada pel soroll de fase de l'oscil·lador. A més, aquest soroll és un efecte important en els receptors destinats a posicionament *indoor* perquè aquests receptors solen ser telèfons mòbils (o similars) que per qüestions de cost i mida disposen d'oscil·ladors amb relativament bastant soroll. Per aquest motiu, és inevitable recórrer a la combinació d'integracions coherents i no coherents per a poder posicionar el receptor a nivells de C/N_0 per sota de 25 dB-Hz.

En utilitzar tots dos tipus d'integracions, la corba de correlació resultant es pot escriure com

$$R_{NC}(\tau, f) = \frac{1}{N_I} \sum_{k=0}^{N_I-1} |R_C(\tau, f; k)|^2 \quad (182)$$

en què és el nombre d'interval·ls d'integració coherent que s'acumulen de manera no coherent, i la correlació coherent es defineix com

Vegeu també

El concepte d'integració no coherent s'explica en el subapartat 5.1 d'aquest mòdul.

$$R_C(\tau, f; k) = \sum_{n=[KN_C N_{scode}]^{(k+1)N_C N_{scode}-1}} x(n)c(((1+\beta f)n - \tau)_{\text{mod}N_{scode}})e^{-j2\pi f n} \quad (183)$$

en què $x(n)$ és el senyal rebut, $c(n)$ és la seqüència PN, N_{scode} és el nombre de mostres en un període d'aquesta seqüència, i β és el factor de proporcionalitat entre la freqüència portadora i la freqüència de xip del senyal. Per tant, el temps d'integració total (també conegut com a *total dwell time*) és $T_{tot} = N_I N_C N_{scode} T_s$, i T_s és el període de mostreig. El significat de $R_{NC}(\tau, f)$ és conceptualment el mateix que el de la corba de correlació estàndard mostrada en la figura 10, i una vegada calculada sobre una reixeta de valors (τ, f) es procedeix de manera similar a com s'hi va explicar. És a dir, es determinen les estimacions gruixudes (en anglès, se solen denominar *coarse estimates*) del retard i de la freqüència com el parell de punts de la reixeta en el qual $R_{NC}(\tau, f)$ és màxim, sempre que aquest màxim superi un llindar γ , que es fixa d'acord amb una probabilitat de falsa alarma. Si el màxim no supera el llindar, es considera que el satèl·lit que s'està buscant no és present.

Hem vist que hi ha limitacions per a augmentar el valor de N_C arbitràriament, però podríem pensar que no hi ha problema a millorar la sensibilitat tant com vulguem augmentat el valor de N_I . Com ja podem intuir a hores d'ara, això tampoc no serà així. En primer lloc, augmentar N_I també fa créixer la latència que hi ha en el càlcul de la posició, i pot arribar un moment en el qual sigui excessiva per al tipus d'ús que es vol fer. Però el que és més interessant, l'error Doppler residual també té un efecte en les integracions no coherents, perquè aquesta freqüència residual es tradueix així mateix en un lent desplaçament del senyal pel que fa a la referència. El fet que la freqüència també afecta el senyal banda base s'observa en el terme de $c(((1+\beta f)n - \tau)_{\text{mod}N_{scode}})$ de l'expressió 183, perquè igual que l'efecte Doppler canvia la durada dels cicles de portadora (i per tant, la freqüència, com és ben conegut) també canvia la durada dels xips. La conseqüència d'aquest desplaçament és que corbes de correlació coherents successives es van desplaçant respecte a les anteriors, i en fer la suma no coherent s'"esborralla" la posició de pic. Per a poder assegurar que l'error que causa això en la posició del pic no excedeix un valor $\Delta\tau$, és necessari que es compleixi $T_{tot} \leq 2 \Delta\tau / \varepsilon_f$, en què ε_f és l'error relatiu en l'estimació de la freqüència (és a dir, l'error de freqüència, F_e , dividit per la freqüència portadora nominal del senyal). El valor de ε_f es pot reduir fent la reixeta en la qual es busca el màxim de $R_{NC}(\tau, f)$ més fina en la dimensió de la freqüència. Per tant, s'observa un comportament similar al que ocorria amb la integració coherent, i ara també podem augmentar les acumulacions no coherents, N_I , si s'accepta més complexitat computacional.

De totes maneres, encara que aconseguíssim que l'efecte de l'"esborrallament" del pic de correlació a causa dels errors residuals de freqüència fos menyspreable, anirien sorgint nous efectes que limitarien el temps total d'integració. De

manera que, encara que en teoria es podria arribar a detectar el senyal a nivells arbitràriament baixos de C/N_0 , en la pràctica sorgeixen multitud d'efectes que fan molt complicat arribar a valors de C/N_0 inferiors a 10 dB-Hz. Fins i tot en el cas que la freqüència Doppler estigüés perfectament estimada, la dinàmica del rellotge de receptor (per "dinàmica" s'entén les derives respecte a un rellotge ideal) també distorsionaria el pic de correlació. Això es pot mitigar mitjançant tècniques d'estimació de la dinàmica del rellotge, però això no és factible en receptors de mà. La tecnologia actual de rellotges limita el temps d'integració a 10 s com a màxim. Està reconegut que el desenvolupament de rellotges amb prestacions millors i de baix cost permetrà fer progressos en el posicionament GNSS d'alta sensibilitat.

Un altre exemple d'aquests efectes és el moviment mateix dels satèl·lits i del receptor. Atès que el resultat d'observar el senyal durant T_{tot} és una única mesura de distància per a cada satèl·lit, però el satèl·lit o el receptor s'han mogut durant T_{tot} , no està gens clar a quina posició del satèl·lit i del receptor correspon la distància calculada. Aquesta incertesa es tradueix finalment en incertesa en la posició calculada.

Una vegada trobades les estimacions gruixudes de T i f , s'han de trobar les estimacions fines. En els receptors convencionals això es fa mitjançant els algorismes de seguiment (o *tracking*), que també es poden modificar per a utilitzar-los en HS-GNSS. No obstant això, en aquest últim cas també és molt habitual utilitzar les anomenades implementacions del tipus *snapshot* o *push-to-fix* o d'adquisició contínua, en què la idea fonamental és evitar l'etapa de *tracking* i obtenir les estimacions precises de T i f fent una avaluació en una reixeta més fina. Aquesta manera de funcionament encaixa bé amb les aplicacions en entorns interiors, en què moltes vegades pot no ser necessari disposar de la posició contínuament, sinó que té sentit que l'usuari sol·liciti el càlcul de la posició solament en determinats moments, quan vol fer una acció determinada. En resposta a la pulsació d'un botó per part de l'usuari, el terminal captura un conjunt de mostres del senyal i, a partir d'aquestes, calcula la posició i desconnecta la funcionalitat de posicionament fins que l'usuari ho torna a sol·licitar.

6.1. Algorismes d'HS-GNSS basats en la DFT

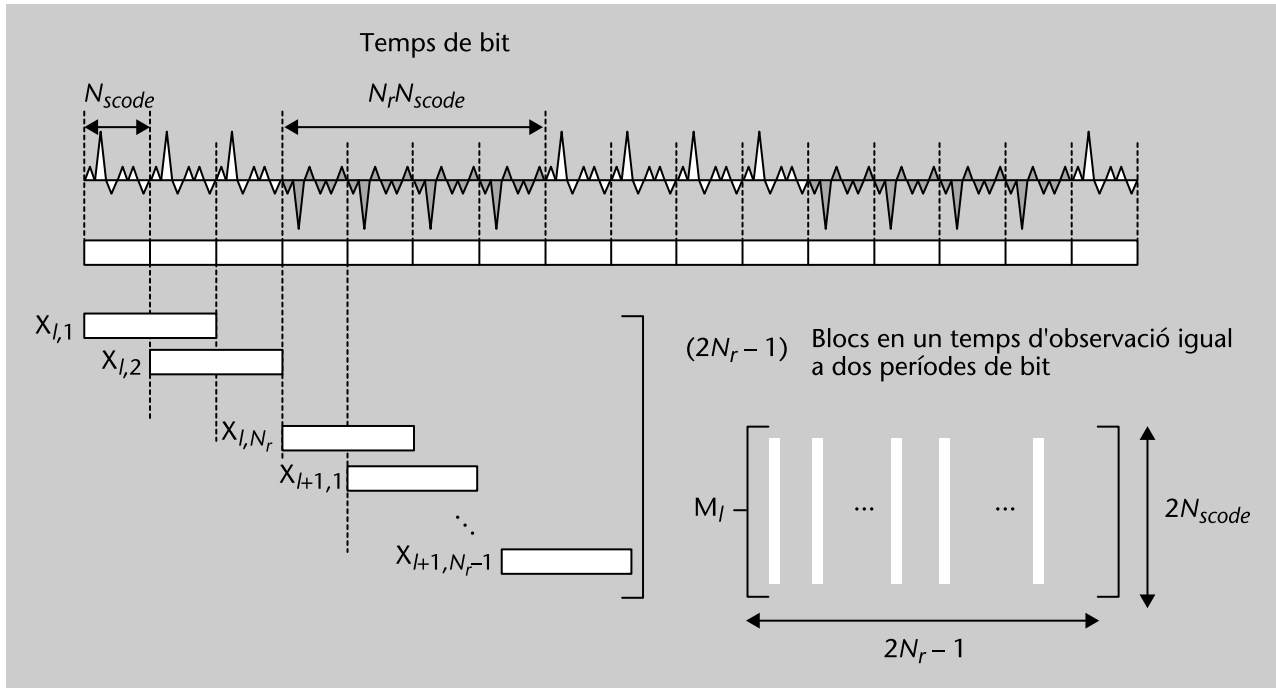
Descriurem a continuació una possible manera de fer les integracions coherents i no coherents de manera computacionalment més senzilla que seguint literalment l'expressió 182. Aquesta implementació s'ha utilitzat en la pràctica en projectes experimentals de l'Agència Espacial Europea, com s'explica en l'obra de López-Salcedo i altres (2008) i en la de Seco-Granados; López-Salcedo; Jiménez-Baños; López-Risueño (2012). L'avaluació de la correlació entre el senyal rebut i la rèplica local és sens dubte el procés més costós des del punt de vista del nombre d'operacions en un receptor GNSS, i més encara quan es tracta d'un receptor d'alta sensibilitat a causa dels llargs intervals de correlació. El càlcul de la correlació implica processar milers de mostres cada mil·lisegon per satèl·lit i per a cada cel·la de retard i freqüència. Una opció habitual és fer

les correlacions en el domini de la freqüència, és a dir, multiplicant mostra per mostra les representacions freqüencials de dos senyals i fent seguidament la transformació inversa. Suposant que els dos senyals tenen una longitud de N mostres, així s'aconsegueix que l'ordre del nombre d'operacions sigui $O(N \log N)$, en lloc de $O(N^2)$, que resulta quan la correlació es fa en el domini temporal mitjançant el desplaçament, la multiplicació i la suma dels senyals.

L'algorisme que esbossarem es denomina *doble-DFT*. Permet fer integracions coherents (que al seu torn es poden acumular no coherentment) de durada igual a la dels bits, sense cap informació *a priori* sobre les transicions d'aquests. És una manera eficient d'implementar el filtre adaptat per a diferents valors del desplaçament de freqüència utilitzant solament transformacions DFT i algunes operacions bàsiques. El fet d'utilitzar solament transformacions DFT és molt útil per a la inclusió de receptors GNSS en dispositius mòbils de comunicacions. Tots els estàndards de comunicacions mòbils utilitzen ja senyals OFDM (*orthogonal frequency division multiplex*) o evolucionen envers aquests, en els quals l'element clau en la desmodulació és la transformació DFT, i per tant, els terminals solen incloure un mòdul especialitzat a fer la DFT de manera molt eficient. Un algorisme de processament HS-GNSS que utilitzi gairebé únicament DFT es pot incloure en un terminal mòbil de comunicacions aprofitant el mòdul de DFT que ja hi ha en el terminal, i reduir al màxim la inclusió de nous components de processament de senyal GNSS en el receptor.

El primer pas de l'algorisme *doble-DFT* aplicat al senyal GPS-C/A consisteix a prendre un bloc de mostres de durada igual a dos bits. Així s'assegura que aquest interval inclou necessàriament el tros de senyal que correspon a un bit, sigui quin sigui el retard del senyal. Seguint el mateix raonament, un interval de durada igual a dues vegades la durada del període de la seqüència PN inclou necessàriament un període enter d'aquesta seqüència. Fragments successius de $2N_{code}$ mostres presos amb un desplaçament entre ells d'un període del codi s'apilen per a construir la matriu $\mathbf{M}_l \in \mathbb{C}^{2N_{code} \times (2N_r - 1)}$, en què $N_r = 20$ és el nombre de períodes de la seqüència PN que formen un bit i el subíndex l indica l'interval de bit que s'està processant. La manera de construir la matriu es mostra en la figura 37.

Figura 37. Procediment per a emplenar de mostres la matriu \mathbf{M}_I utilitzada en l'algorisme *doble-DFT*



Hem suposat que el valor de N_{scodes} és enter, però en la pràctica, a causa d'errors residuals de freqüència o de l'ús pràcticament obligatori de freqüències de mostreig incommensurables amb la taxa de xip, aquest valor no és enter. Això causa certs problemes a l'hora d'emplenar \mathbf{M}_I perquè no és clar en quina mostra acaba un període del codi i comença el següent. La solució trivial és arrodonir N_{scodes} i començar cada columna de \mathbf{M}_I amb la mostra que està una posició múltiple d'aquest valor, però no funciona satisfactòriament perquè s'introdueix un petit retard entre columnes que es va acumulant. Aquest retard farà que els pics de correlació associats a cada columna no estiguin alineats entre ells i, en sumar-los posteriorment, es produeix un efecte similar a l'"esborrallament" discutit abans. Encara que pot semblar un error marginal, en realitat no ho és tant. Qualsevol petit error en retard queda "amplificat" en multiplicar per la velocitat de la llum i passar-ho a metres, i es converteix en rellevant atesa la precisió requerida en els sistemes GNSS. Per posar un exemple, imaginem una freqüència de mostreig igual a 3,5 vegades la velocitat de xip, que equival a una distància de 86 m entre mostres. Si s'incorre en un error de mitja mostra entre columnes, això equival a un desplaçament de 43 m entre corbes de correlació. Per a evitar aquest efecte, s'interpolen les mostres del senyal en introduir-les en la matriu. Això es pot fer de manera molt eficient en el domini de la freqüència multiplicant per una matriu \mathbf{T}_I d'exponencials complexes.

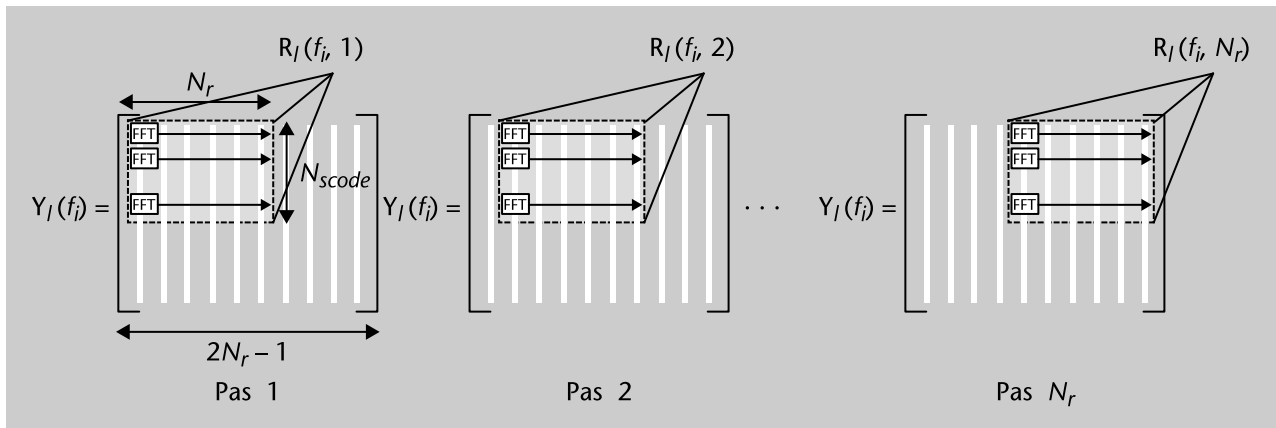
La correlació de cadascuna de les columnes de \mathbf{M}_I amb un període de la seqüència PN desplaçada a una freqüència f_i es pot fer mitjançant la DFT, i es pot expressar com

$$\mathbf{Y}(f_i) = \mathbf{F}^H((\mathbf{F}\mathbf{M}_I) \bullet \mathbf{T}_I) \bullet ((\mathbf{J}_i \mathbf{F} \mathbf{c}) \otimes \mathbf{1}_{2N_r-1}^T) \quad (184)$$

en què F és la matriu de Fourier (això és, multiplicar per F equival a fer la DFT; i multiplicar per F^H equival a la DFT inversa), \bullet representa el producte de Hadamard o component per component, \otimes és el producte de Kronecker, i c conté les mostres d'un període de la seqüència PN. El vector c conté zeros en la seva segona meitat, mentre que les columnes de \mathbf{M}_l estan completament plenes de mostres del senyal, la qual cosa implica que estem utilitzant el mètode *overlap-and-save* per a dur a terme la correlació (Oppenheim; Schafer; Buck; 1999), i per tant solament la meitat superior de la matriu \mathbf{Y}_l és rellevant (la part inferior es pot descartar). \mathbf{J}_l és una matriu que fa una rotació circular del vector que té a la seva dreta. Cal recordar que una rotació en el domini de la freqüència discreta equival a un desplaçament de freqüència en temps, que és justament el que volem. La granularitat de la cerca *coarse* en freqüència està determinada pel mínim desplaçament de freqüència, que és el que s'obté en fer la rotació d'una mostra, i que al seu torn és igual a l'invers de la durada de les columnes. Per tant, en aquest cas és 500 Hz. En dispositius mòbils dotats d'un rellotge amb estabilitat d'1 ppm, caldria buscar en una finestra de $\pm 1,5$ kHz (això és 1 ppm sobre la freqüència portadora L1), que es tradueix a explorar 7 posicions de freqüència en salts de 500 Hz.

Una vegada que es disposa de les matrius \mathbf{Y}_l , el pas següent és buscar les transicions de bit per a poder integrar coherentment durant un bit. L'aspecte fonamental és que aquesta cerca també es pot fer mitjançant la DFT, i d'aquí ve el nom de *doble-DFT* de l'algorisme. El procés s'il·lustra en la figura 38. En cada matriu \mathbf{Y}_l , es prenen conjunts successius de N_r columnes per a comprovar si aquestes són les columnes que formen un bit. No obstant això, els valors de les files d'aquestes submatrius no es poden sumar directament perquè l'existència d'un error de freqüència faria que el senyal es cancel·lés. Per tant, s'ha de sumar però provant al mateix temps diferents *offsets* de freqüència, i això es pot fer directament aplicant la DFT a cadascuna de les files de les submatrius. El resultat són les matrius $\mathbf{R}_l(f_i, m)$, en què cadascun dels paràmetres correspon al següent: l al període de bit que s'està processant, f_i a la cel·la gruixuda de freqüència i m a la posició de la transició de bit.

Figura 38. Procediment per a la sincronització de bit en l'algorisme *doble-DFT*



Si s'afegeixen N_r zeros a cadascuna de les files abans de fer la DFT, la mida de cada matriu $\mathbf{R}_i(f_i, m)$ és $N_{scode} \times 2N_r$, i la granularitat de la cerca fina en freqüència és $1/(2N_r N_{scode} T_s)$, que en el cas de GPS-C/A és 25 Hz. Recapitulant, s'ha obtingut un conjunt de matrius $\mathbf{R}_i(f_i, m)$ a partir de les mostres originals aplicant poc més que la DFT en dues direccions (primer per columnes i després per files) i alguna reorganització i selecció dels elements de les matrius involucrades.

Per comoditat, per a completar la detecció del satèl·lit, es poden definir uns hipercubs que $\mathbf{C}_i(f_i)$, les dimensions dels quals són $N_{scode} \times 2N_r \times N_r$, que contenen els elements del conjunt de matrius $\mathbf{R}_i(f_i, m)$ per a tots els valors de m . Els hipercubs corresponents a N_I intervals de bit es poden acumular de manera no coherent:

$$\mathbf{R}_{NC}(f_i) = \frac{1}{N_I} \sum_{l=0}^{N_I-1} |\mathbf{R}_i(f_i)|^2 \quad (185)$$

que és l'estructura final de dades resultant de l'algorisme *doble-DFT*. L'últim pas és la determinació del màxim d'aquesta estructura, de manera que si aquests màxima supera un llindar (com ja es va comentar prèviament), indicarà la presència del senyal d'un satèl·lit. El màxim s'ha de buscar en 4 dimensions, això és, les tres de cada hipercub $\mathbf{R}_{NC}(f_i)$ i a més el paràmetre f_i . La descripció que havíem presentat al principi de l'apartat deia que la cerca es feia en una reixeta de dues dimensions en (τ, f) , però es tractava d'una descripció a escala conceptual. Quan això es porta a la pràctica, és necessari fer adaptacions, etc., i l'algorisme *doble-DFT* n'és un exemple. Veiem que en la pràctica el resultat és una cerca en 4D encara que conceptualment no deixa de ser una cerca en les dues dimensions de temps-freqüència. La cerca en 4D no necessàriament ha de ser ni més ni menys complicada que la cerca en 2D, simplement és una manera diferent de representar les dades. La posició de màxim indica el desplaçament en temps i en freqüència del senyal rebut. Concretament, la posició en la primera dimensió (és a dir, en la direcció de les columnes) fa referència al desplaçament dins d'un període del codi, mentre que la tercera dimensió fa referència a la posició de la transició de bit dins els N_r períodes que formen un bit. D'aquesta manera, entre la primera i tercera dimensió determinen el retard del senyal. D'altra banda, el valor de f_i per al qual es troba el màxim proporciona el valor del desplaçament guixut de freqüència, mentre que la posició del màxim en la segona dimensió (és a dir, en la direcció de les files) correspon a la correcció fina de freqüència que s'ha d'afegir al desplaçament guixut. Entre tots dos valors s'obté l'estimació de la freqüència del senyal.

Finalment, cal esmentar que els algorismes per a resoldre l'equació de navegació també s'han de modificar en el cas d'HS-GNSS. En els escenaris amb C/No baixa pot passar que no es puguin detectar els bits del missatge de navegació. Hem d'esmentar que és possible mesurar el retard del senyal a nivells de C/No per als quals no es poden detectar els bits, i aquest és el motiu últim d'interès en els sistemes HS-GNSS/A-GNSS. El fet de no disposar del missatge de navegació té dues implicacions. La primera és evident, i és que no es disposa de la informació continguda en el missatge de navegació. Això se soluciona fàcilment utilitzant el mecanisme A-GNSS.

La segona implicació és que no es poden observar les marques temporals que conté el senyal GNSS (en el cas de GPS és el TOW, com es va explicar en el subapartat 5.1) i l'aspecte essencial és que això impossibilita obtenir l'instant de transmissió a partir de l'observació del senyal (recordeu la figura 18). En el subapartat 5.3 es van presentar dos algorismes per a resoldre les equacions de navegació. El primer prenia com a dada de partida el temps de transmissió del senyal, per la qual cosa clarament no és aplicable en el cas d'HS-GNSS. El segon algorisme partia del temps de recepció del senyal, però aquest s'hauria de conèixer amb una precisió considerable (entorn del mil·lisegon) per a no introduir errors excessius en la posició dels satèl·lits. Atès que conèixer el temps GPS amb una precisió menor al mil·lisegon tampoc no és habitual en les aplicacions habituals d'HS-GNSS, el segon algorisme tampoc no és utilitzable directament. Encara que no entrarem en els detalls, la solució és modificar les equacions de navegació per a incloure una cinquena variable (a més de les habituals, que són les coordenades del receptor i l'*offset* del rellotge del receptor), que és l'instant de transmissió. Aquest tipus de navegació se sol conèixer en la bibliografia avançada com a *coarse-time navigation*.

El fet de no observar les marques temporals també provoca que els retards i, per tant, també els pseudorangs, mesurats en HS-GNSS, siguin ambigus. No obstant això, el període de l'ambigüitat sol ser bastant gran (per exemple, 1 ms en GPS, que equival a 300 km, o també pot ser 20 ms) i si es disposa d'uns valors aproximats de la posició del receptor (fins i tot amb errors de quilòmetres) i del temps en el receptor (fins i tot de segons) es pot saber la distància aproximada entre el receptor i els satèl·lits amb un error molt més petit que el període de l'ambigüitat, i per tant resoldre-la.

Lectura recomanada

Podeu trobar més detalls sobre la *coarse-time navigation* en la secció VII de l'obra de Seco-Granados, López-Salcedo, Jiménez-Baños i López-Risueño (2012) o en l'excel·lent capítol 4 de Van Diggelen (2009).

Resum

En aquest mòdul s'ha presentat el sistema de radionavegació per satèl·lit més utilitzat actualment: el sistema GPS. Aquest sistema va néixer d'un programa que va establir el Departament de Defensa dels Estats Units a la fi dels anys seixanta amb l'objectiu d'unir els esforços invertits fins al moment en matèria de radionavegació per satèl·lit. No obstant això, fins a l'any 1995 el sistema no va ser declarat sistema amb capacitat operacional total.

En primer lloc, s'han descrit els segments del sistema GPS: segment espacial, segment de control i segment d'usuari. El segment espacial està format per una constel·lació de satèl·lits base que consta de 24 satèl·lits distribuïts en 6 plans orbitals de 4 satèl·lits cadascun. L'òrbita d'aquests satèl·lits és pràcticament circular, amb un període orbital de mig dia sideral. Aquests satèl·lits es troben organitzats en blocs, segons la fase de desenvolupament a la qual pertanyin. Els blocs són el bloc I, associat a la fase d'experimentació del sistema i format per 11 satèl·lits llançats entre els anys 1978 i 1985; el bloc II, compost pels primers 9 satèl·lits de producció llançats entre 1989 i 1990; el bloc IIA, 19 satèl·lits similars als del bloc II però amb algunes millores, en aquest cas llançats entre 1990 i 1997; el bloc IIR, bloc de reposició de satèl·lits format per 13 satèl·lits llançats en el període comprès entre 1997 i 2004; el bloc IIR-M, bloc consistent de la versió modernitzada dels satèl·lits que inclouen nous senyals i format per 8 satèl·lits llançats entre 2005 i 2009; el bloc IIF, format per 11 satèl·lits de manteniment, que inclouen el nou senyal *safety-of-life*, el primer dels quals es va llançar l'any 2010, i, finalment, els blocs previstos per al futur, orientats a satisfer els requisits de les properes dècades (blocs III-A, III-B i III-C). La constel·lació de satèl·lits en el moment de redactar el mòdul està formada per 30 satèl·lits: 10 del bloc IIA, 12 del bloc IIR, 7 del bloc IIR-M i 1 del bloc IIF. El segment de control s'encarrega de monitorar i controlar la constel·lació de satèl·lits de GPS. Per a això, el sistema està compost d'una estació de control mestra, encarregada de centralitzar el control de la constel·lació GPS; sis estacions de monitoratge, repartides pel globus terrestre i encarregades de dur a terme les funcions de seguiment dels senyals de navegació dels diferents satèl·lits, i quatre estacions de transmissió de dades, encarregades de transmetre les ordres de control i els missatges de navegació generats per l'estació de control mestra als satèl·lits. Quant al segment d'usuari, està format pel conjunt de receptors GPS, i hi ha diferents maneres de classificació segons la seva naturalesa: tipus d'usuari (civil o militar), tipus d'arquitectura de recepció (canals independents, seqüència o múltiple) i capacitat freqüencial (monofreqüència o multifreqüència).

A continuació, s'han presentat les bandes freqüencials d'operació i l'estructura dels senyals de navegació. Les bandes freqüencials utilitzades per a enviar els senyals de GPS són les bandes L1, centrada en $f_{L1} = 1.575,42$ MHz i utilitzada

per a enviar els codis C/A, P i M; la banda L2, centrada en $f_{L2} = 1.227,60$ MHz i utilitzada per a transmetre els codis P, M i L2C, i la banda L5, centrada en $f_{L5} = 1.176,45$ MHz i utilitzada per a enviar el senyal *safety-of-life*. Quant al senyal GPS tradicional (previ a les versions modernitzades), es compon principalment del missatge de navegació $D_k(t)$ i de les seqüències de *spreading* $C_k(t)$ i $P_k(t)$ associades als codis C/A i P, respectivament. El missatge de navegació $D_k(t)$ conté la informació necessària perquè l'usuari pugui calcular la posició del satèl·lit k -èsim, com és el cas de les efemèrides del satèl·lit, i el temps de transmissió del senyal rebut. És a dir, la informació necessària perquè l'usuari calculi la seva posició. A part proporciona informació relacionada amb l'estat del senyal, els almanacs, paràmetres de correcció ionosfèrics i paràmetres per a relacionar el rellotge del sistema GPS amb el sistema de temps UTC. Aquesta informació es transmet a 50 bps, per la qual cosa es requereixen 12,5 min per a enviar un missatge de navegació complet. Les seqüències de *spreading*, per la seva banda, no contenen cap informació i el seu objectiu és:

- 1) dotar el senyal del satèl·lit d'un tipus d'identificador (basat en el codi en si que contenen) per a distingir-lo dels senyals dels altres satèl·lits;
- 2) modificar l'aspecte del senyal perquè ofereixi millors prestacions a l'hora d'estimar el temps de propagació del senyal i, amb això, la distància entre l'usuari i el satèl·lit, i
- 3) millorar la robustesa del senyal davant interferències i possibles atacs intencionats (*jamming*).

Els codis C/A i P es formen a partir de seqüències PRN amb diferents característiques segons el cas. El codi C/A, per la seva banda, es forma amb codis Gold de 1.023 xips de longitud i velocitat de xip igual a 1,023 Mxips/s. Presenta autocorrelacions i correlacions encreuades amb bons nivells de rebot davant versions retardades del codi propi i codis d'altres satèl·lits, concretament entorn de $-1/1.023$, excepte algunes pertorbacions. En el cas del codi P, té una longitud de $6,1871 \times 10^{12}$ xips, un període temporal de 7 dies i una velocitat de xip igual a 10,23 Mxips/s. Quant als nivells d'autocorrelació (a les zones de rebot) i les correlacions encreuades, el codi P ofereix un comportament excel·lent en presentar nivells entorn de $-1/6,1871 \times 10^{12}$. Finalment, s'han presentat les característiques principals dels senyals modernitzats que es van començar a utilitzar amb els llançaments dels satèl·lits dels blocs IIR-M (senyals L2C i M) i IIF (senyal *safety-of-life*).

A continuació s'ha estudiat com s'utilitzen aquests senyals per a acabar calculant finalment la posició. En una primera fase, s'ha analitzat el procés que va des de la recepció del senyal a la generació de les mesures de retard i fase. Aquest procés es du a terme en dues etapes, denominades *etapa d'adquisició* (subapartat 4.1) i *etapa de tracking* (subapartat 4.2). L'etapa d'adquisició té com a objectiu proporcionar una estimació aproximada dels valors de retard de co-

di i freqüència Doppler, per als satèl·lits que es troben visibles en el moment en el qual captura el senyal el receptor GPS. Aquestes estimacions són el resultat d'una cerca bidimensional en temps i freqüència en la qual la mètrica que s'analitza és la integració coherent o no coherent de la sortida del correlador. Si bé la integració coherent presenta més guany, la presència dels bits del misatge de navegació limita aquesta integració a un màxim de 20 ms, a més de la limitació mateixa que pugui estar imposada per l'error residual de freqüència existent. Per contra, la integració no coherent no presenta aquests problemes i pot ser estesa més enllà del temps de bit, i arriba a valors d'integració de diversos segons en condicions d'alta sensibilitat. En tots dos casos, l'objectiu d'aquestes integracions és el mateix: reduir l'efecte del soroll i permetre que el senyal del satèl·lit que s'analitza, en cas d'estar present, pugui ser fàcilment detectat. Aquest procés, de fet, es pot modelitzar com un problema de detecció de senyal en soroll, en què es poden aplicar els conceptes i les eines sobre teoria de la detecció ja presentades en el mòdul "Sistemes radar". Una vegada que el senyal del satèl·lit d'interès ha estat detectat, automàticament es disposa d'estimacions aproximades sobre el retard de codi i la freqüència Doppler. Tots dos valors corresponen a la cel·la de la cerca bidimensional on s'ha detectat la presència de senyal.

Aquestes estimacions aproximades de retard de codi i freqüència Doppler podrien ser ja suficients per al cas d'un receptor de comunicacions. No obstant això, un receptor GPS requereix una precisió molt més gran que la d'un receptor de comunicacions, ja que les mesures de retard de codi (en unitats de temps) han de ser convertides posteriorment a distància, i això implica un factor de conversió que està determinat per la velocitat de la llum $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Per tant, petites variacions en termes de retard de codi ocasionen grans variacions en termes de distància. Per això, les estimacions aproximades de retard de codi i freqüència Doppler que proporciona l'etapa d'adquisició han de ser refinades i monitorades al llarg del temps (per a seguir qualsevol variació temporal possible), la qual cosa es fa durant l'etapa de *tracking*. En aquesta etapa es fa un seguiment del retard de codi i de la fase de la portadora mitjançant dos esquemes en paral·lel, el *delay lock loop* (DLL) i el *phase lock loop* (PLL), respectivament. En el subapartat 4.2 s'han presentat els principis de funcionament de tots dos esquemes, els quals estan basats en arquitectures en llaç tancat. Els principals elements d'aquest tipus d'arquitectures són:

- el discriminador, que facilita a la seva sortida un senyal proporcional a l'error entre el senyal d'entrada i la rèplica local;
- el filtre de llaç, que suavitza la variabilitat que pugui presentar la sortida del discriminador a causa de l'efecte del soroll;
- l'NCO (*numerically controlled oscillator*), que acumula la sortida del filtre de llaç i proporciona un senyal que és utilitzat directament per a generar la fase del codi o la fase de la portadora de la rèplica local.

Per a l'anàlisi d'aquest tipus de sistemes en llaç tancat, el subapartat 4.2 ha introduït les eines bàsiques i ha presentat les condicions d'estabilitat i prestacions que regeixen aquests sistemes.

Una vegada explicat com s'obtenen les mesures de retard i de fase per a cada satèl·lit, s'ha passat a estudiar com s'utilitzen aquestes mesures per a calcular la posició del receptor. El primer pas d'aquest procés consisteix a generar els observables de pseudodistància i de fase de portadora. Aquestes magnituds són essencialment les mesures proporcionades pel subsistema de processament de senyal del receptor, però és necessari fer algunes modificacions perquè es pugui plantejar el model que relaciona els observables amb les distàncies entre el receptor i el satèl·lit. S'ha presentat detalladament aquest model, i s'ha explicat el perquè de la dependència dels observables no solament de la distància geomètrica, sinó també de paràmetres atmosfèrics i dels rellotges del receptor i dels satèl·lits. El segon pas és el que es denomina habitualment *resolució de les equacions de navegació*, i consisteix a buidar d'aquest model les incògnites de posició. Resoldre les equacions de navegació no és trivial perquè la dependència de la distància amb les coordenades és altament no lineal. S'han presentat dues famílies de solucions. La primera es basa a linealitzar aquesta dependència mitjançant un desenvolupament de Taylor al voltant d'una posició *a priori* aproximada del receptor, i dóna lloc a un procediment iteratiu perquè la posició obtinguda es pot utilitzar com a nou punt de partida per a la linealització en una iteració següent. La segona família de solucions, el representant més conegut de les quals és el mètode de Bancroft, permet obtenir l'estimació de la posició de manera tancada. Per a això s'eleva les equacions de navegació al quadrat per a eliminar l'arrel quadrada que apareix en l'expressió de la distància, però això també ocasiona un augment del soroll. Per tant, aquest tipus de solucions són menys exactes, però resulten útils en general per a obtenir un punt de partida per a les tècniques basades en la linealització. Un problema afegit en el càlcul de la solució de navegació és el del càlcul de les posicions dels satèl·lits, que no és una dada directament coneguda *a priori*, ja que les seves coordenades varien amb el temps a causa del seu moviment propi i del moviment del sistema de coordenades lligat a la Terra. S'han explicat dos algorismes que permeten resoldre aquesta incertesa inherent a les posicions dels satèl·lits al mateix temps que es calcula la posició del receptor.

Evidentment, la posició que obté en el receptor no coincideix perfectament amb la real perquè hi ha múltiples fonts d'errors que afecten la precisió de la posició. S'han analitzat l'origen i els efectes de les diferents fonts d'error, que s'han classificat en tres categories segons si es deuen a errors en les efemèrides o el rellotge dels satèl·lits, a l'atmosfera o als efectes locals en el receptor (soroll, interferències i propagació multicamí). L'atmosfera introdueix errors en la mesura de distàncies perquè la velocitat de propagació del senyal en la ionosfera i en la troposfera no és exactament la del buit. En termes absoluts, els errors ionosfèrics són els més importants de tots, però es poden corregir fent mesures a dues o més freqüències o mitjançant tècniques diferencials.

Aquestes tècniques diferencials també permeten pràcticament eliminar els errors provinents dels satèl·lits (efemèrides i rellotges), de manera que finalment els errors deguts al multicamí i a les interferències es converteixen en la principal limitació en moltes aplicacions GNSS. En particular, s'ha estudiat detalladament l'efecte de la propagació multicamí. La recepció de diverses rèpliques del senyal GNSS no té un efecte potencialment beneficiós, com ocorre de vegades en comunicacions en permetre captar més energia del senyal, sinó que distorsiona tant les mesures de retard com les de fase. Els senyals reflectits es propaguen a través de camins més llargs que el camí directe entre satèl·lit i receptor i, per tant, no aporten informació sobre la distància entre tots dos, que és la base del posicionament. En la pràctica, això es tradueix en un desplaçament de la corba de discriminació del DLL i PLL. A més, atès que els errors deguts al multicamí solen variar lentament amb el temps, provoquen un biaix en la posició, que a penes es pot reduir fent la mitjana al llarg del temps. S'ha mostrat que els errors deguts al multicamí poden assolir diverses desenes de metres en els pseudorangs amb el senyal GPS C/A, i que en la fase no excedeixen un quart de cicle. S'ha recordat la diferència entre la velocitat de grup i la de fase en els medis dispersius per a justificar les diferents maneres com la ionosfera afecta les mesures de retard i de fase.

La manera habitual d'aconseguir una precisió en el posicionament entorn d'un metre o millor és recórrer a tècniques diferencials. A grans trets, consisteixen a utilitzar una estació de referència propera al receptor de l'usuari que es vulgui posicionar, de manera que en fer combinacions dels observables mesurats per tots dos receptors els errors comuns (que són bàsicament tots menys els errors locals als receptors) es cancel·lin. Els dos criteris principals per a classificar les tècniques diferencials fan referència a si permeten fer un posicionament absolut o relatiu de l'usuari, o a si s'utilitzen mesures de codi o de fase. S'han analitzat tots els casos, posant èmfasi especial en el posicionament relatiu mitjançant mesures de fase perquè és la manera d'aconseguir precisions centimètriques, i que amb cert abús de llenguatge se sol denominar posicionament RTK (*real time kinematic*). El pas clau per a poder aprofitar les mesures de fase és el que es denomina la resolució de l'ambigüitat de fase, que consisteix a calcular el nombre enter de longituds d'ona que s'ha d'afegir a les mesures de fase perquè representin una mesura absoluta de distància. S'han presentat les tècniques anomenades *lliures de geometria* per a entendre i assimilar el problema, encara que la manera d'obtenir millors prestacions implica utilitzar tècniques "basades en la geometria". La base d'aquest últim grup de tècniques és plantejar un conjunt d'equacions en què les incògnites són les coordenades de la posició i els valors enters de les ambigüitats. En aquest cas, l'obtenció de la solució de navegació implica resoldre un problema d'optimització mixt, és a dir, amb variables enteres i reals.

Finalment, s'ha estudiat l'extensió dels sistemes GNSS a entorns per als quals no van ser dissenyats inicialment. Les condicions nominals de funcionament d'un sistema GNSS corresponen a la recepció del senyal en condicions de cel obert, però hi ha un gran interès a poder utilitzar aquests sistemes en canyons

urbans i en entorns interiors. Això té implicacions a dos nivells: és necessari augmentar la sensibilitat dels receptors i s'han de modificar les equacions de navegació. La manera d'augmentar la sensibilitat implica augmentar el temps d'observació del senyal per a captar més energia d'aquest abans de proporcionar una nova estimació de la posició. S'han analitzat les limitacions que hi ha a allargar aquest temps d'observació a causa de la presència del missatge de navegació, desviacions de freqüència, soroll de fase, etc., per a poder entendre els compromisos fonamentals que hi ha en el disseny d'un receptor d'alta sensibilitat. L'acumulació de l'energia del senyal durant llargs períodes de temps també implica més càrrega computacional en la determinació de la freqüència i del retard del senyal. S'ha esbossat una manera eficient de fer la integració del senyal i de les cerques corresponents utilitzant repetidament la transformada discreta de Fourier. Quant a la segona implicació de la recepció en entorns degradats, aquesta es deu al fet que el receptor no és capaç d'observar les marques de temps que es troben en el senyal GNSS i que li permeten calcular el temps de transmissió del senyal, que es converteix en una incògnita més en les equacions de navegació.

Exercicis d'autoavaluació

1. Indiqueu quina afirmació és correcta:

- a) La configuració base del sistema GPS consta de 30 satèl·lits distribuïts en 6 plans orbitals amb 5 satèl·lits en cada pla.
- b) Les òrbites dels satèl·lits GPS presenten una gran excentricitat.
- c) El període orbital dels satèl·lits GPS és de mig dia sideral.
- d) El radi de l'òrbita dels satèl·lits GPS és d'aproximadament 11.000 km.

2. Els satèl·lits del bloc IIR-M (modernitzat)...

- a) transmeten el nou senyal *safety-of-life* en L5.
- b) presenten un disseny millorat i una arquitectura flexible per a satisfer els requisits de les properes dècades.
- c) van ser posats en òrbita en el període 2005-2009, i es van llançar un total d'11 satèl·lits.
- d) van ser els primers a transmetre el senyal civil L2C.

3. Indiqueu quina afirmació és correcta:

- a) El sistema GPS va ser declarat com a sistema de capacitat operacional inicial durant la guerra del Golf (anys 1990-1991).
- b) Els satèl·lits del bloc IIA ofereixen bones prestacions contactant amb la Terra una vegada cada sis mesos.
- c) Els satèl·lits del bloc IIF no inclouen cap nou senyal de navegació, ja que formaven part del programa de manteniment del sistema.
- d) Alguns dels satèl·lits del bloc I van arribar a doblar la vida útil de disseny.

4. Indiqueu quina de les asseveracions següents és falsa:

- a) Les estacions de monitoratge del segment terrestre disposen d'un receptor en la banda L i un en la banda S.
- b) El nombre d'estacions de monitoratge del segment terrestre és igual a 6, mentre que únicament hi ha 4 estacions de transmissió de dades.
- c) Les estacions de transmissió de dades operen en la banda S per enviar i rebre dades dels satèl·lits.
- d) Les estacions de monitoratge disposen de sensors meteorològics.

5. Els senyals de GPS es transmeten...

- a) usant la banda L1 en el cas que es vulgui transmetre el senyal *safety-of-life*.
- b) usant la banda L5 si es vol transmetre el nou senyal militar basat en el codi M.
- c) usant la banda L2 si es volen transmetre els dos nous senyals L2C i *safety-of-life*.
- d) usant la banda L1 si es volen transmetre els senyals basats en el codi C/A i en el nou codi militar M.

6. Indiqueu quina de les asseveracions següents és correcta:

- a) El senyal basat en el codi C/A és més robust davant *jammings* que el senyal basat en el codi P a causa del seu temps de xip més gran.
- b) El senyal basat en el codi P es transmet únicament en la banda L2.
- c) Un bit de navegació conté 20 seqüències del codi C/A.
- d) El codi P es forma a partir d'un codi Gold resultant de la combinació de dos registres de desplaçament.

7. Indiqueu quina de les asseveracions següents és falsa:

- a) Un dels objectius dels codis de *spreading* és incrementar la velocitat amb la qual s'envien els bits de navegació.
- b) Un dels objectius dels codis de *spreading* és separar les contribucions de diferents satèl·lits.
- c) Un dels objectius dels codis de *spreading* és oferir més robustesa a senyals interferents de banda estreta.
- d) Un dels objectius dels codis de *spreading* és millorar l'estimació de les mesures de TOA.

8. El missatge de navegació...

- a) requereix una setmana per a enviar un missatge complet.

- b) està organitzat en transmissions de 25 pàgines per missatge complet.
- c) està organitzat en transmissions de 5 subtrames per missatge complet.
- d) se centra a enviar únicament les efemèrides del satèl·lit que transmet el missatge perquè l'usuari pugui localitzar la seva posició.

9. Considereu un mòdul d'adquisició com el mostrat en la figura 11. Indiqueu quina afirmació és correcta:

- a) El temps màxim d'integració coherent és 20 ms.
- b) El temps màxim d'integració coherent és 10 ms.
- c) El temps màxim d'integració coherent és 1 ms.
- d) El temps d'integració coherent ha de ser el més petit possible per no veure's afectat per la presència d'errors residuals de freqüència.

10. Considereu un mòdul d'adquisició com el mostrat en la figura 11. Indiqueu quina afirmació és correcta:

- a) En presència d'errors de freqüència, és preferible mantenir la integració coherent el més curta possible i estendre el temps d'integració de manera no coherent.
- b) En presència d'errors de freqüència, és preferible implementar una integració coherent de 20 ms per a extreure tota l'energia del bit, i posteriorment estendre el temps d'integració de manera no coherent.
- c) El temps d'integració coherent depèn de l'error màxim de freqüència permisible.
- d) La integració coherent no es pot implementar si hi ha errors de freqüència.

11. Indiqueu quina afirmació és correcta:

- a) El mòdul d'adquisició implica més nombre d'operacions que el mòdul de *tracking*.
- b) El mòdul de *tracking* implica més nombre d'operacions que el mòdul d'adquisició.
- c) El mòdul de *tracking* és obligatori implementar-lo per a poder obtenir estimacions molt precises de la posició de l'usuari.
- d) El mòdul d'adquisició mai no pot arribar a proporcionar la precisió que ofereix el mòdul de *tracking*.

12. Considereu el disseny del bloc encarregat de la cerca en temps i freqüència que té lloc en el mòdul d'adquisició d'un receptor GPS. Indiqueu quina afirmació és falsa:

- a) El disseny d'aquest bloc té un impacte en el temps total que es trigarà a completar la cerca del satèl·lit d'interès.
- b) El disseny d'aquest bloc té un impacte en la precisió de les estimacions de retard de codi i freqüència Doppler, que posteriorment seran refinades pel mòdul de *tracking*.
- c) El disseny d'aquest bloc és independent de la resta de blocs que formen el mòdul d'adquisició.
- d) El disseny d'aquest bloc és independent del mòdul de *tracking*.

13. Indiqueu quina afirmació és correcta:

- a) La corba S del discriminador *early-late quasicohherent* presenta una zona lineal més estreta, i per tant, en ser més sensible a canvis en l'entrada, les correccions que ofereix a la sortida són més precises.
- b) Augmentar la precisió del discriminador és únicament una qüestió de reduir la separació Δ entre correladors *early-late*.
- c) Els discriminadors de DLL presenten tots el mateix pendent a la zona lineal i es diferencien únicament en l'amplària d'aquesta zona lineal i en el comportament fora d'aquesta.
- d) En presència de multicamí, és recomanable utilitzar discriminadors *early-late* amb una separació Δ petita.

14. Indiqueu quina afirmació és correcta:

- a) Un sistema en llaç tancat de primer ordre és estable sempre que el guany del discriminador κ_d sigui inferior a $2/C_1$.
- b) Un filtre de llaç de primer ordre és capaç de seguir l'evolució del senyal d'entrada en cas que les derivades d'aquesta siguin totes iguals a zero excepte la de primer ordre.
- c) Un sistema en llaç tancat és estable si els zeros de la funció de transferència del sistema estan tots dins del cercle unitat.
- d) Un sistema en llaç tancat està sobreesmorteït si $\zeta < 1$.

15. Indiqueu quina afirmació és correcta:

- a) En un filtre de llaç de segon ordre, l'amplada de banda del llaç depèn exclusivament dels valors de les constants $\{C_1, C_2\}$.
- b) Quant a l'impacte del soroll tèrmic, el guany que proporciona un filtre de llaç està determinat per l'amplada de banda B_n .
- c) Les mesures de retard del senyal rebut que es poden obtenir a partir de la fase de la portadora són F_L^2 vegades més precises que les mesures obtingudes a partir del retard del codi mateix.
- d) Quan la C/N_0 és molt baixa, les mesures de temps de retard que s'obtenen a partir del codi són molt sorolloses. En aquestes circumstàncies, és preferible utilitzar les mesures de temps de retard obtingudes a partir de la portadora, per a compensar així l'increment de soroll amb la precisió més gran que ofereix la portadora.

16. Quina és la definició de l'observable de pseudodistància?

- a) La diferència entre l'instant de transmissió del senyal mesurat segons el rellotge del satèl·lit i l'instant de recepció del senyal mesurat segons el rellotge del receptor, tot això multiplicat per la velocitat de la llum en l'atmosfera.
- b) La distància entre el satèl·lit i el receptor, incloent-hi els retards troposfèrics i ionosfèrics.
- c) La diferència entre l'instant de transmissió del senyal mesurat segons el rellotge del satèl·lit i l'instant de recepció del senyal mesurat segons el rellotge del receptor, tot això multiplicat per la velocitat de la llum en el buit.
- d) La diferència entre l'instant de transmissió del senyal i l'instant de recepció mesurats segons l'escala de referència de temps del sistema.

17. L'instant de transmissió del senyal s'obté a partir...

- a) del contingut del missatge de navegació.
- b) de la triangulació de les mesures de diversos satèl·lits.
- c) del rellotge del receptor, corregit per l'*offset* d'aquest.
- d) d'unes marques temporals que conté el senyal, que en la pràctica solen ser uns conjunts determinats de bits en el missatge de navegació.

18. Quina de les afirmacions següents és certa?

- a) L'observable de fase sempre pren un valor entre menys mig i més mig cicle de portadora.
- b) L'observable de fase pot prendre qualsevol valor enter.
- c) L'observable de fase té una ambigüïtat intrínseca igual a un valor enter de cicles de portadora.
- d) L'observable de fase és una versió escalada del pseudorang.

19. Quina de les afirmacions següents sobre el mètode de Bancroft és falsa?

- a) Proporciona en general una solució amb menys precisió que els mètodes de solució de l'equació de navegació basats en la linealització.
- b) És necessari disposar de mesures a 5 satèl·lits com a mínim per a poder-lo aplicar.
- c) Requereix resoldre una equació de segon ordre.
- d) No requereix conèixer un valor aproximat de la posició.

20. Els factors DOP...

- a) estan directament relacionats amb la qualitat dels observables.
- b) són una manera de quantificar l'efecte de la geometria del conjunt de satèl·lits sobre la precisió del posicionament.
- c) són la covariància del residu de la solució de navegació.
- d) depenen de la potència de transmissió del satèl·lit.

21. L'ús de tècniques diferencials és útil per a reduir els errors deguts a...

- a) ionosfera, troposfera i efemèrides.
- b) ionosfera i multicamí, si s'utilitzen mesures a dues freqüències.
- c) únicament els efectes locals (soroll, multicamí i interferències).
- d) la rotació de la Terra entre l'instant de transmissió i de recepció.

22. Quina de les afirmacions següents és certa?

- a) El multicamí provoca un error més gran com més gran és el retard de les reflexions.
- b) Com les reflexions sempre arriben després que el senyal directe, l'efecte del multicamí sempre és un biaix positiu en el pseudorang.
- c) Les mesures de fase no estan afectades pel multicamí.

d) Els errors del multicamí no es poden mitigar amb tècniques diferencials ni amb mesures a dues freqüències.

23. La diferència entre les tècniques de resolució d'ambigüitats de fase *geometry-free* (GF) i *geometry-based* (GB) és:

- a) Les GF es poden aplicar a receptors en moviment i les GB no.
- b) Les GF requereixen la transmissió de les correccions diferencials en temps real.
- c) Les GB utilitzen les coordenades del receptor com a part de les incògnites, en lloc de les distàncies entre el receptor i cada satèl·lit.
- d) Les GB solament es poden utilitzar amb les dobles diferències.

24. Quina de les opcions següents no és útil per a augmentar la sensibilitat dels receptors?

- a) Dotar el receptor de més capacitat de càlcul i un rellotge amb menys soroll de fase.
- b) Augmentar el període d'observació del senyal.
- c) Ignorar el missatge de navegació per a poder integrar durant més temps el senyal.
- d) Rebre informació d'assistència (A-GNSS).

25. Quina de les opcions següents és més adequada per a obtenir un posicionament relatiu amb precisió centimètrica?

- a) Utilitzar diferències dobles de mesures de pseudorangs a dues freqüències.
- b) Utilitzar diferències dobles de mesures de fase a dues freqüències si la distància entre usuari i referència no excedeix de 20 km
- c) Utilitzar diferències dobles de mesures de fase a dues freqüències si la distància entre usuari i referència excedeix de 20 km, i a una freqüència quan no excedeix aquest valor.
- d) Utilitzar el concepte de PPP.

26. Quina afirmació referent a la troposfera i la ionosfera és certa?

- a) La troposfera produeix un avançament de fase a causa del contingut de vapor d'aigua de l'atmosfera.
- b) Coneixent el perfil de temperatura i pressió de l'atmosfera es pot estimar de manera precisa el retard de la ionosfera.
- c) L'activitat de la troposfera augmenta pel dia a causa de l'activitat solar.
- d) La velocitat de grup i de fase coincideixen en la troposfera, però no en la ionosfera.

27. L'afirmació "No té sentit fer mesures a més de quatre satèl·lits perquè l'equació de navegació solament té 4 incògnites (les tres coordenades de la posició i l'*offset* del rellotge del satèl·lit)"...

- a) és certa.
- b) pot ser certa o falsa depenent de si es disposa de mesures a dues freqüències o no.
- c) és falsa perquè disposar de més de 4 mesures permet tenir un sistema d'equacions de navegació amb més equacions que incògnites i això afegeix redundància que pot ajudar en la determinació de la posició.
- d) solament és certa quan el receptor és estàtic.

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. c

2. d

3. d

4. a

5. d

6. c

7. a

8. b

9. b

10. c

11. a

12. c

13. d

14. a

15. b

16. c

17. d

18. c

19. b

20. b

21. a

22. d

23. c

24. c

25. b

26. d

27. c

Abreviatures

- ADC** Analog-to-Digital Converter
- A-GNSS** *Assisted GNSS*
- AS** Anti-Spoofing
- BPSK** Binary Phase-Shift Keying
- BOC** Binary Offset Carrier
- C/A** Coarse Acquisition code
- C/No** *Carrier to NOise spectral densisty ratio*
- CDMA** Code Division Multiple Access
- CL** Civilian Long length code
- CM** Civilian Moderate length code
- DFT** *Discrete Fourier Transform*
- DLL** Delay Lock Loop
- DNSS** Defense Navigation Satellite System
- DOP** *Dilution Of Precision*
- DS-SS** *Direct Sequence Spread Spectrum*
- ECEF** *Earth Centered Earth Fixed*
- ECI** *Earth Center Inertial*
- E-L** Early-Late
- ENU** *East North Up*
- FEC** Forward Error Correction
- FLL** Frequency Lock Loop
- GBAS** *Ground Based Augmentation System*
- GDOP** *Geometric Dilution Of Precision*
- GNSS** Global Navigation Satellite System
- GPS** Global Positioning System
- GPST** *GPS Time*
- HDOP** *Horizontal Dilution Of Precision*
- HOW** HandOver Word
- HS-GNSS** *High Sensitivity GNSS*
- I&D** Integer and Dump
- IFB** *InterFrequency Bias*
- ILS** *Integer Least Squares*
- LAMBDA** *Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment*
- MCS** Master Control Station
- NAVSTAR** NAVigation Satellite Time and Ranging

NCO Numerically Controlled Oscillator

NTRIP *Networked Rransport of RTCM via Internet Protocol*

OF Obliquity Factor

OTK *On-The-Fly*

P Precision code

PDOP *Position Dilution Of Precision*

PLL Phase Lock Loop

PPP *Precise Point Positioning*

PPS *Precise Positioning Service / Pulse Per Second*

PRN Pseudo Random Noise

RMS *Root Mean Square*

RTK *Real Time Kinematic*

SBAS *Satellite Based Augmentation System*

SMR *Signal to Multipath power Ratio*

SPS *Standard Positioning Service*

SVN Space Vehicle Number

TCAR *Three-Carrier Ambiguity Resolution*

TDOP *Time Dilution Of Precision*

TEC *Total Electron Content*

TECU/TECV *Total Electron Content Units / Total Electron Content Vertical*

TLM TeLeMetry

TOA Time Of Arrival

TOW Time Of Week

TZ Transformada Z

UERE *User Equivalent Range Error*

UHF Ultra High Frequency

UT1 *Universal Time 1*

VCO Voltage Controlled Oscillator

VDOP *Vertical Dilution Of Precision*

Bibliografía

"Wide-Area, Carrier-Phase Ambiguity Resolution Using a Tomographic Model of the Ionosphere". *Navigation* (primavera, 2002).

Betz, J. W.; Kolodziejcki, K. R. (2009) "Generalized theory of code tracking with an Early-Late discriminator. Part I: lower bound and coherent processing". *IEEE J_AES* (vol. 45, núm. 4, pàg. 1538-1550).

Bisnath, S. B.; Gao, Y. (2009). "Innovation: Precise Point Positioning". *GPS World* (abril).

Borre, K.; Akos, D. M.; Bertelsen, N.; Rinder, P.; Jensen, S. H. (2007). *A Software-Defined GPS and Galileo Receiver*. Birkhäuser.

Cebrián, J. M.; Picanyol, J.; González, L.; Lavín, C.; Gago, O.; Amarillo, E.; Seco-Granados, G.; Vicario, J. L.; Barceló, M.; Mañosas-Caballú, M.; Antreich, F.; Basta, N.; Cuntz, M.; Heckler, M. V. T.; Sgammini, M. (2010). "ADIBEAM: Design and Experimental Validation of a Robust Beamforming Platform for Galileo Reference Ground Stations". *Proc. 5th ESA Workshop on Satellite Navigation User Equipment Technologies (NAVITEC)*.

Corbasí, A. (1998). *Sistemas de Navegación. Desde el Compás Magnético a la Navegación por Satélite*. McGraw Hill.

Counselman, C. C.; Gourevicth, S. (1981). "Miniature Interferometer Terminals for Earth Surveying: Ambiguity and Multipath with Global Positioning System". *IEEE Transactions on Geosciences and Remote Sensing* (vol. 91, núm. 4).

Forssell, B.; Martín-Neira, M.; Harris, R. A. (1997). "Carrier Phase Ambiguity Resolution in GNSS-2". *ION-GPS*.

Forssell, B. (2008). *Radionavigation Systems*. Artech House.

Gardner, F. M. (2005). *Phaselock techniques* (3a. ed.). John Wiley and Sons.

Gernot, C. (2009) *Development of combined GPS L1/L2C acquisition and tracking methods for weak signals environments*. PhD thesis, Dept. of Geomatics Engineering, University of Calgary.

Hassibi, A.; Boyd, S. (1998). "Integer parameter estimation in linear models with applications to GPS". *IEEE Transactions on Signal Processing*.

Hernández-Pajares, M.; Juan, J. M.; Sanz, J.; García-Rodríguez, A.; Colombo, O. L. (2004). "Wide Area Real Time Kinematics with Galileo and GPS Signals". *Proc. ION GNSS'2004*. Long Beach, EUA.

Jaime, R. (1995). *Radionavegació*. Edicions UPC.

Juang, J. C.; Chen, Y. H. (2009). *Phase/frequency tracking in a GNSS software receiver*. *IEEE J_JSTSP* (vol. 3, núm. 4, pàg. 651-660).

Jury, E. I. (1964). *Theory and applications of the z-transform method*. R. E. Krieger Publishing.

Kaplan, E. D.; Hegarty, C. J. (2006). *Understanding GPS Principles and Applications* (2a. ed.). Artech House.

Lenstra, A. K.; Lenstra, H. W.; Lovász, L. (1982). "Factoring polynomials with rational coefficients". *Mathematische Annalen* (vol. 261, núm. 4, pàg. 515-534).

López-Salcedo, J. A.; Capelle, Y.; Toledo, M.; Seco-Granados, G.; Vicario, J.; Ku-brak, D.; Monnerat, M.; Mark, A. (2008). "DINGPOS: A Hybrid Indoor Navigation Platform for GPS and GALILEO". *Proc. ION GNSS*.

Mao, W. L.; Chen, A. B. (2008). Mobile GPS carrier phase tracking using a novel intelligent dual-loop receiver. *International Journal of Satellite Communications and Networking* (núm. 26, pàg. 119-139).

McGraw, G. A.; Braasch, M. S. (1999). "GNSS Multipath Mitigation Using Gated and High Resolution Correlator Concepts". *Proc. ION-NTM*.

Misra, P.; Enge, P. (2006). *Global Positioning System* (2a. ed.). Ganga-jamuna Press.

Nee, R. D. J. van (1993). "Optimum DGPS Receiver Structures". *Proc of Second International Symposium on Differential Satellite Navigation Systems (DSNS)*.

Oppenheim, A. V.; Schafer, R. W.; Buck, J. R. (1999). *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall.

Parkinson, B. W; Spilker, J. J. (eds.) (1996). *Global Positioning System: theory and applications* (volum I). American Institute of Aeronautics and Astronautics.

Perdikaris, G. A. (1996). *Computer controlled systems. Theory and applications*. Kluwer Academic.

Psiaki, M. I (2001). "Block Acquisition of Weak GPS Signals in a Software Receiver". *Proc. of ION-GNSS*.

Schnorr, C.; Euchner, M. (1994). "Lattice basis reduction: Improved practical algorithms and solving subset sum problems". *Mathematical Programming* (vol. 66, pàg. 181-199).

Seber, G. A. F; Wild, C. J. (1989). *Nonlinear Regression*. John Wiley & Sons.

Seco-Granados, G.; López-Salcedo, J. A.; Jiménez-Baños, D.; López-Risueño, G. (2012). "Signal Processing Challenges in Indoor GNSS". *IEEE Signal Processing Magazine*.

Seco-Granados, G.; Swindlehurst, A. L.; Astely, D. (2000). "Exploiting Antenna Arrays for Synchronization". A: G. B. Giannakis; Y. Hua; P. Stoica; L. Tong (eds.). *Signal Processing Advances in Wireless and Mobile Communications* (vol. 2: *Trends in Single- and Multi-User Systems*, pàg. 403-426).

Simon, M. K.; Omura, J. K.; Scholtz, R. A.; Levitt, B. K. (2002). *Spread spectrum communications handbook*. McGraw-Hill.

Strang, G.; Borre, K. (1997). "Linear Algebra, Geodesy, and GPS". *Wellesley College*.

Teunissen, P. J. G. (1995). "The Least-Squares Ambiguity Decorrelation Adjustment: a Method for Fast GPS Integer Ambiguity Estimation". *Journal of Geodesy* (vol. 70, pàg. 65-82).

Tsui, J. B. Y. (2004). *Fundamentals of Global Positioning System Receivers*. Wiley & Sons.

Van Diggelen, F. (2009). *A-GPS: Assisted GPS, GNSS, and SBAS*. Artech House.

