

Disseny de filtres discrets

José Antonio Morán Moreno
Joan Claudi Socoró Carrié

PID_00175649



Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu copiar-los, distribuir-los i transmetre'ls públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), no en feu un ús comercial i no en feu obra derivada. La llicència completa es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.ca>

Índex

1. Introducció als filtres discrets.....	5
1.1. Estudi d'un filtre passabaix ideal	5
1.2. Especificacions i plantilles prototip	8
1.3. Caracterització de SLIT amb la TZ	10
1.4. Filtres reals	11
1.5. Filtres FIR	13
1.6. Filtres IIR	14
1.7. Interpretació del diagrama de pols i zeros	14
1.7.1. Estabilitat	18
1.7.2. Causalitat	19
1.8. Retard de grup i sistemes de fase mínima	20
1.9. Filtres FIR de fase lineal	21
1.10. Inversió de sistemes	24
1.10.1. Procediment general	25
1.10.2. Cel·les passatot i inversió de sistemes de fase no mínima	25
2. Disseny de filtres FIR amb el mètode de les finestres.....	29
2.1. Anàlisi d'algunes finestres típiques	31
2.2. Exemple de disseny	32
2.3. Mètode de la finestra Kaiser	36
3. Disseny de filtres IIR a partir de filtres analògics.....	42
3.1. Disseny analògic enfront de disseny discret	42
3.2. Transformació bilineal	46
3.2.1. Estudi del mapatge entre els plans s i z i en els dominis de la freqüència analògic i discret	46
3.2.2. Elecció del paràmetre T_s i transformació d'especificacions	48
3.3. Filtres analògics	50
3.3.1. Filtre de Butterworth	51
3.3.2. Filtre de Txebixev de tipus I	55
3.4. Transformacions de freqüència	59
3.4.1. Transformacions en freqüència en el domini discret	60
Activitats.....	65
Abreviatures.....	70
Annex.....	71

1. Introducció als filtres discrets

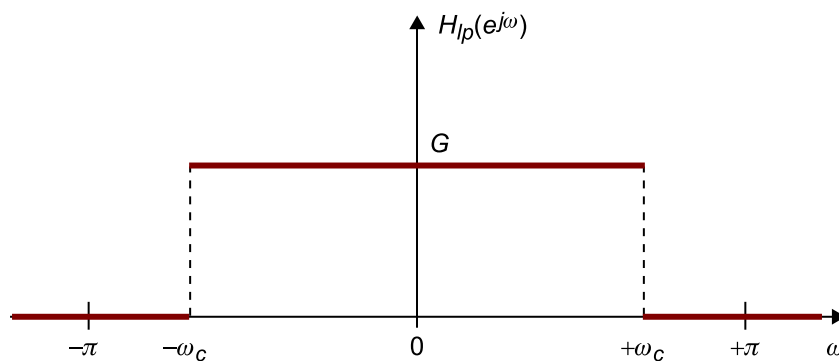
En aquest apartat introduïrem el disseny de filtres de temps discret, i tractarem aspectes bàsics com ara la definició d'especificacions, el tipus d'estructures i de filtres, la interpretació del diagrama de pols i zeros sobre el comportament del filtre, el retard de grup, els sistemes de fase mínima, els filtres de fase lineal i la inversió de sistemes mitjançant filtres. L'objectiu principal és fer un repàs a conceptes bàsics que ens situaran en la problemàtica del procés de disseny, mentre que altres conceptes són requisits necessaris per a poder afrontar l'etapa de disseny amb garanties d'èxit. Es tractarà principalment l'anàlisi de filtres selectius en freqüència (prototips passabaix, passaalt, de banda eliminada o rebuig de banda), encara que també es veuran conceptes més relacionats amb el disseny de filtres específics per a un problema donat (inversió de sistemes).

1.1. Estudi d'un filtre passabaix ideal

A continuació, analitzem un filtre discret senzill passabaix ideal. Per començar, definim com a paràmetres del filtre la pulsació discreta de tall, expressada com a ω_c en unitats de radianys per mostra (valor que estarà fitat entre els valors $0 < \omega_c < \pi$), i el seu guany, expressat com a G en lineal¹ (paràmetre real i positiu), i podem dibuixar la funció de transferència del filtre en el domini de Fourier, $H_{lp}(e^{j\omega})$, com segueix:

⁽¹⁾Podem passar el valor d'aquest guany a unitats de dB fent el càlcul $20 \log_{10} G$.

Figura 1. Funció de transferència d'un filtre passabaix ideal



Analitzant amb una mica més de detall la resposta freqüencial d'aquest filtre podem dir que posseeix una banda de pas perfectament plana, que la transició de la banda de pas cap a la banda de rebuig és instantània i que així mateix la banda de rebuig és també plana i amb guany igual a 0 (passat a dB seria un rebuig de $-\infty$). Recordem que, atès que estem treballant en el domini

dels senyals i els sistemes discrets en el temps, la representació en freqüència d'aquests comporta una periodicitat de període 2π radianys per mostra, per la qual cosa únicament ens hem de fixar en un període d'aquesta representació.

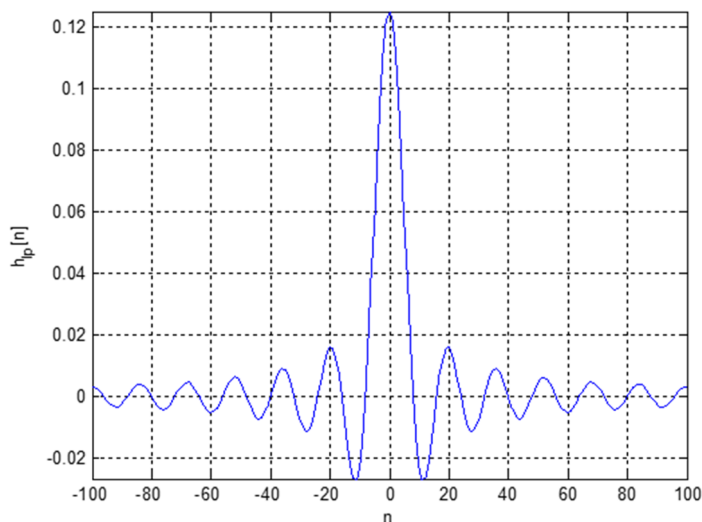
A continuació, calculem la resposta impulsional d'aquest filtre passabaix ideal, aplicant l'equació de síntesi de la transformada de Fourier per a senyals discrets i fent el càlcul integral directe:

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_{lp}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} G e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{G e^{j\omega n}}{jn} \Big|_{-\omega_c}^{+\omega_c} = \frac{G}{n\pi} \frac{(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n})}{2j} = \frac{G}{n\pi} \sin(\omega_c n)$$

Com veiem, aquest filtre té una resposta impulsional infinita, ja que és una funció *sinc* discreta, amb el màxim situat en $n=0$ i amb un decreixement a raó de $\frac{1}{n}$ per a valors creixents o bé decreixents de n . Això es pot apreciar en la figura següent:

Figura 2. Resposta impulsional d'un filtre passabaix ideal amb paràmetres freqüència de tall $\omega_c = \pi/8$ rad/mostra i guany $G = 1$



Nota: es mostren únicament les 201 mostres entorn de la mostra central $n = 0$.

A continuació, estem en condicions de poder fer un parell d'observacions que ens permetran entendre els compromisos que habitualment hem d'atendre en la tasca de disseny d'un filtre discret (d'aquesta manera, ja estarem en disposició d'analitzar amb més detall tècniques per al disseny de filtres de temps discret):

- Es tracta d'un filtre no causal, atès que la resposta impulsional del filtre posseeix valors no nuls per a $n < 0$.
- La resposta impulsional és infinita i simètrica parella entorn de $n = 0$.

La primera observació ens porta a entendre que es tracta d'un filtre no realitzable quan parlem de filtres que operen en el domini temporal², la qual cosa implica que, per al cas de filtres realitzables, haurem de complir de manera estricta la condició de causalitat. La segona observació ens indica també una característica que comporta no poder portar a la pràctica el procés de filtratge usant l'operació de convolució, atès que si la resposta impulsional és infinita això significaria que per a cada mostra del senyal de sortida s'hauria de fer un nombre infinit d'operacions aritmètiques. Recordem que, segons la teoria dels sistemes lineals i invariants en el temps (SLIT), la sortida es pot calcular mitjançant l'equació de convolució:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

Veiem que en el cas que la resposta impulsional del sistema $h[n]$ sigui infinita, es requereix una suma d'infinits productes de mostres d'aquesta pel senyal d'entrada.

Així doncs, de tot el que s'ha dit fins ara podem resumir que **un filtre passa baix ideal no és realitzable**, per la qual cosa haurem de forçar, per donar llum a la realització d'un filtre passa baix realitzable, que aquest sigui un filtre causal i de complexitat computacional finita. La idealitat del filtre plantejat comporta una forma perfectament rectangular en el domini freqüencial, és a dir, una selecció freqüencial perfecta del conjunt de freqüències que el filtre hauria de seleccionar. Això, així mateix, comporta que en el domini temporal es tracti d'un filtre amb infinitud temporal, atès que es compleix el principi d'incertesa temps-freqüència: un senyal molt localitzat en el domini freqüencial produeix un senyal molt deslocalitzat en el domini temporal. Si pensem en el cas extrem, arribem al cas d'un senyal sinusoidal de pulsació discreta ω_0 , atès que aquesta presenta una forma temporal periòdica però infinita en el domini temporal, mentre que en el domini de la freqüència aquesta es troba perfectament localitzada en un parell de pulsacions discretes $\pm\omega_0$.

En l'apartat següent veurem l'anàlisi dels sistemes lineals i invariants governats mitjançant una **equació lineal en diferències finites i coeficients constants**. Aquest tipus de sistemes es pot entendre com un subconjunt dels possibles SLIT realitzables, és a dir, que són causals i que posseeixen una complexitat de càlcul assumible mitjançant una computadora. Més endavant veurem com en funció de la tipologia de filtre, ja siguin de resposta impulsional finita (FIR) o de resposta impulsional infinita (IIR), aquest tipus d'estructures ens permeten arribar a dissenys que en domini freqüencial presentaran imperfeccions, sense bandes de pas ni de rebuig perfectament planes, ni amb bandes de transició perfectament instantànies. Aquestes imperfeccions que apareixen en comparar els filtres reals amb els seus ideals respectius són conseqüència directa de forçar les condicions enunciades abans, i ens obligaran a establir uns requisits mínims perquè el disseny que es vol obtenir compleixi les expectatives d'èxit

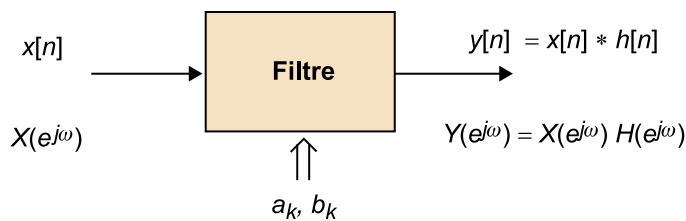
⁽²⁾Els filtres no causals sí que tenen sentit en altres dominis, com pot ser el cas del processament digital d'imatge, en què les variables són posicions espacials en comptes de temporals.

per al propòsit que els volem dissenyar, això és, la funció que aquests exerciran en un problema concret de processament digital del senyal. Aquests requisits els denominarem **especificacions de disseny**, i englobaran condicions addicionals a les freqüències de tall o guany que volem aconseguir, com ara atenuacions mínimes en les bandes de rebuig i pulsacions de tall a partir d'on aquest rebuig mínim s'haurà de complir.

1.2. Especificacions i plantilles prototip

Vista l'anàlisi d'un filtre passabaix ideal i entesos els compromisos i limitacions que un disseny real comporta, ara parlarem de les especificacions que es fixen per al disseny d'un filtre digital i veurem també les plantilles prototip que habitualment manegem quan dissenyem filtres per a la tasca de seleccionar un subconjunt de freqüències (filtres selectius en freqüència).

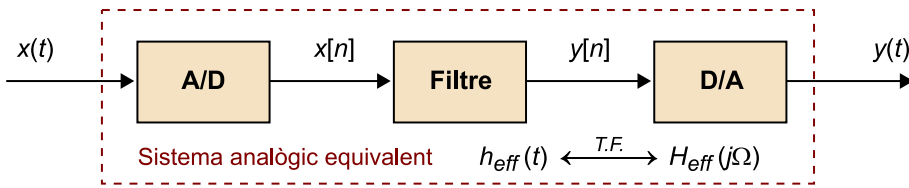
Figura 3. Configuració del filtre digital a partir dels coeficients a_k i b_k i comportament temporal (convolució entrada per resposta impulsional) i freqüencial (multiplicació de transformada de Fourier de l'entrada per la funció de transferència del filtre)



En primer lloc, com s'aprecia en la figura 3, convé entendre que el disseny d'un filtre discret implica el disseny dels seus coeficients associats a l'equació lineal en diferències finites i coeficients constants. En funció d'aquests, el comportament del filtre serà un o un altre, i això provocarà les modificacions des dels punts de vista temporal (es produeix una convolució entre el senyal d'entrada i la resposta impulsional del filtre) i freqüencial (es produeix un producte entre la transformada de Fourier de la seqüència d'entrada i la resposta freqüencial del filtre).

D'altra banda, no cal perdre de vista que l'ús dels filtres discrets s'emmarca habitualment en un context de processament de senyals analògics (vegeu la figura 4), mitjançant l'ús de convertidors d'analògic a digital (o A/D) i de digital a analògic (o D/A). Encara que aquest processament es pot fer en diferit (és a dir, el senyal mostrejat es grava i es processa després, i finalment, una vegada processat es torna a convertir en un senyal analògic), aquest sovint es fa en temps real. Això es produeix quan tant el senyal d'entrada com el senyal de sortida no tenen una durada fixa i s'han de produir de manera simultània (per exemple, en un sistema de sonorització acústica el senyal d'entrada prové de micròfons i el de sortida anirà cap als altaveus), la qual cosa implica que el processament s'ha de fer per blocs, de manera que cada bloc de mostres d'entrada pugui ser processat en un temps inferior a la durada del bloc.

Figura 4. Cadena de processament en temps real. Comportament del sistema com un sistema analògic equivalent



En qualsevol cas, la tasca encomanada a un filtre digital s'ha d'especificar tenint en compte la freqüència de mostreig usada (f_s mostres per segon o $T_s = 1/f_s$ segons per mostra) en l'etapa de conversió tant analògica-digital com digital-analògica (habitualment amb la mateixa freqüència associada). Si s'analitza amb deteniment l'esquema de la figura 4, i es negligeix l'efecte de quantificació del senyal en la conversió analògica-digital, es poden establir les relacions següents entre les respostes freqüencials del sistema discret o filtre digital, $H(e^{j\omega})$, i el sistema analògic corresponent equivalent format per la cadena convertidor A/D-filtre digital-convertidor D/A, $H_{eff}(j\Omega)$:

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T_s}) & |\Omega| \leq \pi/T_s \\ 0 & |\Omega| > \pi/T_s \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_{eff}\left(j\frac{\omega}{T_s}\right) \quad |\omega| < \pi$$

Les identitats anteriors s'estableixen a partir del fet que la transformada de Fourier d'una seqüència discreta, obtinguda com el mostreig uniforme en el temps d'un senyal analògic a T_s segons per mostra, és igual a la normalització en amplitud (pel factor $1/T_s$) i en freqüència (pel factor T_s) de la repetició periòdica de la transformada de Fourier del senyal analògic de què prové. Quan considerem el sistema complet cal tenir en compte que el factor de normalització d'amplitud desapareix en el procés de reconstrucció (conversió D/A) mentre que la normalització de freqüències és necessària per a convertir especificacions d'un domini analògic a un domini discret.

Com es pot apreciar, el sistema analògic equivalent té un comportament en freqüència que queda establert per la resposta en freqüència pròpia del filtre digital, aplicant una desnormalització de l'eix de freqüències.

Exemple

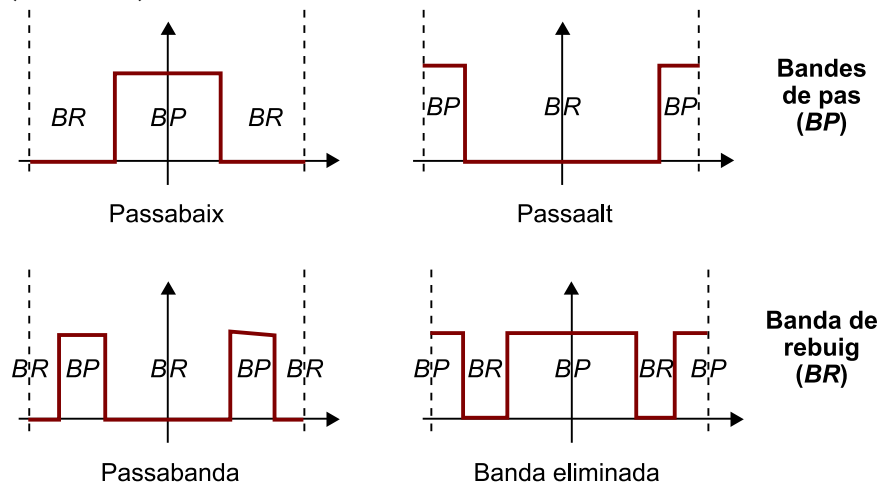
Si es dissenya un filtre digital passabaix amb pulsació de tall $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ radians/mostra, i guany $G = 2$ en la banda de pas, i suposant que la freqüència de mostreig del senyal és de $f_s = 8000$ Hz, arribem a la conclusió que el sistema analògic equivalent tindrà una funció de transferència igual a:

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H\left(e^{j\frac{\Omega}{f_s}}\right) & |\Omega| \leq \pi f_s \\ 0 & |\Omega| > \pi f_s \end{cases} = \begin{cases} G & |\Omega| \leq \omega_c f_s \\ 0 & |\Omega| > \omega_c f_s \end{cases} = \begin{cases} 2 & |\Omega| \leq 2\pi \times 1.000 \\ 0 & |\Omega| > 2\pi \times 1.000 \end{cases}$$

És a dir, el guany del filtre analògic equivalent és de 2, i la freqüència de tall és de 1.000 Hz, o en radianats per segon $\Omega_c = \omega_c f_s = 2.000\pi$.

La definició d'especificacions d'un filtre discret es fa sovint en el context de filtres selectius en freqüència, això és, filtres que deixen passar certes regions de freqüències i en rebutgen la resta. En aquest àmbit, es defineixen quatre tipus de **plantilles d'especificacions** segons si es requereix el disseny de filtres passabaix, filtres passaalt, filtres passabanda i filtres de banda eliminada, tal com s'aprecia en la figura 5. Cal recordar que en el domini de Fourier dels senyals i els sistemes discrets les freqüències baixes es troben entorn de la pulsació discreta $\omega = 0$ rad/mostres, mentre que les altes freqüències estan entorn de $\omega = \pi$ rad/mostra, i aquestes últimes són equivalents a les freqüències analògiques centrades entorn de $f = f_s/2$ Hz, la qual cosa és la freqüència de Nyquist. La banda de freqüències mitjanes estarà, per tant, en el marge de freqüències entre aquests dos conjunts de valors.

Figura 5. Funcions de transferència $H(e^{j\omega})$ de les plantilles prototip passabaix (esquerra superior), passaalt (dreta superior), passabanda (inferior esquerra) i de banda eliminada (inferior dreta).



1.3. Caracterització de SLIT amb la TZ

Tal com hem vist, la resposta d'un filtre ideal (per exemple, filtre passabaix amb transició abrupta i bandes de pas i atenuades planes o constants) és una seqüència de durada infinita i no causal. La implementació de filtres amb un cost computacional finit la podem aconseguir utilitzant les equacions lineals en diferències finites i amb coeficients constants. Amb aquestes equacions i dissenyant els coeficients de manera adequada podem aconseguir fer aproximacions al filtre ideal amb un cost computacional afaitat.

L'estudi de la transformada Z i la seva relació amb les equacions en diferències ens servirà de marc per a poder analitzar el comportament de sistemes discrets i relacionar-lo amb la TFSD (transformada de Fourier per a seqüències discretes). Si recordem l'expressió d'una equació en diferències amb coeficients constants, tenim l'equació següent:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Que es correspon a la relació entrada-sortida de l'esquema de la figura 6.

En principi, i si no s'indica el contrari, assumirem que el sistema és causal i, per tant, la solució d'aquesta equació en diferències serà una seqüència orientada a la dreta (que val zero per a $n < 0$). Aplicant la definició de la transformada Z a l'equació temporal, les propietats de linealitat i de desplaçament temporal d'aquesta i transformant totes dues parts de l'expressió arribem a l'expressió següent:

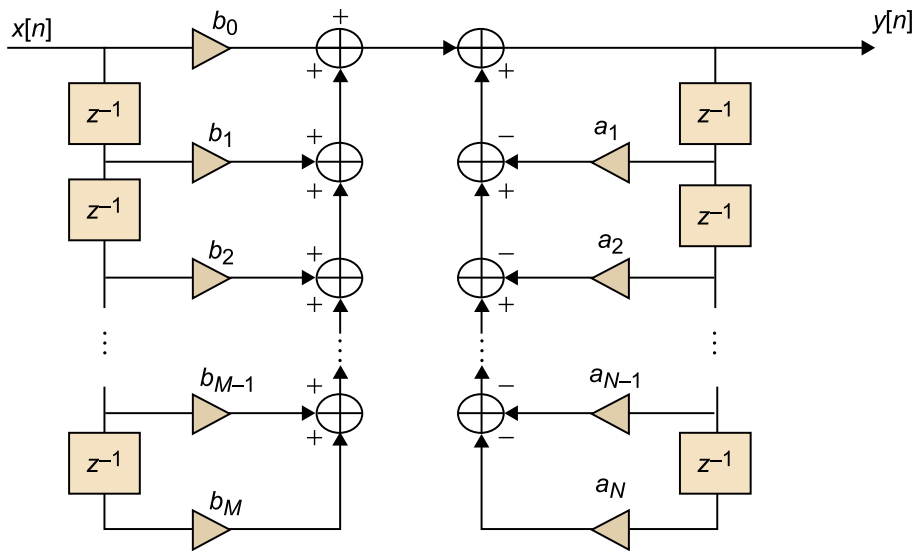
$$\sum_{k=0}^N a_k Y(z) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^M b_k X(z) \cdot z^{-k}$$

Treballant sobre l'expressió anterior, podem arribar a l'equació següent per a determinar la **funció de transferència** del sistema:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Aquesta expressió ens permet fer una descripció de la posició dels **pols** i **zeros** del sistema i ens permetrà inferir el comportament del sistema en funció de la seva distribució de pols i zeros en el domini transformat.

Figura 6. Esquema genèric d'un SLIT governat amb una equació en diferències finites i coeficients constants



1.4. Filtres reals

Una de les condicions habituals de disseny se centra en filtres amb resposta impulsional real (per exemple, aplicacions d'àudio digital) encara que es pot treballar també amb filtres d'aritmètica complexa en el temps (per exemple, en aplicacions del món de les comunicacions digitals).

Un filtre amb resposta impulsional real compleix la propietat de simetria conjugada en el domini de la TFSD. Des de la perspectiva de l'anàlisi amb la transformada Z això es tradueix en la propietat que els pols i els zeros de $H(z)$ tenen tots els seus simètrics conjugats (sempre que no siguin pols o zeros reals).

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

$$H(z^*) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n](z^*)^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \right)^* = H^*(z)$$

Per exemple, la relació anterior deixa clar que si z_0 és un zero del sistema, llavors z_0^* també ho serà, atès que el valor de la funció de transferència ha de donar el mateix valor però complex conjugat. El mateix succeeix per al cas dels pols del sistema, i en aquest cas és un valor infinit en lloc d'un valor nul el que retorna la funció.

És a dir, per a dissenyar filtres amb resposta impulsional real hem de sacrificar gairebé la meitat dels pols i els zeros, en estar aquests aparellats amb els seus simètrics conjugats, de manera que reduïm el nombre de graus de llibertat disponibles per complir unes determinades especificacions de disseny.

Exemple

Vegem primer el cas d'un filtre no real. Per exemple, un filtre FIR amb paràmetre de guany $G = 2$, zeros $z_1 = 1$ i $z_2 = e^{j\frac{\pi}{4}}$. La seva funció de transferència i la seva resposta impulsional seran:

$$H_1(z) = 2(1-z^{-1})(1 - e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}) = 2 - 2(1 + e^{j\frac{\pi}{4}})z^{-1} + e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-2} =$$

$$= 2 - (3,41 + 1,41j)z^{-1} + (1,41 + 1,41j)z^{-2}$$

$$h_1[n] = 2\delta[n] - (3,41 + 1,41j)\delta[n-1] + (1,41 + 1,41j)\delta[n-2]$$

A continuació, el mateix exemple però afegint el zero simètric conjugat de z_2 com a tercer zero del filtre.

$$H_2(z) = 2(1-z^{-1})(1 - e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}) =$$

$$= 2(1-z^{-1})(1 - (e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{4}})z^{-1} + z^{-2}) =$$

$$= 2(1-z^{-1})(1 - 2\cos(\pi/4)z^{-1} + z^{-2}) =$$

$$= 2 - 4,828z^{-1} + 4,828z^{-2} - 2z^{-3}$$

$$h_2[n] = 2\delta[n] - 4,828\delta[n-1] + 4,828\delta[n-2] - 2\delta[n-3]$$

Com podem apreciar, els coeficients de la resposta impulsional del segon cas, en el qual els zeros complexos tenen els seus simètrics conjugats, són valors reals, mentre que en el primer cas, en què no hi ha aquesta simetria, s'obtenen valors complexos.

Exemples similars es poden també analitzar incloent-hi pols (sistemes IIR).

1.5. Filtres FIR

Si en l'estructura que acabem de veure eliminem la realimentació de la sortida, el sistema que s'obté és el denominat filtre FIR (*finite impulse response*), ja que si la seva entrada és un impuls, la sortida és un nombre limitat de mostres no nul·les. Per a obtenir la sortida, només s'utilitzen valors de l'entrada actual i anteriors. La seva equació en diferències és:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

L'ordre del filtre és M , és a dir, el nombre de coeficients menys 1. Si transformem aquesta expressió, tenim:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k X(z) \cdot z^{-k} = X(z) \cdot (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M})$$

I la funció de transferència és:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}$$

La resposta impulsional del filtre és directament la seqüència ordenada dels coeficients del filtre:

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + b_2 \delta[n-2] + \dots + b_M \delta[n-M]$$

és a dir, $b_k = h[k]$ per a $0 \leq k \leq M$.

Els filtres FIR són estables, ja que només tenen zeros. Com veurem més endavant, els filtres FIR tenen l'avantatge que poden tenir una fase lineal, per la qual cosa el seu retard de grup pot ser constant. Això voldrà dir que es poden dissenyar perquè no introdueixin desfasaments en les diferents freqüències del senyal, la qual cosa serà d'importància rellevant sobretot per a minimitzar la distorsió que el filtre pugui introduir en les bandes de pas. En general, esperem que un filtre ens permeti seleccionar certs rangs de freqüència i també rebutjar-ne d'altres que no ens interessin. Un aspecte que ens interessarà és que el filtre deixi el senyal tan intacte com sigui possible en les bandes que deixa passar (bandes de pas), per la qual cosa interessa que el filtre tingui una baixa **distorsió de fase**. Com més lineal és la fase del filtre (fase o argument de la funció de transferència amb decreixement lineal amb la freqüència), més constant serà el retard introduït per aquest per a les diferents freqüències, és a dir, menys distorsió de fase.

L'inconvenient que presenten és que necessiten més coeficients que els filtres IIR (que veurem a continuació) per a complir característiques similars. Això comporta més temps de càlcul i, per tant, problemes en aplicacions a temps real.

1.6. Filtres IIR

L'esquema complet presentat al principi d'aquest apartat es correspon a un filtre IIR (*infinite impulse response*). Es denominen així perquè la sortida a l'impuls és una seqüència il·limitada de termes no nuls. Per a obtenir la sortida s'utilitzen valors de l'entrada actual i anteriors i, a més, valors de la sortida anteriors que són emmagatzemats en memòria i realimentats.

Els filtres IIR poden aconseguir una mateixa resposta en freqüència amb un nombre molt més petit de coeficients que els filtres FIR, amb l'estalvi consegüent de temps de càlcul. El principal inconvenient dels filtres IIR és que poden arribar a ser inestables, segons la posició dels pols. A més, en general els filtres IIR tenen una fase o argument no lineal amb la freqüència, aspecte que provoca un retard diferent per a cada freqüència del senyal (distorsió de fase no nul·la).

1.7. Interpretació del diagrama de pols i zeros

El diagrama de pols i zeros és una representació gràfica d'una funció de transferència racional en el pla complex que ens ajudarà a interpretar el comportament en freqüència del sistema i a determinar certes propietats importants com **estabilitat**, **causalitat**, **ROC** (de l'anglès, *region of convergence*, 'regió de convergència') i **fase mínima**.

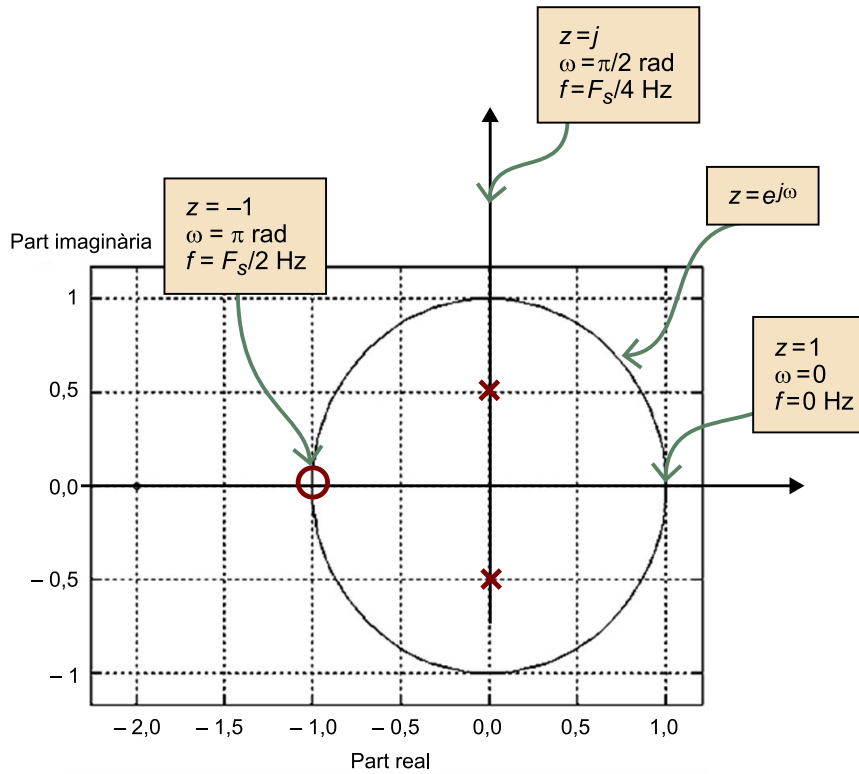
Vegem, en primer lloc, alguns exemples de SLIT (sistema lineal i invariant en el temps) analitzats a partir del diagrama de pols i zeros i la seva representació en freqüència.

Exemple

La funció de transferència següent té un zero en $z = -1$ i dos pols en $z = \mp 0,5j$. Hi ha un altre zero (no explícit) en $z \rightarrow \infty$, ja que l'ordre del filtre és 2.

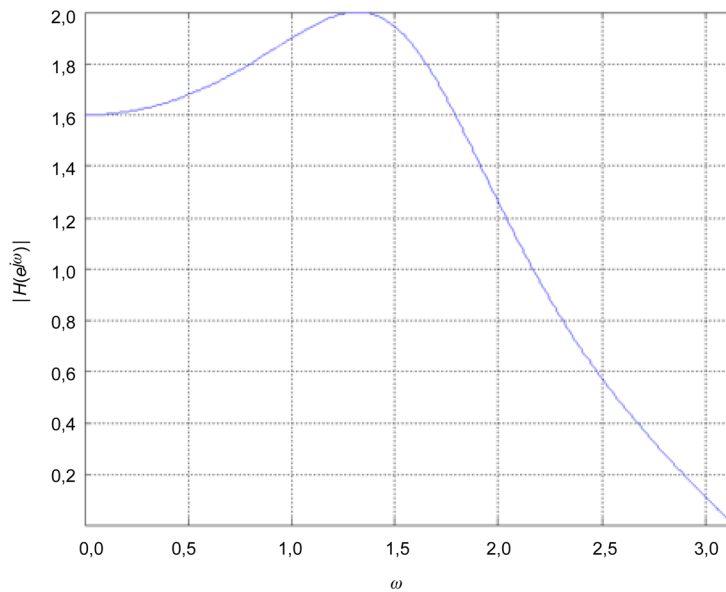
$$H(z) = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)} = \frac{z+1}{z^2+\frac{1}{4}}$$

Figura 7. Diagrama de pols i zeros de l'exemple. S'indiquen tres punts característics en el cercle unitat (valor de z , valor de ω , i també de freqüència analògica equivalent).



Per a interpretar el diagrama de pols i zeros cal tenir present que la circumferència unitat es correspon a $z = e^{j\omega}$, és a dir, els valors de z pels quals la transformada Z es correspon a la TFSD. Per tant, des d'un punt de vista de la freqüència serà el lloc de més interès. D'aquesta manera, els zeros situats damunt la circumferència unitat cancel·laran les freqüències corresponents al valor de ω (fase de la variable z). Els zeros propers a la circumferència unitat tindran un efecte atenuador de les freqüències o angles propers. En canvi, els pols propers al cercle unitat tindran un efecte amplificador. Els pols no es poden situar damunt de la circumferència unitat perquè generarien una inestabilitat a aquesta freqüència (la sortida seria infinita). Únicament té sentit dissenyar sistemes amb pols sobre el cercle unitat quan es persegueix aconseguir oscil·ladors digitals, però no quan es persegueix dissenyar filtres digitals estables.

Figura 8. Mòdul de la resposta freqüencial



Del diagrama de pols i zeros de l'exemple podem dir que es cancel·larà la màxima alta freqüència $\omega = \pi$ a causa del zero situat en aquesta fase del cercle unitat, mentre que els dos pols provocaran que les freqüències entorn de $\omega = \pi/2$ quedin amplificades. Podem veure tot això en el mòdul de la resposta freqüencial del sistema representat en la figura 8. Com es pot observar, s'anul·la la freqüència $\omega = \pi$ i es realça la freqüència $\omega \approx \pi/2$.

En tenir els dos pols complexos amb simetria conjugada es pot comprovar que es tracta d'un filtre amb resposta impulsional real. Això es pot veure també en l'equació en diferències finites que es pot derivar de la funció de transferència en el pla Z:

$$H(z) = \frac{(z^{-1} + z^{-2})}{(1 + \frac{1}{4}z^{-2})} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \Rightarrow \quad y[n] = x[n-1] + x[n-2] - \frac{1}{4}y[n-2]$$

En tractar-se d'una equació temporal amb coeficients constants reals, aquest filtre generarà en la sortida senyals reals quan tinguem senyals reals en l'entrada.

Exemple

Es vol dissenyar un filtre causal que, si l'entrada prové de mostrejar un senyal d'àudio a 16.000 Hz, tingui aquestes especificacions:

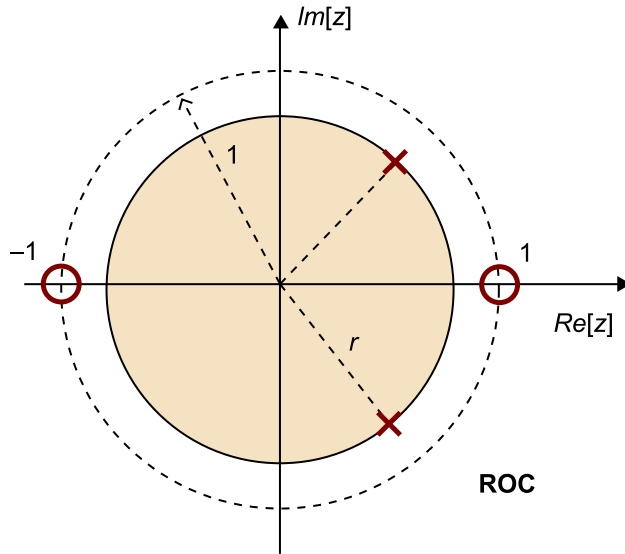
- Elimini el component continu i també la freqüència analògica de 8.000 Hz
- Tingui un pic de màxim guany a la freqüència analògica de 2.000 Hz

Proposarem un diagrama de pols i zeros que permeti implementar el filtre i, a partir d'aquest, determinarem la funció de transferència $H(z)$ en funció d'un guany global i la posició dels pols i els zeros. Segons les especificacions, el diagrama de pols i zeros tindrà:

- Un zero en $z = 1 = e^{j0}$, ja que elimina el component continu
- Un zero en $z = -1 = e^{j\pi} = e^{j2\pi \frac{8.000}{16.000}}$, ja que elimina l'alta freqüència ($f = 8.000$ Hz amb $F_s = 16.000$ mostres/s es correspon a $\omega = \pi$)
- Els pols han d'estar prop de $z = e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$ ($f = 2.000$ Hz amb $F_s = 16.000$ mostres/s es correspon a $\omega = \pi/4$).

Per tant, el diagrama de pols i zeros serà el següent:

Figura 9. Diagrama de pols i zeros de l'exemple



En aquest cas s'ha dibuixat també la regió de convergència o ROC, que estarà marcada pels pols del filtre (cap a fora, en tractar-se d'un filtre causal). Perquè el filtre sigui estable haurem de fixar el mòdul dels pols a un valor $r < 1$.

La funció de transferència resultant serà:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = G \frac{(z-1)(z+1)}{(z-re^{j\frac{\pi}{4}})(z-re^{-j\frac{\pi}{4}})} = G \frac{z^2-1}{z^2-r(e^{j\frac{\pi}{4}}+e^{-j\frac{\pi}{4}})z+r^2} = \\
 &= G \frac{z^2-1}{z^2-r \cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)z+r^2}
 \end{aligned}$$

Finalment:

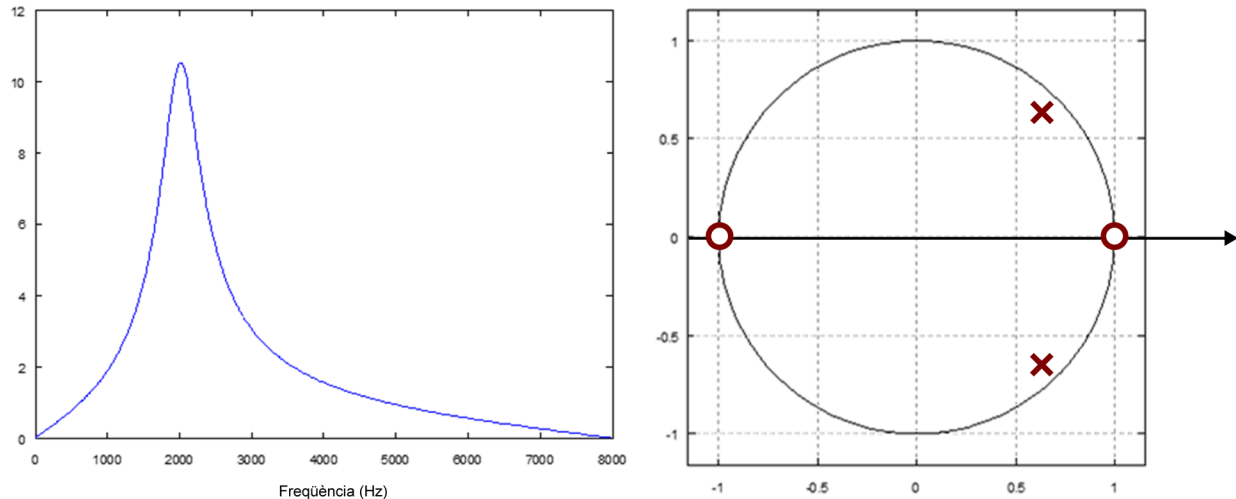
$$H(z) = G \frac{z^2-1}{z^2-r \cdot \sqrt{2} z+r^2} = G \frac{1-z^{-2}}{1-r \cdot \sqrt{2} z^{-1}+r^2 z^{-2}}$$

```

%Comprovem el resultat amb l'Octave/Matlab particularitzant
%G=1 i r=0.9
B=[1, 0, -1];
A=[1, -0.9*sqrt(2), 0.81];
[H,w]=freqz(B,A,512,16000);
plot(w,abs(H)); xlabel('Freqüència (Hz)');
zplane(B,A);
%La funció zplane permet representar el diagrama de pols
%i zeros d'un SLIT

```

Figura 10. Mòdul de la resposta en freqüència i diagrama de pols i zeros de l'exemple



A continuació es tractaran breument els conceptes d'estabilitat, causalitat i fase mínima que cal tenir en compte quan es dissenya un filtre digital.

1.7.1. Estabilitat

Recordem que un sistema lineal i invariant és estable si la seva resposta impulsional és absolutament sumable, és a dir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Si intentem expressar aquesta condició en funció de la transformada Z, podem arribar a la conclusió següent:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| \Big|_{z=1} < \infty$$

Aquesta condició equival a dir que **un sistema serà estable si la regió de convergència del sistema engloba el cercle unitat, o dit d'una altra manera, un sistema serà estable si existeix el seu TFSD.**

En la pràctica la condició d'estabilitat provoca, com a requisit de disseny per a sistemes causals, que els pols de la funció de transferència estiguin situats a l'interior del cercle unitat, ja que la regió de convergència queda definida com l'exterior del cercle de ràdio igual al mòdul del pol de màxim mòdul per a un sistema causal. O sigui, que **un sistema estable i causal haurà de complir que tots els pols es trobin dins del cercle unitat, o el que és el mateix, que tinguin un mòdul més petit que la unitat.** És per això que els filtres FIR causals, sense pols explícits (els implícits es troben en $z=0$), són sempre estables, ja que la regió de convergència és tot el pla Z.

1.7.2. Causalitat

Recordem també que els sistemes causals (o no anticipatius) són aquells en els quals el senyal de sortida en un determinat instant de temps, $y[n_0]$, només depèn exclusivament de les mostres del senyal d'entrada avaluades en índexs de temps inferiors o iguals a n_0 . Dit d'una altra manera, sistemes en els quals l'entrada sempre precedeix la sortida.

Un sistema serà causal o no anticipatiu sempre que la seva resposta impulsional compleixi $h[n] = 0$ per a $n < 0$. Si el sistema és causal, l'entrada sempre ha de precedir la sortida i, consegüentment, la sortida a una funció delta d'entrada s'ha de donar en valors iguals o posteriors a la posició temporal del senyal. La resposta impulsional es donarà en les mostres successives a partir de l'instant $n = 0$.

En sistemes causals (seqüències orientades a la dreta), com hem dit abans, la condició d'estabilitat implica que tots els pols estiguin dins del cercle unitat, ja que el ROC és l'exterior del pal de mòdul màxim.

Exemple

Suposem un sistema discret lineal i invariant amb la resposta impulsional següent:

$$h[n] = a^n \cdot u[n]$$

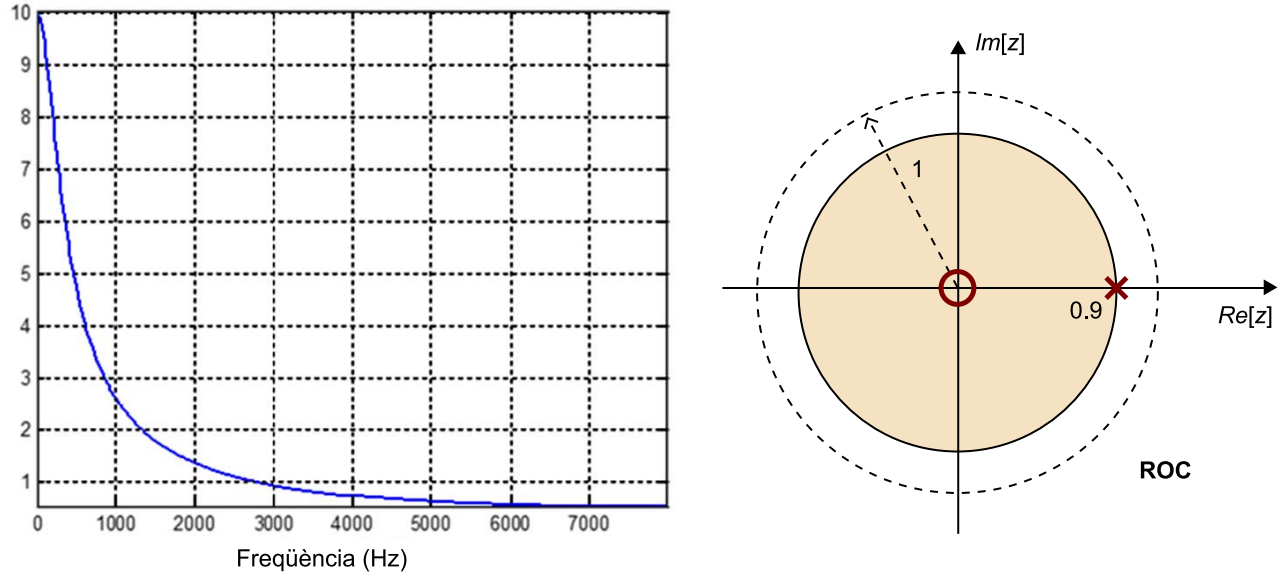
La seva transformada Z és:

$$H(z) = \frac{z}{z-a}$$

Amb l'ajuda de l'Octave/Matlab representarem el diagrama de pols i zeros i el mòdul de la funció de transferència.

```
%Comprovem el resultat amb l'Octave/Matlab particularitzant a = 0.9
A=[1, -0.9];
B=[1];
[H,w]=freqz(B,A,512,16000);
plot(w,abs(H)); xlabel('Frequència (Hz)');
zplane(B,A);
```

Figura 11. Mòdul de la resposta en freqüència i diagrama de pols i zeros de l'exemple



Si ens fixem en el diagrama de pols i zeros, observem un pol prop de $z=1$ (direcció $\omega=0$). Per tant, el filtre es comporta com un passabaix. El zero gairebé no té influència (cap freqüència no s'anul·la del tot).

Ara interpretarem l'estabilitat i la causalitat. Ja hem vist que amb un valor de $a=0,9$ el sistema és estable, atès que en tendir la resposta impulsional a zero, la suma dels seus valors en mòdul també tendeix a un valor finit. El diagrama de pols i zeros ens confirma aquesta propietat, ja que la ROC conté la circumferència unitat. També hem vist que el sistema és causal. La forma de la ROC (exterior a una circumferència) també ens confirma aquesta propietat. Si, en canvi, $a > 1$, el sistema es converteix en inestable, en donar una resposta impulsional que tendeix a infinit, i en no contenir la ROC el cercle unitat.

En resum, perquè un sistema sigui alhora estable i causal, tots els pols han d'estar dins de la circumferència unitat.

1.8. Retard de grup i sistemes de fase mínima

Exemple

Considerem un sistema que solament introdueix un retard de n_0 mostres en l'entrada:

$$y[n] = x[n - n_0]$$

Si calculem la funció de transferència:

$$H(z) = T.Z.\{h[n]\} = z^{-n_0}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$$

Si distingim entre magnitud i fase:

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad \text{Arg}\{H(e^{j\omega})\} = -\omega n_0$$

Es defineix el **retard de grup** com:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{\partial \text{Arg}\{H(e^{j\omega})\}}{\partial \omega}$$

En l'exemple s'observa que el retard de grup defineix el retard temporal entre el senyal d'entrada i la sortida, ja que dona justament $\tau_g(\omega) = n_0$. Òbviament, aquest sistema retarda totes les freqüències la mateixa quantitat de mostres, en tractar-se d'un retard de n_0 mostres. Tots els SLIT causals introdueixen algun tipus de retard, en basar-se en cel·les de memòria i combinacions lineals de versions memoritzades dels senyals d'entrada i de sortida.

En general, si un sistema té fase lineal, tindrà un retard de grup constant, amb la qual cosa no introduirà distorsió de fase, ja que totes les freqüències quedaran retardades la mateixa quantitat de mostres.

Els sistemes FIR seran de fase lineal si la resposta impulsional té una simetria parella o imparella. El retard de fase (i de grup) coincidirà amb el centre de la simetria, com es veurà en l'apartat següent.

Els sistemes IIR no són de fase lineal. Per minimitzar distorsions degudes al retard de grup no constant en aquest tipus de sistemes, s'ha d'intentar que els sistemes siguin **de fase mínima**. Un sistema és de fase mínima si tant aquest com el seu sistema invers són estables i causals. Per aquesta raó els sistemes de fase mínima s'aconsegueixen situant els zeros, a més dels pols, també dins del cercle unitat. Es denominen *sistemes de fase mínima* perquè en complir aquesta condició (zeros dins del cercle unitat) s'aconsegueix que la corba d'evolució de la fase en funció en la freqüència tingui una dinàmica mínima o més fitada en relació amb filtres amb zeros situats fora del cercle unitat. Aquesta propietat farà que la distorsió de fase i el retard de grup siguin tan petits com sigui possible per a aquest tipus de filtres.

1.9. Filtres FIR de fase lineal

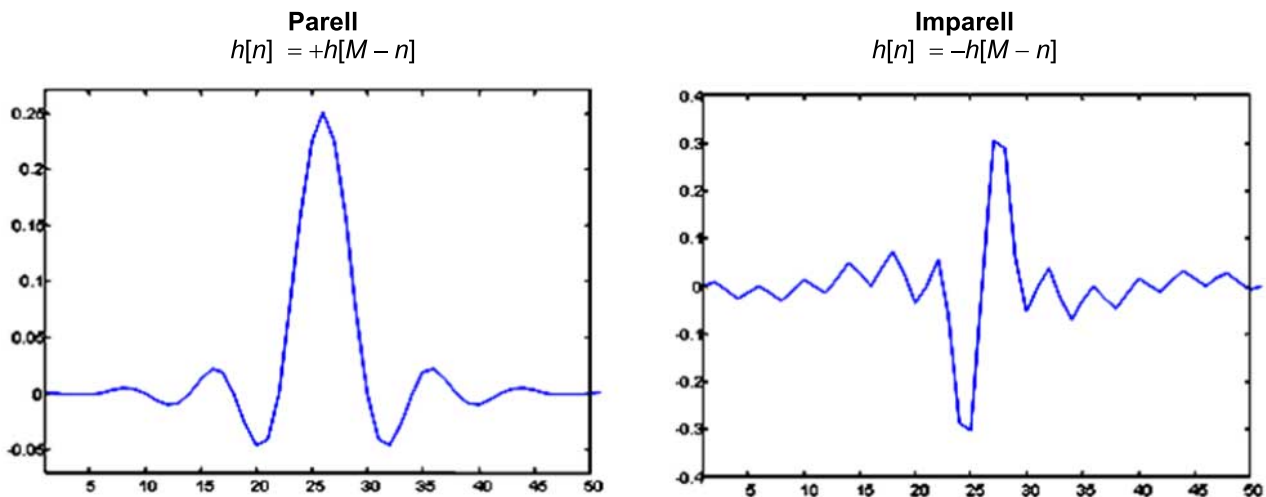
Un filtre FIR de $M+1$ coeficients és de fase lineal si compleix la condició següent de simetria en la seva resposta impulsional:

$$h[n] = \pm h[M-n]$$

en què anomenem la **simetria parella** per al signe positiu, mentre que diem que el filtre té **simetria imparella** per al signe negatiu.

En la figura 12 podem veure un exemple de cada tipus de simetria.

Figura 12. Condició de simetria parella (esquerra) o imparella (dreta) en la resposta impulsional de filtres FIR perquè aquests siguin filtres de fase lineal



Podem, a continuació, veure la demostració de linealitat de fase sota aquesta condició, per a un cas concret amb simetria parella i $M + 1$ parella. Bàsicament es tracta d'agrupar la meitat de termes de la TFSD de la resposta impulsional (o funció de transferència en freqüència) amb l'objectiu de transformar els termes exponencials complexos en funcions sinus o bé cosinus. Al final, queda una expressió en què apareix el terme de fase multiplicant una funció real de la variable ω , de manera que el terme de fase conté una funció lineal de la freqüència.

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^M h[n]e^{-j\omega n} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{M+1}{2}}^M h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{k=\frac{M+1}{2}}^M h[M-k]e^{-j\omega k} = \\
 &= \left(\begin{array}{l} M-k=n \\ n_+ = (M-1)/2 \\ n_- = 0 \end{array} \right) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]e^{-j\omega(M-n)} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]e^{-j\omega n} + e^{-j\omega M} \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]e^{+j\omega n} = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n](e^{-j\omega(n-\frac{M}{2})} + e^{+j\omega(n-\frac{M}{2})}) = \\
 &= e^{-j\omega \frac{M}{2}} 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n] \cos[\omega(\frac{M}{2} - n)] = e^{-j\omega \frac{M}{2}} H_r(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

en què $H_r(e^{j\omega})$ és una funció real de la variable ω .

Atès el resultat anterior, podem afirmar que la fase o argument del filtre FIR és bàsicament lineal amb la freqüència:

$$\text{Arg}\{H(e^{j\omega})\} = -\omega\frac{M}{2} + \pi\frac{(1 - \text{sgn}\{H_r(e^{j\omega})\})}{2}$$

El segon terme de la fase del sistema valdrà 0 quan $H_r(e^{j\omega})$ prengui valors positius, mentre que valdrà π quan $H_r(e^{j\omega})$ sigui negativa. Aquest terme no és derivable, en presentar discontinuïtats de salt quan $H_r(e^{j\omega})$ canvia de signe. No obstant això, no interessa analitzar el retard de grup en aquests punts, atès que són llocs on el mòdul de la funció de transferència passaria pel valor 0, i per tant, anul·laria les freqüències donades.

Per tant, ens podem concentrar en el primer terme de la fase per a fer el càlcul del retard de grup del filtre:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{\partial \text{Arg}\{H(e^{j\omega})\}}{\partial \omega} = \frac{M}{2}$$

Com veiem, el retard de grup és constant i igual al centre de simetria de la resposta impulsional, que recordem que té simetria parella. Així doncs, hem pogut comprovar com la simetria en la resposta impulsional comporta una propietat interessant: la no-existència de distorsió de fase o l'existència de retard de grup constant.

Un altre aspecte per considerar per a aquest tipus de sistemes és la distribució de zeros. A partir de la condició de simetria es pot demostrar que un filtre FIR de fase lineal té els zeros aparellats:

$$T.Z.\{h[n]\} = H(z) = T.Z.\{\pm h[M-n]\} = \pm T.Z.\{h[-(n-M)]\} = \pm z^{-M}H(z^{-1})$$

Com es pot veure en l'expressió anterior, cada zero tindrà el seu zero invers corresponent, en complir-se la condició de simetria de la resposta impulsional.

En general, els filtres FIR amb simetria en la resposta impulsional permeten expressar la resposta en freqüència del filtre com:

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(-\frac{M}{2}\omega + b)}H_r(e^{j\omega})$$

en què $H_r(e^{j\omega})$ és una funció real, i b és una constant que val $\pi/2$ per als filtres FIR que tenen simetria imparella respecte a la mostra central. D'aquesta manera, el retard de grup per a tots els casos és igual a $M/2$ mostres, és a dir, el punt central de simetria de la resposta impulsional.

Vegem continuació el resultat dels desenvolupaments de $H_r(e^{j\omega})$ per a la resta de casos no considerats fins ara, en funció del tipus de simetria i el nombre de mostres de la resposta impulsional del filtre:

- Simetria parella i $M+1$ imparella:

$$H_r(e^{j\omega}) = h\left[\frac{M}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{(M-2)}{2}} h[n] \cos\left[\omega\left(\frac{M}{2} - n\right)\right]$$

- Simetria imparella i $M + 1$ parella:

$$H_r(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n] \sin\left[\omega\left(\frac{M}{2} - n\right)\right]$$

- Simetria imparella i $M + 1$ imparella:

$$H_r(e^{j\omega}) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{(M-2)}{2}} h[n] \sin\left[\omega\left(\frac{M}{2} - n\right)\right] \quad ; \quad h\left[\frac{M}{2}\right] = 0$$

Com es pot observar, en el cas de simetria parella les agrupacions de les exponencials donen lloc a funcions cosinus, mentre que en el cas de la simetria imparella les agrupacions donen lloc a funcions sinus. Això té una conseqüència que mereix una atenció especial, i és que no totes les configuracions permeten el disseny de qualsevol tipus de filtre discret. A continuació es detallen aquestes limitacions:

- Els filtres FIR amb simetria parella i $M + 1$ parell no poden ser filtres passaalt ni filtres de banda eliminada, atès que $H_r(e^{j\omega}) = 0$ per a $\omega = \pi$.
- Els filtres FIR amb simetria imparella i $M + 1$ parell no poden ser filtres passabaix ni filtres de banda eliminada, atès que $H_r(e^{j\omega}) = 0$ per a $\omega = 0$.
- Els filtres FIR amb simetria imparella i $M + 1$ imparell no poden ser filtres passabaix, ni filtres de banda eliminada, ni filtres passaalt, ja que $H_r(e^{j\omega}) = 0$ per a $\omega = \{0, \pi\}$.

Com es pot apreciar, únicament els filtres FIR amb simetria parella i nombre de coeficients $(M + 1)$ imparell es poden utilitzar per a dissenyar qualsevol tipus de filtre.

1.10. Inversió de sistemes

La igualació, equalització o inversió de sistemes és un procediment habitual en múltiples aplicacions (per exemple, equalització de canal en sistemes de comunicacions, condicionament electroacústic de sales, etc.). Es tracta del procediment per a aconseguir la resposta més plana possible en el domini de la freqüència i s'aplica en general a sistemes lineals i invariants, encara que també es pot aplicar a sistemes que tenen variacions temporals (per exemple, igualació de canals en sistemes de comunicacions mòbils o sense fil). Nosaltres ho aplicarem a SLIT discrets.

1.10.1. Procediment general

Sigui un SLIT causal i estable, amb funció de transferència $H(z)$,

$$H(z) = G \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

amb pols p_k per a $k = 1 \dots N$, zeros z_k per a $k = 1 \dots M$ i guany G . Atès que el sistema és causal i estable, els pols compliran la condició d'estar tots dins del cercle unitat, és a dir, $|p_k| < 1, \forall k \in [1, N]$.

El sistema invers es defineix com un sistema causal tal que $H_i(z) = H^{-1}(z)$,

$$H_i(z) = \left(\frac{1}{G}\right) \frac{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}$$

de manera que els seus pols seran z_k per a $k = 1 \dots M$, els seus zeros seran p_k per a $k = 1 \dots N$ i el seu guany serà $1/G$. D'aquesta manera, s'aconseguirà l'efecte desitjat, l'equalització de la resposta en freqüència del sistema, que, vist en el pla complex Z , no és més que la condició $H(z)H_i(z) = 1$.

El principal problema que pot sorgir és el següent. En el cas que el sistema $H(z)$ posseeixi algun zero fora del cercle unitat, això és, $|z_k| > 1$ per a algun valor de $k \in [1, M]$, llavors el sistema invers serà un sistema inestable, ja que aquest posseirà un o més pols fora del cercle unitat. En aquest cas, es diu que el sistema no és invertible en mòdul i fase. L'única solució implica usar cel·les passatot amb l'objectiu, almenys, d'invertir el mòdul de la funció de transferència, com veurem en el subapartat següent.

1.10.2. Cel·les passatot i inversió de sistemes de fase no mínima

En aquest apartat definirem les cel·les passatot i seguidament veurem com les podem usar per a invertir en mòdul un sistema de fase no mínima (sistema amb zeros fora del cercle unitat).

Cel·les passatot

A continuació estudiarem una cel·la passatot. Després veurem com ens poden ser d'ajuda per a invertir SLIT de fase no mínima, és a dir, sistemes que posseeixen els seus zeros fora del cercle unitat.

Una cel·la passatot es defineix a partir de la funció de transferència següent:

$$H_{ap}(z) = \frac{(1 - \frac{1}{r} e^{j\theta} z^{-1})}{(1 - r e^{j\theta} z^{-1})}$$

en què r és un valor real de mòdul més petit que la unitat, i θ la fase del pol i del zero.

És a dir, es tracta d'un sistema IIR d'ordre 1, en què pol i zero es troben situats en la mateixa fase del pla Z però amb mòduls invers l'un de l'altre, i el pol és a dins del cercle unitat i el zero a fora ($r < 1$).

Per a verificar que en realitat és un sistema passatot hem de calcular el mòdul de la funció de transferència damunt del cercle unitat:

$$\begin{aligned} \left| H_{ap}(z = e^{j\omega}) \right| &= \frac{\left| 1 - \frac{1}{r} e^{j\theta} e^{-j\omega} \right|}{\left| 1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega} \right|} = |r|^{-1} \frac{|r - e^{j(\theta-\omega)}|}{|1 - r e^{j(\theta-\omega)}|} = \\ &= |r|^{-1} \frac{\sqrt{(r - \cos(\theta-\omega))^2 + \sin^2(\theta-\omega)}}{\sqrt{(1 - r \cos(\theta-\omega))^2 + r^2 \sin^2(\theta-\omega)}} = \\ &= |r|^{-1} \frac{\sqrt{r^2 - 2r \cos(\theta-\omega) + \cos^2(\theta-\omega) + \sin^2(\theta-\omega)}}{\sqrt{1 - 2r \cos(\theta-\omega) + r^2 \cos^2(\theta-\omega) + r^2 \sin^2(\theta-\omega)}} = \\ &= |r|^{-1} \frac{\sqrt{r^2 - 2r \cos(\theta-\omega) + 1}}{\sqrt{1 - 2r \cos(\theta-\omega) + r^2}} = |r|^{-1} \end{aligned}$$

Atès que el mòdul és constant i igual a $|r|^{-1}$, es tracta d'un sistema passatot. Per a normalitzar el mòdul de la funció de transferència a la unitat podem redefinir la cel·la passatot de la manera següent:

$$H_{ap}(z) = r \frac{(1 - \frac{1}{r} e^{j\theta} z^{-1})}{(1 - r e^{j\theta} z^{-1})}$$

Quant a l'argument de la funció de transferència, es pot comprovar com té una variació no lineal amb la pulsació discreta ω . És a dir, aquest tipus de sistemes produeixen el que es denomina *distorsió de fase*, la qual cosa pot ser un motiu de degradació d'un senyal, especialment en aplicacions en què sigui important preservar la forma d'ona de certs senyals (per exemple, en aplicacions de les comunicacions digitals: filtres per eliminar sorolls i interferències).

De fet, això es pot apreciar en el fet que la fase té una resposta no lineal (com es veurà en l'exemple de l'apartat següent), la qual cosa produeix un retard de grup no constant. És a dir, la distorsió de fase és deguda al fet que el filtre retarda de manera diferent (un nombre de mostres diferent) cada freqüència del senyal d'entrada, i no al fet que el filtre amplifiqui de manera diferent aquests components.

Inversió en mòdul de sistemes de fase no mínima

Suposem el sistema discret següent:

$$H(z) = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 2jz^{-1})(1 + 2jz^{-1})}{(1 + 0,5e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 + 0,5e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$$

Si volem invertir aquest sistema podem observar que, atès que aquest poseix dos zeros fora del cercle unitat ($z_1 = 2j = 2e^{j\frac{\pi}{2}}$ i $z_2 = -2j = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$), el sistema invers seria un sistema inestable, ja que els dos pols associats als inversos d'aquests zeros no complirien la condició d'estabilitat, assumint que tractem amb sistemes causals. Els sistemes amb zeros dins del cercle unitat es denominen *sistemes de fase mínima* i poden invertir-se sense cap tipus de problema. En aquest sentit, podem dir que el sistema no és igualable totalment. No obstant això, podem fer una igualació quant al mòdul de la funció de transferència multiplicant el sistema invers per les cel·les passatot que facin estable el sistema invers, de manera que cada cel·la passatot afegida provocarà un canvi en el mòdul dels pols externs al cercle unitat. Vegem-ho amb l'exemple:

Exemple

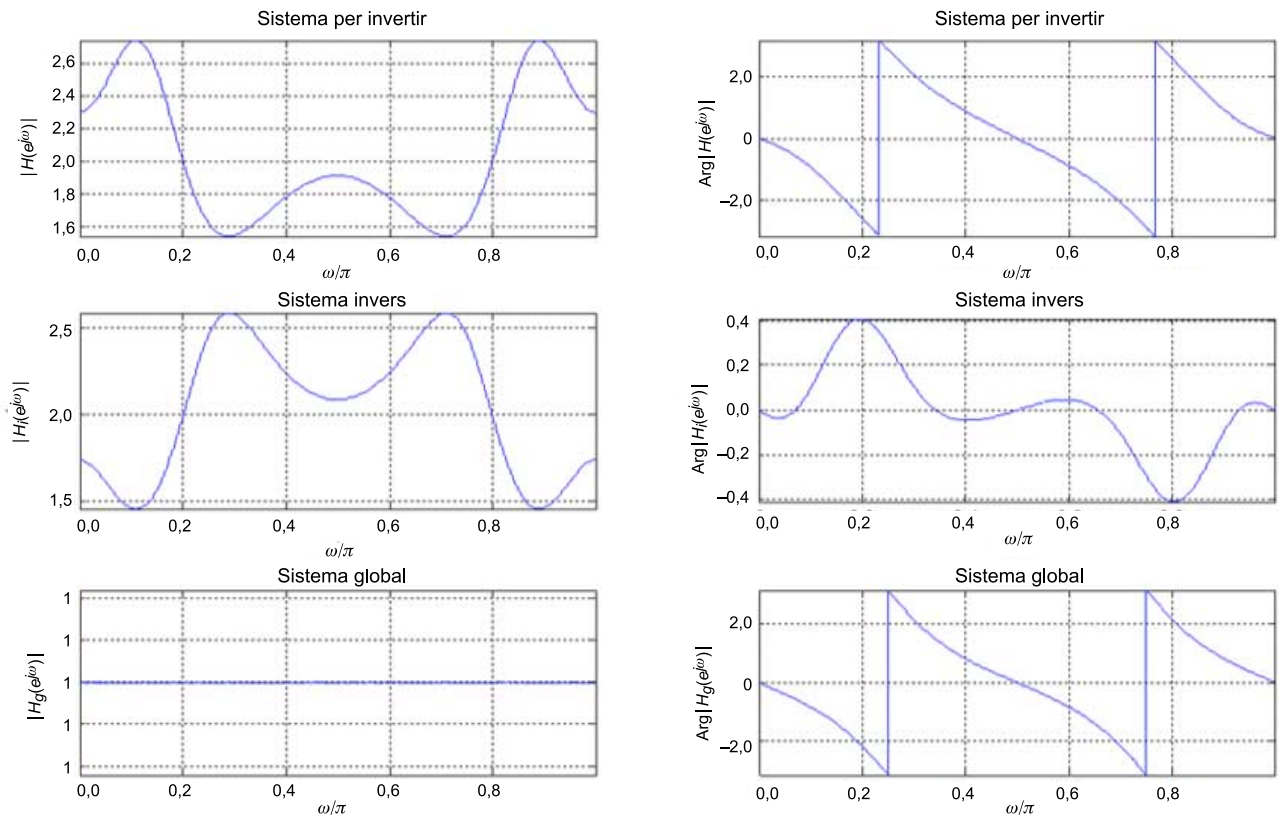
$$\begin{aligned} H_{ap}^{-1}(z) &= 2 \frac{(1 + 0,5e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 + 0,5e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 2jz^{-1})(1 + 2jz^{-1})} \times \left(0,5 \frac{(1 - 2e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})}{(1 - 0,5e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})}\right) \times \left(0,5 \frac{(1 + 2e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})}{(1 + 0,5e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})}\right) = \\ &= 0,5 \frac{(1 + 0,5e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 + 0,5e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,5e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})(1 + 0,5e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})} \end{aligned}$$

D'aquesta manera, el sistema equivalent format per la concatenació en sèrie del sistema original seguit del sistema anterior (l'anomenarem *sistema invers*, encara que estrictament no ho és) és:

$$H(z)H_{ap}^{-1}(z) = \left(\frac{1}{4}\right) \frac{(1 - 2jz^{-1})(1 + 2jz^{-1})}{(1 - 0,5e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})(1 + 0,5e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1})}$$

En la figura 13 es pot apreciar com el sistema dissenyat aconsegueix igualar el mòdul de la funció de transferència, encara que no aconsegueix igualar la fase. Com es pot apreciar en la gràfica inferior dreta, la fase del sistema global, format per la concatenació en sèrie del sistema original i el sistema dissenyat, segueix una trajectòria no lineal, fet que constata que la fase del sistema no ha quedat igualada i que únicament s'ha aconseguit igualar o equalitzar el mòdul (figura inferior esquerra).

Figura 13. Funcions de transferència del sistema original (a dalt), sistema invers (al mig) i sistema global format per la concatenació en sèrie de tots dos sistemes (a baix)



2. Disseny de filtres FIR amb el mètode de les finestres

El mètode de les finestres és el mètode més senzill i intuïtiu per a dissenyar filtres FIR. Els passos del procediment de disseny són els següents:

- En primer lloc, es defineix la resposta en freqüència desitjada $H_d(e^{j\omega})$, que cal especificar dins d'un període; per exemple, $-\pi < \omega \leq \pi$.
- En segon lloc, es calcula la resposta impulsional del filtre ideal $h_d[n]$ calculant la TFSD inversa de la resposta en freqüència ideal.
- Finalment, s'aplica la finestra temporal $w[n]$, finita i definida en l'interval de mostres $0 \leq n \leq M$, adequada per a complir les especificacions de disseny plantejades inicialment, multiplicant la resposta impulsional anterior per la finestra escollida: $h[n] = h_d[n]w[n]$. La forma de la finestra i la longitud temporal (que serà igual al nombre de coeficients final del filtre dissenyat $M + 1$) seran els paràmetres de disseny que permetran ajustar-se a les especificacions de disseny. La resposta impulsional final obtinguda $h[n]$ serà ni més ni menys que els coeficients del filtre FIR (tal com hem vist en l'apartat "Estudi d'un filtre passabaix ideal"), és a dir, $B_k = h[k]$ per a $0 \leq k \leq M$.

En la pràctica, en el primer pas es defineixen respostes freqüencials ideals formades per polsos rectangulars en el domini de la freqüència, de manera que en el segon pas del disseny s'obtenen respostes impulsional ideals formades per combinacions lineals de funcions *sinc* i deltes de Dirac en el domini del temps.

En general, quan es fa un processament de senyals reals, la funció de transferència compleix la propietat d'hermeticitat (la funció de transferència avaluada en una freqüència $-\omega$ donarà el mateix valor però complex conjugat del valor de la mateixa funció de transferència en la freqüència ω , és a dir, $H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$). Aquesta propietat ja queda reflectida en les especificacions de disseny i també en la resposta freqüencial ideal de partida (pas 1). A més, les finestres que s'utilitzen acostumen a tenir unes característiques bastant peculiars i, en general, es poden descriure principalment en el domini freqüencial mitjançant la seva TFSD ($W(e^{j\omega}) = TFSD\{w[n]\}$), ja que és aquí on es descobren els atributs que afectaran la qualitat del disseny final. És freqüent que $W(e^{j\omega})$ estigui formada per un lòbul principal centrat en $\omega = 0$ seguit de lòbuls de menys amplitud situats al llarg de la resta de freqüències (i generalment d'amplituds decreixents a mesura que ens apropem a $\omega = \pi$). Hi ha, no obstant això, finestres amb lòbuls secundaris d'amplitud constant (finestra de Hamming) o altres fins i tot sense lòbuls secundaris (finestra paramètrica de Hanning-Poisson).

El pas 3 de la fase de disseny obeeix a la necessitat d'aconseguir un filtre amb una resposta impulsional finita (no oblidem que perseguim el disseny d'un filtre FIR) i també que aquest sigui un sistema causal (recordeu que la resposta impulsional d'un sistema causal ha de complir la condició $h[n]=0$ per a $n < 0$).

En fer el pas 3 de la fase de disseny del filtre, es produeix un efecte de convolució en el domini de la freqüència entre la resposta freqüencial ideal $H_d(e^{j\omega})$ i la transformada de Fourier de la finestra usada $W(e^{j\omega})$ (recordeu la propietat d'enfinestrament de la TFSD, que provoca l'aparició d'efectes de distorsió en la resposta freqüencial del disseny final respecte de la ideal). Els principals efectes de distorsió són:

- Aparició d'una banda de transició més ampla (idealment inexistent o d'amplària nul·la), provocada principalment per l'amplària del lòbul principal de la finestra usada (caracterització d'aquesta finestra en el domini freqüencial $W(e^{j\omega})$).
- Aparició d'arissaments en les bandes de pas i atenuades (idealment inexistent, també), provocats principalment per la resta dels lòbuls secundaris presents en $W(e^{j\omega})$.

Així, l'única manera de controlar els efectes de distorsió anteriors és fent una selecció acurada de la finestra usada en el pas 3 del procés de disseny del filtre. Per a tenir uns bons resultats en el disseny, el lòbul principal de la finestra ha de ser el més estret possible i ha de concentrar el màxim d'energia de tot el senyal (lòbuls secundaris de baixa amplitud). Per això es comparen, en general, dos factors importants sobre $W(e^{j\omega})$:

- **Degoteig espectral (*leakage*) o relació principal a secundari:** és la diferència en dB entre els pics del lòbul principal i del lòbul secundari (el segon més elevat). Com més petit és el degoteig espectral, més grans seran els arissaments que apareixeran en les bandes de pas i atenuades del filtre, amb la qual cosa, en general, interessa maximitzar-lo. Com més degoteig espectral, l'energia de la finestra queda més confinada al lòbul principal.
- **Amplada del lòbul principal:** paràmetre relacionat amb la resolució assolida en el disseny, referent sobretot a les transicions sobtades, com és el cas de la transició entre les bandes de pas i les bandes atenuades. Com més gran sigui el seu valor, tindrem bandes de transició més amples, amb la qual cosa, més imperfectes. Interessa, doncs, minimitzar-ne el valor.

Per tant, els reptes del disseny d'un filtre amb el mètode de les finestres persegueixen tenir un valor de degoteig espectral com més gran millor i una amplada de lòbul principal tan petita com sigui possible. També es constata que per a una longitud del filtre fixa, és impossible aconseguir tots dos objectius de manera simultània, ja que en general un factor juga en contra de l'altre. Per

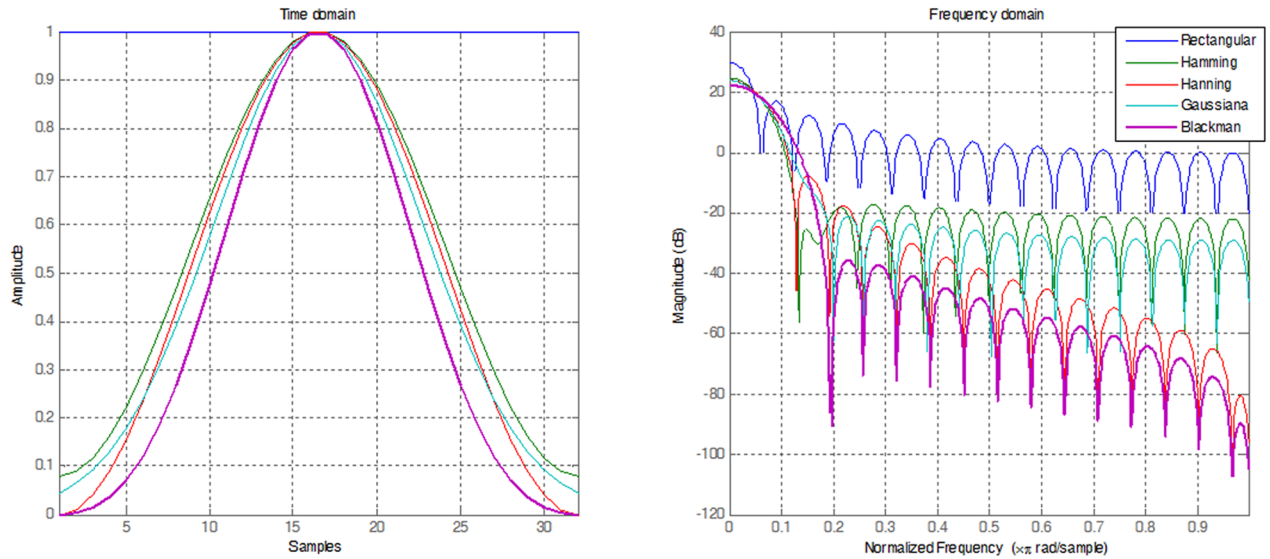
exemple, si analitzem la finestra més senzilla que podem usar, la finestra rectangular, aquesta és la que té una amplada de lòbul principal menor (és la finestra més resolutiva en el domini freqüencial), mentre que és també la finestra que posseeix un degoteig espectral més petit. És a dir, que amb la finestra rectangular aconseguirem dissenys amb bandes de transició d'amplària mínima, mentre que les bandes de pas i de rebuig tindran un arrissament màxim. Si volem obtenir altres dissenys utilitzant altres finestres, podrem aconseguir nous dissenys amb menys arrissament, però inevitablement amb bandes de transició més amples.

2.1. Anàlisi d'algunes finestres típiques

Hi ha diferents tipus de finestres, i en la figura 14 es mostren alguns exemples de finestres típiques per a un valor de $M = 31$ (és a dir, amb 32 coeficients).

Com es pot observar, la majoria de finestres persegueixen equilibrar millor el compromís entre degoteig espectral i amplària del lòbul principal per mitjà de suavitzar les transicions inicial i final del senyal temporal. En la finestra rectangular aquestes transicions són molt abruptes, la qual cosa provoca l'aparició de molta energia d'alta freqüència (el degoteig espectral és, doncs, més petit) mentre que en les altres finestres que es mostren aquestes transicions són més suaus, de manera que el degoteig espectral queda ampliat significativament. La finestres Hamming i gaussiana encara conserven una mica de discontinuïtat a l'inici i al final dels senyals temporals (no comencen o acaben en zero), fet que provoca un degoteig espectral no tan bo (o gran). En canvi, les finestres Hanning o Blackman aconseguixen ampliar el degoteig espectral de manera molt significativa en transicionar temporalment des de i cap a valors propers a zero. D'altra banda, aquestes dues finestres són les que tenen una energia temporal més localitzada o concentrada entorn de la meitat temporal, fet que provoca que el lòbul principal en aquests dos casos sigui significativament més gran que en els altres i, molt especialment, si es compara respecte al lòbul principal de la finestra rectangular.

Figura 14. Forma temporal (esquerra) i mòdul de la transformada de Fourier o TFSD (dreta) d'algunes finestres típiques, totes de 32 mostres ($M = 31$). El mòdul de la transformada de Fourier es representa en dB, i es fa el logaritme 20 en base 10 de la funció mòdul.



2.2. Exemple de disseny

Ara veurem un exemple de disseny de filtre passabaix discret amb el mètode de les finestres. Seguirem els passos del disseny explicats a l'inici de l'apartat 2.

1) **Pas 1:** la forma del filtre ideal en el domini freqüencial serà un pols rectangular centrat en $\omega = 0$, d'amplitud igual al guany del filtre en la banda de pas, que denominarem G , i valdrà la unitat en aquest exemple, i d'amplària relacionada amb la freqüència de tall del filtre que anomenarem ω_c i valdrà $\pi/4$. Vegem la resposta freqüencial ideal, que la podem definir analíticament com:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} G & |\omega| \leq \omega_c < \pi \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Això permetria, per exemple, generar un filtre discret capaç d'eliminar les freqüències per sobre d'1 kHz si treballem amb senyals mostrejats a 8 kHz.

2) **Pas 2:** calculem la resposta impulsional ideal:

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} G e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{G e^{j\omega n}}{jn} \Bigg|_{-\omega_c}^{+\omega_c} = \\ &= \frac{G}{n\pi} \frac{(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n})}{2j} = \frac{G}{n\pi} \sin(\omega_c n) \end{aligned}$$

Com veiem, aquest filtre té una resposta impulsional infinita, ja que és una funció *sinc* discreta, amb el màxim situat en $n = 0$ i amb un decreixement a raó de $\frac{1}{n}$ per a valors creixents o bé decreixents de n . El procés d'enfinestrament provocarà la finitud de la resposta impulsional del filtre, però és important adonar-se que el retard de grup d'aquest filtre és $\tau_g(\omega) = 0$, ja que es tracta d'un

Vegeu també

Recordeu que el retard de grup es defineix com la derivada de la fase respecte de la pulsació discreta canviada de signe.

filtre amb simetria parella respecte d'aquest punt de l'eix de mostres. Això també s'observa en ser la resposta freqüencial real, amb la qual cosa la fase del filtre és nul·la. Llavors, és clar que si trunquem després la resposta impulsional en l'interval de mostres $0 \leq n \leq M$, estarem també truncant la simetria parella del filtre, i deixarem de tenir un filtre de fase lineal.

Com hem vist en el subapartat 1.9, els filtres FIR de fase lineal tenen un retard de grup igual a $M/2$, que coincideix amb el centre de simetria del filtre en el domini temporal.

En general, amb el mètode de les finestres aconseguirem sempre filtres de fase lineal, i amb simetria parella. Per a aconseguir això, és necessari introduir el terme de fase lineal del filtre en la definició de la funció de transferència, és a dir:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} Ge^{-j\omega\frac{M}{2}} & |\omega| \leq \omega_c < \pi \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

D'aquesta manera, si tornem a calcular la resposta impulsional:

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} Ge^{-j\omega\frac{M}{2}} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{Ge^{j\omega(n-\frac{M}{2})}}{j(n-\frac{M}{2})} \Big|_{-\omega_c}^{+\omega_c} = \frac{G}{(n-\frac{M}{2})\pi} \sin\left(\omega_c\left(n-\frac{M}{2}\right)\right)$$

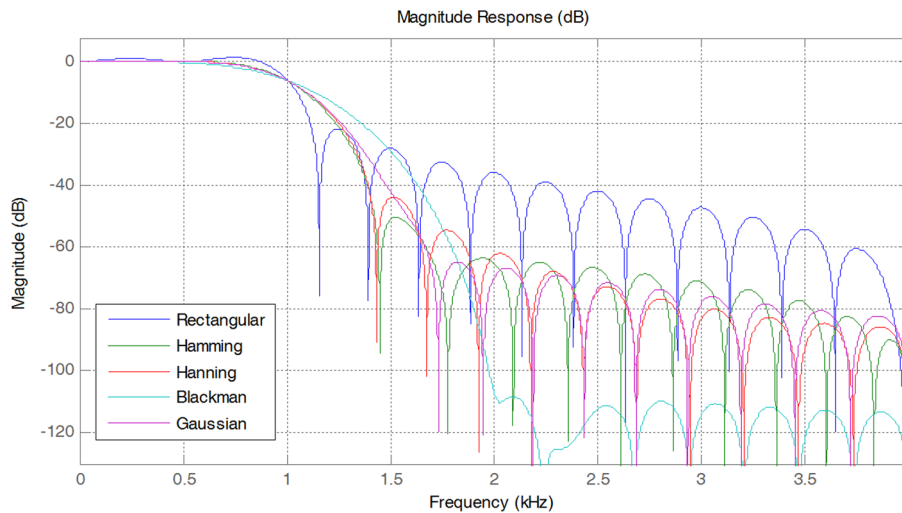
Ara tenim la resposta impulsional centrada en el centre de simetria del senyal una vegada s'hagi procedit a fer el procés d'enfinestrament.

Aquest procés es pot fer com un desplaçament temporal senzill, però únicament quan el valor de M és parell, per la qual cosa l'expressió analítica calculada és de més interès per a filtres de qualsevol nombre de coeficients.

3) Pas 3: apliquem la finestra $h[n] = h_d[n]w[n]$. En la figura 15 es pot observar el mòdul de la resposta freqüencial de cinc filtres FIR obtinguts mitjançant l'aplicació de les cinc finestres diferents analitzades en l'apartat anterior, i amb un valor del paràmetre $M = 31$.

Com hem vist en el subapartat 2.1, la finestra rectangular és la més resolutiva (lòbul principal més estret), la qual cosa provoca una banda de transició entre la banda de pas i l'atenuada més estreta. No obstant això, amb la finestra rectangular també s'observa més arriçament en les bandes de pas i atenuada (especialment això s'observa millor en la banda atenuada, ja que els lòbuls que s'observen provoquen un rebuig més baix en tenir una amplitud més gran). En l'altre extrem tenim el filtre que s'obté amb la finestra Blackman, que té un arriçament molt menor però una banda de transició molt més ampla. Amb la resta de finestres s'obtenen compromisos, entre amplària de banda de transició i arriçaments en les bandes de pas i atenuada, més equilibrats.

Figura 15. Exemple de disseny d'un filtre passabaix amb freqüència de tall a $\omega = \pi/4$ i guany en la banda de pas $G = 1$. Es representa el mòdul de la resposta freqüencial usant cinc finestres diferents, i el mòdul s'expressa en dB fent $G(\omega) = 20 \log_{10}|H(e^{j\omega})|$. L'eix freqüencial està en Hz, suposant una freqüència de mostratge de 8 kHz

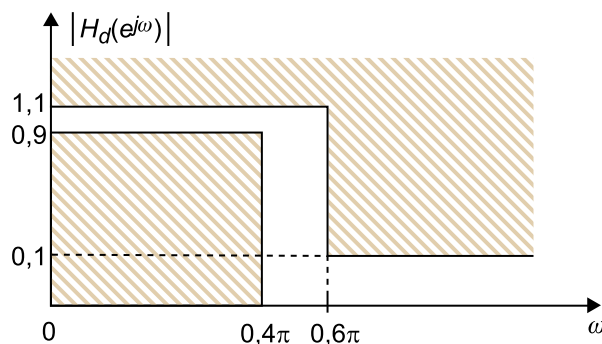


Generalment, en el moment de fer el disseny d'un filtre FIR amb aquest mètode cal comprovar el resultat de la resposta freqüencial utilitzant diferents finestres, de manera que el dissenyador comprova quin dels resultats és el més adequat per a l'aplicació en concret, encara que aquest mètode de prova i error no sempre dona el millor resultat.

Exemple

Disseny d'un filtre passabaix FIR de fase lineal amb el mètode de les finestres que compleixi les especificacions següents en forma de plantilla:

Figura 16. Plantilla d'especificacions del filtre de l'exemple



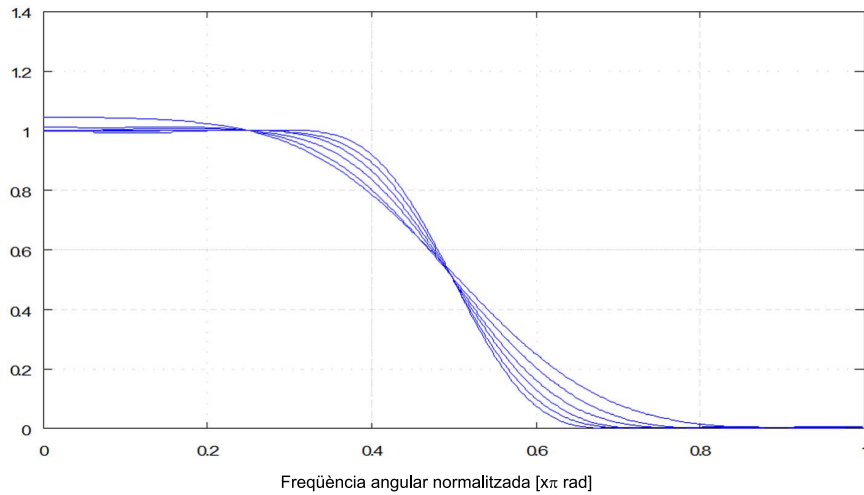
Utilitzarem la funció d'Octave/Matlab `fir1.m` per a aconseguir la resposta impulsional del filtre que volem. Aquesta funció implementa el mètode de les finestres. Se li passa el nombre de coeficients del filtre, el tipus de filtre (passaalt, etc.), la freqüència de tall i el tipus de finestra. Per defecte, es refereix a un filtre passabaix amb una finestra Hamming.

Pel mètode de prova i error, cridem la funció `fir1` amb un escombratge del paràmetre M (nombre de coeficients menys 1) de 10 a 20, incrementant-lo de dos en dos. El codi utilitzat, amb 21 coeficients, és:

```
%Disseny d'un filtre FIR amb el mètode de les finestres
%i amb una finestra Hamming
B=fir1(20,0.5); %21 coeficients, i freqüència de tall \omega_c = pi/2
[H,w]=freqz(B,1); %Càlcul de la resposta freqüencial del filtre
plot(w/pi,abs(H)); %Dibuix de la resposta freqüencial
```

El resultat de l'anàlisi és el que es mostra en la figura 17, on s'han provat i superposat les gràfiques corresponents als diferents ordres especificats abans.

Figura 17. Resposta freqüencial dels dissenys de filtre FIR amb el mètode de les finestres i amb una finestra Hamming, per als diferents ordres analitzats



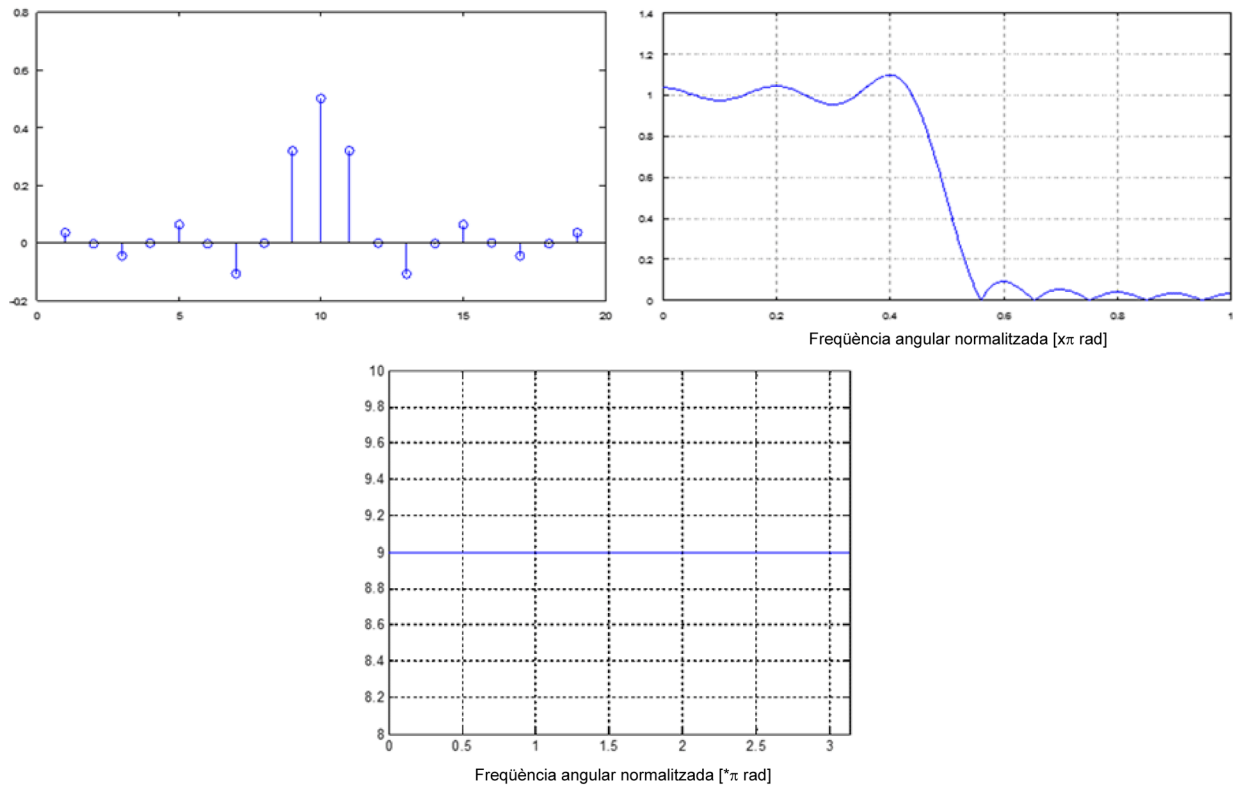
S'observa que a mesura que augmentem el nombre de coeficients, el filtre s'aproxima més a l'ideal, i s'aconsegueixen complir les especificacions de la plantilla amb 20 coeficients.

Si provem amb una finestra rectangular apareix més arrissament en la banda de pas. Les especificacions de la plantilla es compleixen, en aquest cas, amb un mínim de 18 coeficients.

```
%Disseny d'un filtre FIR amb el mètode de les finestres
%i amb una finestra rectangular
B=fir1(18,0.5,ones(1,19));%19 coeficients, i freqüència de tall
%ω_c = pi/2
[H,w]=freqz(B,1); %Càlcul de la resposta freqüencial del filtre
figure;stem(B) %Visualitzem la resposta impulsional
figure;plot(w/pi,abs(H)); %Dibuix de la resposta freqüencial
xlabel('Freqüència angular normalitzada (*pi rad)');
figure;[G,w] = grpdelay(B); plot(w,G); %Dibuix del retard de grup
xlabel('Freqüència angular normalitzada (*\pi rad)');
```

En aquest cas obtenim les gràfiques següents tant en el domini freqüencial com en el temporal (vegeu la figura 18).

Figura 18. Resposta impulsional (esquerra a dalt), mòdul de la resposta freqüencial (dreta a dalt), i retard de grup (a baix) del filtre FIR dissenyat amb el mètode de les finestres, utilitzant una finestra rectangular, per a un ordre de 18 (19 coeficients).



Com es pot observar, es tracta d'una funció *sinc* enfinestrada amb un pols rectangular. Com també s'aprecia, el filtre té un retard de grup constant i igual a $\frac{M}{2} = \frac{18}{2} = 9$.

2.3. Mètode de la finestra Kaiser

En certes aplicacions resulta convenient ajustar bé aquestes característiques, ja que influeixen en el resultat de la resposta freqüencial del disseny. Per aquest motiu, Kaiser va estudiar l'ús d'una nova finestra que té la característica diferencial respecte de les ja vistes fins ara que, a més de dependre del paràmetre M (durada - 1), també depèn d'un paràmetre que permet ajustar de manera adequada la relació entre totes dues característiques fonamentals (amplada del lòbul principal enfront de degoteig espectral), i s'obté un ventall de possibilitats molt més gran.

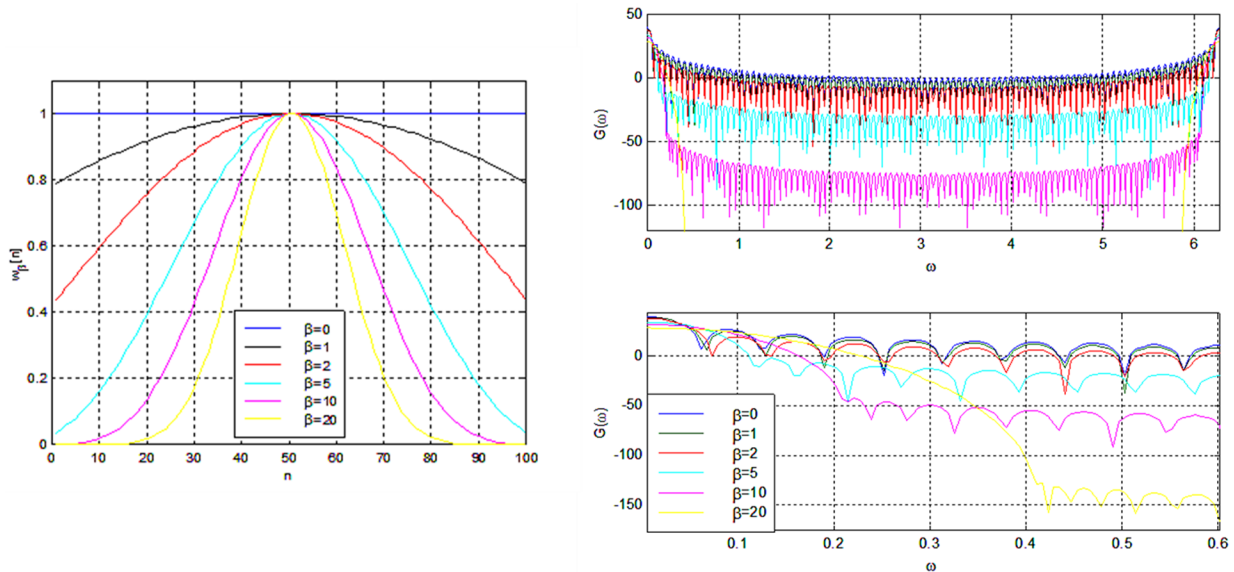
La **finestra Kaiser** es defineix a partir de la funció de Bessel modificada d'ordre zero i de primera espècie:

$$w_{M,\beta}[n] = \frac{I_0\left[\beta \frac{2}{M} \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - \left(n - \frac{M}{2}\right)^2}\right]}{I_0[\beta]} \quad \beta > 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq n \leq M$$

en què β és un valor real positiu associat a la forma de la finestra.

En la figura 19 es pot observar la forma temporal i freqüencial d'aquesta finestra per a diferents valors del paràmetre β i per a un valor de $M = 100$. Noteu que per a $\beta = 0$ la finestra Kaiser es redueix a una finestra rectangular (més resolutive però amb degoteig espectral baix), mentre que valors positius creixents produeixen un ventall de finestres amb lòbul principal cada vegada més ample però amb degoteig espectral cada vegada millor. En definitiva, el valor de β serà crucial per a aconseguir un disseny específic, igual que també ho és el paràmetre M (encara que aquest afecta únicament l'amplària del lòbul principal).

Figura 19. Forma temporal (esquerra) i freqüencial (dreta, es representa el mòdul en dB) de la finestra Kaiser per a diferents valors del paràmetre β i amb 100 coeficients.



Kaiser va fer un estudi dels valors òptims dels paràmetres M i β per a aconseguir una determinada qualitat en el disseny final. L'estudi es va centrar en el cas d'un filtre prototip passabaix. Els paràmetres que defineixen la qualitat del disseny són:

- L'arriament en les bandes atenuades i de pas δ (expressat en lineal).
- L'amplada de banda de la transició $\Delta\omega$ (en pulsació discreta).

Les expressions de disseny amb el mètode de la finestra Kaiser són les següents:

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A - 8,7) & A > 50 \\ 0,5842(A - 21)^{0,4} + 0,07886(A - 21) & 21 \leq A \leq 50 \\ 0,0 & A < 21 \end{cases}$$

$$M = \frac{A - 8}{2,285\Delta\omega}$$

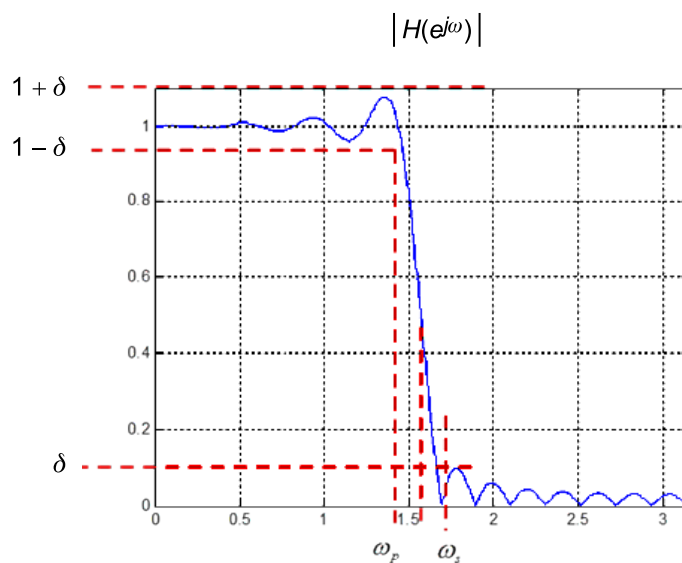
en què $A = -20\log_{10}\delta$ és l'arriament expressat en dB, $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$, ω_s la pulsació més gran de la banda de pas en què $|H(e^{j\omega})| > 1 - \delta$, i ω_p la pulsació més petita de la banda atenuada en què $|H(e^{j\omega})| < \delta$. El valor de M obtingut s'haurà d'arrodonir al menor enter més gran o igual que el valor calculat (fun-

ció `ceil.m` d'Octave/Matlab), atès que el resultat especifica un ordre mínim per a satisfer les condicions de disseny, la freqüència de tall del filtre es considera com:

$$\omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2}$$

En la figura 20 es poden veure gràficament les especificacions de disseny que representen els paràmetres ω_s , ω_p i δ . Com es pot apreciar, amb el mètode de disseny de filtres FIR de les finestres s'obtenen filtres amb arrissament simètric (en lineal), és a dir, l'amplitud d'arrissament és la mateixa en la banda de pas que en la banda atenuada.

Figura 20. Exemple d'especificacions de disseny per al mètode de la finestra Kaiser



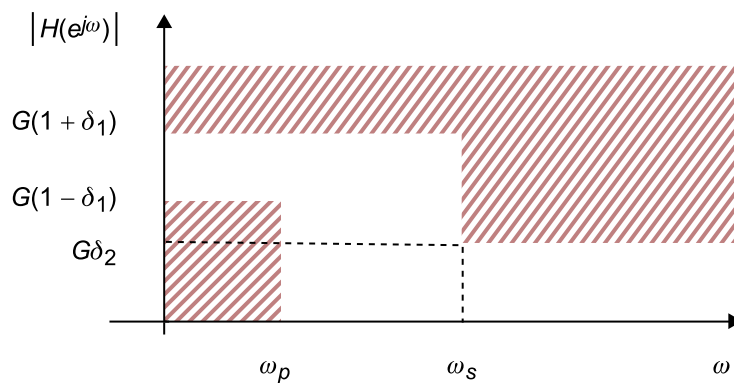
Exemple

Es requereix fer el disseny següent:

- Filtre passabaix que elimini totes les freqüències per sobre de 10 kHz, amb una atenuació mínima de 28 dB.
- Que presenti un guany de 2 dB en la contínua.
- Que el guany sigui més gran que 1 dB, per sota de 7 kHz.
- Freqüència de mostreig de 44.100 mostres per segon

Quan el guany del filtre no és la unitat, l'arrissament del filtre δ s'ha de normalitzar respecte d'aquest guany, en ser el guany un paràmetre que acaba multiplicant tota la funció. En la figura 21 es pot veure la plantilla d'especificacions del filtre passabaix en què el paràmetre d'arrissament en les bandes de pas i atenuada està referit al paràmetre de guany G del filtre.

Figura 21. Plantilla d'especificacions del filtre passabaix normalitzada al guany del filtre



Les especificacions poden donar requisits d'arissament asimètrics, com és aquest cas. Calculem, en primer lloc, el paràmetre de guany i també els arrissaments en les bandes de pas i atenuada que indiquen les especificacions:

- Guany (conversió de dB a lineal):

$$G = 10^{\frac{20}{20}} = 1,2589$$

- Arrissament màxim en la banda de pas:

$$G(1 - \delta_1) = 10^{\frac{1}{20}} \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = 0,1087$$

- Arrissament màxim en la banda atenuada:

$$G\delta_2 = 10^{-\frac{28}{20}} \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = 0,0316$$

Per tant, com sabem que els filtres FIR dissenyats amb el mètode de les finestres tenen arrissaments simètrics, escollim com a arrissament màxim el valor més restrictiu (o més petit):

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) = 0,0316$$

- Calculem les freqüències límit de les bandes de pas i atenuada a partir de les especificacions donades:

$$\omega_p = 2\pi \times \frac{7.000}{44.100} = 0,9973 \text{ rad}$$

$$\omega_s = 2\pi \times \frac{10.000}{44.100} = 1,4248 \text{ rad}$$

- Freqüència de tall:

$$\omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2} = 1,2110 \quad (\equiv 8.500 \text{ Hz})$$

- Calculem:

$$A = -20\log_{10}(\delta) = -20\log_{10}(0,0316) = 30 \text{ dB}$$

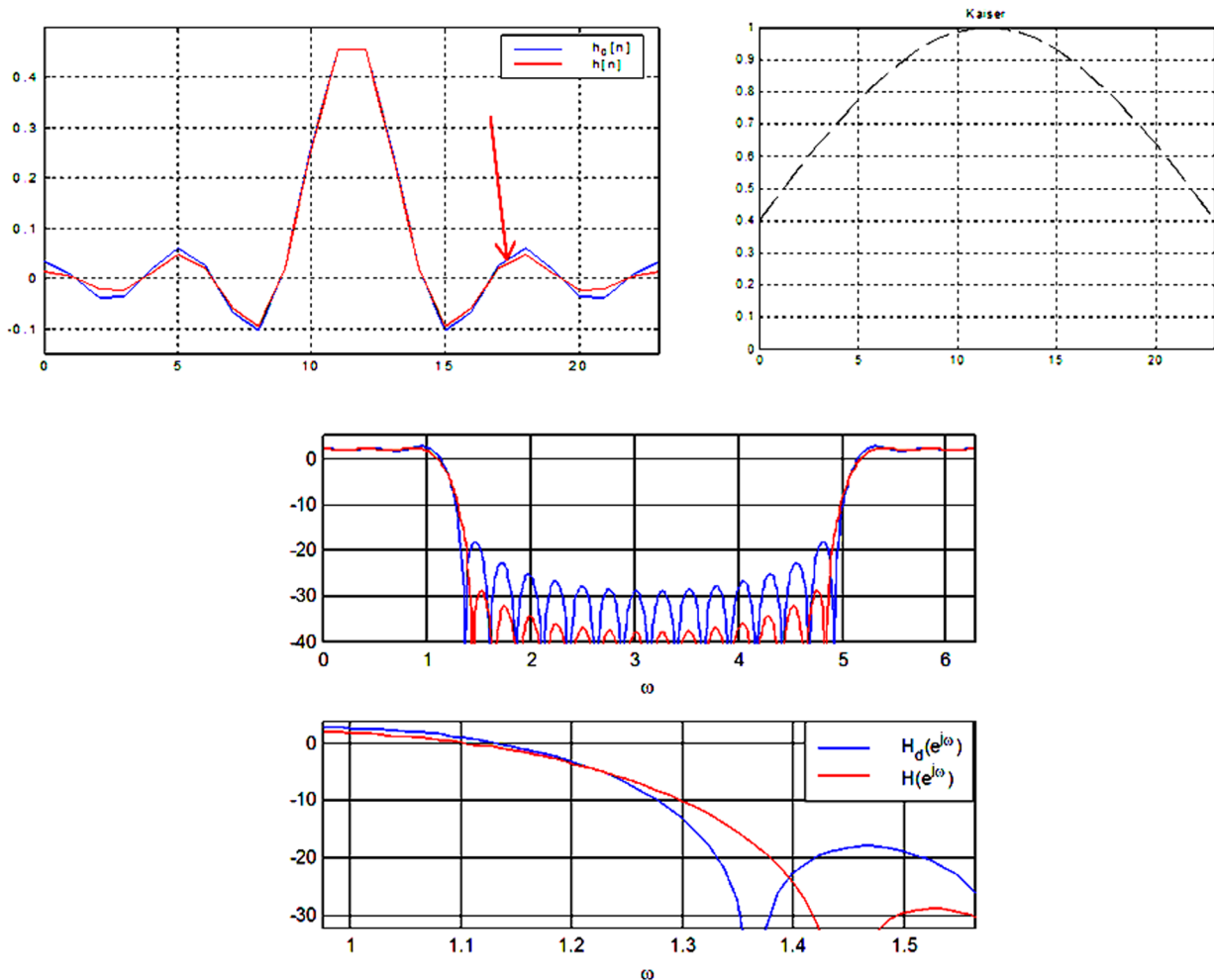
$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0,4274$$

- Fem el disseny dels paràmetres del filtre:

$$21 < A = 30 < 50 \Rightarrow \beta = 0,5842(A - 21)^{0,4} + 0,07886(A - 21) = 2,1166$$

$$M = \frac{A - 8}{2,285 \times \Delta\omega} = \frac{30 - 8}{2,285 \times 0,4274} = 22,52 \Rightarrow M = 23$$

Figura 22. Disseny de filtre FIR passabaix amb el mètode de la finestra Kaiser: resposta impulsional amb finestra rectangular i final (a dalt a l'esquerra), finestra Kaiser (a dalt a la dreta), i mòdul de la resposta freqüencial amb finestra rectangular i final en dB (al mig i a baix amb més resolució)



- Obtenim la resposta impulsional ideal del filtre:

$$h_d[n] = G \frac{\sin[\omega_c(n - \frac{M}{2})]}{\pi(n - \frac{M}{2})} = 0,4007 \frac{\sin[1,211(n - 11,5)]}{(n - 11,5)}$$

- La resposta impulsional final del disseny serà:

$$h[n] = \text{kaiser}_{\beta=2,1166,M=23}[n] \cdot h_d[n]$$

En la figura 22 es pot observar el resultat del disseny dut a terme. Es compara el disseny amb la finestra Kaiser respecte del disseny que s'obté amb una finestra rectangular. Com es pot observar, l'ús de la finestra Kaiser permet satisfer els requisits de disseny de l'enunciat. Per exemple, el requisit que elimi-

⁽³⁾S'entén per atenuació del filtre l'invers del guany, que en dB es tradueix al guany canviat de signe.

ni totes les freqüències per sobre de 10 kHz, amb una atenuació mínima de 28 dB, es tradueix a una pulsació discreta de $\omega_s = 1,4248$ rad/mostra. En el cas del disseny amb finestra rectangular, per damunt d'aquesta pulsació s'observa una atenuació³ que té el valor mínim d'uns 18 dB, la qual cosa no compleix l'especificació. En canvi, el disseny amb la finestra Kaiser dissenyada sí que compleix la condició, en tenir un guany que està per sota de -28 dB.

Per acabar, cal comentar que el mètode de disseny es podria aplicar també al disseny de filtres passaalt. En tractar-se de filtres FIR, podem obtenir un filtre passaalt a partir d'un disseny passabaix senzillament multiplicant la resposta impulsional del filtre per $(-1)^n = e^{j\pi n}$. Cal recordar que això produeix un desplaçament freqüencial de π radianis en la TFSD, la qual cosa provocarà que la banda de pas, inicialment situada en la baixa freqüència, passi a estar situada entorn de la màxima alta freqüència discreta. Així doncs, a partir d'unes especificacions de disseny d'un filtre passaalt, primer hauríem de traduir aquestes especificacions a l'equivalent passabaix (traducció esmentada, però inversa), dissenyar el filtre passabaix segons el procediment estudiat, i finalment multiplicar la resposta impulsional obtinguda del filtre passabaix per l'exponencial indicada.

3. Disseny de filtres IIR a partir de filtres analògics

En aquest apartat estudiarem les tècniques de disseny de filtres de temps discret que aprofiten les tècniques de disseny de filtres analògics per a obtenir dissenys que es poden implementar com a filtres digitals, basats en l'equació en diferències finites i coeficients constants.

3.1. Disseny analògic enfront de disseny discret

Igual que en el domini discret, en l'àmbit dels filtres analògics es disposa d'una eina d'anàlisi per a posicionar pols i zeros: la **transformada de Laplace (TL) $H(s)$ d'un senyal analògic $h(t)$** . A continuació destaquem les relacions entre l'eina de representació i disseny per a filtres analògics (TL) i també l'eina corresponent per a representar i dissenyar filtres de temps discret (TZ) i les seves relacions respectives amb el domini corresponent de representació en la freqüència:

- Relació entre la TFSD i la TZ: la TFSD d'una seqüència $h[n]$, $H(e^{j\omega})$, és la particularització de la TZ, $H(z)$, en el cercle unitat, això és, en el cercle de radi 1 centrat en $z = 0$ i la posició de la qual queda fixada pel valor de la pulsació discreta d'anàlisi ω :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} \quad z \in C \quad \Rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

- Relació entre la TF i la TL: la TF d'un senyal analògic $h(t)$, $H(j\Omega)$, és la particularització de la TL, $H(s)$, en l'eix de valors complexos, això és, part real nul·la i part imaginària igual a la pulsació analògica d'anàlisi Ω :

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt \quad s \in C \quad \Rightarrow \quad H(j\Omega) = TF\{h(t)\} = H(s) \Big|_{s=j\Omega}$$

També podem entendre que la TL és la generalització de la TF a un pla complex de variable complexa $s = \sigma + j\Omega$. De la mateixa manera, podem veure la TF com la particularització de la TL en l'eix imaginari, o sigui, $s = j\Omega$ (o $\sigma = \text{Re}\{s\} = 0$).

Donat un SLIT analògic amb resposta impulsional $h(t)$ i funció de transferència $H(j\Omega)$, la seva funció de transferència en el domini de s es pot expressar (generalment) en forma de quocient de polinomis de s , és a dir:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k}$$

Usant la propietat de derivació de la transformada de Laplace següent:

$$x(t) \xleftrightarrow{TL} X(s) \Rightarrow \frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{TL} s^n X(s)$$

el sistema anterior es pot expressar amb l'equació en diferencial següent:

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

L'expressió de la funció de transferència es pot reescriure a partir de la factorització de les arrels dels polinomis numerador i denominador de $H(s)$, i arribem a l'expressió següent:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = G \frac{\prod_{k=1}^M (s - z_k^a)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k^a)}$$

en què z_k^a són els zeros de $H(s)$, que anul·len la funció de transferència, i p_k^a són els pols de $H(s)$, que fan infinita la funció de transferència.

La funció $H(s)$ es pot descompondre en fraccions simples per a trobar la resposta impulsional $h(t)$ del sistema analògic a partir de transformades de Laplace conegudes i senzilles. Aquí no repassarem els mètodes per a trobar aquesta resposta temporal, però sí que recordarem breument les transformades bàsiques que permeten entendre les **condicions d'estabilitat** d'un sistema analògic, ja que aquestes condicions seran requisit de disseny imprescindible per a obtenir sistemes discrets útils. La relacions següents entre senyals i les seves transformades de Laplace respectives són les associades a un pol simple real i també a un parell de pols complexos conjugats, tots dos casos habituals que apareixen en les expansions en fraccions simples per a l'obtenció de la resposta impulsional d'un filtre analògic a partir de la seva funció de transferència $H(s)$:

1) Cas I. Pol simple real

$$e^{\sigma t} u(t) \xleftrightarrow{TL} \frac{1}{s - \sigma}$$

en què $p = \sigma$ és un pol simple real en el pla s .

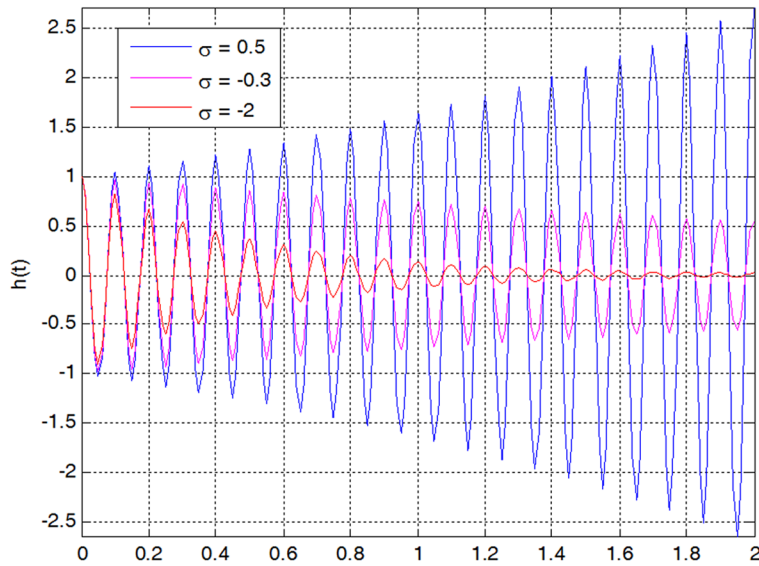
2) Cas II. Parell de pols complexos conjugats

$$e^{\sigma t} \cos(\Omega_0 t) u(t) \xleftrightarrow{TL} \frac{s - \sigma}{(s - (\sigma + j\Omega_0))(s - (\sigma - j\Omega_0))} = \frac{s - \text{Re}[p]}{(s - p)(s - p^*)}$$

en què $p = \sigma \pm j\Omega_0$ són pols complexos conjugats en el pla s .

A la vista dels dos exemples anteriors, podem observar que en el cas en què els pols es trobin en el semiplà esquerre, això és, que la part real dels pols sigui negativa, tindrem respostes impulsional que tendeixen a zero a mesura que el temps tendeix a infinit (vegeu els exemples de la figura 23).

Figura 23. Exemples de respostes impulsional associades a un parell de pols complexos conjugats de valors $p = \sigma \pm 20\pi$, per a diferents valors de $\Re\{p\} = \sigma$. Únicament el cas en què $\sigma > 0$ s'obté una resposta inestable, això és, que no tendeix a 0 a mesura que el temps augmenta.



Si això s'entén per a fraccions simples com aquestes (pols amb multiplicitat unitària, o no repetits), el mateix succeeix per a fraccions simples més complexes. Per exemple, en el cas que el sistema posseeixi un pol real $s = \sigma$ de multiplicitat 2, aplicant la propietat de la TL, $t \cdot f(t) \xleftrightarrow{TL} -\frac{dF(s)}{ds}$, podem arribar a la conclusió que es complirà la relació següent:

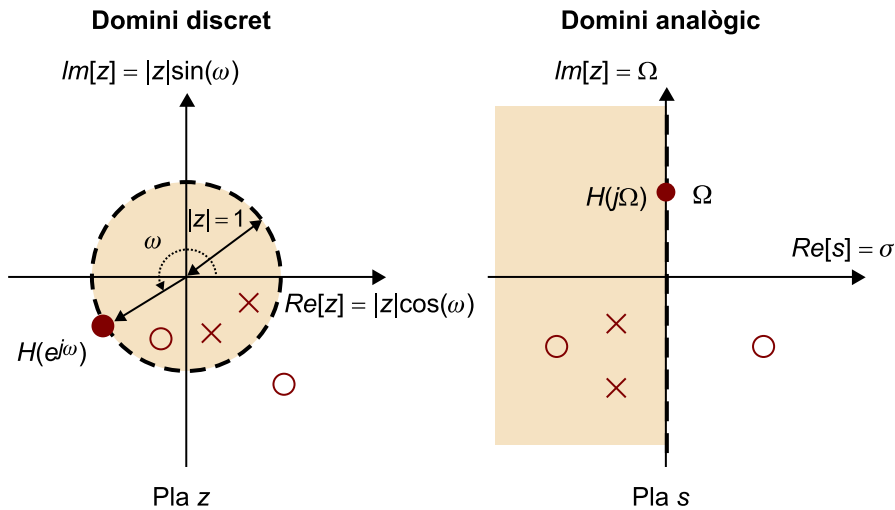
$$\frac{1}{2} t e^{\sigma t} u(t) \xleftrightarrow{TL} \frac{1}{(s + \sigma)^2}$$

En el cas que el sistema analògic posseeixi més d'un pol, cadascun aportarà un terme en el càlcul de la resposta impulsional. Perquè aquesta es correspongui amb un sistema estable, cada pol haurà d'aportar un terme que tendeixi a 0 amb el temps. Així doncs, la **condició d'estabilitat per als sistemes analògics** és la següent: la part real de tots els pols ha de ser negativa, o aquests s'han de trobar en el semiplà esquerre del pla complex s :

$$\Re\{p_k^a\} < 0 \quad \forall k$$

En la figura 24 es pot apreciar una comparativa de les zones on s'han de situar els pols, tant des de la perspectiva del disseny de sistemes discrets amb la TZ com en el disseny de sistemes analògics amb la TL. En el primer cas, els pols s'han de situar dins del cercle unitat, mentre que per al segon cas aquests han d'estar en el semiplà esquerre del pla s .

Figura 24. Representació de les regions on s'han de situar els pols, tant en l'àmbit del disseny de sistemes de temps discret amb la TZ (part esquerra) com en l'àmbit del disseny dels filtres analògics amb la TL (part dreta).



En el procés de disseny de filtres analògics el posicionament dels pols i dels zeros en el moment del disseny ha de seguir les lleis següents: la part imaginària marcarà la freqüència on es notarà l'efecte, mentre que la part real marcarà la intensitat d'aquest efecte. Per exemple, un parell de zeros situats en les posicions $s = \pm j\Omega_0$ cancel·laran totalment la pulsació $\Omega = \Omega_0$ rad/s, mentre que si la part real de tots dos pols no és zero, la cancel·lació no serà total i l'efecte de reducció d'intensitat del senyal serà més petit com més gran sigui el mòdul de la part real dels zeros.

El procés de disseny de filtres digitals a partir de dissenys de filtres analògics es basa a aprofitar un disseny analògic per a convertir-lo en un disseny digital corresponent. En general, podem resumir els passos per fer en els punts següents:

1) Dissenyar els pols i zeros del filtre analògic i calcular la funció de transferència o la resposta impulsional:

$$p_k^a, z_k^a \Rightarrow H(s), h(t)$$

2) Convertir el disseny analògic a discret mitjançant transformacions del tipus:

- Obtenció de la resposta impulsional del sistema discret a partir de la resposta impulsional del sistema analògic: $h[n] = T\{h(t)\}$.

- Obtenció de la funció de transferència del sistema discret a partir de la funció de transferència del sistema analògic: $H(z) = T\{H(s)\}$.

Dins de les possibilitats per a obtenir un disseny d'un filtre discret a partir d'un disseny analògic, tenim les tècniques següents:

- Aproximació per derivades
- Invariància impulsional (mostreig de la $h(t)$)
- Transformació bilineal
- *Matched Z-transform*

De les possibles tècniques, centrarem l'estudi sobre el mètode de la transformació bilineal, ja que és el mètode més comunament aplicat en el procés de disseny de filtres digitals.

3.2. Transformació bilineal

El principal avantatge d'aquest mètode de transformació d'un disseny analògic a un filtre discret, respecte del mètode basat en la invariància impulsional, és la possibilitat de fer el disseny a partir de qualsevol tipus de filtre analògic, ja sigui un filtre d'amplada de banda limitada (passabaix, passabanda) o d'amplada de banda il·limitada (passaalt o de banda eliminada), i també poder fer la conversió de manera directa a partir de la funció de transferència en el pla de la transformada de Laplace.

La transformació bilineal es basa a mapar la part imaginària de la variable s damunt del cercle unitat del pla z . Tots els punts del semiplà esquerre de s queden mapats dins del cercle unitat de z (zona d'estabilitat per a posicionar els pols del sistema), mentre que els punts de semiplà dret quedaran a fora del cercle unitat.

A continuació s'indica l'equació de mapatge, que en aquest cas s'aplica de manera directa per a obtenir el disseny discret a partir del disseny original analògic:

$$s = f(z) = \frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \quad H(z) = H_d(s) \Big|_{s=f(z)}$$

3.2.1. Estudi del mapatge entre els plans s i z i en els dominis de la freqüència analògic i discret

A continuació desenvolupem una mica la relació del mapatge anterior per investigar-ne les conseqüències:

$$s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = \frac{2}{T_s} \left(\frac{r e^{j\omega} - 1}{r e^{j\omega} + 1} \right) = \sigma + j\Omega$$

Vegeu també

En l'apartat 1 de l'annex es pot consultar la tècnica de mapatge basada en la invariància impulsional com a extensió a l'estudi bàsic. Es pot apreciar que aquesta tècnica, a diferència del mètode basat en la transformació bilineal, té com a principal inconvenient la impossibilitat d'aconseguir obtenir filtres discrets de tipus passaalt o de banda eliminada, ja que es tracta de filtres els equivalents analògics dels quals són de banda il·limitada.

Desenvolupant la part esquerra de l'expressió anterior en part real i part imaginària s'arriba a les igualtats següents:

$$\sigma = \frac{2}{T_s} \left(\frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} \right) \quad \Omega = \frac{2}{T_s} \left(\frac{2r \sin \omega}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} \right)$$

Podem analitzar els casos següents:

- Si $r < 1 \Rightarrow \sigma < 0$
- Si $r > 1 \Rightarrow \sigma > 0$

Llavors, és cert que el semiplà esquerre de s mapa l'interior del cercle de radi 1 en z i viceversa. Ara estudiem un cas particular, per investigar millor el mapatge que hi ha en el domini freqüencial:

- Cas $r = 1 \Rightarrow \sigma = 0$ i $\Omega = \frac{2}{T_s} \left(\frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega} \right) = \frac{2}{T_s} \tan \left(\frac{\omega}{2} \right)$

o de manera equivalent, també:

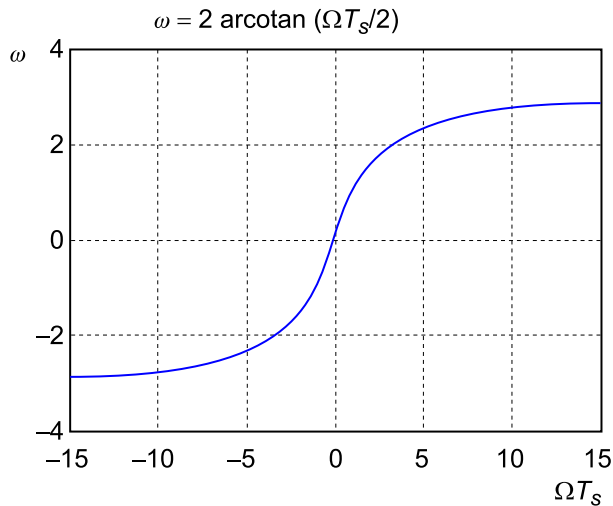
$$\omega = 2 \arctan \left(\frac{T_s \Omega}{2} \right)$$

El mapatge entre les pulsacions dels àmbits analògic i discret és, per tant, un mapatge no lineal que podem representar (vegeu la figura 25), la qual cosa provoca una compactació de tot el rang de possibles pulsacions analògiques Ω en el rang d'un període de la pulsació discreta ω que va de $[-\pi, +\pi]$ (en la figura s'observen dues asymptotes horitzontals en aquests valors de pulsació discreta). Això permet afirmar que la transformació bilineal, a diferència del mètode basat en la invariància impulsional, no provoca aliàsing freqüencial, la qual cosa no limita l'ús de filtres analògics d'amplada de banda infinita, com és el cas dels filtres passaalt o bé de banda eliminada. Es pot apreciar com en aquest mapatge hi ha una zona d'alta compactació a partir sobretot de les pulsacions analògiques $|\Omega| > 3,5/T_s$, mentre que per a valors $|\Omega| < 1/T_s$ el mapatge és aproximadament lineal.

Vegeu també

Podeu veure la invariància impulsional en l'annex.

Figura 25. Mapatge no lineal associat a la transformació bilineal



3.2.2. Elecció del paràmetre T_s i transformació d'especificacions

El valor del paràmetre T_s de la transformació bilineal, malgrat que està relacionat amb una hipotètica freqüència de mostreig és, en realitat, un valor que es pot ajustar de manera directa usant algun dels mètodes següents:

1) Usant una relació entre pulsacions analògica i discreta desitjada. En aquest cas, senzillament s'escull el valor de T_s que satisfà la relació no lineal del mapatge estudiat, és a dir:

$$T_s = \frac{2}{\Omega_0} \tan\left(\frac{\omega_0}{2}\right)$$

en què Ω_0 i ω_0 són les pulsacions analògica i discreta que es volen mapar, respectivament.

2) Partint de les W_R pulsacions discretes especificades en els requisits del filtre discret per a dissenyar ω_i per a $i \in [1, \dots, W_R]$, fixem el paràmetre en un valor positiu arbitrari i no nul (per exemple, $T_s = 1$) a partir del qual obtenim les pulsacions analògiques associades als requisits de disseny del filtre analògic Ω_i (per a $i \in [1, \dots, W_R]$) usant l'equació de transformació:

$$\Omega_i = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_i}{2}\right) \quad 1 \leq i \leq W_R$$

Aquest procés s'anomena *frequency prewarping* (que es pot traduir com a *pre-enrosament de freqüències*).

Tant si s'usa un mètode o l'altre, en tots dos casos cal fer el mapatge de les pulsacions de tall de les especificacions (seran pulsacions associades a inicis o finals de bandes de pas o bé de rebuig, en qualsevol cas) usant l'equació

anterior, de manera que una vegada fet el disseny del filtre analògic prototip, fent el mapatge associat a la transformació bilineal s'obtindrà el filtre discret que compleixi amb els requisits de disseny plantejats.

Exemple

Cal dissenyar un filtre digital passabaix amb una freqüència de tall $\omega_c = 0,2\pi$ (a -3 dB de guany respecte al guany del filtre en $\omega = 0$, que és de 0 dB) a partir d'un filtre analògic també passabaix amb un sol pol.

Partim de la funció de transferència del filtre analògic (que suposadament ens la donen):

$$H_d(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$$

en què Ω_c és la pulsació analògica de tall (de -3 dB/s) del filtre analògic.

A partir del mapatge de freqüències de la transformació bilineal podem expressar:

$$\Omega_c = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \tan(0,1\pi) = \frac{0,65}{T_s}$$

Per tant, podem reescriure la funció de transferència del filtre analògic com segueix:

$$H_d(s) = \frac{0,65/T_s}{s + 0,65/T_s}$$

Apliquem, a continuació, la transformació bilineal, i fem el canvi de variable corresponent:

$$H(z) = H_d\left(s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right) = \frac{0,65/T_s}{\frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 0,65/T_s} = \frac{0,245(1+z^{-1})}{1-0,509z^{-1}}$$

Com es pot apreciar, en haver usat l'equació del mapatge de freqüències de la transformació bilineal per a especificar la freqüència de tall del filtre analògic a partir de l'especificació donada en el domini discret, abans d'aplicar l'equació de mapatge en els dominis de s a z , el paràmetre T_s desapareix, la qual cosa indica que el seu valor és poc rellevant (sempre que aquest no sigui zero) per al procés de disseny en si.

La funció de transferència en el domini freqüencial queda:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0,245(1 + e^{-j\omega})}{1 - 0,509e^{-j\omega}}$$

Es pot comprovar que compleix:

$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 1$$

$$|H(e^{j\omega})|_{\omega=0,2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707,$$

o el que expressat en dB és $|G(\omega)|_{\omega=0,2\pi} = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|_{\omega=0,2\pi} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \simeq -3$

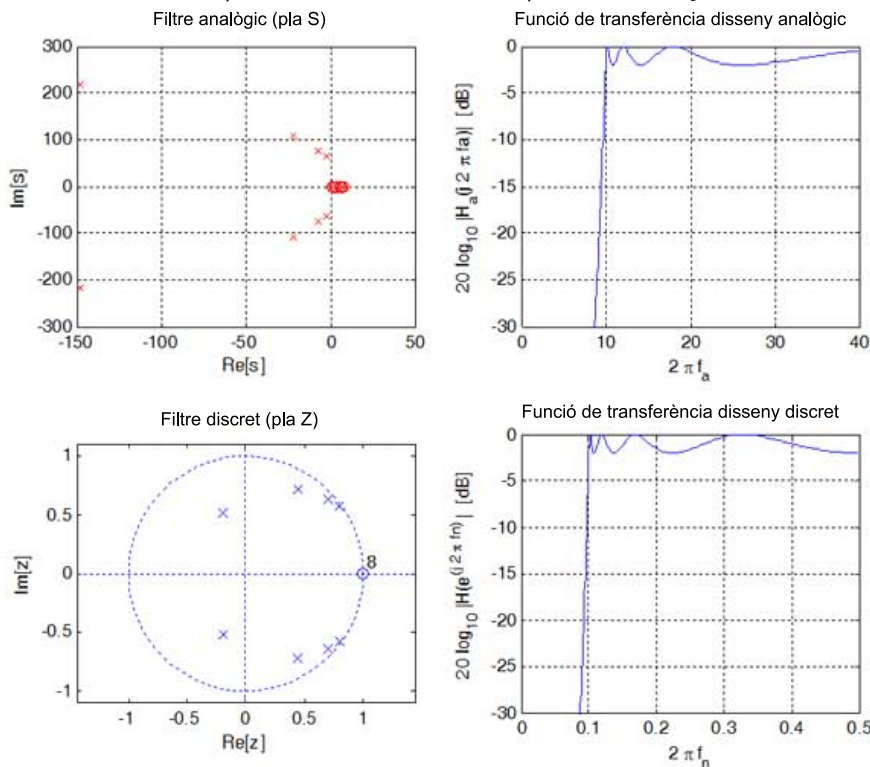
Exemple

Cal dissenyar un filtre digital passaalt de Txeixev de tipus I amb una pulsació de tall $\omega_c = 0,2\pi$ a partir d'un filtre analògic també passaalt i del mateix tipus però amb una pulsació de tall $\Omega_c = 0,2\pi$ rad/s.

En aquest segon exemple veurem únicament les gràfiques de les funcions de transferència, ja que es tracta de filtres encara no estudiats en la teoria. En la figura 26 veiem els diagrames de pols i zeros i també els guanys en dB dels dissenys tant analògic com el disseny discret final obtingut corresponent. Com es pot apreciar, per sobre d'aproximadament la freqüència 10 Hz el filtre analògic (gràfiques de la part superior de la figura) deixa passar senyal amb un guany que és gairebé la unitat i amb un arrissament típic d'aquest tipus de filtres (en aquest cas de 2dB d'amplitud pic a pic, per a poder apreciar aquesta característica d'arrissament que es dona únicament en la banda de pas). D'altra banda, en el disseny discret (gràfiques de la part inferior de la figura 26) s'aprecia com el filtre deixa passar les freqüències normalitzades que es troben en l'interval $f_n = \frac{\omega}{2\pi} \in [0,1,0,5]$, tal com requerien les especificacions de disseny. Per a obtenir aquest disseny, s'ha usat la transformació bilineal, usant com a paràmetre de la transformació el valor següent:

$$T_s = \frac{2}{\Omega_c} \tan(\omega_c) = \frac{2}{20\pi} \tan(0,2\pi) = 0,0103$$

Figura 26. Exemple de disseny d'un filtre passaalt de Txeixev de tipus I usant la transformació bilineal i partint d'un filtre amb ordre 8 i pulsació de tall $\Omega_c = 2\pi \times 10$ rad/s



3.3. Filtrès analògics

En aquest apartat estudiarem els filtres analògics més usuals (filtres de Butterworth i filtres de Txeixev), encara que també hi ha altres tipus de filtres que permeten obtenir dissenys d'ordre menor amb les mateixes especificacions a costa d'obtenir arrissaments en totes dues bandes (de pas i de rebuig).

L'avantatge d'aquests filtres que veurem és que permeten obtenir dissenys amb totes dues bandes sense arrissaments (Butterworth) o bé amb una (Txebixev de tipus I o bé de tipus II).

S'estudiarà únicament el disseny de filtres prototip passabaix, i en apartats següents es veuran les transformacions freqüencials que permeten obtenir dissenys diferents (passaalt, passabanda o bé de banda de rebuig) a partir d'un disseny passabaix. A més, es farà l'estudi de filtres amb guany unitari en les bandes de pas (o també de 0 dB), de manera que l'obtenció d'un filtre amb guany diferent es podrà aconseguir multiplicant la funció de transferència obtinguda pel factor de guany desitjat.

Segons el tipus de filtres estudiat en cada cas, la funció de transferència del filtre $H_d(s)$ s'obté a partir de l'expressió basada en les arrels del seu numerador i denominador (pols p_k^a i zeros z_k^a), normalitzada per a poder expressar el guany G que volem en la banda de pas:

$$H(s) = G \frac{\prod_{k=1}^M (1 - s/z_k^a)}{\prod_{k=1}^N (1 - s/p_k^a)} = G' \frac{\prod_{k=1}^M (z_k^a - s)}{\prod_{k=1}^N (p_k^a - s)}$$

en què el factor de guany és:

$$G' = G \times \frac{\prod_{k=1}^M p_k^a}{\prod_{k=1}^N z_k^a}$$

Com es pot apreciar, el guany de l'expressió anterior a la pulsació 0 (o sigui, $s = j\Omega = j \times 0 = 0$) és igual a G .

S'estudiaran els filtres de Butterworth i de Txebixev de tipus I, i es deixaran els filtres de Txebixev de tipus II per a aspectes d'ampliació de l'estudi.

3.3.1. Filtre de Butterworth

El filtre de Butterworth és un filtre que posseeix una resposta freqüencial en mòdul monòtona decreixent (sense cap tipus d'arrissament en cap de les bandes), i que es defineix com un filtre de tot pols. La seva definició es dona a partir de la resposta en freqüència en mòdul:

$$|H_d(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (\Omega/\Omega_p)^{2N}}$$

en què Ω_c és la pulsació de tall a -3dB , Ω_p la pulsació límit de la banda de rebuig, en què el guany del filtre en dB és de $-20\log_{10}(1+\epsilon^2)$, i N l'ordre del filtre (nombre de pols). La relació entre aquests paràmetres s'obté igualant les expressions anteriors ($\Omega_p = (\epsilon)^{\frac{1}{N}} \Omega_c$) i permet especificar freqüències de tall diferents de la típica.

Usant la relació següent associada als filtres amb resposta impulsional real, que tenen resposta amb simetria complexa conjugada en el domini freqüencial:

$$H_a(s)H_a(-s)|_{s=j\Omega} = H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) = |H_a(j\Omega)|^2$$

de manera combinada amb la definició anterior, obtenim:

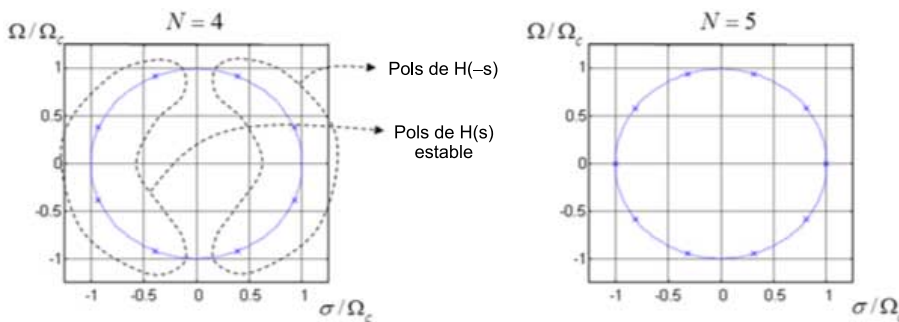
$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1+(-s^2/\Omega_c^2)^N}$$

A partir de l'expressió anterior analitzem els pols de $H_a(s)H_a(-s)$ igualant a zero el denominador, trobant arrels complexes, i finalment associem els pols estables (amb part real negativa) a $H_a(s)$, i els inestables (amb part real positiva) a $H_a(-s)$:

$$\frac{-s^2}{\Omega_c^2} = (-1)^{1/N} = e^{j(2k+1)\frac{\pi}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$p_k^a = \begin{cases} +\Omega_c e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j(2k+1)\frac{\pi}{2N}} & k = 0, 1, \dots, N-1 & \text{(pols inestables de } H_a(-s)) \\ -\Omega_c e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j(2k+1)\frac{\pi}{2N}} & k = 0, 1, \dots, N-1 & \text{(pols estables de } H_a(s)) \end{cases}$$

Figura 27. Exemple de diagrama de pols i zeros d'un filtre de Butterworth d'ordre 4 (esquerra) i 5 (dreta)



En la figura 27 es pot apreciar un parell d'exemples de distribució dels pols (creus en la figura) d'un filtre de Butterworth per a ordres 4 i 5, respectivament, dels quals únicament els situats en el semiplà esquerre són els pols de $H_a(s)$. S'aprecia que en tots dos casos la distribució segueix una forma circular de radi igual a la pulsació de tall Ω_c amb fases equidistants π/N rad.

Nota

Encara que en general es denomina *pulsació de tall* aquella en què el mòdul de la funció de transferència decau 3 dB per sota del guany que el filtre té en la banda de pas (que delimita la frontera d'aquesta banda), veurem com també es defineixen freqüències de tall associades a guanys diferents de 3 dB (per exemple, que delimiten les bandes de rebuig).

Pendent de caiguda del filtre

Donada l'equació que defineix la resposta freqüencial del filtre en mòdul es pot observar que per a pulsacions molt més petites que Ω_c aquest es pot aproximar per un guany constant i igual a 1. En canvi, per a $\Omega \gg \Omega_c$ el mòdul es pot aproximar per:

$$|H_d(j\Omega)|^2 \approx \frac{1}{(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

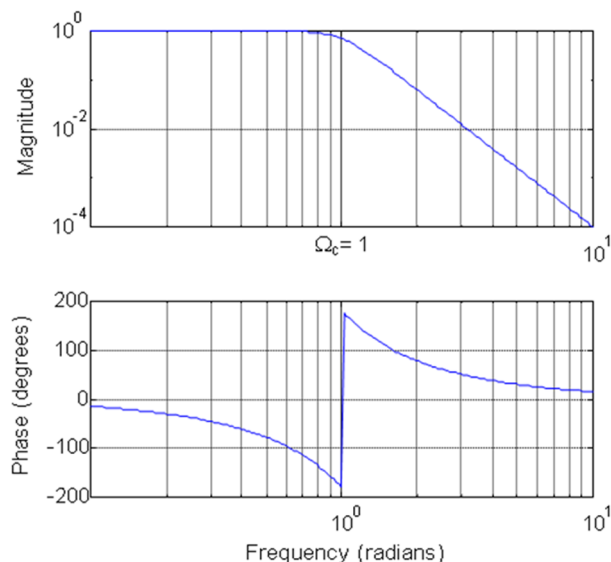
D'aquesta manera, si passem el guany a una representació logarítmica en dB:

$$G_d(\Omega) = 10 \log_{10} |H_d(j\Omega)|^2 \approx 10 \log_{10} \left(\frac{\Omega_c}{\Omega} \right)^{2N} = 20N \log_{10}(\Omega_c) - 20N \log_{10}(\Omega)$$

És a dir, que la representació del mòdul del filtre en el domini freqüencial es pot aproximar per dues asímptotes, una horitzontal de valor 1 per a $\Omega \ll \Omega_c$, i una altra d'obliqua amb pendent $-20N$ dB per dècada⁴ per a una representació en eixos de freqüència logarítmics. En la figura 28 es pot observar un exemple de filtre de Butterworth passabaix amb pulsació de tall $\Omega_c = 1$ rad i d'ordre $N = 4$. Es pot apreciar que en la representació del mòdul (figura superior) en dB i eixos de freqüència logarítmics la forma es pot aproximar per dos trams de recta, tal com s'ha explicat, i el segon tram té un pendent de -80 dB per dècada. Com es pot apreciar, com més ordre del filtre, més gran serà també el rebuig que aquest presenta en la banda de rebuig.

⁽⁴⁾ Recordeu que una dècada es correspon amb l'interval de freqüències en què la freqüència final és 10 vegades la freqüència inicial.

Figura 28. Resposta freqüencial (mòdul i fase) d'un filtre de Butterworth d'ordre $N = 4$ i pulsació de tall $\Omega_c = 1$ rad.



Disseny de l'ordre del filtre

Les especificacions del filtre permeten fer el dimensionament correcte de l'ordre del filtre, això és, el nombre de pols que aquest té. L'objectiu és, en general, obtenir un filtre de mínim ordre que compleixi amb els requisits de disseny, amb la qual cosa aquest serà també un disseny de mínima complexitat, la qual cosa després de la traducció al món discret comportarà un filtre amb la mínima complexitat computacional.

La condició de disseny que permet obtenir l'ordre del filtre s'associa a un màxim guany d'aquest $20\log_2(\delta_2)$ dB per sobre d'una determinada pulsació denominada Ω_s , que en general s'associa al límit inferior de la banda de rebuig. Imposant aquesta condició sobre el mòdul de la resposta freqüencial i aplicant la funció logaritme en un determinat pas del desenvolupament, arribem a:

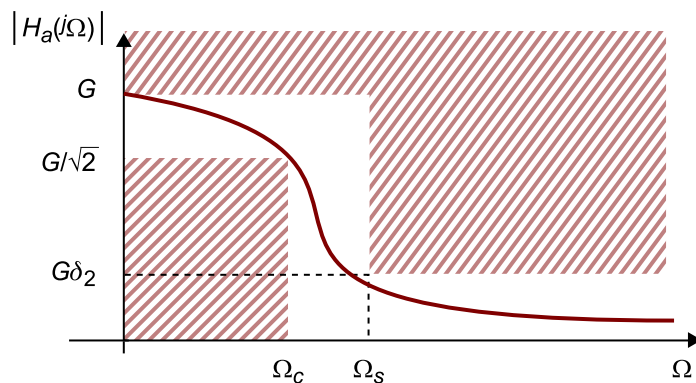
$$\frac{1}{1+(\Omega_s/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2(\Omega_s/\Omega_p)^{2N}} \leq \delta_2^2$$

$$N \geq \frac{\log\left[\frac{1}{\delta_2^2} - 1\right]}{2\log[\Omega_s/\Omega_c]} = \frac{\log[\delta/\varepsilon]}{\log[\Omega_s/\Omega_p]}$$

en què tenim $\delta = \sqrt{1/\delta_2^2 - 1}$ i $\varepsilon = \sqrt{1 - \delta_1^2}$.

Podem, doncs, veure com l'equació anterior permet calcular l'ordre mínim que satisfà les especificacions de disseny, les quals s'expressen gràficament en la figura 29.

Figura 29. Exemple d'especificacions per al disseny del filtre de Butterworth expressades de manera gràfica. La zona ratllada es correspon amb zona de pas prohibit.



En aquest cas, les especificacions incorporen la possibilitat de tenir un guany en la banda de pas diferent d'1 (en lineal, o també 0 dB), de manera que el paràmetre G és un paràmetre de guany que s'aplicarà una vegada s'hagi dissenyat el filtre amb guany 1. Es pot apreciar com la banda de transició situada entre les pulsacions final de la banda de pas (Ω_c) i inicial de la banda de rebuig (Ω_s) marcarà l'ordre del filtre necessari, també clarament dependent del paràmetre de rebuig δ_2 .

Es pot apreciar que, en la pràctica, la no-idealitat dels filtres representa l'acceptació d'una certa banda intermèdia, denominada *banda de transició*, on el guany del filtre decau fins a arribar a la condició de rebuig mínim que permet obtenir l'ordre adequat d'aquest.

3.3.2. Filtre de Txebixev de tipus I

Els filtres de Txebixev deuen el seu nom al matemàtic Pafnuti Txebixev, matemàtic d'origen rus que va idear els polinomis de Txebixev, els quals són la base d'aquest tipus de filtres. Es diferencien dels filtres de Butterworth pel fet que, a diferència d'aquests, els filtres de Txebixev posseeixen un arrissament⁵ d'amplitud constant en bandes de pas o bé en les bandes de rebuig. Aquesta característica fa també que els filtres de Txebixev no tinguin una funció de transferència monòtona decreixent, com és el cas dels filtres de Butterworth, i mentre que aquests són filtres de tot pols, els filtres de Txebixev (de tipus II) també contenen zeros. No obstant això, un avantatge dels filtres de Txebixev enfront dels filtres de Butterworth és la possibilitat d'obtenir dissenys d'ordre menor amb igualtat d'especificacions de disseny. En aquest cas, l'ordre del filtre es defineix com el màxim nombre de pols i de zeros.

⁽⁵⁾S'entén com a arrissament la característica d'un senyal quan aquest oscil·la entorn d'un valor mitjà.

El filtre de Txebixev de tipus I es defineix amb una resposta en freqüència (en mòdul) com segueix:

$$|H_d(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)}$$

en què Ω_p és la pulsació final de la banda de pas en rad/s, ε un paràmetre associat a l'arrissament de la banda de pas, i $T_N(x)$ el polinomi de Txebixev d'ordre N definit com segueix:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N\cos^{-1}(x)) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N\cosh^{-1}(x)) & |x| > 1 \end{cases}$$

Els polinomis de Txebixev posseeixen la característica d'estar fitats a l'interval $[-1, +1]$ per a valors de $x \in [-1, +1]$, mentre que fora d'aquest interval el valor creix o bé decreix de manera progressiva, tal com es pot apreciar en la figura 30. Com es pot apreciar, cada polinomi posseeix tants passos per zero (o arrels) com ordre té. Una altra característica interessant és que, malgrat la definició anterior, aquests es poden generar també a partir d'una equació recursiva com segueix:

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x) \quad N = 1, 2, \dots$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

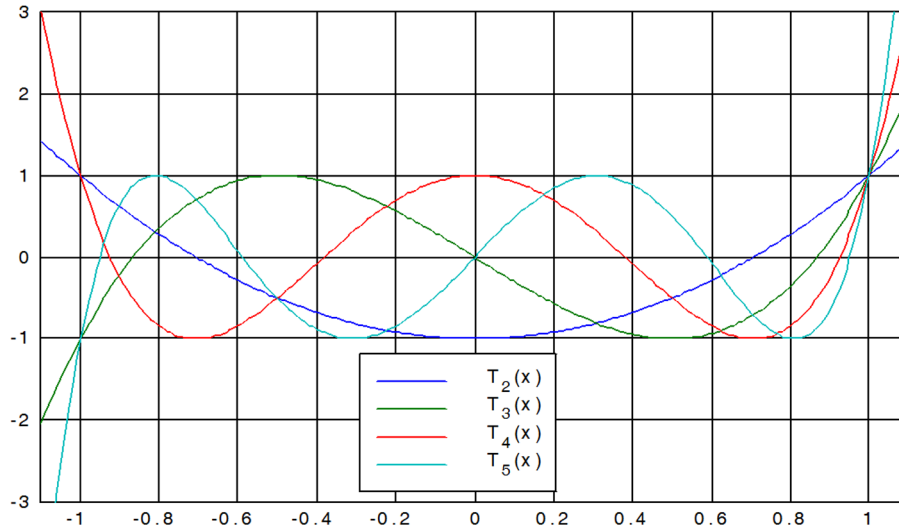
$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad \text{etc.}$$

La característica de posseir una cota dins de l'interval de $x \in [-1, +1]$ permet obtenir filtres amb arrissaments constants dins de bandes de pas (Txebixev de tipus I), dins de bandes de rebuig (Txebixev de tipus II) o bé dins de tots dos tipus de bandes (filtres el·líptics).

Vegeu també

Els filtres el·líptics no s'estudiaran en aquest mòdul.

Figura 30. Polinomis de Txebixev d'ordres 2 a 5



Com es pot observar en l'expressió del mòdul al quadrat de la funció de transferència del filtre de Txebixev de tipus I d'ordre N , aquest posseïx el polinomi de Txebixev d'ordre N en el seu denominador, de manera que per a pulsacions dins de l'interval $\Omega \in [-\Omega_p, +\Omega_p]$ la variable del polinomi complex que $x = \Omega/\Omega_p \in [-1, +1]$. És a dir, que dins de la banda de pas, el guany del filtre es troba dins del marge $G(\Omega) = 10 \log_{10} |H_d(j\Omega)|^2 \in [10 \log_{10}(1/(1+\varepsilon^2)), 10 \log_{10} 1] = [10 \log_{10}(1/(1+\varepsilon^2)), 0] \text{ dB}$. El valor mínim d'aquest interval (és un valor negatiu) es deu al cas en què el polinomi de Txebixev té un valor igual a $+1$ o bé -1 , mentre que el límit superior és el cas en el qual el polinomi retorna un valor 0. L'arrissament del filtre, expressat com el quocient del valor màxim entre el mínim del guany en lineal, es denomina amb el paràmetre $\delta_1 = \sqrt{1+\varepsilon^2}$. Quan la pulsació es troba fora d'aquest interval, el polinomi de Txebixev tendeix a valors creixents o bé decreixents, de manera que el seu mòdul tendeix a infinit. D'aquesta manera, la funció de transferència tindrà una tendència envers un guany molt petit, la qual cosa denota una característica pròpia de la banda de rebuig.

El filtre de Txebixev de tipus I és un filtre també de tot pols, atès que l'expressió del mòdul de la funció de transferència està formada per un polinomi de Txebixev en el denominador. Els pols (p_k^a) del filtre es troben dins del pla s sobre una el·lipse de semieixos r_1 i r_2 , els valors de la qual es poden expressar en funció de les especificacions (Ω_p , ε i N):

$$r_1 = \Omega_p \frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \quad ; \quad r_2 = \Omega_p \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} \quad ; \quad \beta = \left[\frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1}{\varepsilon} \right]^{1/N}$$

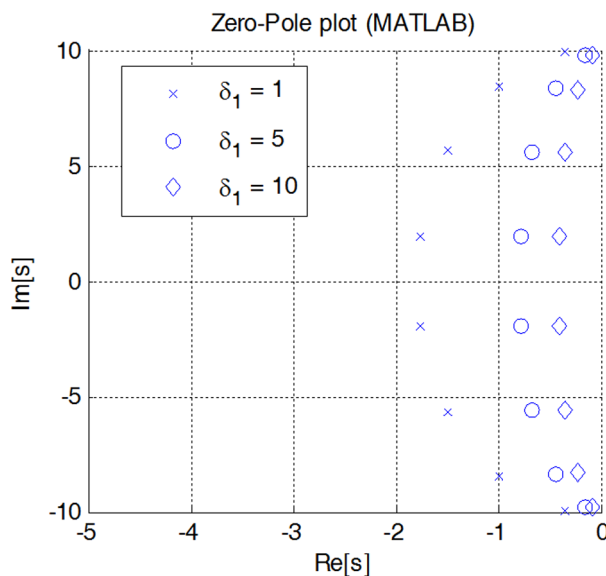
La posició exacta de cadascun dels N pols del filtre sobre el pla s es pot expressar mitjançant les expressions matemàtiques següents:

$$\begin{aligned} p_k^a &= x_k + jy_k \\ x_k &= r_2 \cos \phi_k \\ y_k &= jr_1 \sin \phi_k \end{aligned}$$

$$\phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

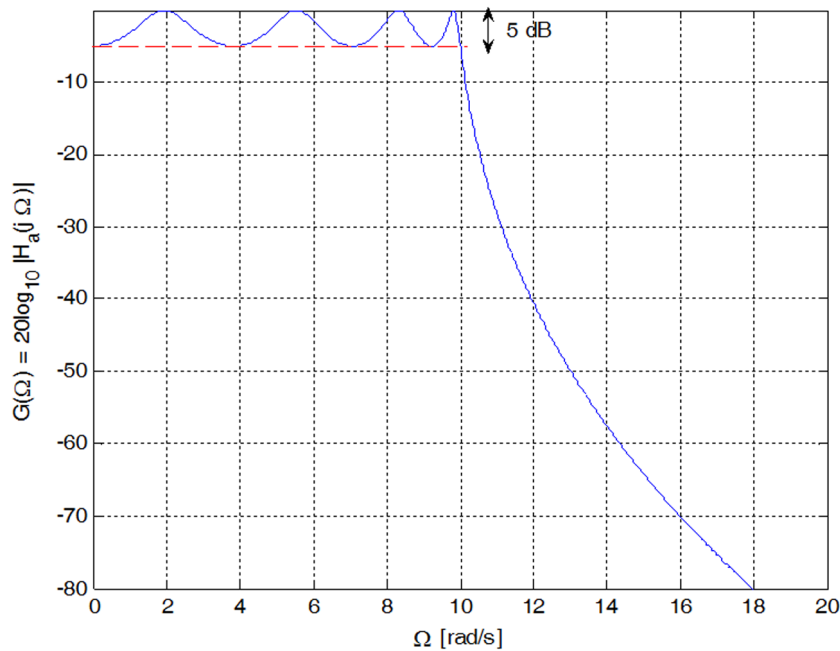
En la figura 31 es pot observar un exemple de posicionament dels pols del filtre de Txebixev de tipus I per a tres valors del paràmetre d'arissament, i per a un mateix ordre i freqüència de tall del filtre. Es pot apreciar com els pols es troben posicionats sobre una el·lipse, els semieixos de la qual varien depenent del factor d'arissament (com més arissament, més desproporció entre aquests eixos).

Figura 31. Exemple de posicionament dels pols (creus) per a tres filtres de Txebixev de tipus I amb paràmetres $N = 8$; $\Omega_p = 10$ rad/s i arissaments δ_1 d'1, 5 i 10 dB.



En la figura 32 es pot veure la funció de transferència d'un filtre de Txebixev de tipus I amb un paràmetre d'arissament de 5 dB i freqüència de tall de 10 rad/s. S'aprecia clarament la característica d'aquest tipus de filtres, amb arissament d'amplitud màxima constant en la banda de pas i decaïment constant en la banda de rebuig.

Figura 32. Exemple de funció de transferència (guany en dB) d'un filtre de Txeixev de tipus I amb paràmetres $N = 8$; $\Omega_p = 10$ rad/s i arriament en la banda de pas



Disseny de l'ordre del filtre

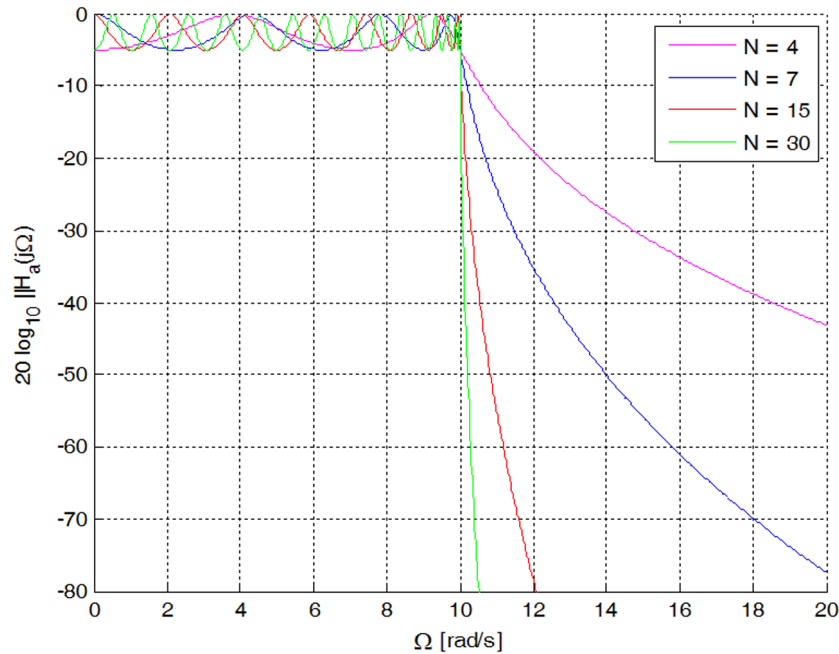
Atès que en l'interval $\Omega \in [-\Omega_p, +\Omega_p]$ el guany del filtre posseeix la característica d'oscil·lar entorn dels valors de $10 \log_{10}(1/(1+\epsilon^2))$ dB i de 0 dB, el paràmetre ϵ és un paràmetre associat a l'arriament del guany en la banda de pas. Això permet que les restriccions de disseny en permetin el càlcul de manera directa en especificar l'arriament màxim desitjat en la banda de pas del filtre (màxima variació del guany). D'altra banda, la pulsació de tall Ω_p és una pulsació associada al final de la banda de pas, però a diferència del filtre de Butterworth, en aquest cas la caiguda del guany a aquesta freqüència no serà sempre 3 dB, ja que el guany del filtre en aquest punt dependrà justament de l'arriament màxim desitjat.

L'ordre del filtre, no obstant això, influeix, tal com succeïa en el filtre de Butterworth, en el pendent de caiguda del filtre més enllà de la pulsació límit de la banda de pas (Ω_p). Com es pot apreciar en l'exemple de la figura 33, l'ordre del filtre afecta clarament aquesta caiguda del guany, encara que també la freqüència de l'arriament en la banda de pas, i en aquest segon cas és un factor menys rellevant amb vista al disseny. Per aquest motiu, l'ordre del filtre es pot fixar imposant la **condició de rebuig** següent, tal com succeïa en el filtre de Butterworth:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)} \leq \delta_2^2 \text{ per a } \Omega \geq \Omega_s$$

en què Ω_s és la pulsació que delimita l'inici de la banda de rebuig.

Figura 33. Exemples de funció de transferència d'un filtre de Txebeixev de tipus I amb paràmetres del filtre $\Omega_p = 10$ rad/s, arriçament en la banda de pas de 5 dB i per a 4 ordres diferents (vegeu la llegenda de la figura)



Usant les expressions de la definició dels polinomis de Txebeixev per al rang de la variable x en què $|x| > 1$, es pot arribar a l'expressió següent de l'ordre mínim del filtre que satisfà la condició de rebuig exposada anteriorment:

$$N \geq \frac{\log\left[\frac{\sqrt{1-\delta_2^2} + \sqrt{1-\delta_2^2(1+\epsilon^2)}}{\epsilon\delta_2}\right]}{\log\left[\frac{\cosh^{-1}(\delta/\epsilon)}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)}\right]} = \frac{\cosh^{-1}(\delta/\epsilon)}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)}$$

en què $\delta = \sqrt{1/\delta_2^2 - 1}$ i $\delta_1 = \sqrt{1+\epsilon^2}$.

Per exemple, a la vista dels exemples de la figura 33, es pot apreciar que el filtre de Txebeixev de tipus I d'ordre mínim amb arriçament en la banda de pas de 5 dB i pulsació de tall 10 rad/s que té una atenuació mínima de 35 dB per sobre de la pulsació de 12 rad/s és igual a 7. En aquest cas les especificacions de disseny són:

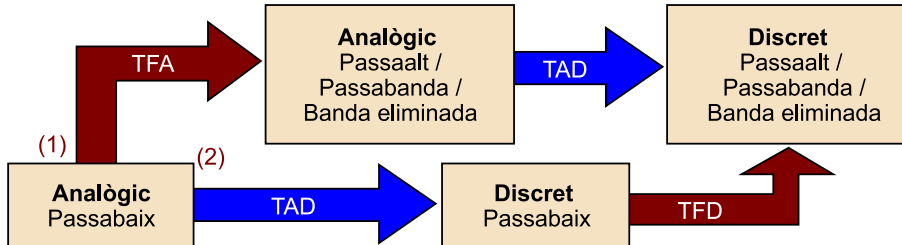
$$\Omega_p = 10 \quad \Omega_s = 12 \quad \delta_1 = 10^{\frac{5}{20}} = 1,7783 \quad \delta_2 = 10^{-\frac{35}{20}} = 0,0178$$

3.4. Transformacions de freqüència

Repassats els filtres de Butterworth i de Txebeixev, ara veurem com a partir d'un filtre analògic passabaix podem obtenir un filtre digital que no sigui passabaix, o sigui, passaalt, passabanda o bé de banda eliminada.

En el cas que el filtre digital desitjat sigui passabaix només cal aplicar la transformació del domini analògic al domini discret (per exemple, transformació bilineal).

Figura 34. Diagrama de blocs associat als dos mètodes diferents per a obtenir un filtre digital desitjat a partir d'un filtre passabaix analògic utilitzant transformacions d'analògic a discret (TAD) i transformacions en freqüència en el domini analògic (mètode (1), TFA) o bé transformacions en freqüència en el domini discret (mètode (2), TFD).



En la figura 34 podem veure representats en forma de diagrama de blocs els dos camins o mètodes possibles que permeten aconseguir l'objectiu proposat. En primer lloc, el camí superior (1) es basa a aplicar al filtre passabaix analògic original una transformació en freqüència en el domini analògic (TFA) per a obtenir un filtre analògic diferent (passaalt, passabanda o de banda eliminada), per a aplicar després la transformació d'analògic a discret escollida. En segon lloc, el camí inferior (2) es basa a fer primer la conversió de filtre analògic a filtre discret, per a aplicar després la transformació en freqüència en el domini discret (TFD) que ens permeti obtenir el disseny que volem.

Cal assenyalar que, si s'escull el mètode de transformació de filtres analògics en filtres digitals basat en la invariància impulsional, no serà possible fer el procés de conversió (1) de la figura 34 si el filtre final desitjat és un passaalt o de banda eliminada, atès que aquest mètode requereix que el filtre sigui un filtre d'amplada de banda finita, com es pot veure a l'annex.

3.4.1. Transformacions en freqüència en el domini discret

Si en lloc de fer la transformació en freqüència del filtre en el domini analògic (amb la transformada de Laplace) aquesta es fa una vegada el filtre ja ha estat transformat al domini digital (camí (2) de la figura 34), s'han d'aplicar unes equacions de mapatge que bàsicament substitueixen la variable z per una funció de si mateixa. En aquest cas, el mapatge es pot escriure com segueix:

$$z^{-1} \rightarrow g(z^{-1})$$

És a dir, la funció de transferència del nou filtre serà $H(z^{-1}) = H(g(z^{-1}))$, i $H(z^{-1})$ és la funció de transferència del filtre discret passabaix original.

La funció de mapatge ha de complir les restriccions següents perquè funcioni de manera correcta:

Vegeu també

Podeu veure el mètode de transformació de filtres analògics en filtres digitals basat en la invariància impulsional en l'apartat 1 de l'annex.

En l'apartat següent estudiarem el mètode de transformació en freqüència aplicat directament sobre el domini discret (TFD) i es deixarà el mètode TFA com a aspecte d'ampliació de coneixements de l'apartat 3 de l'annex.

- el mapatge ha de fer correspondre punts dins del cercle de radi 1 dins de si mateix (condició d'estabilitat, per als pols del filtre)
- els punts sobre el cercle unitat mateix han d'arribar també sobre el cercle mateix (correspondència en freqüència).

Les funcions de mapatge permeten obtenir, a partir d'un filtre discret passa-baix, un filtre discret passaalt, passabanda o bé de banda eliminada.

Transformació de filtre discret en freqüència 1: d'LP a LP

La funció de transformació de la variable z per a la transformació d'un filtre discret passabaix amb pulsació de tall ω_p a un altre filtre discret passabaix amb pulsació de tall ω_p' és la següent:

$$g(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad a = \frac{\sin[(\omega_p - \omega_p')/2]}{\sin[(\omega_p + \omega_p')/2]}$$

Analitzem aquesta transformació detingudament, desglossant mòdul i fase, per als punts associats a la resposta freqüencial (és a dir, per a $z = e^{j\omega}$):

$$g(e^{-j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{((\cos(\omega) - a) - j\sin(\omega))}{(1 - a\cos(\omega)) + j\sin(\omega)}$$

$$|g(e^{-j\omega})| = \frac{\sqrt{(\cos(\omega) - a)^2 + \sin^2(\omega)}}{\sqrt{(1 - a\cos(\omega))^2 + a^2\sin^2(\omega)}} = \frac{\sqrt{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}}{\sqrt{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}} = 1$$

Com es pot apreciar, la funció de mapatge proposada compleix la condició de mapar punts del cercle unitat en el cercle unitat mateix, la qual cosa es correspon amb la segona condició (el mòdul de la funció g és igual a la unitat). Per a conèixer el detall de com es mapa la transformació freqüència, hem d'analitzar la fase amb més detall. Tenint en compte que el mapatge és un canvi de variable senzill, la fase original (o pulsació), ω , serà el resultat canviat de signe de la funció de mapatge en funció de la fase (o pulsació) del filtre final, ω' , és a dir:

$$g(z^{-1}) = g(e^{-j\omega}) = z^{-1} = e^{-j\omega}$$

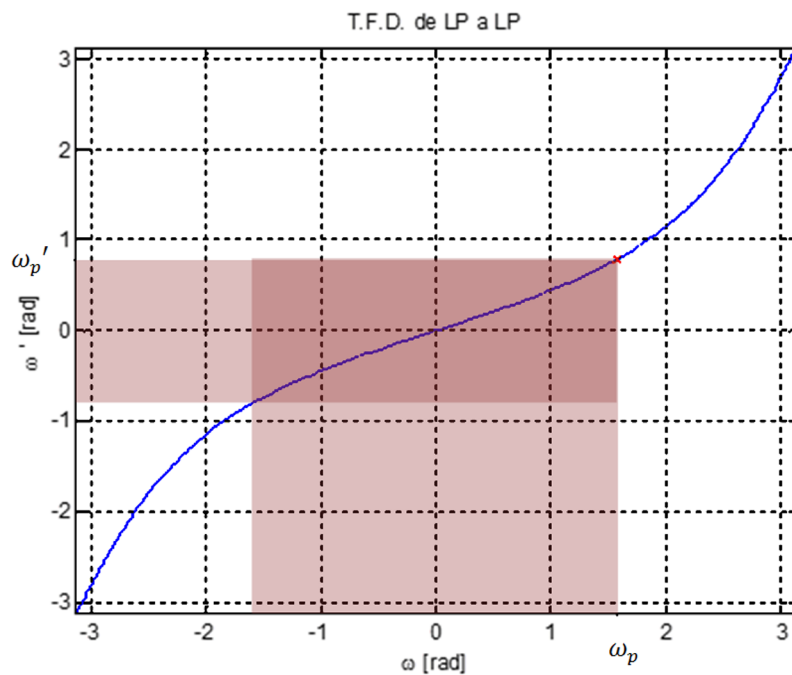
Per tant:

$$\begin{aligned} \omega &= -\text{Arg}\{g(e^{-j\omega})\} = -\text{Arg}\left\{\frac{e^{-j\omega} - a}{1 - ae^{-j\omega}}\right\} = -\text{Arg}\left\{\frac{(e^{-j\omega} - a)(1 - ae^{+j\omega})}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - ae^{+j\omega})}\right\} = \\ &= -\text{Arg}\left\{\frac{(e^{-j\omega} - a)(1 - ae^{+j\omega})}{1 + a^2 - 2a\cos(\omega)}\right\} - \text{Arg}\left\{\frac{(-2a + (a^2 + 1)\cos(\omega)) + j(a^2 - 1)\sin(\omega)}{1 + a^2 - 2a\cos(\omega)}\right\} = \\ &= -\text{Arg}\left\{\frac{x + jy}{K}\right\} = \begin{cases} -\text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) & x \geq 0 \\ -(\pi + \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi - \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) & x \geq 0 \\ (\pi - \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)) & x < 0 \end{cases} = q(\omega) \end{aligned}$$

Cal tenir en compte que en el desenvolupament s'ha tingut en compte la resolució de l'ambigüitat entre quadrants a partir del signe de la part real, i que $x = -2a + (a^2 + 1)\cos(\omega)$ i $y = (a^2 - 1)\sin(\omega)$.

Si dibuixem la funció $\omega = q(\omega)$, però invertint els eixos cartesianes per observar ω en funció de ω (vegeu la figura 35), podem veure com la funció de mapatge aconseguïa fer correspondre la freqüència de tall ω_p original sobre la freqüència de tall final ω_p' , per mitjà d'una expansió d'una part del marge freqüencial (en aquest exemple, aquesta expansió es produeix en el marge d'altres freqüències, en reduir la freqüència de tall del filtre, i aconseguir així un filtre més selectiu) i una compressió de la resta de freqüències (en aquest cas, de les baixes freqüències). En tractar-se d'una funció monòtona creixent, es mapa baixa freqüència en baixa freqüència (entorn de $\omega = 0$) i alta freqüència en alta freqüència (entorn de $\omega = \pi$).

Figura 35. Mapatge de freqüències de la TFD del tipus passabaix a passabaix



En la figura anterior s'observa el mapatge de la banda de pas del filtre com una zona ombrada.

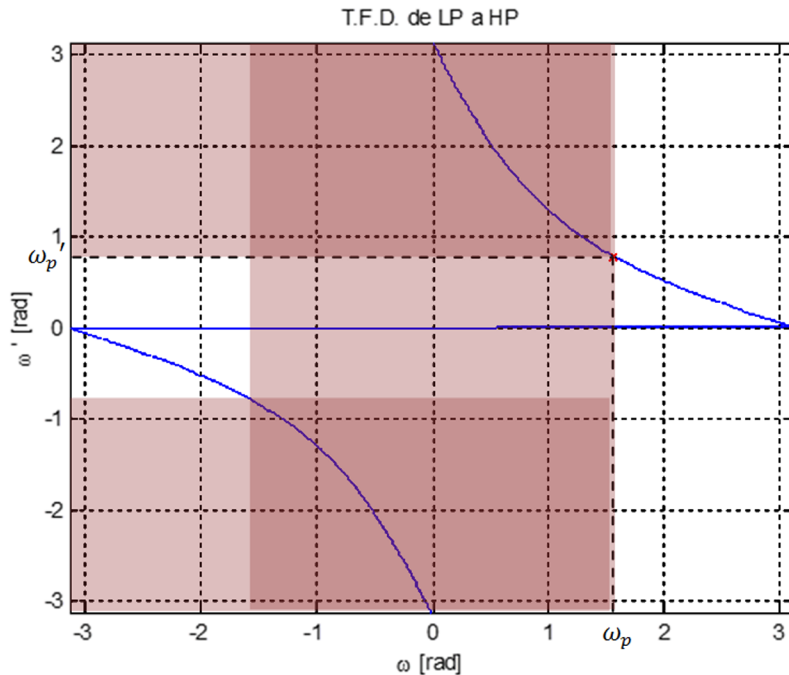
Transformació de filtre discret en freqüència 2: d'LP a HP

La funció de transformació de la variable z per a la transformació d'un filtre discret passabaix amb pulsació de tall ω_p en un filtre discret passaalt amb pulsació de tall ω_p' és la següent:

$$g(z^{-1}) = -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}} \quad a = -\frac{\cos[(\omega_p - \omega_p')/2]}{\cos[(\omega_p + \omega_p')/2]}$$

En comptes de fer el mateix procés que hem vist en la conversió de passabaix a passabaix, només es mostra la funció de mapatge resultant de l'aplicació. Com es pot observar en la figura 36, en aquest cas es tracta d'una funció decreixent, la qual cosa provoca un gir de les bandes de pas, i aquestes estan situades en l'alta freqüència discreta (entorn de $\omega = \pi$) en lloc de la seva ubicació original (en $\omega = 0$). La banda de pas (zona ombrejada), que originalment és única en el filtre passabaix (interval $-\omega_p \leq \omega \leq \omega_p$), queda desdoblada en dues (interval $-\pi \leq \omega \leq -\omega_p$ i interval $\omega_p \leq \omega \leq +\pi$).

Figura 36. Mapatge de freqüències de la TFD del tipus passabaix a passaalt



Transformació de filtre discret en freqüència 3: d'LP a BP

La funció de transformació d'un filtre discret passabaix amb pulsació de tall ω_p en un filtre discret passabanda amb pulsació de tall inferior ω_l i pulsació de tall superior ω_u és:

$$g(z^{-1}) = -\frac{z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1}$$

$$a_1 = -2\alpha K / (K + 1)$$

$$a_2 = (K - 1) / (K + 1)$$

$$\alpha = \frac{\cos[(\omega_u + \omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u - \omega_l)/2]}$$

$$K = \tan(\omega_p/2) / \tan((\omega_u - \omega_l)/2)$$

Transformació de filtre discret en freqüència 4: d'LP a BS

La funció de transformació d'un filtre discret passabaix amb pulsació de tall ω_p en un filtre discret de banda eliminada amb pulsació de tall inferior ω_l i pulsació de tall superior ω_u és:

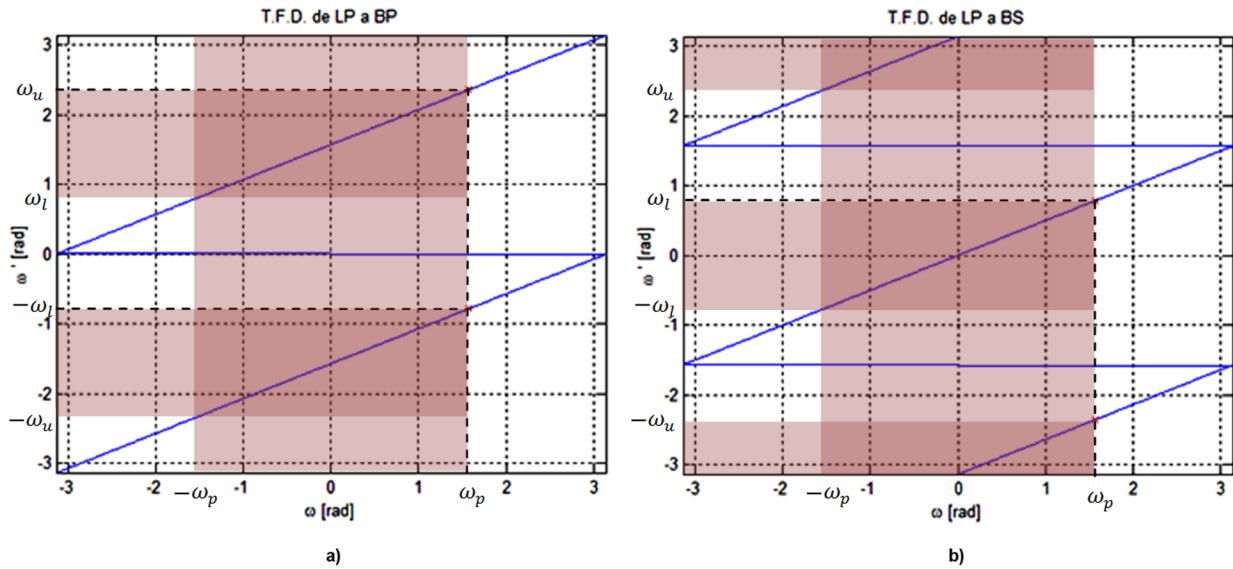
$$g(z^{-1}) = \frac{z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1} \quad \begin{aligned} a_1 &= -2\alpha / (K + 1) \\ a_2 &= (1 - K) / (K + 1) \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\cos[(\omega_l + \omega_u)/2]}{\cos[(\omega_l - \omega_u)/2]}$$

$$K = \tan(\omega_p/2) \cdot \tan((\omega_u - \omega_l)/2)$$

En la figura 37 es pot observar el tipus de mapatge de freqüències de les transformacions freqüèncials de prototips discrets passabaix a prototips passabanda (a) i de banda eliminada (b). En el primer cas (LP a BP), es pot apreciar que la banda de pas centrada en la baixa freqüència queda desdoblada en dues bandes freqüèncials, una en les freqüències positives i una altra en les freqüències negatives. En canvi, en el segon (LP a BS), la banda de pas es desdobra en tres en el marge que va de $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

Figura 37. Mapatge de freqüències de la TFD del tipus passabaix a passabanda (a) i del tipus passabaix a banda eliminada (b)



Activitats

1) Dissenyeu un filtre passabanda amb guany 0 dB i amb freqüències de tall $\Omega_l = 1000\pi \text{ rad/s}$ i $\Omega_h = 5000\pi \text{ rad/s}$, tenint en compte una freqüència de mostreig de $f_s = 10 \text{ KHz}$ i utilitzant el disseny de Tchebixev de tipus I. L'arrissament en la banda de pas no ha de superar 1 dB. L'ordre del filtre s'ha de calcular tal que el prototip passabaix utilitzat tingui un guany de -22 dB a $\Omega_s = 2\Omega_p$. Cal escollir durant el disseny (del mateix prototip passabaix) una freqüència final de la banda de pas de $\Omega_p = 100\pi \text{ rad/s}$. Utilitzeu la transformació bilineal per a passar d'analògic a discret, i feu la conversió de prototip passabaix a passabanda també en el domini discret.

Solucionari

1) Per a determinar l'ordre del filtre, comencem per trobar la constant ε amb l'arrissament en la banda de pas:

$$\delta_1 \text{ dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{1/\sqrt{1+\varepsilon^2}} \right) = 10 \log_{10} (1+\varepsilon^2) \Rightarrow \varepsilon \sqrt{10^{\delta_1 \text{ dB}/10} - 1} = \sqrt{10^{1/10} - 1} = 0,5088$$

L'atenuació en $\Omega = \Omega_s$ és de:

$$-22 = 20 \log_{10} \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = 10^{-\frac{22}{20}} = 0,0794$$

Tenint en compte els càlculs anteriors i que $\Omega_s = 2\Omega_p$, l'ordre del filtre és:

$$N = \frac{\log_{10} \left[\left(\sqrt{1-\delta_2^2} + \sqrt{1-\delta_2^2(1+\varepsilon^2)} \right) / (\varepsilon \delta_2) \right]}{\log_{10} \left[(\Omega_s/\Omega_p) + \sqrt{(\Omega_s/\Omega_p)^2 - 1} \right]} = \dots = 2,9599 \Rightarrow N = 3$$

Per a calcular els pols, calculem primer les constants β , r_1 i r_2 , tenint en compte els càlculs previstos i que $\Omega_p = 100\pi$ rad/s:

$$\begin{aligned} \beta &= \left[\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}+1}{\varepsilon} \right]^{\frac{1}{N}} = \dots = 1,6096 \\ r_1 &= \Omega_p \frac{\beta^2+1}{2\beta} = \dots = 350,4256 \\ r_2 &= \Omega_p \frac{\beta^2-1}{2\beta} = \dots = 155,2483 \end{aligned}$$

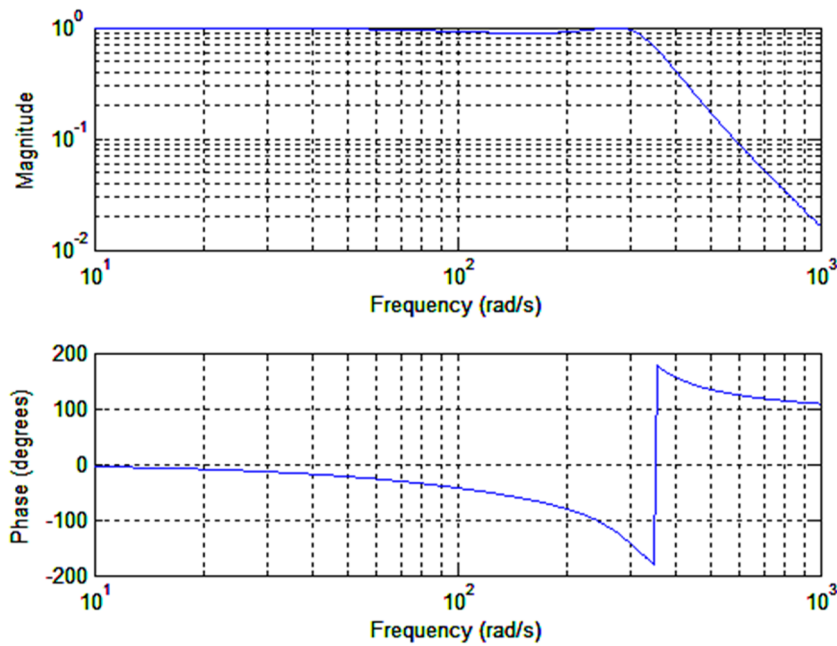
A continuació, determinem el valor dels 3 pols del filtre analògic passabaix:

$$\begin{aligned} p_k &= r_2 \cos \phi_k + jr_1 \sin \phi_k \quad \phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N} \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ \Rightarrow p_0 &= 313,25e^{j1,8212} \quad p_1 = 155,25e^{j\pi} \quad p_2 = 313,25e^{-j1,8212} \end{aligned}$$

Per tant, la funció de transferència del filtre analògic passabaix és:

$$\begin{aligned} H_I p(s) &= \frac{313,25 \cdot 10^{j1,8212} \cdot 155,25 \cdot 10^{j\pi} \cdot 313,25 \cdot 10^{-j1,8212}}{(313,25 \cdot 10^{j1,8212} - s)(155,25 \cdot 10^{j\pi} - s)(313,25 \cdot 10^{-j1,8212} - s)} = \\ &= \frac{1,523 \cdot 10^7}{1,523 \cdot 10^7 + 1,222 \cdot 10^5 s + 310,5 s^2 + s^3} \end{aligned}$$

En la figura 38 podem observar la funció de transferència del filtre prototip passabaix analògic de l'equació anterior, dibuixada a partir de la crida en el Matlab a la funció *freqs*.

Figura 38. Resposta en freqüència del disseny passabaix analògic $H_{lp}(s)$.

A continuació, hem d'aplicar la transformada bilineal per a trobar el prototip passabaix discret. El valor del paràmetre T_s es pot escollir, en aquest cas, en un valor arbitrari, ja que després de fer la conversió de filtre analògic a digital es farà la transformació freqüencial en discret per a convertir el filtre passabaix en passabanda.

Si escollim, per exemple, $T_s = 1/10.000 = 10^{-4}$, la freqüència de tall del filtre analògic original de $\Omega_p = 100\pi$ rad/s quedarà mapada en la freqüència discreta següent:

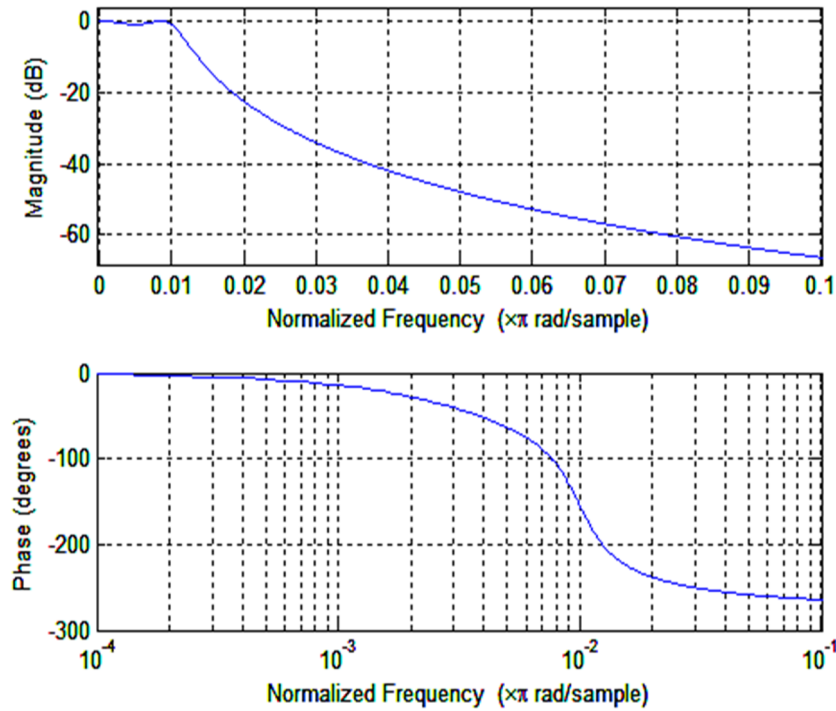
$$\omega_p = 2 \arctan \left[\frac{T_s \cdot \Omega_p}{2} \right] = 2 \arctan \left[\frac{100\pi}{2 \cdot 10000} \right] = 0,0314 \approx \frac{\pi}{100}$$

La funció de transferència obtinguda en aplicar la transformació bilineal és la següent:

$$\begin{aligned} H_{lp}(z) &= H_{lp}(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} = 20 \cdot 10^3 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) = \\ &= \frac{1,523 \cdot 10^7}{1,523 \cdot 10^7 + 1,222 \cdot 10^5 \left(20 \cdot 10^3 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right) + 310,5 \left(20 \cdot 10^3 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right)^2 + \left(20 \cdot 10^3 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right)^3} \\ &= \frac{1,523 \cdot 10^7 (1+z^{-1})^3}{1,523 \cdot 10^7 (1+z^{-1})^3 + 2,444 \cdot 10^9 (1-z^{-1})(1+z^{-1})^2 + 1,242 \cdot 10^{11} (1-z^{-1})^2 (1+z^{-1}) + 8 \cdot 10^{12} (1-z^{-1})^3} \\ &= \frac{1,523 \cdot 10^7 (1+3z^{-1}-4z^{-2}+z^{-3})}{8,1267 \cdot 10^{12} z^{-2} - 2,4122 \cdot 10^{13} z^{-1} + 2,3873 \cdot 10^{13} z^{-2} - 7,8782 \cdot 10^{12} z^{-3}} \end{aligned}$$

En la figura 39 podem observar la funció de transferència $|H(e^{j\omega})|$ del filtre passabaix discret. Noteu que la freqüència final de la banda de pas ara és $\omega_p = 2 \arctan(\Omega_p T_s / 2) = 2 \arctan(100\pi / 20.000) \approx \pi / 100$ (vegeu com en la figura 39, que ha estat dibuixada amb la funció *freqz* de Matlab, l'eix de freqüència està normalitzat de manera que 1 coincideix amb la freqüència de Nyquist $\omega = \pi$ rad).

Figura 39. Resposta en freqüència del filtre discret passabaix $H_p(z)$.



Finalment, ens queda fer la transformació freqüencial de prototip passabaix a passabanda mitjançant la funció de transformació següent:

$$z^{-1} \rightarrow g(z^{-1}) = -\frac{z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1}$$

Abans de res, cal calcular les freqüències de tall del filtre passabanda discret, utilitzant la normalització amb la freqüència de mostreig:

$$\omega_u = \Omega_u / f_s = 5.000\pi / 10.000 = \pi/2 \quad \omega_l = \Omega_l / f_s = 1.000\pi / 10.000 = \pi/10$$

Calculem les constants a_1 i a_2 de la manera següent:

$$\alpha = \frac{\cos\left[\frac{(\omega_u + \omega_l)/2}\right]}{\cos\left[\frac{(\omega_u - \omega_l)/2}\right]} = \frac{\cos\left[\frac{(\pi/2 + \pi/10)/2}\right]}{\cos\left[\frac{(\pi/2 - \pi/10)/2}\right]} = 0,7265$$

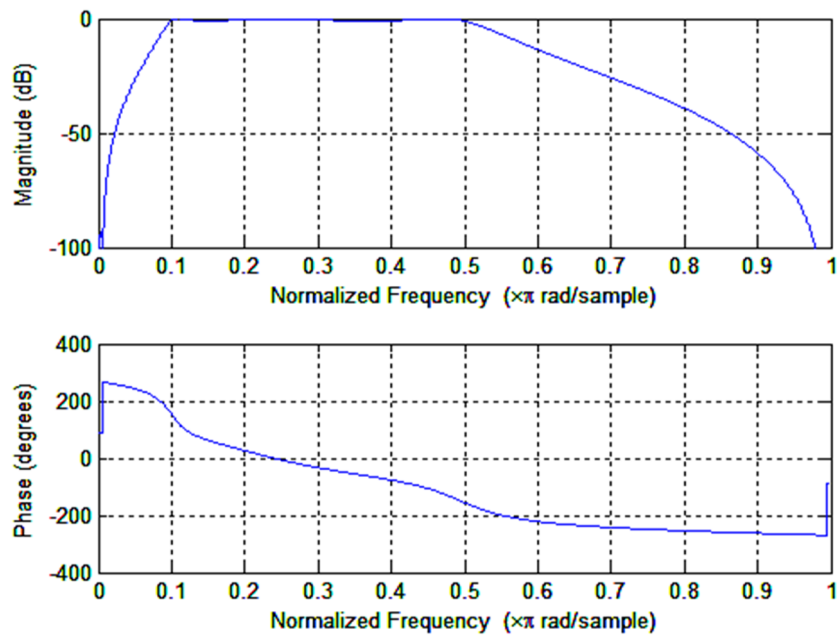
$$K = tg(\omega_p/2) / tg\left(\frac{\omega_u - \omega_l}{2}\right) = tg(\pi/200) / tg\left(\frac{\pi/2 - \pi/10}{2}\right) = 0,0216$$

$$a_1 = -2\alpha K(K + 1) = \dots = -0,0308 \quad a_2 = (K - 1)/(K + 1) = -0,9577$$

Ara ja podem calcular el filtre discret passabanda final, aplicant la transformació de passabaix a passabanda corresponent en el domini discret:

$$\begin{aligned} H_{bp}(z) &= H_{lp}\left(z^{-1} = \frac{z^{-2} + 0,0308z^{-1} - 0,9577}{-0,9577z^{-2} + 0,0308z^{-1} + 1}\right) = \\ &= \frac{1,523 \cdot 10^7 (1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3})}{8,1267 \cdot 10^{12} z^{-2} - 2,4122 \cdot 10^{13} z^{-1} + 2,3873 \cdot 10^{13} z^{-2} - 7,8782 \cdot 10^{12} z^{-3}} \Bigg|_{z^{-1} = \frac{z^{-2} + 0,0308z^{-1} - 0,9577}{-0,9577z^{-2} + 0,0308z^{-1} + 1}} = \\ &= \dots = \frac{1,463 - 4,389z^{-2} + 4,389z^{-4} - 1,463z^{-6}}{19,882 - 57,439z^{-2} - 1480,383z^{-2} - 76,791z^{-3} + 54,459z^{-4} - 25,027z^{-5} + 58,035z^{-6}} = \\ &= \frac{0,0736 - 0,2207z^{-2} + 0,2207z^{-4} - 0,0736z^{-6}}{1 - 2,889z^{-1} + 4,0429z^{-2} - 3,8622z^{-3} + 2,7391z^{-4} - 1,2587z^{-5} + 0,2919z^{-6}} \end{aligned}$$

En la figura 40 podem veure el resultat del disseny en el domini freqüencial. Es pot observar com la banda de pas es troba dins del marge $\pi/10 \leq \omega \leq \pi/2$. Es deixa a l'alumne la implementació física del filtre discret dissenyat a partir de l'expressió final.

Figura 40. Resposta en freqüència del filtre discret passabanda dissenyat final $H_{bp}(z)$.

Abreviatures

FIR Sigla de *finite impulse response filter*, 'filtre de resposta impulsional finita'

IIR Sigla d'*infinite impulse response filter*, 'filtre de resposta impulsional infinita'

SLIT Sigla de *sistema lineal i invariant en el temps*

TZ Transformada Z

ROC Sigla de *region of convergence*, 'regió de convergència'

Annex

En aquest annex es tracten algunes extensions de l'explicació bàsica del tema de disseny de filtres discrets que poden ser útils per a ampliar coneixements.

1) Mètode de mapatge basat en la invariància impulsional

L'objectiu principal d'aquesta tècnica és el disseny d'un filtre IIR que tingui com a resposta impulsional la versió mostrejada uniformement, en temps múltiples del període de mostreig T_s , de la resposta impulsional del filtre analògic prototip del qual es parteix, és a dir, que es compleixi l'equació següent:

$$h[n] = h(t = nT_s)$$

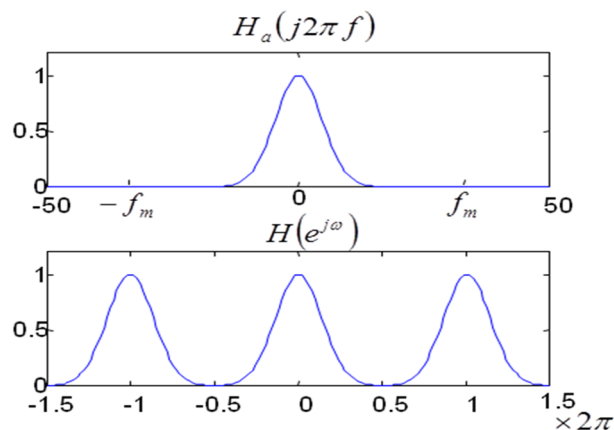
Per a investigar les implicacions i conseqüències de la relació anterior cal recordar la relació entre les representacions freqüencials de tots dos senyals analògic i discret. Recordem que el mostreig de senyals analògics en el temps implica l'aparició de periodicitats en el domini de Fourier, de manera que la TFSD de la seqüència discreta corresponent és igual a la repetició de la TF del senyal analògic, $H_a(j\Omega)$, a múltiples de la pulsació de mostreig, multiplicada en amplitud pel factor $1/T_s$

$$h(t) \xleftrightarrow{T.F.} H_a(j\Omega)$$

$$h[n] \xleftrightarrow{T.F.S.D.} H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a \left[j \frac{(\omega - 2\pi k)}{T_s} \right]$$

En l'exemple de la figura 41 es pot apreciar la relació en el domini freqüencial, especialment pel que fa a l'eix de freqüències.

Figura 41. Exemple de filtre analògic passabaix i la corresponent versió de filtre passabaix discret obtingut a partir del mostreig en temps de la resposta impulsional.



Atès que la relació s'estableix com un mostreig en el domini temporal, un dels fenòmens que es pot produir en el domini freqüencial és l'aliàsing o superposició de components freqüencials del senyal analògic original en el senyal mostrejat. Aquest fenomen es produirà sempre que no es compleixi la relació $f_s = 1/T_s > 2BW$, en què BW és l'amplada de banda del filtre analògic original. És, doncs, lògic observar com aquesta condició únicament es pot mantenir quan es parteix de dissenys de filtres analògics d'amplada de banda finita, això és, filtres de tipus passabaix o bé passabanda, mentre que no es complirà per a filtres passaalt o de banda eliminada.

Estudi del mapatge entre els plans s i z i en els dominis de la freqüència analògic i discret

Abans de res comencem per recopilar les relacions que ens permeten arribar a entendre millor com podem interpretar el mostreig de la resposta impulsional des del punt de vista d'un mapatge entre els plans analògic (en el domini de la variable s) i discret (en el domini de la variable z).

$$\begin{aligned} h(t) &\stackrel{TL}{\longleftrightarrow} H_{as}(s) & h(t) &\stackrel{TF}{\longleftrightarrow} H_a(j\Omega) \\ h[n] &\stackrel{TZ}{\longleftrightarrow} H(z) & h[n] &\stackrel{TFSD}{\longleftrightarrow} H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= H(s) \Big|_{z=e^{sT_s}} \\ H_a(j\Omega) &= H_a(s) \Big|_{s=j\Omega} \end{aligned}$$

$$H(z) \Big|_{z=e^{sT_s}} = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=-jsT_s} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a[s - j(2\pi/T_s)k]$$

$$h[n] \stackrel{TFSD}{\longleftrightarrow} H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a[j\omega/T_s - (2\pi/T_s)k]$$

Veiem com podem arribar a relacionar les funcions de transferència dels sistemes analògic i discret a partir d'una senzilla relació entre les variables s i z :

$$z = e^{sT_m} \quad \Rightarrow \quad r e^{j\omega} = e^{(\sigma + j\Omega)T_m} = e^{\sigma T_m} e^{j\Omega T_m}$$

Per tant, mòdul i fase de la variable z es poden posar en relació amb les parts real i imaginària de la variable s , respectivament:

$$r = e^{\sigma T_m} \quad \omega = \Omega T_m$$

Arribats en aquest punt podem analitzar dos aspectes del mapatge entre els plans s i z :

- El semiplà esquerre de s queda mapat dins de la circumferència de radi 1 en z , i l'eix imaginari de s just per sobre de la circumferència:

$$\sigma < 0 \Rightarrow 0 < r < 1 \quad ; \quad \sigma > 0 \Rightarrow 1 < r \quad ; \quad \sigma = 0 \Rightarrow r = 1$$

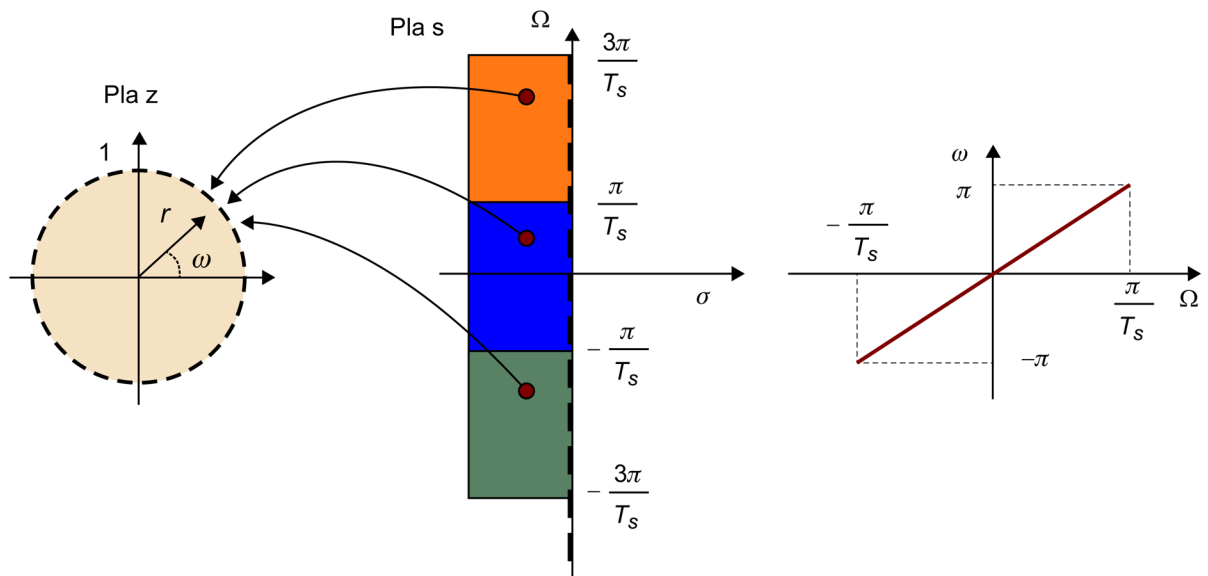
Aquesta relació ens permet afirmar que la transformació basada en la invariància impulsional permet obtenir filtres discrets estables quan partim d'un disseny de filtre analògic estable.

- El mapatge anterior és del tipus *many-to-one* o no bijectiu, atès que Ω es refereix a l'eix imaginari de s , i en canvi ω fa referència a la fase de z , cosa que implica una periodicitat implícita. Això implica que hi haurà moltes pulsacions analògiques possibles que quedaran mapades sobre una única pulsació discreta, aspecte associat a la periodicitat del domini espectral discret en fer el mostreig temporal (vegeu la part esquerra de la figura 42):

$$r e^{j\omega} = e^{\sigma T_s} e^{j\Omega T_s} = e^{\sigma T_s} e^{j\left(\Omega + \frac{2\pi}{T_s}k\right)T_s} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Concretament, tots els punts del pla s les pulsacions del qual estiguin separades múltiples de $2\pi/T_s$ quedaran mapades en la mateixa posició del pla z .

Figura 42. Esquerra: mapatge *many-to-one* associat a la relació entre les funcions de transferència dels sistemes analògic i discret de la transformació basada en la invariància impulsional. Dreta: mapatge de freqüències lineal dins de l'amplada de banda en la qual no es produeix aliàsing.



És interessant remarcar que, com a contrapartida al problema de l'aliàsing de freqüències que provoca el mapatge *many-to-one*, el mapatge entre freqüències dels dominis analògic (Ω) i discret (ω) és un mapatge lineal ($\omega = \Omega T_s$), la qual cosa garanteix que en la variable de freqüència es mantindran les característiques del filtre original dins de l'amplada de banda en la qual no es produeix cap aliàsing (vegeu la part dreta de la figura 42).

No cal perdre de vista que la relació entre les variables s i z analitzada explica part de la relació completa entre les funcions de transferència del sistema analògic de partida i del sistema discret final dissenyat. Com s'ha vist en les equacions de l'inici d'aquest apartat, la invariància impulsional expressa que la transformada Z és igual a l'extensió periòdica de la transformada de Laplace

a múltiples $2\pi/T_s$ en l'eix imaginari més el canvi de variable analitzat. Aquesta relació complexa només permet entendre les limitacions que el mapatge freqüencial permet obtenir, però queda lluny de permetre fer la conversió d'un disseny analògic en un filtre discret de manera directa a partir de la funció de transferència en el domini de la transformada de Laplace.

Exemple

Analitzem un filtre analògic de tot pols amb N seccions d'un sol pol en paral·lel:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - p_k^a} \Rightarrow h(t) = \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{p_k^a t} \right) u(t)$$

Si es mostreja la resposta impulsional a temps $t = nT_s$ obtenim la seqüència següent:

$$h[n] = h(nT_s) = \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{p_k^a n T_s} \right) u[n]$$

Calculem-ne la transformada Z:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{p_k^a n T_s} \right) z^{-n} = \sum_{k=1}^N c_k \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{p_k^a T_s} z^{-1} \right)^n$$

La condició de convergència per a obtenir sèries sumables és:

$$|e^{p_k^a T_s} z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |e^{p_k^a T_s}| = |e^{(\sigma_k + j\Omega_k) T_s}| = e^{\sigma_k T_s}$$

i atès que el filtre analògic és estable:

$$\sigma_k < 0 \Rightarrow e^{\sigma_k T_s} < 1 \Rightarrow \text{els pols es trobaran dins del cercle unitat.}$$

Acabem de calcular la TZ:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N c_k \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{p_k^a T_s} z^{-1} \right)^n = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1 - e^{p_k^a T_s} z^{-1}}$$

Com es pot observar, el filtre discret posseeix pols en $p_k = e^{p_k^a T_s}$, la qual cosa equival al mapatge estudiat $z = e^{sT_s}$, encara que això no impliqui que, en general, es pugui fer un simple canvi de variable, tal com es va comentar anteriorment.

2) Filtre de Txebeixev de tipus II

Els filtres de Txebeixev de tipus II es diferencien dels de tipus I en el fet que posseeixen un arissament constant en la banda de rebuig, mentre que en la banda de pas posseeixen un guany monòton decreixent, just a l'inrevés que els de tipus I. Per a aconseguir aquest efecte, la definició del mòdul al quadrat de la

funció de transferència es basa en una inversió tant en l'eix de freqüències com en el d'amplituds del polinomi de Txeixev, de manera que queda l'equació següent:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[T_N^2(\Omega_s/\Omega_p) / T_N^2(\Omega_s/\Omega) \right]}$$

en què Ω_p és la pulsació límit de la banda de pas, ε un paràmetre associat al guany en aquesta pulsació límit, Ω_s la pulsació límit de la banda de rebug i $mT_N(x)$ el polinomi de Txeixev d'ordre N .

Com podem veure en l'equació anterior, per a $\Omega \geq \Omega_s$, tenim que $x = \Omega_s/\Omega \leq 1$, i a més el valor és positiu (més gran que 0), amb la qual cosa estem avaluant $T_N(x)$ en la zona on la seva amplitud està fitada a l'interval $[-1, +1]$. Atès que en aquest cas estem dins de la banda de rebug, el guany del filtre expressat en lineal estarà fitat pels valors 0 (quan $T_N(x) = 0$) i $\delta_2 = 1/(1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega_s/\Omega_p))$, la qual cosa denotarà un arissament d'amplitud constant dins d'aquesta banda.

En canvi, per a $\Omega \leq \Omega_s$, tenim que $1 \leq x = \Omega_s/\Omega$, amb la qual cosa estem avaluant $T_N(x)$ a la zona on la seva amplitud creix o bé decreix de manera constant. Aquest creixement en mòdul provoca que el terme $\varepsilon^2 T_N^2(\Omega_s/\Omega_p) / T_N^2(\Omega_s/\Omega)$ vagi decreixent de manera gradual però constant a mesura que ens allunyem de la freqüència Ω_s i ens apropem a 0, de manera que el guany del filtre tendirà al guany 1. Es pot observar també com per a $\Omega = \Omega_p$ el guany del filtre és igual a $1/(1 + \varepsilon^2)$, de manera que Ω_p es diu pulsació de tall per a una atenuació de $10 \log_{10}(1 + \varepsilon^2)$ dB.

El filtre de Txeixev de tipus II és un filtre amb pols i zeros (p_k^a i z_k^a , respectivament), els quals es poden calcular a partir de les expressions matemàtiques següents, que depenen de les especificacions (Ω_p , ε , N i δ_2):

$$\phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N}$$

$$x_k = r_2 \cos \phi_k \quad r_2 = \frac{\beta^2 - 1}{2\beta}$$

$$y_k = jr_1 \sin \phi_k \quad r_1 = \frac{\beta^2 + 1}{2\beta}$$

$$\beta = \left[\frac{1 + \sqrt{1 - \delta_2^2}}{\delta_2} \right]^{1/N}$$

$$z_k^a = j \frac{\Omega_s}{\sin \phi_k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$p_k^a = \frac{\Omega_s}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} (x_k + jy_k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

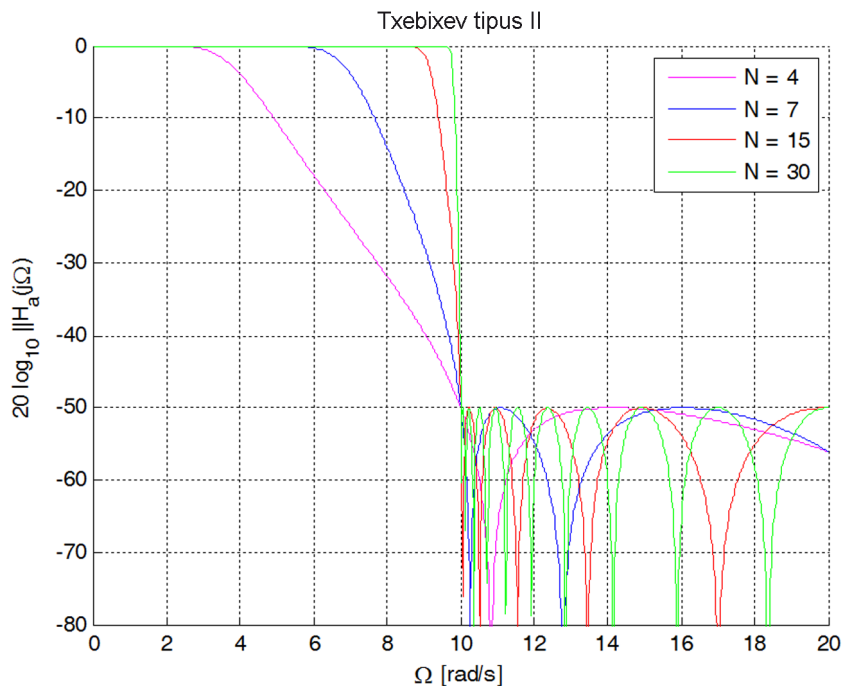
Disseny de l'ordre del filtre

En el cas del filtre de Txeixev de tipus II, el disseny de l'ordre mínim del filtre es pot fer amb la mateixa equació expressada per al filtre de Txeixev de tipus I. Únicament cal tenir la precaució d'interpretar els paràmetres de les especificacions d'acord amb les característiques particulars d'aquest tipus de filtre, que són:

- El paràmetre $\delta_1 = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$ ara està associat a un guany a la freqüència límit de la banda de pas Ω_p , i no hi ha cap tipus d'arissament en la banda de pas.
- El paràmetre δ_2 és ara el valor de guany màxim associat a l'arissament constant que el filtre té per sobre de la pulsació Ω_s , dins de la banda de rebuig.

En la figura 43 es poden veure guanys per a diversos ordres d'un filtre de Txeixev de tipus II amb pulsació límit de la banda de rebuig $\Omega_s = 10$ rad/s, arissament de la banda de rebuig de -50 dB. Com es pot apreciar, l'ordre del filtre afecta igualment en el pendent del filtre (com més ordre, més pendent, igual que passa en els altres filtres estudiats). A més, es pot observar com la característica d'arissament constant en la banda de rebuig es caracteritza per una oscil·lació en què els pics són més arrodonits que les valls, en ser aquestes zeros absoluts de la funció de transferència.

Figura 43. Exemples de funció de transferència d'un filtre de Txeixev de tipus II amb paràmetres del filtre $\Omega_s = 10$ rad/s, arrissament en la banda de rebuig de -50 dB i per a 4 ordres diferents (vegeu la llegenda de la figura).



Podem apreciar que la condició d'arrissament es compleix de manera estricta en la banda de rebuig, mentre que banda de pas. Això es produïa, en el filtre de Txeixev de tipus I, però de manera inversa: mentre que la condició d'arrissament es complia de manera estricta en la banda de pas, l'ordre del filtre permetia complir una condició de guany màxim per sobre de la pulsació límit de la banda de rebuig.

Per exemple, si s'analitza l'ordre mínim que compleix amb els requisits anteriors, i a més s'imposa que el guany del filtre sigui com a màxim de -15 dB per sobre de la pulsació $\Omega_p = 8$ rad/s, s'obtenen les especificacions de disseny següents:

$\Omega_p = 8$ $\Omega_s = 10$ $\delta_1 = 10^{\frac{15}{20}} = 5,6234$ $\delta_2 = 10^{-\frac{50}{20}} = 0,0032$, i obtenim un ordre mínim de $N = 7$, i el guany del filtre que es pot observar en la figura 43.

3) Transformacions en freqüència en el domini analògic

A partir dels prototips passabaix es poden aconseguir filtres passabaix amb diferents freqüències de tall, filtres passaalt, filtres passabanda o filtres de banda eliminada seguint una llei de transformació de la variable complexa s . La metodologia es basa a definir aquesta transformació de la variable, que únicament és una transformació lineal quan es tracta de convertir un filtre passabaix en un altre filtre passabaix amb diferent freqüència de tall.

En general, el procés de transformació en freqüència es defineix a partir d'una funció de mapatge que transforma la variable s :

$$s \rightarrow T(s)$$

$$H_i(s) \rightarrow H_f(s) = H_i(T(s))$$

de manera que $H_i(s)$ és la funció de transferència del filtre original i $H_f(s)$ és la funció de transferència del filtre obtingut després d'aplicar la funció de mapatge $T(s)$.

Totes les transformacions de passabaix a passaalt, passabanda o banda eliminada són no lineals, la qual cosa pot produir una certa distorsió (molt petita) i que afecta principalment l'escalat de la freqüència.

Una propietat interessant és que la transformació aplicada únicament fa un mapatge de l'eix de la freqüència. Això significa que els filtres d'arissament constant (ja sigui en la banda de pas o en la banda de rebuig) continuen tenint arissament constant però en les bandes transformades corresponents segons com sigui la transformació en freqüència aplicada. També les atenuacions mínimes en les bandes de rebuig es mantenen als mateixos nivells, però dins de les noves bandes de rebuig.

Com es veurà, totes les transformacions en freqüència es defineixen a partir de les pulsacions de tall del filtre original i del filtre desitjat. A més, la funció de mapatge ha de complir uns requisits per a poder funcionar de manera correcta: que mapi els punts de l'eix imaginari de s sobre el mateix eix (correspondència de freqüència) i que també els punts situats en el semiplà esquerre del pla s quedin situats en el mateix semiplà (condició d'estabilitat, per als pols del sistema).

A continuació veurem amb detall cada tipus de transformació i com a partir del mapatge de la variable complexa s podem deduir la correspondència de mapatge de la variable freqüència.

Passabaix a passabaix

Comencem la nostra anàlisi amb la transformació més senzilla (en ser aquesta lineal), que permet obtenir un filtre analògic passabaix amb pulsació de tall Ω_p' a partir d'un filtre analògic passabaix amb pulsació de tall Ω_p . La funció de mapatge és la següent:

$$s \rightarrow T(s) = \frac{\Omega_p}{\Omega_p'} s$$

La funció de transferència del filtre passabaix final es pot obtenir substituint la funció anterior en la variable s del filtre passabaix original, segons:

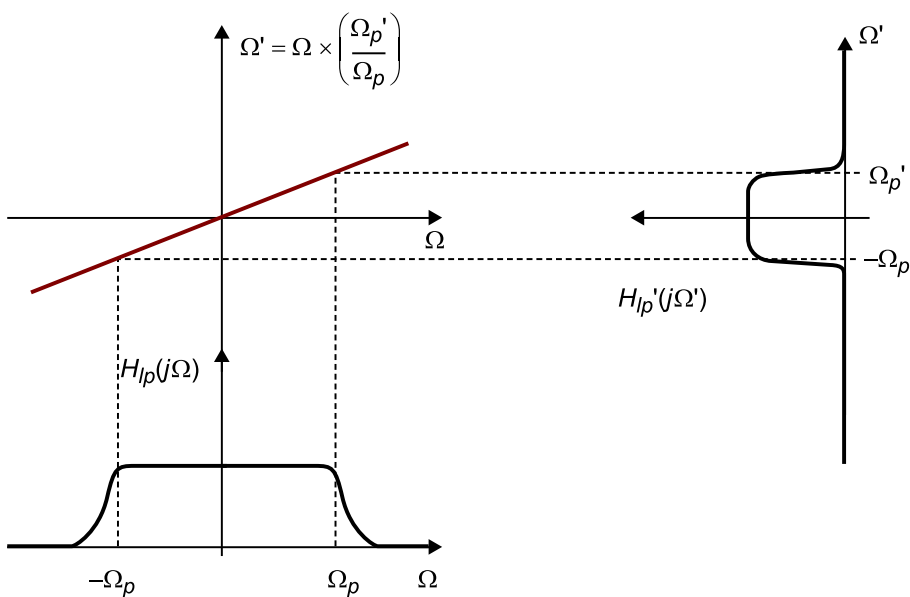
$$H_{lp}(s) \rightarrow H_{lp}'(s) = H_{lp}\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_p'} s\right)$$

Si se substitueix $s = j\Omega$ en la funció de mapatge anterior s'arriba a la funció que fa correspondre la pulsació nova amb els valors de la pulsació del filtre original:

$$\begin{aligned} s = j\Omega &= T(s) = T(j\Omega') = \frac{\Omega_p}{\Omega_p'} j\Omega' \\ \Rightarrow \Omega' &= \left(\frac{\Omega_p'}{\Omega_p}\right)\Omega \end{aligned}$$

En la figura 44 es representa la funció de transformació de freqüència juntament amb els mòduls de la funció de transferència dels filtres original i final. Es pot observar que, en ser un mapatge lineal, aquest produeix un eixamplament (si $\Omega_p' > \Omega_p$) o bé una contracció (si $\Omega_p' < \Omega_p$) d'aquest mòdul en l'eix de freqüència.

Figura 44. Transformació en freqüència en el domini analògic de passabaix a passabaix



Passabaix a passaalt

Seguim amb la transformació que permet obtenir un filtre analògic passaalt amb pulsació de tall Ω_p' a partir d'un filtre analògic passabaix amb pulsació de tall Ω_p . En aquest cas la funció de mapatge de la variable s segueix una llei inversa com:

$$s \rightarrow T(s) = \frac{\Omega_p \Omega_p'}{s}$$

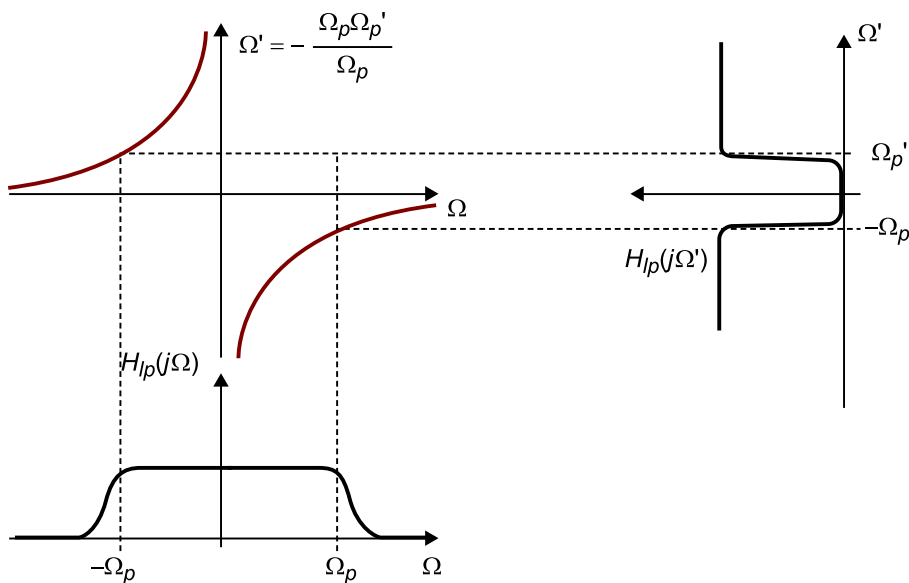
$$H_{lp}(s) \rightarrow H_{hp}(s) = H_{lp}\left(\frac{\Omega_p s \Omega_p'}{s}\right)$$

Una anàlisi d'aquest mapatge sobre l'eix de la freqüència ens porta a concloure que es produeix un mapatge invers com:

$$\begin{aligned} s = j\Omega &= T(s) = T(j\Omega') = \frac{\Omega_p \Omega_p'}{j\Omega} \\ \Rightarrow \Omega' &= -\frac{\Omega_p \Omega_p'}{\Omega} \end{aligned}$$

En la figura 45 es pot veure com la funció de transformació en freqüència de la conversió passabaix a passaalt posseeix una asímptota vertical i una altra d'horitzontal que tendeix a infinit i a zero pels dos extrems, la qual cosa permet expandir una banda de pas finita (entre $-\Omega_p$ i Ω_p en dues bandes de pas infinites, entre $-\infty$ i $-\Omega_p'$, i entre Ω_p' i $+\infty$).

Figura 45. Transformació en freqüència en el domini analògic de passabaix a passaalt



Passabaix a passabanda

Passem a estudiar la transformació en freqüència per a convertir un filtre analògic passabaix amb pulsació de tall Ω_p en un filtre analògic passabanda amb pulsació de tall inferior Ω_l i pulsació de tall superior Ω_u . La funció de mapatge associada i la funció de transferència del filtre passabanda en funció de la funció de transferència del filtre passabaix són les següents:

$$s \rightarrow T(s) = \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$$

$$H_{lp}(s) \rightarrow H_{bp}(s) = H_{lp}\left(\Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}\right)$$

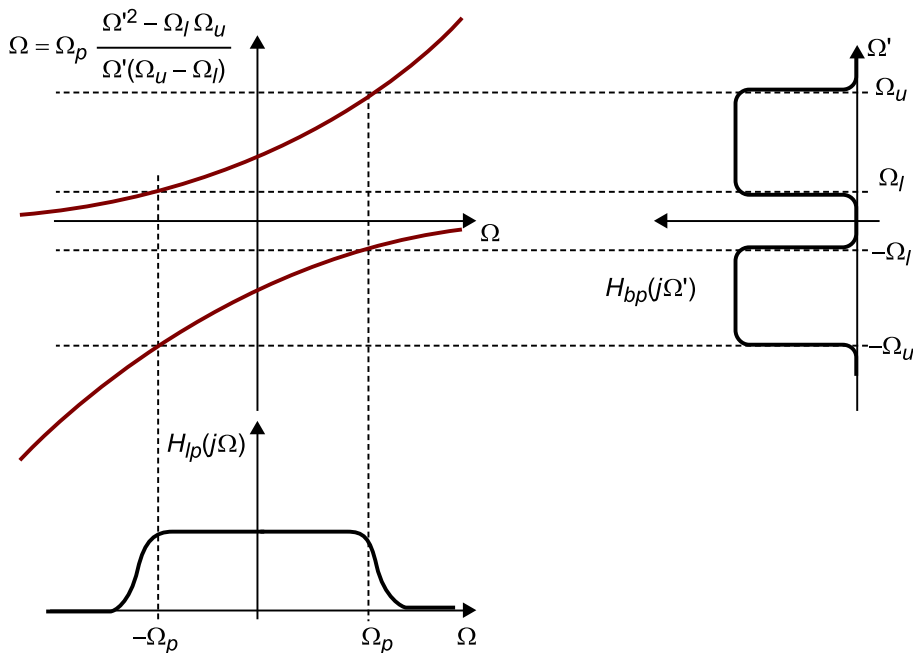
Substituint $s = j\Omega$ en la funció de mapatge anterior s'arriba a la funció que fa correspondre la pulsació nova amb els valors de la pulsació del filtre original:

$$s = j\Omega = T(s) = T(j\Omega) = \Omega_p \frac{-\Omega^2 + \Omega_l \Omega_u}{j\Omega(\Omega_u - \Omega_l)}$$

$$\Rightarrow \Omega = \Omega_p \frac{\Omega'^2 - \Omega_l \Omega_u}{\Omega'(\Omega_u - \Omega_l)}$$

La representació de la funció anterior de transformació en freqüència es pot veure en la figura 46. En aquest cas es pot apreciar com, en realitat, és la variable Ω' la que queda representada en funció de la variable Ω , amb la qual cosa les dues bandes de pas del filtre passabanda final (una en les freqüències positives i l'altra en les negatives) s'obtenen a partir d'un desdoblament de la banda de pas del filtre passabaix original. És a dir, la funció de transformació en freqüència fa correspondre la pulsació final (Ω') com una funció de mapatge de la pulsació original (Ω).

Figura 46. Transformació en freqüència en el domini analògic de passabaix a passabanda.



Passabaix a banda eliminada

Finalment, la funció de mapatge i la relació entre les funcions de transferència original i final, que permet dissenyar un filtre analògic de banda eliminada amb pulsació de tall inferior Ω_l i pulsació de tall superior Ω_u a partir d'un filtre analògic passabaix amb pulsació de tall Ω_p , són les següents:

$$s \rightarrow T(s) = \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u}$$

$$H_{lp}(s) \rightarrow H_{bs}(s) = H_{lp}\left(\Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_p \Omega_u}\right)$$

Si es fa l'estudi de la funció de transformació en freqüència per a aquesta funció de mapatge, s'arriba a:

$$s = j\Omega = T(s) = T(j\Omega) = \Omega_p \frac{j\Omega(\Omega_u - \Omega_l)}{-\Omega^2 + \Omega_p \Omega_u}$$

$$\Rightarrow \Omega = \Omega_p \frac{\Omega(\Omega_u - \Omega_l)}{\Omega_p \Omega_u - \Omega^2}$$

En la figura 47 es pot observar com en aquest cas la transformació permet desdoblar la banda de pas del filtre passabaix original en tres bandes de pas per al filtre de banda eliminada: una de baixa freqüència, i dues d'alta freqüència (positiva i negativa).

Figura 47. Transformació en freqüència en el domini analògic de passabaix a banda eliminada

