

Métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones de Maxwell

Jaume Anguera Pros
Aurora Andújar Linares

PID_00175736



Los textos e imágenes publicados en esta obra están sujetos –excepto que se indique lo contrario– a una licencia de Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 España de Creative Commons. Podéis copiarlos, distribuirlos y transmitirlos públicamente siempre que citéis el autor y la fuente (FUOC. Fundació para la Universitat Oberta de Catalunya), no hagáis de ellos un uso comercial y ni obra derivada. La licencia completa se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.es>

Índice

Introducción	5
Objetivos	6
1. Técnicas de resolución de las ecuaciones de Maxwell	7
1.1. Técnicas en el dominio frecuencial	8
1.2. Técnicas del dominio temporal	9
2. Método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD)	10
2.1. Características del método FDTD	11
2.1.1. Ventajas del método FDTD	12
2.1.2. Inconvenientes del método FDTD	12
2.2. Aplicaciones del método FDTD	13
2.3. Resolución de las ecuaciones de Maxwell mediante FDTD	14
2.3.1. Las ecuaciones de Maxwell	14
2.3.2. Algoritmo de Yee	16
2.3.3. FDTD - 1D	29
2.3.4. FDTD - 2D	33
2.3.5. FDTD - 3D	37
2.4. Ejemplos de programas de simulación electromagnética basados en FDTD	40
2.5. Ejemplos de aplicación de FDTD	41
3. Método de los momentos (MoM)	42
3.1. Potencial vector magnético	42
3.2. Radiación de una distribución de corriente	44
3.2.1. Formulación del problema del dipolo	46
3.3. Derivación de la ecuación integral de Hálten	50
3.4. La solución mediante el método de los momentos	54
3.5. Ejemplo de MoM	57
3.6. Ejemplos de aplicaciones	57
Resumen	59
Bibliografía	61

Introducción

Las ecuaciones de Maxwell describen los fenómenos eléctricos y magnéticos a nivel macroscópico. Lo que para la mecánica clásica significa las leyes de Newton, lo son las ecuaciones de Maxwell para los fenómenos eléctricos y magnéticos.

Las leyes del electromagnetismo fueron enunciadas por Gauss, Coulomb, Ampère y Faraday principalmente. Estas leyes fueron recopiladas por James Clerk Maxwell, quien elaboró una teoría electromagnética completa basándose en sus famosas ecuaciones, las que hoy en día se conocen como las ecuaciones de Maxwell (1865).

Desde que en 1870 Maxwell postuló lo que hoy en día conocemos como las ecuaciones que llevan su nombre, ha habido diversas técnicas para resolverlas mediante unas determinadas condiciones de contorno. Antes de la solución con métodos numéricos, el problema se afrontaba de una manera analítica, lo que solo permitía resolver situaciones canónicas, es decir, problemas con geometrías rectangulares, cilíndricas, esféricas, etc., donde las ecuaciones más las condiciones de contorno presentaban una solución matemática sencilla. Para problemas con geometrías más complicadas, con tal de obtener resultados precisos, el problema se aborda de una manera numérica, cosa que solo fue posible con la llegada de los ordenadores.

En primer lugar se realiza una breve descripción de los métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones de Maxwell (apartado 1). A continuación, el presente módulo detalla dos métodos de resolución de las ecuaciones de Maxwell de forma numérica: el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) (apartado 2) y el método de los momentos (MoM) (apartado 3). En el resumen se exponen las conclusiones.

Objetivos

Con el estudio de este módulo didáctico, alcanzaréis los objetivos siguientes:

- 1.** Conocer los diversos métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones de Maxwell relacionados con el diseño de antenas y circuitos de microondas.
- 2.** Comprender el método de los momentos y el de las diferencias finitas en el dominio del tiempo para la resolución de las ecuaciones de Maxwell.
- 3.** Saber la idoneidad de cada método y sus limitaciones.
- 4.** Disponer de la base suficiente para abordar actividades profesionales relacionadas con los métodos numéricos.
- 5.** Aptitudes para dimensionar las necesidades de una empresa en cuanto a equipos de software de simulación electromagnética.

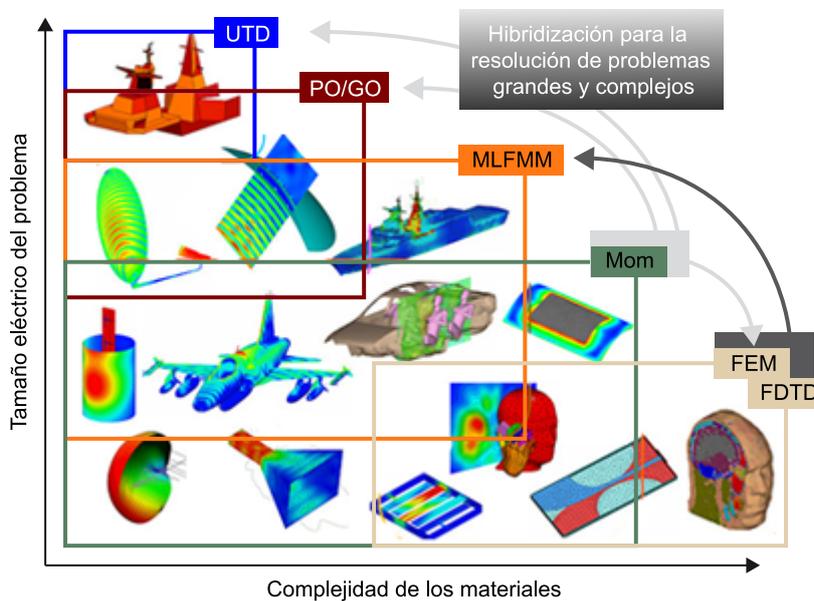
1. Técnicas de resolución de las ecuaciones de Maxwell

El análisis y modelado de problemas electromagnéticos es en algunas ocasiones difícil de resolver en entornos complejos donde interactúan objetos de forma arbitraria.

La forma más general de analizar el problema de la perturbación electromagnética sobre un objeto cualquiera es mediante los modelos de dispersión (*scattering*). En estos modelos se considera que el objeto se halla en un medio dieléctrico y sobre él incide una onda electromagnética. Las corrientes y cargas inducidas sobre el objeto por la onda incidente generan a su vez una onda dispersada.

En la actualidad, diversos métodos numéricos se utilizan para describir el problema de la dispersión, como el método de los momentos (MoM, *method of moments*), el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD, *finite difference time domain*) o el método de los elementos finitos (FEM, *finite element method*) (figura 1).

Figura 1. Clasificación de diferentes métodos numéricos según su ámbito de trabajo



UTD: Teoría uniforme de la difracción (*uniform theory of diffraction*); PO/GP: Óptica física/óptica geométrica (*physical optics/geometrical optics*); MLFMM: Método multipolo multinivel (*multi-level fast multi-pole method*); MoM: Método de los momentos (*method of moments*); FEM: Método de los elementos finitos (*finite element method*); FDTD: Método del dominio temporal de las diferencias finitas (*finite difference time domain*).
Fuente: Empresa FEKO.

La discretización del espacio que utilizan los métodos TLM (*Transmission Line Method*) o FDTD es muy flexible para el modelado de estructuras generales con formas arbitrarias. Los inconvenientes se centran en que modelar la interac-

ción de objetos separados por regiones del espacio muy grandes resulta en un incremento en el número de celdas necesarias para implementar el método, lo que aumenta los requisitos de memoria y el tiempo de computación.

El método de ecuación integral, o método IE, conjuntamente con el método de los momentos, permite el análisis de grandes regiones del espacio con una gran eficiencia, ya que reduce la complejidad del problema. Por el contrario, el método IE requiere un análisis específico particular para cada estructura, lo que comporta un análisis previo para estructuras muy complejas.

La tabla 1 resume de manera muy general las técnicas más conocidas para la solución numérica de las ecuaciones de Maxwell.

Tabla 1. Técnicas para la solución numérica de las ecuaciones de Maxwell

Formulación	Dominio temporal	Dominio frecuencial
Diferencial	FDTD	FEM, FDFD
Integral	TD-EFIE	MoM

A modo de resumen y como orden de magnitud: para problemas en medios complejos (cuerpo humano, por ejemplo), el método FDTD es idóneo. Para problemas en medios basados en conductores, el MoM permite resolver problemas eléctricamente grandes, como antenas embarcadas en aviones, coches o barcos. Cuando el problema resulta eléctricamente grande, se requieren métodos híbridos como UTD (figura 1).

1.1. Técnicas en el dominio frecuencial

Los métodos en el dominio de la frecuencia para resolver las ecuaciones de Maxwell se basan en resolver el problema tantas veces como frecuencias se requiera analizar. En general, este tipo de métodos derivan en una serie de ecuaciones lineales que resuelven el sistema con un esquema de inversión de matrices, tal como el MoM.

Cuando se utilizan métodos en el dominio frecuencial para medios no homogéneos y complejos, como por ejemplo los órganos del cuerpo humano, se encuentran dos problemas:

- Programar este tipo de medios complejos implica la derivación de un grupo de ecuaciones específicas para este medio.
- Para conseguir un alto grado de precisión se requiere una matriz de grandes dimensiones que deberá invertirse para poder aplicar el método. Esto comporta un alto grado de procesamiento y memoria en el ordenador.

1.2. Técnicas del dominio temporal

Las técnicas del dominio temporal como el FDTD tratado en este módulo, implementan el método de las diferencias finitas dependientes del tiempo de las ecuaciones de Maxwell.

Eligiendo convenientemente los puntos en que se evalúan las componentes de los campos en estas ecuaciones, la solución al sistema de ecuaciones satisface las condiciones de borde o contorno que involucran superficies conductoras ideales.

Este método es un caso particular del método de diferencias finitas, que es un método estándar para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales (EDP).

Este método tiene dos ventajas con respecto a los métodos basados en el dominio de la frecuencia:

- Es sencillo de implementar con medios complejos, ya que las características del dieléctrico se pueden asignar a cada punto de la malla.
- Permite obtener información en un gran ancho de banda mediante una simulación inyectando una señal temporal de alto contenido espectral.

Como inconvenientes:

- Requiere mallar la estructura y un cierto volumen alrededor de ella.
- El tiempo de ejecución del programa es elevado.

Con el fin de aprovechar las ventajas de cada uno de ellos, aparecieron los métodos híbridos, que combinan las ventajas de los métodos FDTD y las de los métodos integrales.

Lectura complementaria

Sobre el método de las diferencias finitas dependientes del tiempo de las ecuaciones de Maxwell, podéis consultar la obra siguiente:

A. Hoorfar; V. Jamnejad (2003). "Electromagnetic modeling and analysis of wireless communication antennas". *IEEE microwave magazine* (marzo, pág. 51-67).

Ved también

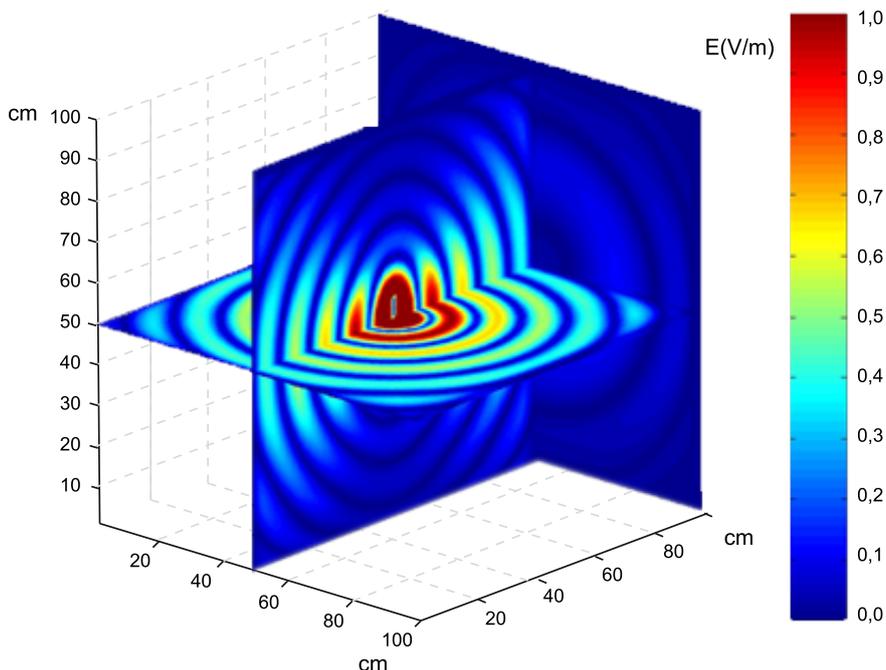
En el apartado 2 de este módulo didáctico se trata de forma más completa las ventajas e inconvenientes del método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD), así como sus diversas aplicaciones.

2. Método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD)

El método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) es uno de los métodos de computación más utilizado en electromagnetismo, ya que las ecuaciones de Maxwell se resuelven directamente en el dominio del espacio-tiempo a través de diferencias finitas e incrementos de tiempo. Emplea una aproximación de primer orden de diferencias finitas de la expresión diferencial de las ecuaciones de Maxwell para calcular el valor de la intensidad de campo en cada punto del espacio para cada incremento de tiempo sobre un dominio específico de simulación.

El método fue propuesto originalmente por Kane Yee en 1966, y entre sus numerosas ventajas cabe destacar que permite resolver problemas de gran complejidad de forma sencilla y su popularidad continúa creciendo a medida que bajan los costes de computación para implementarlo.

Figura 2. Ejemplo de la técnica FDTD-3D aplicado a un dipolo de media longitud de onda



Se ilustra la intensidad del campo eléctrico producido por el dipolo dispuesto verticalmente y excitado en su frecuencia de resonancia. Aunque se representan únicamente tres cortes, FDTD ha necesitado mallar un volumen, en este caso de 1 metro cúbico, estando el dipolo en el centro de este volumen. El tamaño de cada celda es de 1 cm, con lo que el tamaño del cubo es 1 millón de celdas. Existen seis cubos, uno para cada componente de \vec{E} y de \vec{H} , y para cada Δt desde $t = 0$ hasta $t = N \cdot \Delta t$. Fuente: Anguera (2002).

Lecturas complementarias

Sobre el método de diferencias finitas dependientes del tiempo de las ecuaciones de Maxwell, podéis consultar las obras siguientes:

A. Hoorfar; V. Jamnejad (2003). "Electromagnetic modeling and analysis of wireless communication antennas". *IEEE microwave magazine* (marzo, pág. 51-67).

A. Elsherbeni; V. Demir (2009). *The finite-difference time-domain method for electromagnetics with Matlab simulations*. Scitech Publishing Inc.

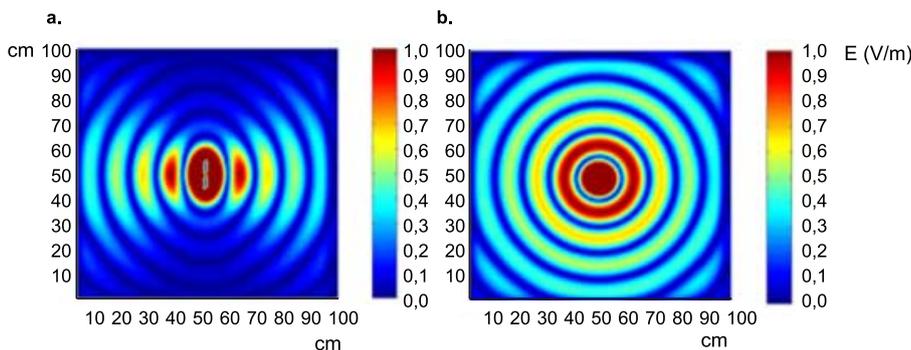
Lectura complementaria

K. S. Yee (1966). "Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media". *IEEE trans. on antennas and propagation* (vol. 14, núm. 8, pág. 302-307).

El FDTD sirve para entender de manera gráfica el fenómeno de propagación de las ondas electromagnéticas: al ser un método temporal permite la creación de una secuencia de imágenes de la perturbación electromagnética que se unen formando una película que permite una comprensión más interactiva de la propagación de las ondas (figuras 2 y 3), lo cual resulta atractivo además para fines académicos.

El objetivo primordial es mostrar la potencia del FDTD como herramienta de cálculo numérico y qué tipos de problemas puede abordar de forma eficiente.

Figura 3. Vista lateral y superior de la técnica FDTD-3D aplicado a un dipolo de media longitud de onda



a. Se observa el campo eléctrico cercano al dipolo y el lejano, el cual presenta el máximo de radiación en el plano normal que divide el dipolo por la mitad;
 b. Campo eléctrico en el plano horizontal normal al dipolo, donde se observa el carácter omnidireccional del dipolo y cómo el campo decrece con la distancia. FDTD permite no solo capturar estas imágenes sino desde el momento $t = 0$ en el que se inicia la excitación de la antena.
 Fuente: Anguera (2002).

2.1. Características del método FDTD

Las características del método FDTD son las siguientes:

- El método resuelve las ecuaciones de Maxwell mediante aproximaciones de las derivadas espacial-temporales.
- Permite disponer de manera sencilla de una secuencia temporal del fenómeno electromagnético. Se dispone de una percepción más física del problema de la que generalmente se obtiene mediante otros métodos.
- Permite analizar problemas de incidencia complejos que analíticamente serían complicados, como por ejemplo, perfiles de formas arbitrarias con combinaciones dieléctricas y magnéticas, con materiales de pérdidas y dispersivos.
- FDTD es extremadamente general en cuanto en las geometrías que puede utilizar: conductores, dieléctricos, materiales magnéticos con pérdidas, materiales anisótropos, tejidos biológicos, ferritas, y muchos otros problemas que son muy difíciles de resolver con otros métodos pero más asequibles para el método FDTD.

Lectura complementaria

J. Anguera (2002). "Simulación electromagnética mediante el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo". *Ingeniería y arquitectura* (núm. 23). Barcelona: La Salle, Universidad Ramon Llull.

- FDTD puede proporcionar resultados en un amplio espectro de frecuencias con un único cálculo utilizando excitaciones con pulsos de banda ancha y post-procesado mediante FFT (*fast fourier transform*).
- Es un método de onda completa, es decir, no existen aproximaciones más que la propia aproximación de las derivadas espacio-temporales mediante diferencias finitas.

2.1.1. Ventajas del método FDTD

Las ventajas de este método son:

- Es fácil de implementar computacionalmente.
- Permite trabajar con medios complejos y eléctricamente grandes.
- Permite analizar de una manera compacta medios anisótropos, no lineales y heterogéneos, como pueden ser la interacción electromagnética con el cuerpo humano, la propagación en fibras ópticas, metamateriales, etc.
- Es un método de resolución iterativo y no requiere una inversión matricial, como sucede en los métodos integrales como el método de los momentos.
- Una sola simulación da resultados en un amplio dominio de la frecuencia. FDTD permite obtener una respuesta de banda ancha con una sola simulación, ya que las fuentes temporales se pueden definir con un alto contenido espectral, como es el caso del pulso gaussiano.
- Es un método fácilmente paralelizable, especialmente esta opción es útil en problemas con estructuras complicadas y eléctricamente grandes. De todas formas existe hardware de cálculo que permite abordar problemas altamente complejos con ordenadores personales.
- El algoritmo estándar de Yee tiene una precisión de segundo orden, es decir, si el tamaño del mallado se reduce a la mitad, el error se reduce por cuatro.

Ved también

Los metamateriales se estudian en el módulo del mismo nombre de esta asignatura.

2.1.2. Inconvenientes del método FDTD

Entre los principales inconvenientes se encuentran:

- Debe analizarse el entorno de la estructura de interés, lo que aumenta de manera considerable la cantidad de memoria necesaria y el tiempo de computación del método. Por ejemplo, si se desea simular una antena sencilla como un dipolo lineal, debe mallarse un volumen suficientemente amplio que englobe el dipolo (figura 2). Con otros métodos, como el MoM, únicamente es necesario mallar el conductor.
- El método requiere la definición de una serie de condiciones de contorno de absorción (ABC, del inglés, *absortion boundary conditions*).
- Requieren la implementación de la fuente radiante y transformaciones de campo cercano a campo lejano.
- En cuanto a la precisión, no resuelve bien contornos curvos (se pierde la precisión de segundo orden pero puede solucionarse mediante una aproximación escalonada) y puede aparecer alguna dificultad en resolver pequeños detalles.
- Coste computacional alto, aunque a medida que avanza la tecnología se salvan fronteras.
- Requiere una malla ortogonal de 3 dimensiones, cuyas dimensiones están condicionadas a los pequeños detalles de la geometría y el incremento de tiempo.
- Pueden aparecer errores que generalmente son de carácter dispersivo.
- El error puede acumularse a medida que la onda se va propagando por el medio.

Ved también

El método de los momentos (MoM) se estudia en el apartado 4 de este módulo didáctico.

2.2. Aplicaciones del método FDTD

Entre las aplicaciones electromagnéticas más comunes de FDTD se destaca:

- Problemas de compatibilidad electromagnética (EMC).
- Problemas de dispersión electromagnética.
- Interacción electromagnética con el cuerpo humano como por ejemplo en las antenas de telefonía móvil.
- Antenas microstrip sobre substratos PBG (*photonic band gap*).
- Influencia de los rodornos sobre antenas.

Ved también

La interacción electromagnética con el cuerpo humano se estudia en el módulo "Tecnología de antenas para terminales móviles" de esta asignatura.

- Antenas sobre planos y/o substratos finitos, como las antenas de terminales móviles.
- Antenas activas (antenas con componentes activos).
- Propagación en fibra óptica.
- Análisis de circuitos de microondas (tanto con elementos distribuidos como discretos).
- BioEM: Modelos del cuerpo humano; para investigar cómo afectan los teléfonos móviles o las líneas de alta tensión al cuerpo humano.

2.3. Resolución de las ecuaciones de Maxwell mediante FDTD

Las ecuaciones de Maxwell describen la evolución en el tiempo y en el espacio de los campos \vec{E} y \vec{H} . Los diferentes problemas se especifican con distintas condiciones de borde o contorno que describen situaciones físicas, como la posición de los conductores en un circuito. Estas ecuaciones describen los fenómenos electromagnéticos macroscópicos.

Las ecuaciones son tan generales y potentes que, resumiendo la física clásica en ocho ecuaciones, cuatro de ellas serían las de Maxwell.

2.3.1. Las ecuaciones de Maxwell

En un medio isotrópico, las ecuaciones de Maxwell son las siguientes:

1) Ley de Ampère-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}_f(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon(\vec{r}) \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad 3.1$$

Establece la relación entre los campos eléctrico y magnético en términos de corrientes eléctricas. También establece la forma que tiene un campo eléctrico variable de generar un campo magnético, y como consecuencia, una corriente eléctrica en un circuito.

2) Ley de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\mu(\vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad 3.2$$

Establece que el campo eléctrico inducido por un campo magnético variable es proporcional a la variación del campo magnético en función del tiempo.

Las ecuaciones 3.1 y 3.2 son las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo, y son las bases del algoritmo FDTD.

3) Ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho_f(\vec{r}, t) \quad 3.3$$

La ecuación 3.3 establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie es igual a la carga neta encerrada por la superficie, lo que implica que las líneas de campo eléctrico se originan en cargas positivas y terminan en cargas negativas (existen fuentes y sumideros).

4) Ley de Gauss para el campo magnético:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad 3.4$$

La ecuación 3.4 implica que el flujo magnético a través de una superficie cerrada es cero, es decir, el número de líneas de campo magnético que entran a la superficie es igual al número de ellas que salen. Esto significa que en la naturaleza no existen monopolos magnéticos, solo existen dipolos magnéticos y que las líneas de campo magnético son cerradas.

Cada elemento de estas expresiones se interpreta de la manera siguiente:

- $\vec{E}(\vec{r}, t)$ es el campo eléctrico.
- $\vec{H}(\vec{r}, t)$ es el campo magnético.
- $\vec{B}(\vec{r}, t)$ es la densidad de flujo de campo magnético.
- $\vec{D}(\vec{r}, t)$ es el desplazamiento eléctrico o la densidad de flujo eléctrico.
- $\vec{J}_f(\vec{r})$ es la densidad de corriente eléctrica.
- $\rho_f(\vec{r})$ es la carga libre que hay en un punto del espacio.
- El vector $\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t)$ es el rotacional de \vec{H} .
- El escalar $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$ es la divergencia de \vec{B} .

También se tiene que:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \quad 3.5$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad 3.6$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad 3.7$$

Siendo:

- $\epsilon(\vec{r})$ la permitividad eléctrica característica del medio en un punto del espacio definido por \vec{r} . Si el medio es el vacío: $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m.
- $\mu(\vec{r})$ la permeabilidad magnética característica del medio en un punto del espacio definido por \vec{r} . Si el medio es el vacío: $\mu(\vec{r}) = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.
- $\sigma(\vec{r})$ es la conductividad del medio en un punto del espacio definido por \vec{r} .

Obsérvese que $\epsilon(\vec{r})$, $\mu(\vec{r})$ y $\sigma(\vec{r})$ son funciones de la posición. De esta forma, si el medio resulta no homogéneo no existe problema alguno, pues FDTD tiene en cuenta en cada posición del espacio dichos valores particulares. Tenemos un ejemplo de esta situación en el análisis de la radiación producida por una antena integrada en el cuerpo humano como un marcapasos. El cuerpo humano no es homogéneo pues $\epsilon(\vec{r})$, $\mu(\vec{r})$ y $\sigma(\vec{r})$ no son constantes ($\mu(\vec{r}) = \mu_0$ para el cuerpo humano). Mediante FDTD no es necesario suponer que el medio sea homogéneo con el fin de facilitar cálculos sino que se puede tener en cuenta el modelo real del medio en el que se propagan las ondas electromagnéticas.

2.3.2. Algoritmo de Yee

En 1966 Kane Yee propuso un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Maxwell. Este esquema se basa en que los campos eléctricos y magnéticos se entrelazan en puntos equidistantes en una estructura de cubo, llamado el cubo de Yee.

A pesar de la simplicidad y elegancia del algoritmo, no tuvo demasiado interés en la época de su publicación. Esto fue debido a las limitaciones tecnológicas de aquella época para trabajar con unos ordenadores lo suficientemente potentes para cubrir las necesidades del alto coste computacional. Con el tiempo, el coste computacional bajó; por tanto, el interés por el método FDTD empezó a aumentar.

El algoritmo original de Yee es un algoritmo de precisión de segundo orden, tanto en el espacio como en el tiempo.

Lectura complementaria

Sobre el algoritmo de Yee, puede consultarse la obra siguiente:

K. S. Yee (1966). "Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media". *IEEE trans. on antennas and propagation* (vol. 14, núm. 8, pág. 302-307).

Como ventajas cabe destacar su simplicidad y elegancia.

Como inconvenientes del método nos podemos encontrar con los errores producidos por la dispersión numérica, que serán pequeños si tenemos un número suficiente de celdas en la malla para la longitud de onda. Taflov fue de los primeros en analizar rigurosamente estos errores y también fue el primero en presentar un criterio de estabilidad para el algoritmo de Yee.

El esquema de la malla de Yee es un componente clave del algoritmo numérico y es muy simple y fácil de implementar; no obstante, tiene algunos inconvenientes: Treftan encontró que el modelo en diferencias finitas es numéricamente dispersivo, incluso para medios no dispersivos.

Malla de Yee

El algoritmo de Yee se basa en una malla en la que se describen las componentes del campo eléctrico y de campo magnético para obtener las ecuaciones actualizadas de estos campos presentes en el problema a cada instante de tiempo.

Para poder resolver el método FDTD, es necesaria una discretización espacio-tiempo de los campos eléctrico y magnético.

Discretización del espacio

La discretización en el espacio depende de la relación entre el tamaño de la geometría del problema con la longitud de onda de trabajo, λ . Si se analizan objetos eléctricamente grandes, el dominio del espacio aumenta, y aumenta lógicamente el tiempo computacional.

Aunque el FDTD se basa en una solución de una malla, esta es la fundamental diferencia con respecto a otros métodos.

La **malla de Yee** se compone de cajas rectangulares llamadas **celdas**. Cada una de las aristas de estas celdas localiza una componente del campo eléctrico o magnético y también especifica el tipo de material que representa. Una **geometría** se forma mediante la asignación de diferentes materiales a diferentes aristas de la malla.

Se escoge esta forma rectangular debido a que efectuar cálculos para cada celda de la malla es realmente rápido y esto permite obtener aproximaciones muy precisas en la geometría física real.

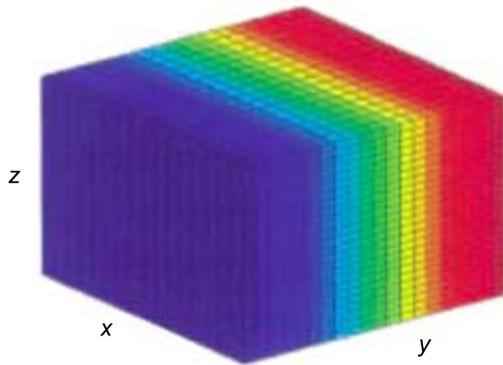
En la figura 4 se muestra un ejemplo de un volumen cúbico formado por un conjunto de cubos de menor tamaño.

Lectura complementaria

Sobre los inconvenientes del método y su análisis, puede consultarse la obra siguiente:

A. Hoorfar; V. Jamnejad (2003). "Electromagnetic modeling and analysis of wireless communication antennas". *IEEE microwave magazine* (marzo, pág. 51-67).

Figura 4. Discretización del espacio en una malla de Yee compuesta por celdas rectangulares

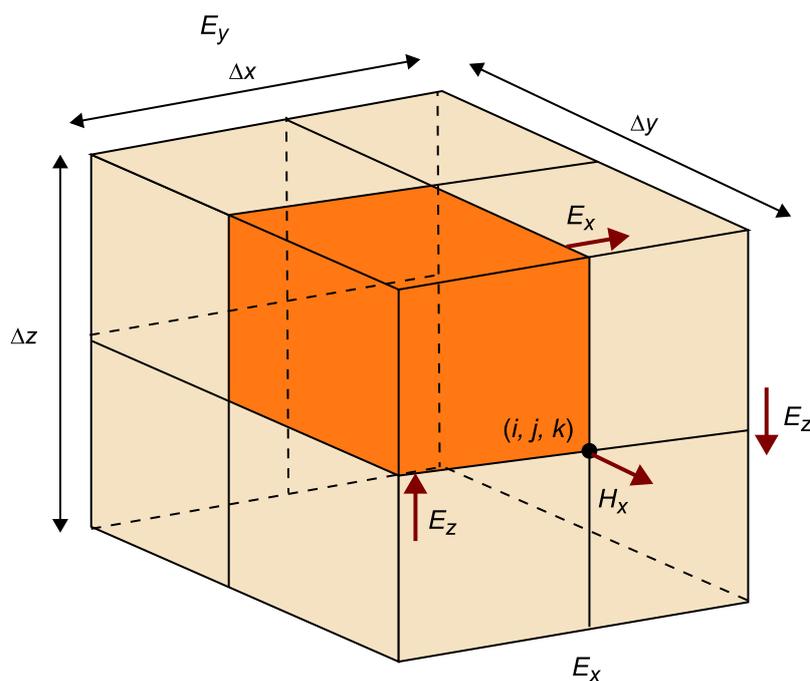


Cada una de las celdas se caracteriza por incrementos espaciales Δx , Δy y Δz . Las componentes \vec{E} y \vec{H} se distribuyen en el espacio en cada celda (figura 5).

Para problemas en 3D, existen seis cubos, uno para cada componente \vec{E} y \vec{H} , y para cada instante determinado. El contenido de los cubos se va actualizando en cada instante de tiempo.

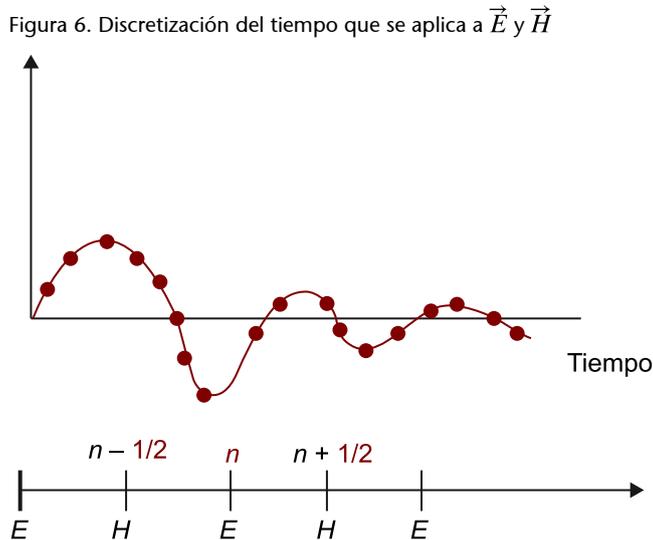
A primera vista, la aproximación escalonada que ofrece la malla de Yee en una geometría inclinada o curva puede parecer muy grosera. Pero se debe recordar que el tamaño de la malla es de $\lambda/10$ a $\lambda/30$, o incluso menor. Así que, aunque la aproximación de la malla puede parecer menos precisa que una malla suave producida por otros métodos, la desviación real de la malla de Yee con respecto a la geometría es incluso menor y utilizará muchos elementos pequeños de la malla que son muy rápidos de calcular y ocupan muy poca memoria en el ordenador.

Figura 5. Celda Yee compuesta por un cubo rectangular de Δx , Δy y Δz



Discretización del tiempo

El tiempo se discretiza también en Δt y los campos \vec{E} y \vec{H} se distribuyen en el tiempo tal y como se muestra en la figura 6.



Estos son algunos de los tipos de mallas de Yee que se pueden encontrar en la aplicación del método FDTD:

- Mallas cartesianas: con celdas rectangulares. Son las que se utilizan normalmente.
- Mallas ortogonales: si el sistema se puede describir mejor con coordenadas ortogonales, será más apropiado desarrollar un sistema de ecuaciones para este sistema.
- Mallas con incrementos espaciales variables a lo largo de las diferentes direcciones de las coordenadas.
- Mallas de coordenadas no ortogonales: los campos se expresan en términos de los componentes de covarianza (flujo a lo largo de la dirección coordenada), contravarianza (flujo a lo largo de una superficie de coordenadas constantes) y una formulación integral que se utiliza para actualizar las ecuaciones.

Resolución del algoritmo de Yee

Un resumen de los pasos que se van a ver a continuación son:

- Presentación de las ecuaciones de Maxwell en el dominio temporal.
- Transformación de ecuaciones diferenciales a ecuaciones en diferencias.

- Discretización en tiempo y espacio.
- Obtención de los campos eléctrico y magnético para cada instante de tiempo.
- Unión de todos los instantes de tiempo para obtener una película donde se podrá observar cómo las ondas electromagnéticas provenientes de una fuente se propagan por el medio hasta llegar a un objeto u otro medio, reflejándose o absorbiéndose. Así se obtiene una solución en la que se puede observar la evolución temporal de los campos.

Posteriormente se presentan las condiciones de absorción. Estas son necesarias para evitar reflexiones de los campos una vez llegan al límite del dominio de simulación. Finalmente se analiza la estabilidad del método.

1) Ecuaciones de Maxwell dependientes del tiempo

Partiendo de las leyes de Ampère-Maxwell y Faraday las ecuaciones de Maxwell dependientes del tiempo (ecuaciones 3.8 y 3.9):

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon(\vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad 3.8$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu(\vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad 3.9$$

Que también se pueden expresar como las ecuaciones 3.10 y 3.11:

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon(\vec{r})} [\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)] \quad 3.10$$

$$\frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \quad 3.11$$

Las componentes del vector de campo eléctrico son las que se muestran en las ecuaciones 3.12-3.14:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad 3.12$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad 3.13$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad 3.14$$

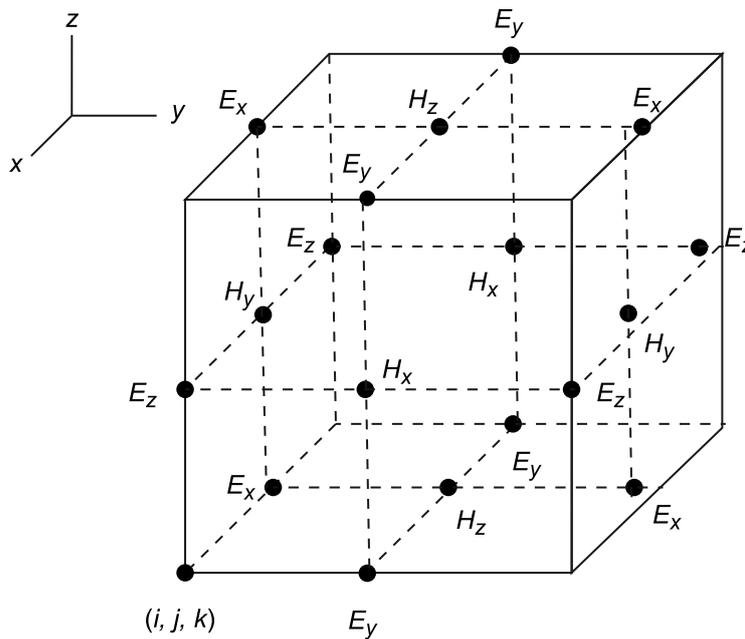
Y las de campo magnético con las ecuaciones 3.15-3.17:

3) Discretización en espacio y tiempo

Aplicando la ecuación 3.1 se actualiza el campo \vec{E} en cada instante de tiempo n , y con la ecuación 3.2 se actualiza el campo magnético \vec{H} en cada instante de tiempo $n + 1/2$.

Las mallas utilizadas para evaluar \vec{E} y \vec{H} en el espacio también están escalonadas: el vértice de un cubo perteneciente a una malla se encuentra en el centro de un cubo perteneciente a la otra, como se muestra en la figura 8.

Figura 8. Celda de Yee



Las componentes del campo \vec{E} se hallan en la mitad de las aristas mientras que las componentes de \vec{H} están en el centro de las caras

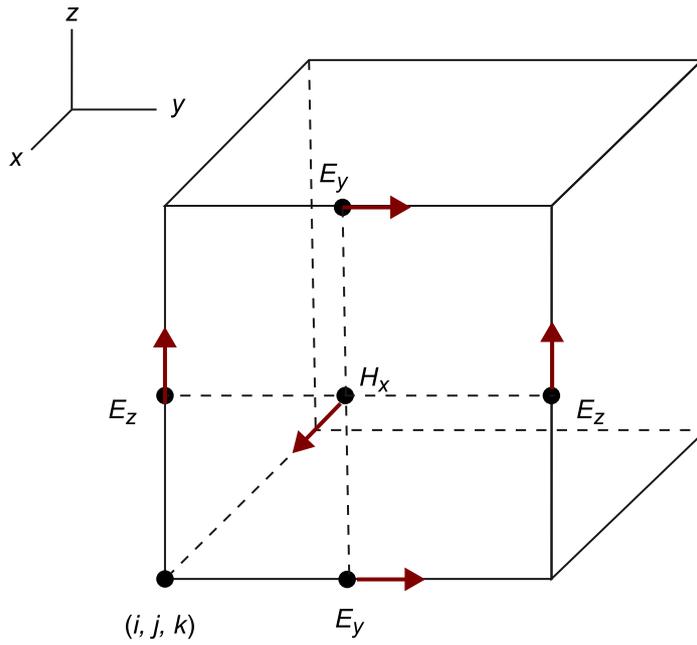
Al aplicar este método a las ecuaciones 3.12-3.17, se obtiene un sistema de ecuaciones en diferencias finitas.

Partiendo de la ecuación 3.15:

$$\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \tag{3.21}$$

En la figura 9 se observa que los puntos de la malla en que se evalúa el campo E_y^n y E_z^n utilizados en la ecuación 3.15 para calcular el campo $H_x^{n+1/2}$ en el centro de una cara de la celda perpendicular al eje x son los puntos medios de las aristas pertenecientes a esa cara.

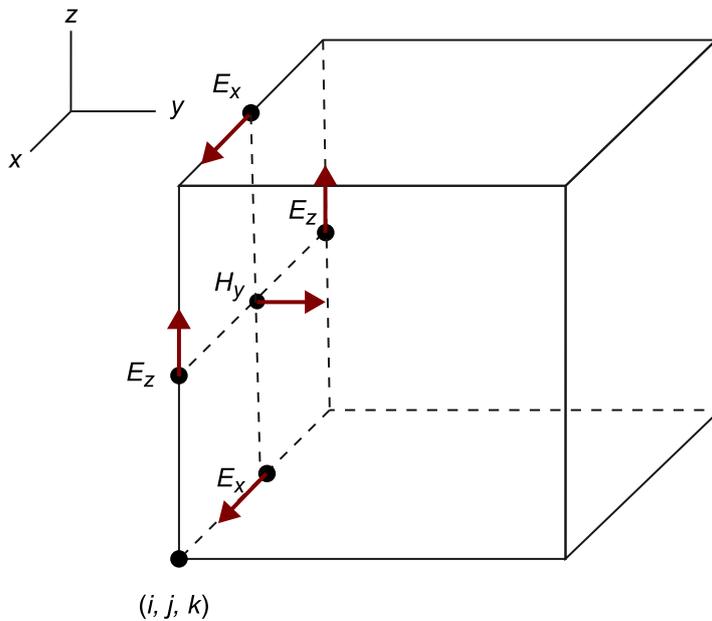
Figura 9. Nodos de la malla que se utilizan para calcular el campo \vec{H} en la ecuación 3.15



Partiendo de la ecuación 3.16 (figura 10):

$$\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \right] \quad 3.22$$

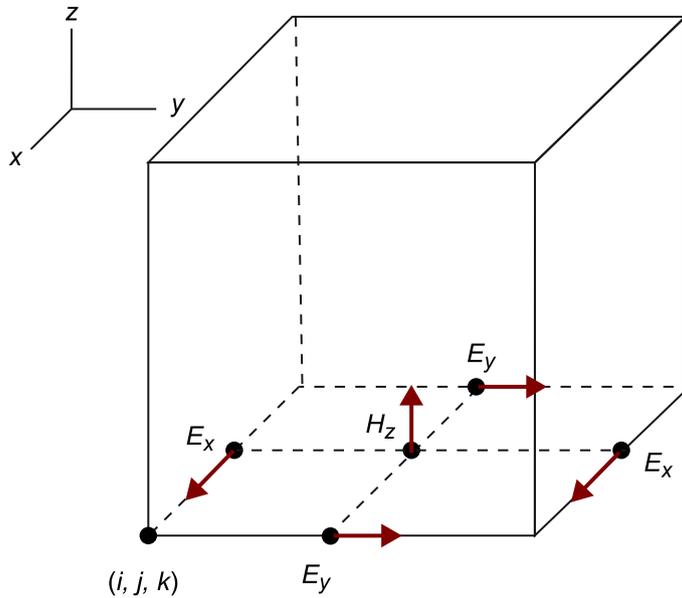
Figura 10. Nodos de la malla que se utilizan para calcular el campo \vec{H} en la ecuación 3.16



Partiendo de la ecuación 3.17 (figura 11):

$$\begin{aligned} \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \\ = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_x^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad 3.23$$

Figura 11. Nodos de la malla que se utilizan para calcular el campo \vec{H} en la ecuación 3.17

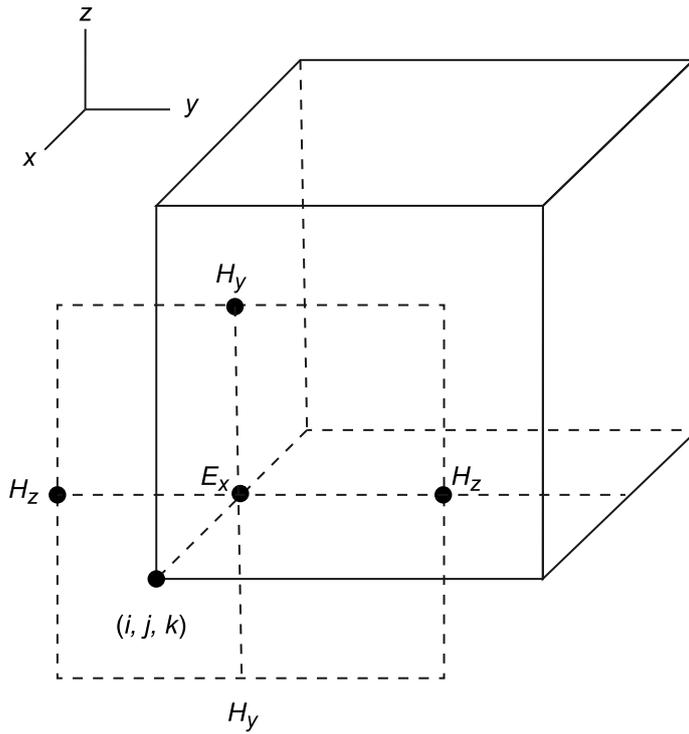


Partiendo de la ecuación 3.12 (figura 12):

$$\begin{aligned} \frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) - E_x^{n-1}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} = \\ = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \right. \\ \left. - \sigma E_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) \right] \end{aligned} \quad 3.24$$

En este caso, los puntos que se utilizan para calcular E_x , un punto de la malla, son las componentes de $H_y^{n-1/2}$ y $H_z^{n-1/2}$ que se ubican en los puntos medios de los lados de un cuadrado perpendicular al eje x , cuyo centro es el punto en que se desea calcular E_x^n (figura 12).

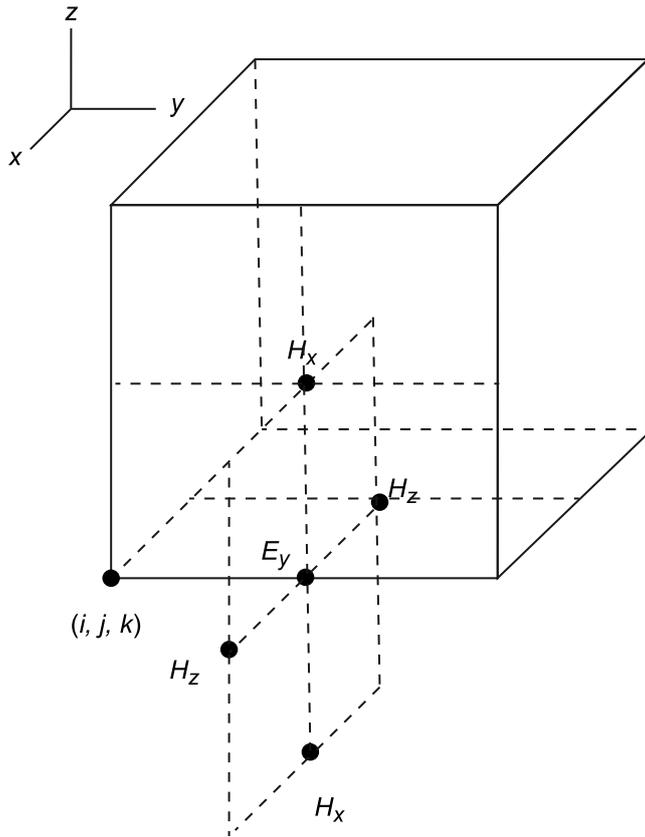
Figura 12. Nodos de la malla que se utilizan para calcular el campo \vec{H} en la ecuación 3.14



Partiendo de la ecuación 3.13 (figura 13):

$$\begin{aligned}
 & \frac{E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^{n-1}(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \\
 & = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta x} - \right. \\
 & \left. - \sigma E_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) \right] \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Figura 13. Nodos de la malla que se utilizan para calcular el campo \vec{H} en la ecuación 3.13.

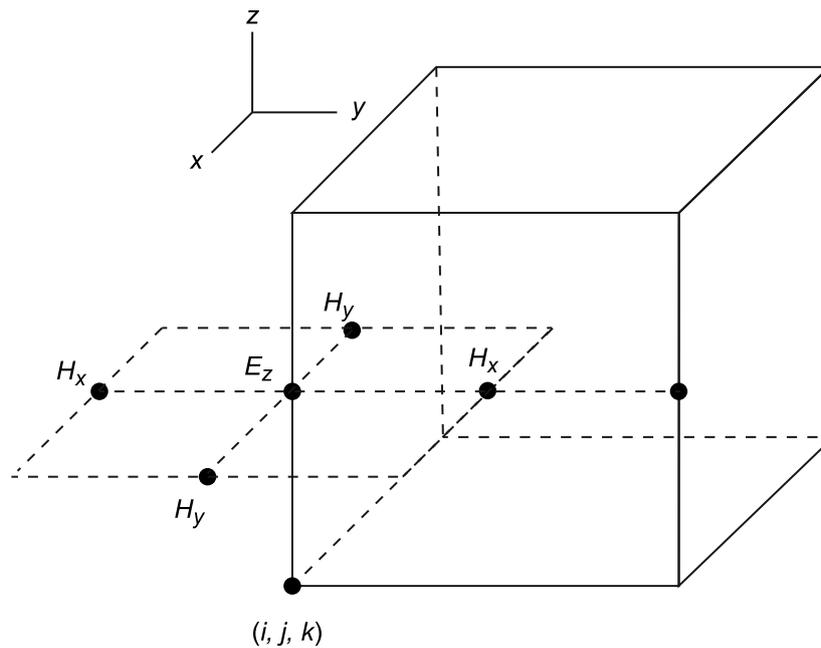


Y finalmente, a partir de la ecuación 3.14 (figura 14):

$$\begin{aligned} \frac{E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^{n-1}(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \\ = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} - \right. \\ \left. - \sigma E_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) \right] \end{aligned} \quad 3.26$$

El conjunto de ecuaciones que se obtiene es implícito, y los cálculos para hallar los valores de los campos en los puntos de la malla son muy sencillos (sumas y restas), lo que facilita su implementación; si las ecuaciones se resolvieran con diferencias centradas en una malla “normal”, se obtendría un sistema de ecuaciones explícito.

Figura 14. Nodos de la malla que se utilizan para calcular el campo \vec{H} en la ecuación 3.12



4) Obtención de campos eléctrico y magnético y solución en tiempo real

Las condiciones iniciales serán $\vec{E} = \vec{H} = 0$ y desde $t = \Delta t$ a $N \cdot \Delta t$ se aplicarán las fuentes, y se resuelve H_x, H_y, H_z y E_x, E_y, E_z para cada una de las celdas. Las fuentes pueden ser armónicas o con alto contenido espectral dependiendo del problema. Por ejemplo, si se está interesado en calcular la impedancia de entrada en función de la frecuencia, la señal deberá contener un amplio conjunto de frecuencias. Si por el contrario, se está interesado en calcular la tasa de absorción específica, o *SAR* (*specific absorption rate*), no será necesario guardar información de \vec{E} y \vec{H} en un amplio espectro de frecuencias sino únicamente en las frecuencias de interés. Esto minimiza la información obtenida; de lo contrario, los resultados ocupan una cantidad ingente de espacio de memoria de ordenador debido a que se almacenan los campos \vec{E} y \vec{H} (6 hipermatrices) para todos los puntos del mallado y para todos los instantes de tiempo.

El resultado es el conjunto de componentes de campo \vec{E} y \vec{H} en función del tiempo para cada uno de los puntos del mallado. A partir de esta información se puede extraer toda la información necesaria, como por ejemplo, distribución de corriente sobre una antena, impedancia de entrada, diagramas de radiación, o campo cercano, entre otros.

5) Condiciones de absorción del contorno (ABC)

Con tal de obtener un cálculo finito del método FDTD, el número de puntos de la malla de Yee debe tener unos límites. Estos límites son impuestos por condiciones de absorción del contorno, o *absortion boundary conditions* (ABC).

Ved también

El cálculo de la SAR se estudia en el módulo "Tecnología de antena para terminales móviles" de esta asignatura.

De este modo se pueden modelar problemas de regiones abiertas, simulando un entorno infinito en un entorno finito. Este mecanismo consiste en evitar que la onda se refleje una vez llega al límite del dominio. Para otro tipo de problemas como por ejemplo ondas guiadas, no serán necesarias las ABC, pues el dominio está encerrado mediante un PEC (*perfect electric conductor*).

Las ABC tratarán de envolver el contorno del problema con un medio sin reflexiones, como por ejemplo, la situación que se da en una simulación en el espacio libre. En este caso, el contorno se deberá comportar como un punto no retorno, es decir, la energía que traspase este punto no deberá retornar a la ventana de cálculo.

Un error sería forzar el campo eléctrico del contorno de la simulación a cero. En este caso, la condición de contorno es un conductor perfecto, lo cual conduce a una reflexión total, que es lo contrario de lo que se pretende.

Un método más eficiente será aplicar una capa de material absorbente a lo largo del contorno. Esto reducirá la reflexión, pero no es del todo efectivo ya que cualquier discontinuidad en la interfase entre materiales dará como resultado un coeficiente de reflexión no nulo. Esto puede mejorarse aplicando un incremento gradual de la absorción en los contornos de la ventana de cálculo de modo que no haya cambios en la impedancia de la onda, con lo que no se provocan reflexiones.

La mayoría de los ABC se pueden agrupar en:

- ABC de ecuaciones de ondas diferenciales: generalmente se obtienen por factorización de la ecuación de onda y permitiendo una solución que solo permita ondas de salida.
- ABC material: son los que utilizan materiales absorbentes. Se construyen de tal manera que los campos se atenúan al propagarse en el medio absorbente. Una condición de absorción muy intuitiva consiste en rodear el medio con un material absorbente como el de una cámara anecoica. Este tipo de ABC no da un nivel suficiente de reflexión en el contorno, ya que la impedancia característica del material se hace coincidir con la impedancia del espacio libre solo en la incidencia normal.

Otro tipo de ABC es la denominada PML (*perfectly matched layer*), que se trata de un material ficticio que envuelve el dominio de computación con una adaptación perfecta independientemente del ángulo de incidencia (Berenguer, 1994, 1996).

6) Criterio de estabilidad

Lectura complementaria

Sobre las condiciones de absorción de contorno, puede consultarse la obra siguiente:

A. Hoorfar; V. Jamnejad (2003). "Electromagnetic modeling and analysis of wireless communication antennas". *IEEE microwave magazine* (marzo, pág. 51-67).

Lectura complementaria

J. P. Berenger (1994). "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves". *Journal of computational physics* (vol. 114, núm. 2, pág. 185-200, octubre).

El tamaño de la malla de Yee debe ser tal que los campos electromagnéticos no cambien sustancialmente de un nodo a otro de la malla. Esto significa que para tener resultados significativos (es decir, precisos y estables), la dimensión de la malla deberá ser una fracción de la longitud de onda λ . Se recomienda en general un mallado con un paso menor a $\lambda/10$.

Para asegurar la estabilidad del algoritmo, Δt se obtiene aplicando el criterio de Courant (1967), que establece la condición 3.27:

$$\frac{c \cdot \Delta t}{L} < 1 \quad 3.27$$

Siendo:

- c : La velocidad de la onda electromagnética en el medio.
- L : Una medida lineal del elemento, como el ancho de la celda o su longitud.
- Δt : El intervalo de tiempo.

El criterio de estabilidad de Courant generalizado para 3 dimensiones se representa con la ecuación 3.28:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad 3.28$$

Una vez elegida la malla, la condición anterior 3.28 impone una restricción para el intervalo de tiempo Δt .

En general se utiliza como criterio $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$ de modo que el criterio de estabilidad se reduce a la ecuación 3.29:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{c\sqrt{3}} \quad 3.29$$

2.3.3. FDTD - 1D

A continuación se muestra la solución del método FDTD en una sola dimensión.

1) Ecuaciones de campo eléctrico y magnético a partir de las ecuaciones de Maxwell

Sin pérdida de generalidad, si las componentes del campo eléctrico y magnético son E_x y H_y , se obtienen las siguientes ecuaciones a partir de las ecuaciones de Maxwell. Partiendo de las ecuaciones 3.12-3.17, se obtienen las ecuaciones particularizadas para una sola dimensión:

Lectura complementaria

R. Courant; K. Friedrichs; H. Lewy (1967). "On the partial Difference Equations of Mathematical Physics". *Journal of Research and Development* (vol. 11, núm. 2, pág. 215-234).

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad 3.30$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad 3.31$$

Particularizando las ecuaciones en diferencias finitas para la propagación en el sentido z (se ha sustituido por k en estas ecuaciones), se obtienen las ecuaciones 3.32 y 3.33:

$$\frac{E_x^n(k) - E_x^{n-1}(k)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \sigma E_x^{n-\frac{1}{2}}(k) \right] \quad 3.32$$

$$\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[-\frac{E_x^n(k+1) - E_x^n(k)}{\Delta z} \right] \quad 3.33$$

Los campos \vec{E} y \vec{H} se entrelazan en tiempo y espacio, es decir, los valores del campo \vec{H} se localizan entre los valores del campo \vec{E} , y, análogamente, $n + 1/2$ y $n - 1/2$ indican que el instante de tiempo es un poco después o un poco antes de n , respectivamente.

Las ecuaciones 3.32 y 3.33 se pueden reagrupar para conseguir un algoritmo iterativo:

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(k) = \left(\frac{\varepsilon(k)}{\varepsilon(k) + \Delta t \sigma(k)} \right) E_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{\Delta t}{(\varepsilon(k) + \Delta t \sigma(k)) \cdot \Delta x} \left[H_y^n(k+\frac{1}{2}) - H_y^n(k-\frac{1}{2}) \right] \quad 3.34$$

$$H_y^{n+1}(k+\frac{1}{2}) = H_y^n(k+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta x} \left[E_x^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(k) \right] \quad 3.35$$

Estas ecuaciones son muy similares debido a que ε_0 y μ_0 se diferencian en algunos órdenes de magnitud; por tanto, E_x y H_y también diferirán en algunos órdenes de magnitud. Esto se puede evitar haciendo el siguiente cambio de variables 3.36, y de esta forma se minimizan errores numéricos:

$$\bar{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E \quad 3.36$$

Y sustituyendo en las ecuaciones, se obtienen las ecuaciones 3.37 y 3.38:

$$\bar{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k) = \left(\frac{\varepsilon(k)}{\varepsilon(k) + \Delta t \sigma(k)} \right) \bar{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{\Delta t}{(\varepsilon(k) + \Delta t \sigma(k)) \cdot \Delta x} \left[H_y^n(k+\frac{1}{2}) - H_y^n(k-\frac{1}{2}) \right] \quad 3.37$$

$$H_y^{n+1}(k+\frac{1}{2}) = H_y^n(k+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \bar{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \bar{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k) \right] \quad 3.38$$

Como ejemplo, si se considera un medio como el aire, donde la conductividad es prácticamente nula, las ecuaciones 3.37 y 3.38 se simplifican en las ecuaciones 3.39 y 3.40:

$$\tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k) = \tilde{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2}) \right] \quad 3.39$$

$$H_y^{n+1}(k + \frac{1}{2}) = H_y^n(k + \frac{1}{2}) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k) \right] \quad 3.40$$

2) Condiciones de estabilidad y precisión

Se ha de tener en cuenta que la estabilidad y precisión imponen restricciones sobre Δx y Δt :

- Precisión: Δx debe ser menor que la mínima longitud de onda de interés.
- Estabilidad: Los intervalos de tiempo Δt han de ser lo suficientemente pequeños para que los valores de campo puedan afectar solo a los componentes más cercanos durante un intervalo de tiempo. Para cumplir este criterio de estabilidad se ha de cumplir la ecuación 3.41:

$$\frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x} < 1 \Rightarrow \Delta t < \frac{\Delta x}{c} \quad 3.41$$

El criterio que se utiliza es el siguiente (ecuación 3.42):

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2 \cdot c_0} \quad 3.42$$

Aplicando la condición de la ecuación 3.42 se obtienen las ecuaciones 3.43 y 3.44:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k) &= \tilde{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{2c_0} \left[H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2}) \right] = \\ &= \tilde{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{2c_0 \sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \left[H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2}) \right] = \\ &= \tilde{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \left[H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2}) \right] \end{aligned} \quad 3.43$$

$$\begin{aligned} H_y^{n+1}(k + \frac{1}{2}) &= H_y^n(k + \frac{1}{2}) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{2c_0} \left[\tilde{E}_y^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - \tilde{E}_x^n(k) \right] = \\ &= H_y^n(k + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \left[\tilde{E}_y^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - \tilde{E}_x^n(k) \right] \end{aligned} \quad 3.44$$

Como ejemplo, si se considera el medio como el espacio libre, el término $\epsilon_r \mu_r = \epsilon \mu / \epsilon_0 \mu_0 = 1$, y las ecuaciones son 3.45 y 3.46:

$$\tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k) = \tilde{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{1}{2} \left[H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2}) \right] \quad 3.45$$

$$H_y^{n+1}(k + \frac{1}{2}) = H_y^n(k + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \left[\tilde{E}_y^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - \tilde{E}_x^n(k) \right] \quad 3.46$$

3) Condiciones de contorno

Se ha de tener en cuenta las condiciones de contorno para poder definir el medio en el que se va a realizar la simulación. Al ser en una sola dimensión, las condiciones de contorno se simplifican mucho con respecto a 2D y 3D. El espacio se divide en x incrementos espaciales en los que se define el tipo de medio que representan, ya sea el medio libre o algún tipo de dieléctrico.

4) Implementación numérica

Rescribiendo las ecuaciones en notación para ser programada computacionalmente, resultan las ecuaciones 3.47 a 3.50.

Espacio libre:

$$ex[k] = ex[k] + 0,5 \cdot (hy[k-1] - hy[k]) \quad 3.47$$

$$hy[k] = hy[k] + 0,5 \cdot (ex[k] - ex[k+1]) \quad 3.48$$

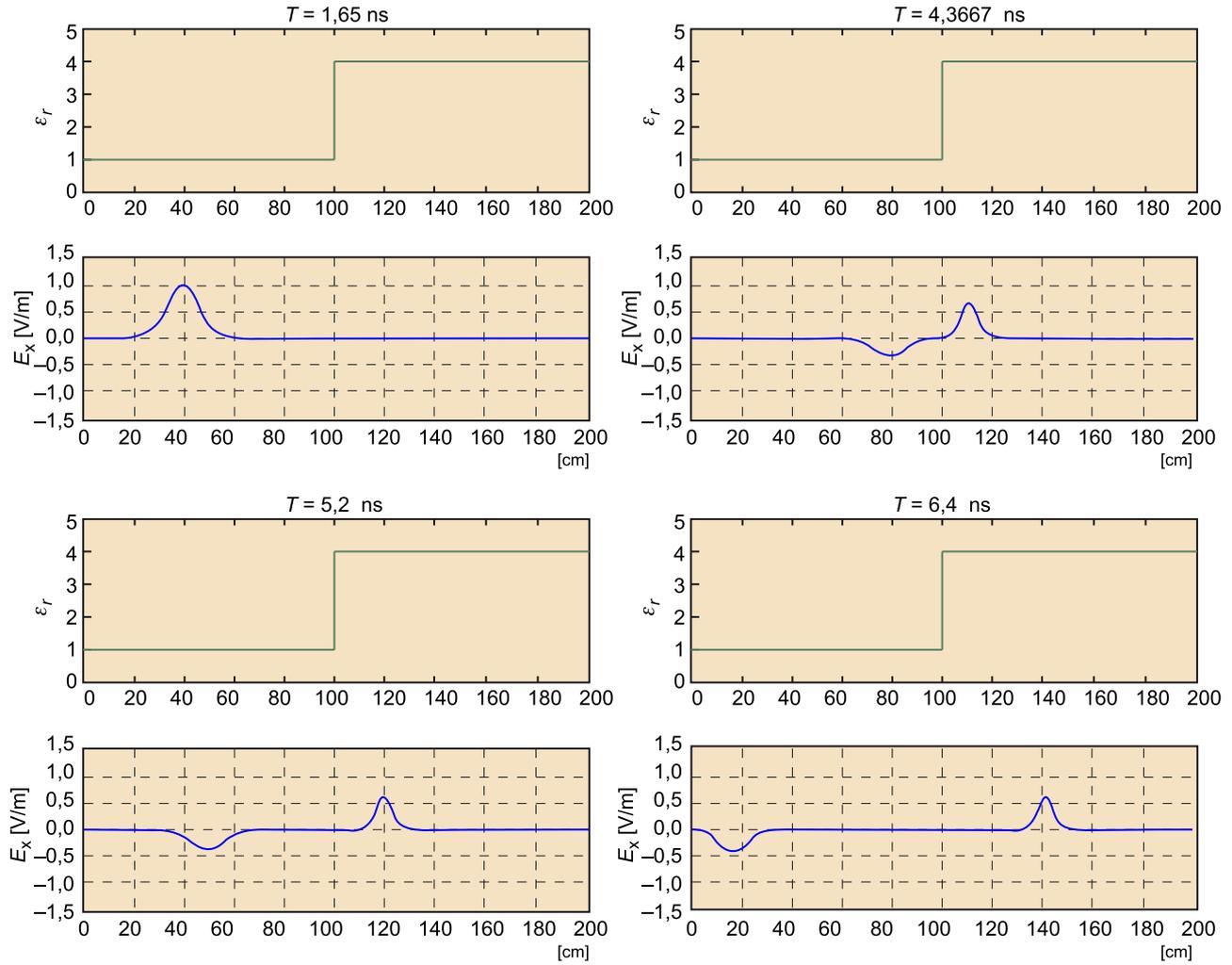
En un medio dieléctrico con ϵ_r y μ_r :

$$ex[k] = ex[k] + \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_r[k] \cdot \mu_r[k]}} \cdot (hy[k-1] - hy[k]) \quad 3.49$$

$$hy[k] = hy[k] + \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_r[k] \cdot \mu_r[k]}} \cdot (ex[k] - ex[k+1]) \quad 3.50$$

Un ejemplo de aplicación de estas ecuaciones FDTD-1D se muestra en la figura 15, donde se ilustra la incidencia de un pulso gaussiano que viaja por el espacio libre hacia un medio dieléctrico caracterizado por $\epsilon_r = 4$.

Figura 15. Ejemplo FDTD-1D



Onda plana que se propaga por el espacio libre y que incide en un medio en $z = 100$ cm con una $\epsilon_r = 4$. Se observa cómo existe un pulso reflejado que experimenta un cambio de signo, y un pulso transmitido hacia el segundo medio que viaja de forma más lenta.

2.3.4. FDTD - 2D

A continuación se muestra la solución del método FDTD en dos dimensiones. Para este caso no existe variación en la geometría y en la distribución de campos en una de las dimensiones.

Partiendo de las ecuaciones 3.12-3.17, considerando el problema independiente de z , se obtienen las ecuaciones particularizadas para dos dimensiones:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad 3.51$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad 3.52$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad 3.53$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma E_x \right) \quad 3.54$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad 3.55$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad 3.56$$

$$\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \quad 3.57$$

$$\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - E_z^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \quad 3.58$$

$$\begin{aligned} \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta t} &= \\ &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad 3.59$$

$$\begin{aligned} \frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j) - E_x^{n-1}(i+\frac{1}{2}, j)}{\Delta t} &= \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} - \sigma E_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) \right] \end{aligned} \quad 3.60$$

$$\frac{E_y^n(i, j+\frac{1}{2}) - E_y^{n-1}(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \sigma E_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) \right] \quad 3.61$$

$$\begin{aligned} \frac{E_z^n(i, j) - E_z^{n-1}(i, j)}{\Delta t} &= \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} - \sigma E_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j) \right] \end{aligned} \quad 3.62$$

En las ecuaciones antes presentadas se aplica la normalización del campo eléctrico según la ecuación 3.36, y se pueden reagrupar para conseguir un algoritmo iterativo:

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \quad 3.63$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - E_z^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \quad 3.64$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) = H_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta y} - \frac{E_y^n\left(i+1, j+\frac{1}{2}\right) - E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \right] \quad 3.65$$

$$E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) = E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} - \sigma E_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) \right] \quad 3.66$$

$$E_y^{n+1}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = -E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} - \sigma E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) \right] \quad 3.67$$

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} - \sigma E_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j) \right] \quad 3.68$$

A modo de ejemplo, si no se tiene en cuenta la conductividad, como puede ser en el caso de una onda que se propaga en el espacio libre, las ecuaciones del campo magnético y eléctrico se simplifican y quedan como las ecuaciones 3.69-3.74:

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \quad 3.69$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \right] \quad 3.70$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) = H_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta y} - \frac{E_y^n\left(i+1, j+\frac{1}{2}\right) - E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \right] \quad 3.71$$

$$E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) = E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right] \quad 3.72$$

$$E_y^{n+1}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = -E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \right] \quad 3.73$$

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad 3.74$$

1) Condiciones de estabilidad y precisión

El criterio de estabilidad que se aplicará es el que se define en la ecuación 3.75:

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon}} \quad 3.75$$

Operando y aplicando este criterio, además de la normalización sobre las ecuaciones anteriores, se obtienen las ecuaciones 3.77-3.82:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad 3.76$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta \tau}{Z} \left[\frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \quad 3.77$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) + \frac{\Delta \tau}{Z} \left[\frac{E_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - E_z^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \quad 3.78$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) + \frac{\Delta \tau}{Z} \left[\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \quad 3.79$$

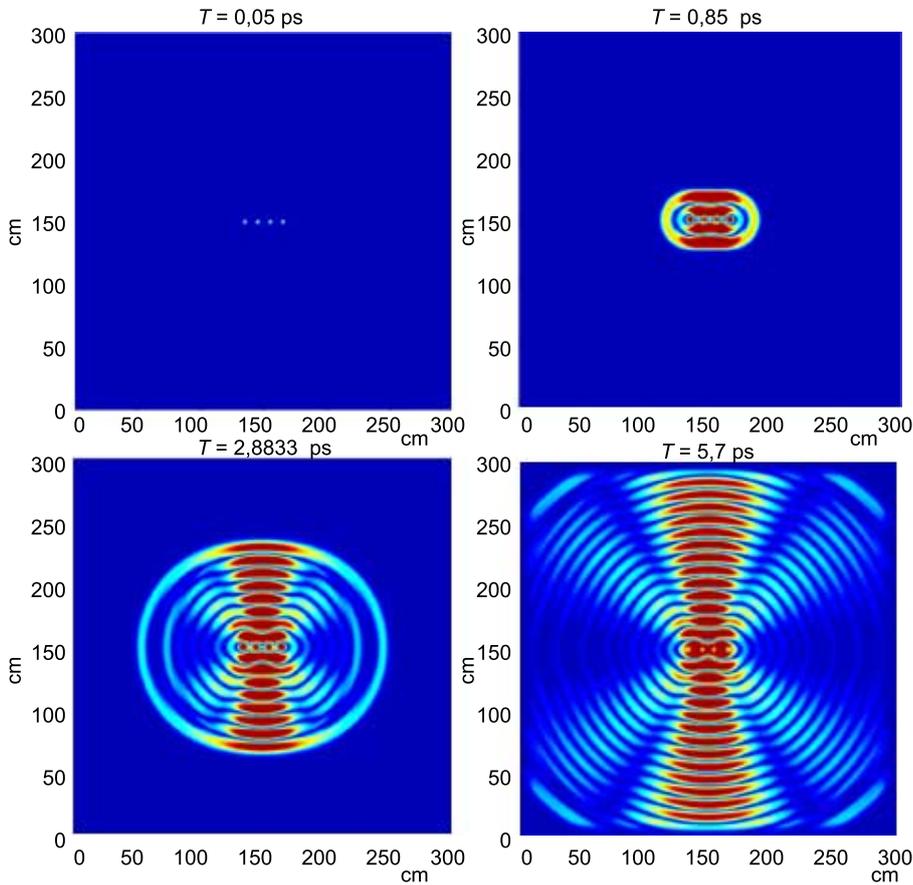
$$E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j) = E_x^n(i+\frac{1}{2}, j) + \Delta \tau \cdot Z \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad 3.80$$

$$E_y^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}) = E_y^n(i, j+\frac{1}{2}) - \Delta \tau \cdot Z \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \quad 3.81$$

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + \Delta \tau \cdot Z \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad 3.82$$

En la figura 16 se ilustra un ejemplo de FDTD-2D aplicado al análisis de una agrupación de cuatro fuentes puntuales espaciadas media longitud de onda y con la misma fase. Se puede observar cómo el campo lejos de la agrupación es el obtenido mediante los métodos de agrupaciones de antenas a partir de la transformación de la excitación.

Figura 16. Ejemplo FDTD-2D



Cuatro fuentes isotrópicas separadas $\lambda/2$ radiando en fase. Se observa cómo aparece el máximo de radiación en la dirección perpendicular al eje de la agrupación y los lóbulos secundarios.

Lectura complementaria

Sobre este ejemplo de FDTD-2D, puede consultarse la obra siguiente:
J. Anguera (2002). “Simulación electromagnética mediante el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo”. *Ingeniería y arquitectura* (núm. 23). Barcelona: La Salle, Universidad Ramon Llull.

2.3.5. FDTD - 3D

Para encontrar la solución FDTD en 3 dimensiones, se resuelven las ecuaciones de Maxwell para un sistema de coordenadas cartesianas. Partiendo de las ecuaciones 3.12-3.17 y aplicando la normalización, se obtienen las ecuaciones particularizadas para tres dimensiones (ecuaciones 3.83-3.88).

Ecuaciones para el campo magnético:

$$\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_y^n(i,j+\frac{1}{2},k+1) - E_y^n(i,j+\frac{1}{2},k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i,j+1,k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i,j,k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned} & \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_x^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad 3.84$$

$$\begin{aligned} & \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad 3.85$$

Ecuaciones para el campo eléctrico:

$$\begin{aligned} & \frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) - E_x^{n-1}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \right. \\ & \left. - \sigma E_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) \right] \end{aligned} \quad 3.86$$

$$\begin{aligned} & \frac{E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k) - E_y^{n-1}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} - \right. \\ & \left. - \sigma E_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) \right] \end{aligned} \quad 3.87$$

$$\begin{aligned} & \frac{E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2}) - E_z^{n-1}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k-1)}{\Delta z} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \right. \\ & \left. - \sigma E_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k+\frac{1}{2}) \right] \end{aligned} \quad 3.88$$

En aquellos casos en los que la conductividad sea nula, las ecuaciones 3.83-3.88 se simplifican en las ecuaciones 3.89-3.94:

$$\begin{aligned} & H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + \\ & + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \end{aligned} \quad 3.89$$

$$\begin{aligned}
H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_x^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \right]
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right]
\end{aligned} \tag{3.91}$$

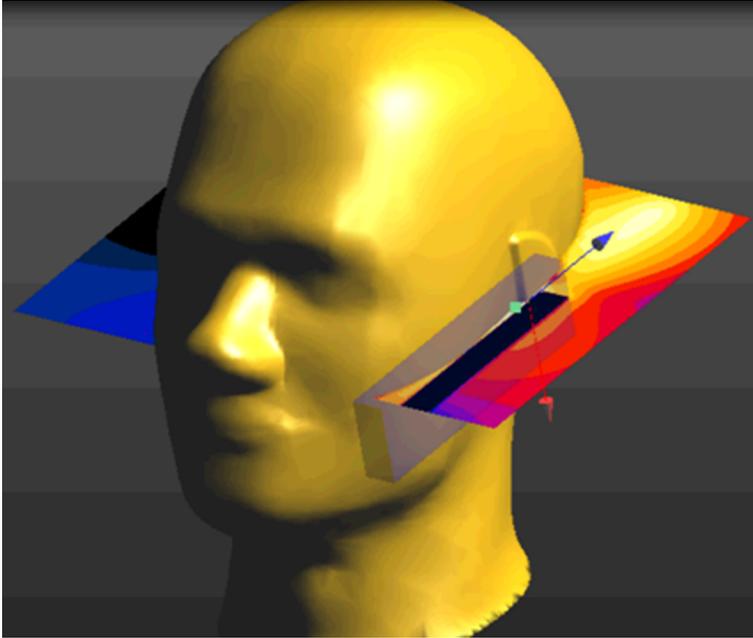
$$\begin{aligned}
E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) &= E_x^{n-1}(i+\frac{1}{2}, j, k) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[\frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \right. \\
&\left. - \sigma E_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) \right]
\end{aligned} \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}
E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k) &= E_y^{n-1}(i, j+\frac{1}{2}, k) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[\frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} - \right. \\
&\left. - \sigma E_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) \right]
\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}
E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2}) &= E_z^{n-1}(i, j, k+\frac{1}{2}) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} - \right. \\
&\left. - \sigma E_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k+\frac{1}{2}) \right]
\end{aligned} \tag{3.94}$$

En la figura 17 se ilustra la potencia del método FDTD-3D para problemas complejos como el de una antena de telefonía móvil radiando en presencia de un modelo de cabeza (*phantom-head*).

Figura 17. Ejemplo FDTD-3D. Modelo obtenido mediante el simulador Semcad



Simulación de campos producidos por una antena de telefonía móvil en presencia de un *phantom-head*.

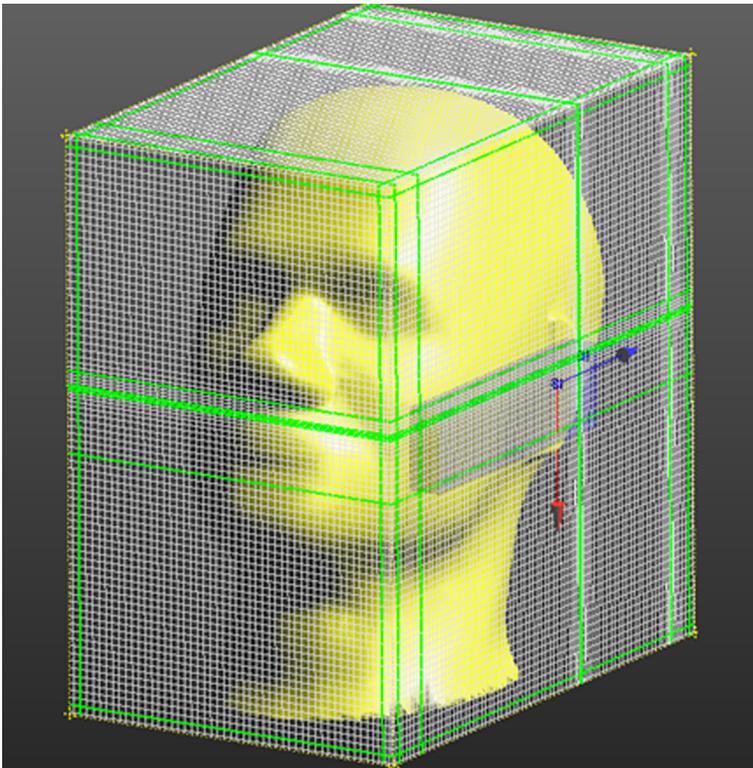
Ved también

Los *phantom-head* se estudian en el módulo "Tecnología de antenas para terminales móviles" de esta asignatura.

2.4. Ejemplos de programas de simulación electromagnética basados en FDTD

Un ejemplo de código electromagnético basado en FDTD es el programa Semcad (figura 18).

Figura 18. Discretización de un problema formado por una cabeza *phantom* y una antena para teléfono móvil



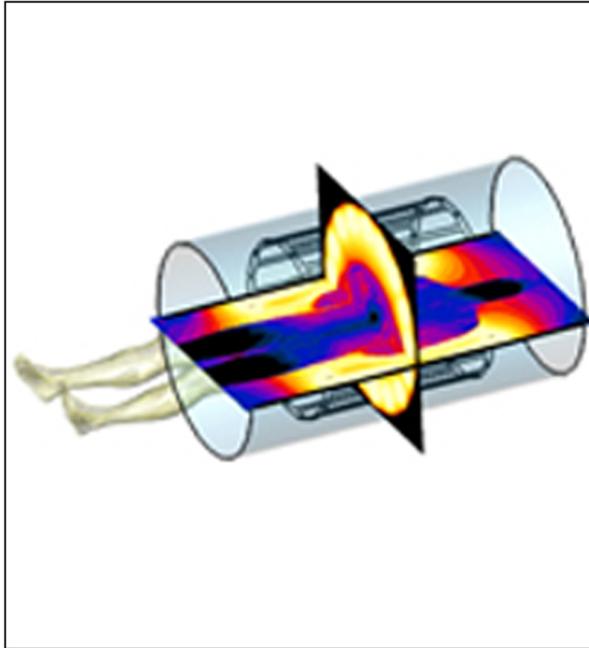
El problema tiene alrededor de 1 millón de celdas y requiere mallar un cubo que envuelva la cabeza y el teléfono, más un espacio de guarda.

2.5. Ejemplos de aplicación de FDTD

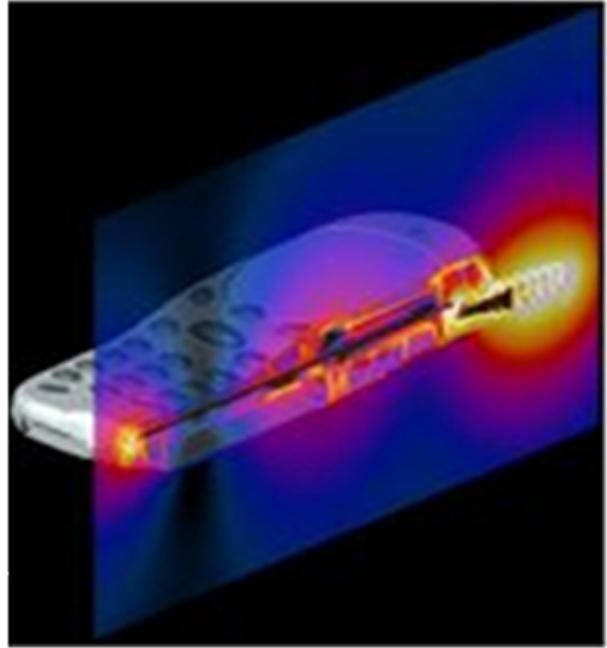
En la figura 19 se muestran algunos ejemplos donde el método FDTD es útil.

Figura 19. Ejemplos de aplicación del método FDTD

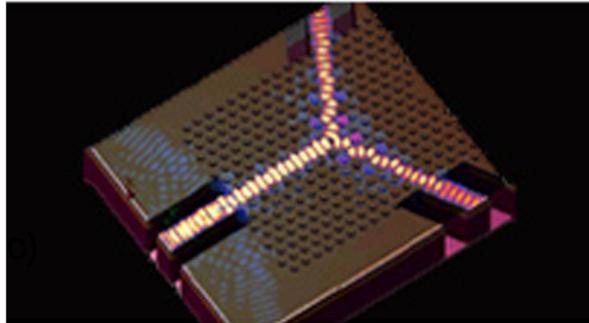
a.



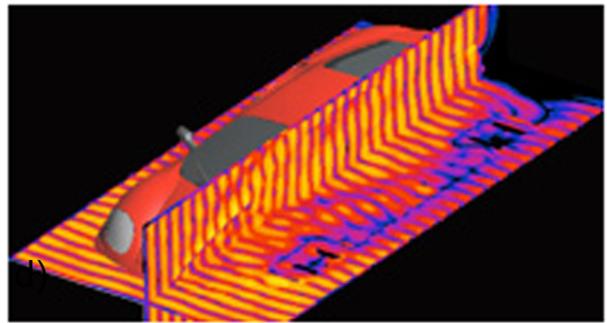
b.



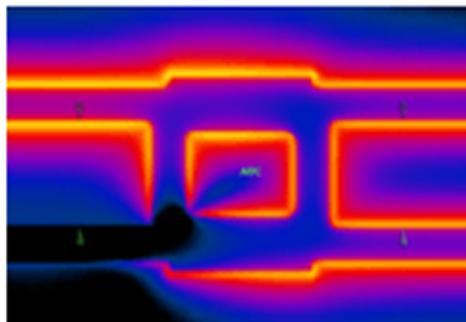
c.



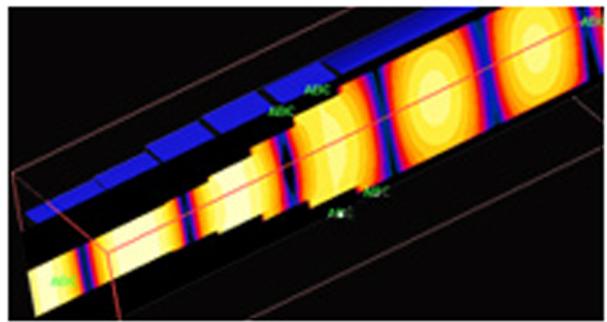
d.



e.



f.



- a. Simulación de resonancia magnética;
 - b. Radiación de antenas de telefonía móvil en presencia de cuerpo humano;
 - c. Aplicaciones de circuitos ópticos;
 - d. EMC/EMI;
 - e. Circuitos de microondas;
 - f. Guías de onda.
- Fuente: Semcad.

3. Método de los momentos (MoM)

Se va a mostrar la aplicación del denominado método de los momentos para realizar el cálculo de la corriente sobre una antena de hilo. A partir de la corriente sobre el dipolo, es posible encontrar entre otros parámetros de antena la impedancia de entrada y los campos radiados a partir de las ecuaciones de radiación.

A partir de este ejemplo particular, se tendrán las bases suficientes para entender problemas más grandes y complejos, como por ejemplo antenas con dos dimensiones y antenas embarcadas en estructuras.

Se va a considerar la corriente sobre la superficie de un dipolo alimentado en su punto central, y la impedancia de entrada será la impedancia que se podría medir en los terminales de entrada en este punto central.

Para empezar, se van a repasar las ecuaciones fundamentales que gobiernan el modelo electromagnético macroscópico: las ecuaciones de Maxwell. En este modelo se va a considerar que no hay fuentes de naturaleza magnética. A partir de estas ecuaciones y de esta consideración, se va a derivar el potencial vector \vec{A} de la forma habitual para producir las ecuaciones necesarias que van a permitir encontrar, numéricamente, las corrientes sobre la superficie.

Se introducirá una forma simple del método de los momentos (MoM), llamada *collocation*. Finalmente, se solucionará la ecuación matricial resultante para hallar una aproximación numérica de la intensidad sobre la superficie y de la impedancia de entrada del dipolo.

3.1. Potencial vector magnético

La cuarta ecuación de Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ permite definir \vec{B} en función de un potencial vector mediante la ecuación 3.95:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad 3.95$$

Ya que si la divergencia de un vector es 0, significa que este vector se puede definir como el rotacional de un potencial vector.

De las ecuaciones de Maxwell y de 3.95 se tiene que:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + j\omega\vec{A}) = 0 \quad 3.96$$

Lectura complementaria

Sobre el método de los momentos, puede consultarse la obra siguiente:

R. F. Harrington (1993). "Field computations by moment methods". *IEEE press*. Piscataway (NJ).

En la expresión 3.96, el vector combinado $\vec{E} + j\omega\vec{A}$ tiene un rotacional igual a cero. Recordando la propiedad: “Si un vector o combinación de vectores es irrotacional (rotacional = 0), este vector o combinación de vectores se puede definir como la divergencia de un escalar”, observamos que esta combinación de vectores es por tanto un vector irrotacional y puede ser escrito como el gradiente de un escalar:

$$\vec{E} + j\omega\vec{A} = -\vec{\nabla}\Phi \quad 3.97$$

O lo que es lo mismo:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \vec{\nabla}\Phi \quad 3.98$$

El signo de Φ ha sido escogido para ser consistentes con la definición de un potencial estático obtenido para $\omega = 0$. Ya que:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad 3.99$$

A continuación, si se calcula el rotacional de \vec{B} , y aplicando una de las identidades vectoriales, se obtiene la siguiente expresión:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad 3.100$$

Como puede observarse, la expresión $\mu(\vec{\nabla} \times \vec{H})$ puede relacionarse con la corriente y campo eléctrico a partir de las ecuaciones de Maxwell, obteniendo la siguiente ecuación:

$$\mu \cdot \vec{J} + j\omega\mu\epsilon \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad 3.101$$

Sustituyendo en 3.101 la ecuación 3.98, se obtiene el siguiente desarrollo:

$$\mu \cdot \vec{J} + j\omega\mu\epsilon \cdot (-j\omega\vec{A} - \vec{\nabla}\Phi) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad 3.102$$

$$\mu \cdot \vec{J} + j\omega\mu\epsilon \cdot (-j\omega\vec{A}) - j\omega\mu\epsilon \cdot \vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad 3.103$$

$$\mu \cdot \vec{J} + \omega^2\mu\epsilon \cdot \vec{A} - j\omega\mu\epsilon \cdot \vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad 3.104$$

$$\mu \cdot \vec{J} + \vec{A} \cdot (\omega^2\mu\epsilon + \nabla^2) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + j\omega\mu\epsilon \cdot \vec{\nabla}\Phi \quad 3.105$$

Sabiendo que $k = \omega\sqrt{\mu \cdot \epsilon}$, se obtiene:

$$\vec{A} \cdot (k^2 + \nabla^2) = -\mu \cdot \vec{J} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + j\omega\mu\epsilon \cdot \Phi \quad 3.106$$

Para definir el escalar Φ , se utiliza la condición de Lorentz:

$$\Phi = -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad 3.107$$

Sustituyendo la ecuación 3.107 en 3.105 y 3.106 se obtiene los siguientes resultados:

$$-(k^2 + \nabla^2) \cdot \vec{A} = \mu \cdot \vec{J} \quad 3.108$$

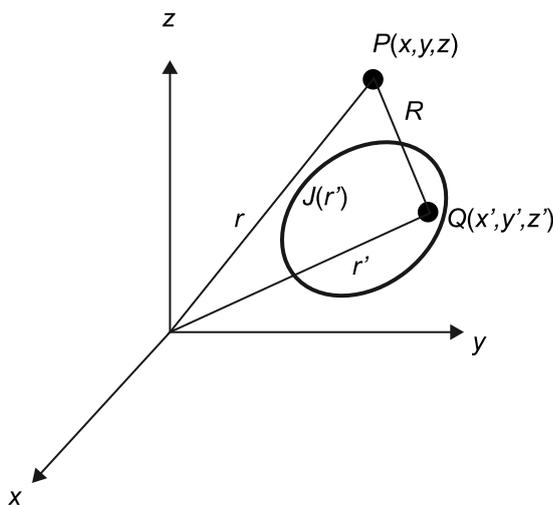
$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \cdot [k^2\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})] \quad 3.109$$

Las ecuaciones 3.108 y 3.109 son el punto de partida para determinar el campo eléctrico \vec{E} producido por una distribución de volumen de densidad de corriente \vec{J} . La solución de la ecuación 3.108 devuelve el potencial vector \vec{A} . Después, el potencial vector \vec{A} puede ser sustituido en 3.109 para obtener el campo eléctrico \vec{E} .

3.2. Radiación de una distribución de corriente

Consideremos una distribución volumétrica de corriente $\vec{J}(\vec{r})$ radiando hacia el espacio libre como se muestra en la figura 20. El potencial vector $\vec{A}(\vec{r})$ y el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ se observan desde el punto $P(x,y,z)$. El punto $Q(x',y',z')$ es un punto cualquiera dentro de la distribución de corriente que actúa como fuente.

Figura 20. Distribución de corriente $J(r')$, punto fuente $Q(x',y',z')$, y punto de observación de campo $P(x,y,z)$



Lectura complementaria

Sobre la condición de Lorentz, puede consultarse la obra siguiente:

J. Anguera; A. Pérez (2008).
Teoría d'antenes (ISBN:
978-84-935665-4-8).

La notación que se usa es la siguiente: $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x, y, z)$, $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y, z)$ y $\vec{J}(\vec{r}') = \vec{J}(x', y', z')$, donde las coordenadas primadas se refieren al dominio de la fuente.

La solución a la ecuación 3.108 para una corriente radiando en el espacio libre es bien conocida:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_V \frac{\mu \cdot \vec{J}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v})}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dV' \quad 3.110$$

Si las fuentes tienen una dependencia temporal armónica, la solución resulta ser:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[e^{j\omega t} \int_V \frac{\mu \cdot \vec{J}(\vec{r}') \cdot e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dV' \right] \quad 3.111$$

Con la notación habitual de fasores, y de ahora en adelante:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu \cdot \int_V \vec{J}(\vec{r}') \cdot G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot dV' \quad 3.112$$

Donde:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad 3.113$$

$$R = \sqrt{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]} \quad 3.114$$

Si se substituye 3.112 en 3.111, se obtiene la siguiente ecuación 3.115 para el campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (k^2 + \vec{\nabla}\vec{\nabla}) \int_V \vec{J}(\vec{r}') \cdot G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot dV' \quad 3.115$$

Para seguir, se considerará que únicamente hay densidades de corriente dirigidas en z , es decir, $\vec{J}(\vec{r}') = \hat{z}J(\vec{r}') = \hat{z}J(z')$, ya que será lo que ocurre en el caso de una antena dipolo de radio mucho más pequeño que la longitud. Siguiendo esta consideración:

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (k^2 + \vec{\nabla}\vec{\nabla}) \cdot \hat{z} \cdot \int_V J(\vec{r}') \cdot G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot dV' \quad 3.116$$

Lectura complementaria

Los detalles de la solución de la ecuación 3.108 pueden consultarse en la obra siguiente:

C. A. Balanis (1997). *Antenna theory: Analysis and design* (2.^a ed.). John Wiley.

Además, la componente del campo eléctrico que va a resultar más útil será la componente \hat{z} , por lo que solamente se usará dicha componente de la ecuación 3.116. Para ello, se multiplican ambos lados de la ecuación 3.116 por el vector unitario \hat{z} , para obtener:

$$E_z(r) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \int_V J_z(r') \cdot G(r, r') \cdot dV' \quad 3.117$$

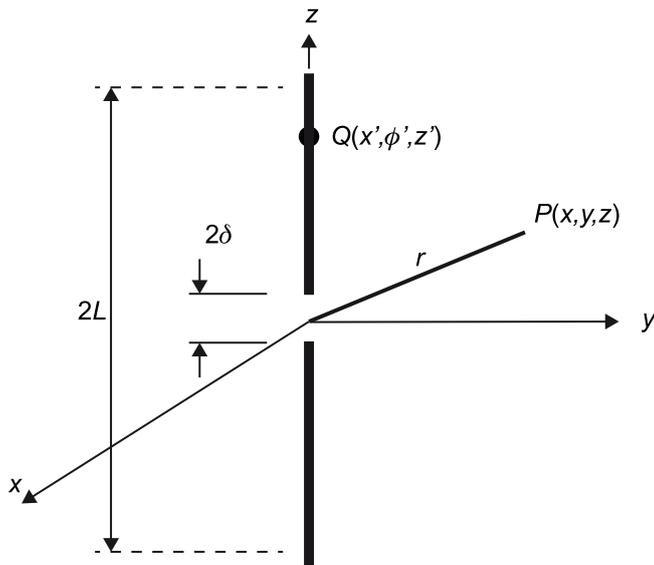
Esta ecuación 3.117 constituye el punto de partida para el análisis del dipolo con alimentación en el centro.

3.2.1. Formulación del problema del dipolo

Se considera un dipolo con alimentación central de longitud $2L$ (figura 21). El dipolo tiene una separación entre bornes de entrada de alimentación de 2δ . El dipolo tiene una sección circular de radio a . La excitación del dipolo la genera una fuente de tensión inyectada a través de los bornes de alimentación. El dipolo se considera un conductor eléctrico perfecto (PEC, de *perfect electric conductor*), y por tanto, no hay ninguna corriente de las que fluyen por su superficie que pueda penetrar en el interior del conductor pues la profundidad de penetración es nula. Por tanto, se toman las siguientes consideraciones:

- El dipolo está hecho de un conductor perfecto, y por tanto, las corrientes fluyen por su superficie (profundidad de penetración nula).
- El dipolo es lo suficientemente delgado como para que el sentido dominante de la corriente sea en la dirección \hat{z} .
- Las corrientes existentes cerca de los extremos del dipolo, y las que puedan penetrar al interior del tubo se consideran negligentemente pequeñas, y por tanto, pueden despreciarse y se consideran 0. Y muy importante, las corrientes en los extremos del dipolo se consideran 0, hecho que satisface las condiciones de contorno.
- Se asume que la alimentación del dipolo se efectúa mediante una fuente conectada a los bornes de alimentación llamada generador *delta gap*, que se describe a continuación.

Figura 21. Dipolo con alimentación en el centro de longitud $2L$ y con bornes de alimentación separados 2δ



El concepto de generador *delta-gap* tiene su origen en la noción de un voltaje V aplicado entre los bornes de alimentación del dipolo. Entre los bornes de alimentación, el voltaje V está relacionado con el campo eléctrico E_z de la siguiente forma:

$$V = \begin{cases} -\int_{-\delta}^{\delta} E_z(a, z) dz & |z| < \delta \\ 0 & \text{Otros} \end{cases} \quad 3.118$$

Normalizando con respecto a la tensión V , queda:

$$1 = \begin{cases} \int_{-\delta}^{\delta} \left(-\frac{E_z(a, z)}{V} \right) dz & |z| < \delta \\ 0 & \text{Otros} \end{cases} \quad 3.119$$

Si la distancia entre bornes de alimentación se hace infinitesimalmente pequeña, al hacer el límite de $\delta \rightarrow 0$, se puede identificar el contenido de la integral como la función delta. De esta forma, se puede escribir:

$$\left(-\frac{E_z(a, z)}{V} \right) = \delta(z)$$

Este razonamiento puede hacerse porque si la distancia entre bornes de alimentación es infinitesimalmente pequeña, la tensión que da la fuente solo existe en el punto en que $z \rightarrow 0$ porque se ha considerado $\delta \rightarrow 0$.

Por tanto, habiendo hecho esta consideración ($\delta \rightarrow 0$), entre los bornes de alimentación el voltaje V está relacionado con el campo eléctrico E_z de la siguiente forma:

$$E_z(a, z) = -V \cdot \delta(z) \quad 3.120$$

Consideremos ahora que se aplica la expresión de E_z de la ecuación 3.117 entre los bornes de alimentación cuando $\delta \rightarrow 0$. La ecuación 3.117 da la componente z del campo eléctrico observado en el punto $P(x, y, z)$ generado por la corriente del dipolo polarizada en z , que se monitoriza en el punto $Q(a, \phi', z')$ (figura 21).

En este punto del análisis, tanto J_z como E_z son todavía desconocidas. Para poder avanzar se puede desplazar el punto de observación P (punto donde se observa la componente z del campo eléctrico, producido por la J_z monitorizada desde Q) hasta la superficie del dipolo, donde se sabe que $E_z = 0$ en toda su longitud excepto entre los bornes de alimentación, donde viene dado por la expresión 3.117.

Con el punto P desplazado hasta la superficie del dipolo, la ecuación 3.117 da lugar a:

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot \int_V J_z(r') \cdot G(r, r') \cdot dV' = -j\omega\epsilon \cdot V \cdot \delta(z), \quad \rho = a, \quad -L < z < L \quad 3.121$$

En la ecuación 3.121, todo es conocido excepto la corriente $J_z(r')$. La ecuación es, por tanto, una ecuación integral de la cual hay que obtener la corriente.

En la ecuación 3.121, se puede suponer que la corriente se desplaza únicamente por la superficie del dipolo y que es independiente del ángulo en coordenadas cilíndricas ϕ , es decir, que alrededor del conductor, la corriente está uniformemente distribuida. De esta forma, se puede expresar la corriente como:

$$J_z(r) = I(z) \cdot \frac{\partial(\rho - a)}{2\pi\rho} \quad 3.122$$

El factor 2π se ha incluido porque $I(z)$ es la corriente total en amperios, como se demuestra a continuación:

$$I(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty J_z(r) \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(z) \cdot \frac{\partial(\rho - a)}{2\pi\rho} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \quad 3.123$$

Utilizando 3.123, se puede desarrollar la integral del lado izquierdo de la igualdad de la ecuación 3.121 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_V J_Z(r') \cdot G(r, r') \cdot dV' &= \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \int_0^a J_z(\rho', \phi', z') \cdot G(x, y, z | \rho', \phi', z') \cdot \rho' \cdot d\rho' \cdot d\phi' \cdot dz' = \\ &= \int_{-L}^L I(z') \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} G(x, y, z | a, \phi', z') \cdot d\phi' \cdot dz' \end{aligned} \quad 3.124$$

En este punto del análisis, se puede adoptar la aproximación llamada *reduced kernel* (figura 22). En esta aproximación se asume que el dipolo es tan delgado que se comete un error muy pequeño al evaluar el campo en el eje central del dipolo, en lugar de evaluarlo en la superficie.

La ventaja de esta aproximación se encuentra en la simplificación que puede hacerse en R en la ecuación 3.124:

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \sqrt{a^2 + (z-z')^2} \quad 3.125$$

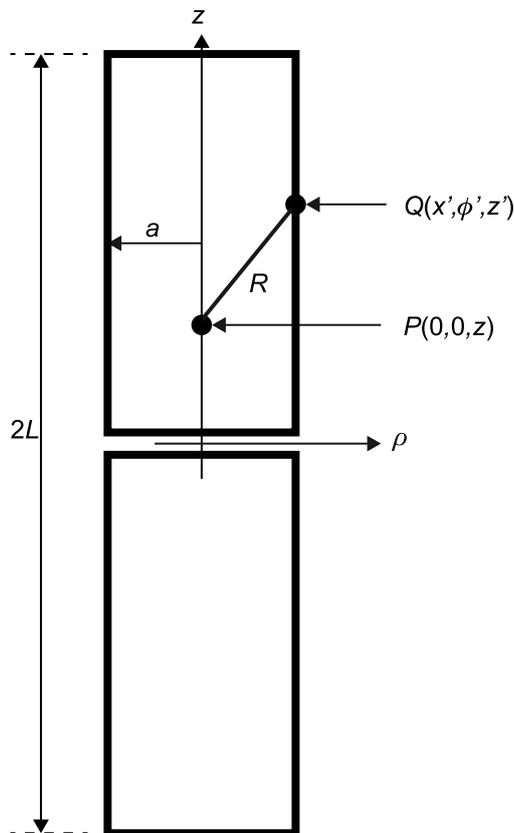
Ya que $x = y = 0$, $\rho' = a$.

Cabe destacar que R es ahora independiente del ángulo cilíndrico ϕ . Sustituyendo 3.125 en $G(r, r')$, se obtiene:

$$G(r, r') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \equiv \bar{G}(z, z') \quad 3.126$$

Ya que: $x = y = 0$, $\rho' = a$.

Figura 22. Dipolo con alimentación en el centro, con el punto de evaluación del campo (P) y el punto de evaluación de fuente (Q)



Substituyendo 3.126 en 3.124, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_V J_z(r') \cdot G(r, r') \cdot dV' &= \int_{-L}^L I(z') \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \bar{G}(z, z') \cdot d\varphi' \cdot dz' = \\ &= \int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' \end{aligned} \quad 3.127$$

Sustituyendo 3.127 dentro de 3.121, se obtiene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \cdot \int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' = -j\omega\epsilon \cdot V \cdot \delta(z), \quad \rho = 0, \quad -L < z < L \quad 3.128$$

Como último paso en la formulación, se puede normalizar la corriente $I(z)$ en el dipolo con la tensión de entrada V . Para ello se fija $V = 1$ para obtener:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \cdot \int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' = -j\omega\epsilon \cdot \delta(z), \quad \rho = 0, \quad -L < z < L \quad 3.129$$

3.3. Derivación de la ecuación integral de Hálén

A continuación, el objetivo es encontrar una solución a la ecuación 3.129.

Se reescribe la ecuación 3.129 de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \cdot \Phi(z) = \delta(z) \quad \rho = 0, \quad -L < z < L \quad 3.130$$

Donde:

$$\Phi(z) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \cdot \int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' \quad 3.131$$

En 3.130:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \cdot \Phi(z) = 0, \quad z \neq z' \quad 3.132$$

La solución a esta ecuación diferencial de segundo orden se puede escribir de la siguiente forma:

$$\Phi(z) = \begin{cases} A \cdot \cos(k \cdot z) + B \cdot \text{sen}(k \cdot z) & 0 < z < L \\ C \cdot \cos(k \cdot z) + D \cdot \text{sen}(k \cdot z) & -L < z < 0 \end{cases} \quad 3.133$$

Donde A , B , C y D son constantes por determinar. La función $\Phi(z)$ es proporcional al potencial vector. Debido a que el potencial vector resultante de la corriente, tal y como se define en 3.108, debe ser doblemente diferenciable, se puede asumir que $\Phi(z)$ también es doblemente diferenciable. Sin embargo, se está empleando la función singular $\delta(z)$ como la fuente en la ecuación 3.130.

Lectura complementaria

Sobre la derivación de la ecuación integral de Hálén, puede consultarse la obra siguiente:

K. K. Mei (1965). "On the integral equations of thin wire antennas". *IEEE transaction on antennas and propagation* (vol. 12, núm. 3, pág. 354-378).

Por consiguiente, se puede simplificar la doble diferenciación a una diferenciación simple. Esta simplificación permitirá obtener una mejora en la derivada de $\Phi(z)$, ya que la segunda derivada producirá la función delta ($\delta(z)$).

Debido a que la diferenciación de una función implica que esta debe ser continua alrededor del punto en que se está haciendo la derivada, se demuestra que $\Phi(z)$ debe ser continua en el punto $z = 0$. Aplicando esta condición de continuidad en la ecuación 3.133, resulta:

$$A = C \quad 3.134$$

Y por tanto:

$$\Phi(z) = \begin{cases} A \cdot \cos(k \cdot z) + B \cdot \text{sen}(k \cdot z) & 0 < z < L \\ A \cdot \cos(k \cdot z) + D \cdot \text{sen}(k \cdot z) & -L < z < 0 \end{cases} \quad 3.135$$

La siguiente simplificación que se realiza resulta de observar que la función $\Phi(z)$ debe ser una función par respecto de z . Debido a que la excitación del dipolo es simétrica con respecto al punto $z = 0$, la corriente, el potencial vector, y la función $\Phi(z)$ deben restar inalteradas cuando z se reemplaza por $-z$. Para forzar esta condición de paridad en la ecuación 3.135, debe darse que:

$$D = -B \quad 3.136$$

Y por tanto:

$$\Phi(z) = \begin{cases} A \cdot \cos(k \cdot z) + B \cdot \text{sen}(k \cdot z) & 0 < z < L \\ A \cdot \cos(k \cdot z) - B \cdot \text{sen}(k \cdot z) & -L < z < 0 \end{cases} \quad 3.137$$

Todavía hay que evaluar un coeficiente más, integrando la ecuación diferencial a lo largo de una pequeña región alrededor de $z = 0$, y forzando el límite hacia 0 del ancho de esta región. Como es sabido, la integral de la función $\delta(z)$ alrededor de $z = 0$ debe dar 1.

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \cdot \Phi(z) \cdot dz = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(z) \cdot dz = 1 \quad 3.138$$

Como ya se ha demostrado, $\Phi(z)$ debe ser continua alrededor de $z = 0$. Por lo tanto, la integral alrededor de $z = 0$ debe ser 0.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \Phi(z) \cdot dz = 0 \quad 3.139$$

Utilizando este resultado en la ecuación 3.138, se obtiene:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} dz = \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \Big|_0^+ - \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \Big|_0^- = -1 \quad 3.140$$

Este resultado muestra que el salto en la primera derivada necesario para producir la función delta debe ser de magnitud -1 . Aplicando este resultado a la ecuación 3.137, se obtiene:

$$2kB = -1$$

O lo que es lo mismo:

$$B = \frac{-1}{2k} \quad 3.141$$

Si se sustituye esta expresión 3.141 en la ecuación 3.137, se obtiene:

$$\Phi(z) = \begin{cases} A \cdot \cos(k \cdot z) - \frac{1}{2k} \cdot \text{sen}(k \cdot z) & 0 < z < L \\ A \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{1}{2k} \cdot \text{sen}(k \cdot z) & -L < z < 0 \end{cases} \quad 3.142$$

Sustituyendo 3.131 dentro de 3.142 y usando las características de $|z|$, se obtiene:

$$\frac{1}{j\omega\varepsilon} \cdot \int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' = A \cdot \cos(k \cdot z) - \frac{1}{2k} \cdot \text{sen}(k \cdot |z|) \quad 3.143$$

O lo que es lo mismo:

$$\int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' = \bar{A} \cdot \cos(k \cdot z) - \frac{j}{2\eta} \cdot \text{sen}(k \cdot |z|) \quad 3.144$$

Donde se ha aplicado que:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad 3.145$$

De la siguiente forma:

$$\frac{j\omega\varepsilon}{2k} = \frac{j\omega\varepsilon}{2\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = j \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{j}{2\eta} \quad 3.146$$

Y por lo tanto: $\bar{A} = A \cdot j\omega\varepsilon$.

La ecuación 3.144 es conocida como **ecuación integral de Hallén**, introducida por Hallén en 1938. Debido a que la corriente es una función par, se puede simplificar 3.144 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' &= \int_{-L}^0 I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' + \int_0^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' = \\ &= \int_0^L I(-z') \cdot \bar{G}(z, -z') \cdot dz' + \int_0^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' = \\ &= \{I(-z') = I(z')\} = \int_0^L I(z') \cdot [\bar{G}(z, z') + \bar{G}(z, -z')] \cdot dz' \end{aligned} \quad 3.147$$

Sustituyendo 3.147 en la ecuación 3.144, se obtiene:

$$\int_0^L I(z') \cdot K(z, z') \cdot dz' = \bar{A} \cdot \cos(k \cdot z) - \frac{j}{2\eta} \cdot \text{sen}(k \cdot z) \quad 3.148$$

En la ecuación 3.148, tanto z como z' están comprendidas en el intervalo $(0, L)$ y:

$$K(z, z') = \bar{G}(z, z') + \bar{G}(z, -z') \quad 3.149$$

$$K(z, z') = \frac{e^{-jk\nu_1}}{4\pi\nu_1} + \frac{e^{-jk\nu_2}}{4\pi\nu_2} \quad 3.150$$

donde $\nu_1 = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$ y $\nu_2 = \sqrt{a^2 + (z + z')^2}$

Las ecuaciones 3.148 y 3.150 forman el punto de partida de la solución numérica para la corriente mediante el método de los momentos. Hay que tener en cuenta que todavía hay un coeficiente indeterminado: \bar{A} .

En este punto de la discusión, hay que utilizar ya la suposición comentada anteriormente, que aboga por que la corriente del dipolo se desvanece en los extremos de este, es decir, $z = L$. Esta suposición se puede utilizar durante la siguiente reducción numérica, como se verá a continuación.

Lectura complementaria

Sobre la ecuación integral de Hallén, puede consultarse la obra siguiente:

E. Hallén (1938). "Theoretical investigations into transmitting and receiving qualities of antennas". *Nova Acta Regiae Soc. Sci. Upsaliensis* (enero, pág.1).

3.4. La solución mediante el método de los momentos

Para iniciar la representación mediante el método de los momentos, se expresa la corriente $I(z)$ como una suma de funciones pulso ponderadas con un coeficiente para cada una de ellas, tal y como se puede ver en la figura 23:

$$I(z) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot P_n(z) \quad 3.151$$

Donde:

$$P_n(z) = \begin{cases} 1 & (n-1) \cdot \Delta < z < n \cdot \Delta \\ 0 & \text{Otros} \end{cases} \quad 3.152$$

Y se define: $\Delta = \frac{L}{N}$.

Sustituyendo 3.151 en la ecuación 3.148, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \int_0^L P_n(z') \cdot K(z, z') \cdot dz' &= \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} K(z, z') \cdot dz' = \\ &= \bar{A} \cdot \cos(kz) - \frac{j}{2\eta} \cdot \text{sen}(k|z|) \end{aligned} \quad 3.153$$

Como criterio, se va a evaluar la ecuación 3.153 en los puntos siguientes:

$$z = (m-0,5) \cdot \Delta \quad m = 1, 2, \dots, N \quad 3.154$$

Y se obtiene:

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} K[(m-0,5) \cdot \Delta, z'] \cdot dz' = \bar{A} \cdot \cos[k \cdot (m-0,5) \cdot \Delta] - \frac{j}{2\eta} \cdot \text{sen}[k \cdot (m-0,5) \cdot \Delta] \quad 3.155$$

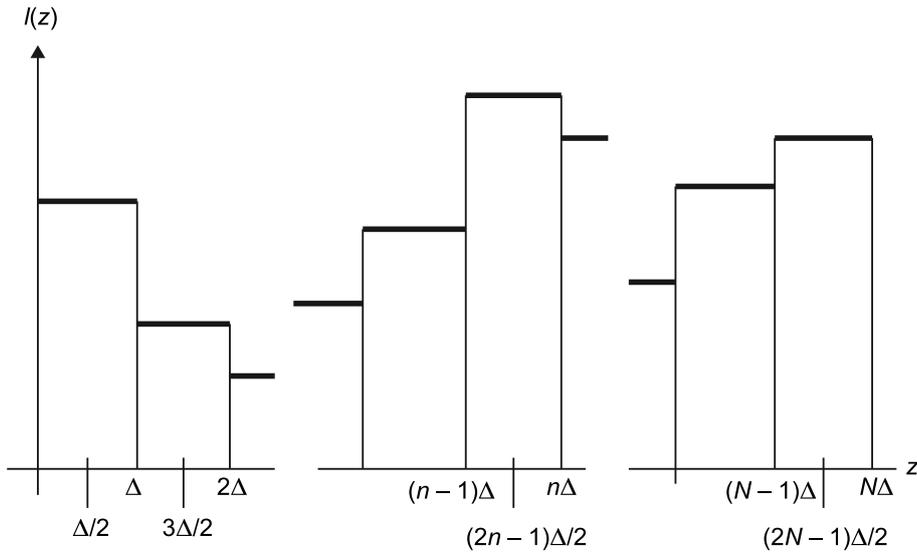
Lecturas complementarias

Sobre la solución mediante el MoM, pueden consultarse:

W. L. Stutzman; Gary A. Thiele (1998). "Antenna theory and design" (2.ª ed.). John Wiley.

L. L. Tsai; C. E. Smith (1978). "Moment methods in electromagnetics for undergraduates". *IEEE trans. education* (E-21, 14).

Figura 23. Representación con pulsos de la corriente $I(z)$



Hay que recordar que la variable \tilde{A} todavía tiene que determinarse. Se puede solucionar esta incógnita utilizando ahora la condición que se comentaba anteriormente: $I(L) = 0$. En la ecuación 3.155, el desvanecimiento de la corriente en $z = L$ implica que $\alpha_N = 0$. Insertando esta condición en la ecuación 3.155, resulta la matriz de ecuaciones siguiente:

$$\sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n \cdot \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} K[(m-0,5) \cdot \Delta, z'] \cdot dz' - \tilde{A} \cdot \cos[k \cdot (m-0,5) \cdot \Delta] = -\frac{j}{2\eta} \cdot \text{sen}[k \cdot (m-0,5) \cdot \Delta] \tag{3.156}$$

Escribiéndola en forma matricial:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \tag{3.157}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1(N-1)} & c_1 \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2(N-1)} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ r_{N1} & r_{N2} & \dots & r_{N(N-1)} & c_N \end{bmatrix} \tag{3.158}$$

Donde:

$$\mathbf{a} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{N-1} \ \tilde{A}]^T \tag{3.159}$$

$$\mathbf{b} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_N]^T \tag{3.160}$$

Donde T significa la matriz transpuesta. De la ecuación matricial 3.157 hay que encontrar la matriz \mathbf{a} , que contiene los coeficientes con los cuales se ha redefinido la corriente para usar el método de los momentos. El resto de elementos de \mathbf{R} y de \mathbf{b} son los siguientes:

$$r_{mn} = \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} K[(m-0,5)\Delta, z'] \cdot dz' \quad m=1, 2, \dots, N; \quad n=1, 2, \dots, N-1 \quad 3.161$$

$$c_m = -\cos[k(m-0,5)\Delta] \quad m=1, 2, \dots, N; \quad 3.162$$

$$\beta_m = -\frac{j}{2\eta} \cdot \text{sen}[k(m-0,5)\Delta] \quad m=1, 2, \dots, N; \quad 3.163$$

Para tratar de simplificar las expresiones, un paso que puede hacerse a continuación es normalizar las ecuaciones como se indica a continuación.

Según 3.154:

$$z = (m-0,5) \cdot \Delta \quad 3.164$$

Y si se realiza el cambio de variable $u = k \cdot z'$:

$$du = k \cdot dz' \quad 3.165$$

Las ecuaciones quedan entonces:

$$r_{mn} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{(n-1)\frac{kL}{N}}^{n\frac{kL}{N}} \left\{ \frac{e^{-j\nu_1}}{\nu_1} + \frac{e^{-j\nu_2}}{\nu_2} \right\} \quad 3.166$$

donde $\nu_1 = \sqrt{(ka)^2 + \left((m-0,5)\frac{kL}{N} - u\right)^2}$ y $\nu_2 = \sqrt{(ka)^2 + \left((m-0,5)\frac{kL}{N} + u\right)^2}$

$$c_m = -\cos\left[k(m-0,5) \cdot \frac{kL}{N}\right] \quad 3.167$$

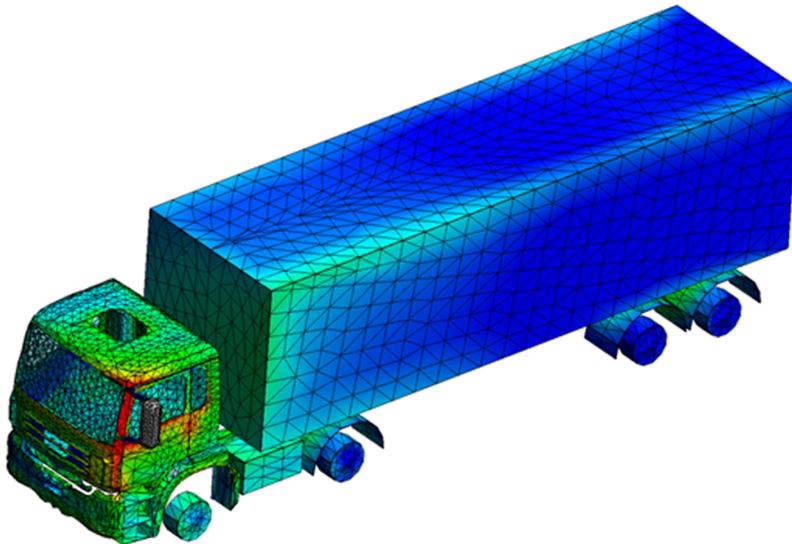
$$\beta_m = -\frac{j}{2\eta} \cdot \text{sen}\left[k(m-0,5) \cdot \frac{kL}{N}\right] \quad 3.168$$

Así, el problema consiste en encontrar una ecuación, en este caso, una ecuación integral cuya incógnita es la corriente a lo largo del hilo (generalizando, a lo largo de una estructura conductora). La tensión o fuente de excitación es conocida. Para encontrar la corriente, se plantea un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, donde las incógnitas son los pesos que definen la corriente. Con la aplicación de la ecuación de contorno (campo nulo en el conductor), se resuelve, mediante inversión de la matriz, el sistema de ecuaciones. Una vez encontrada la corriente, hallar los parámetros de antena resulta inmediato. Por ejemplo, para calcular los diagramas de radiación en campo lejano, se integra la corriente a lo largo del hilo por los procedimientos habituales.

3.5. Ejemplo de MoM

Un ejemplo de programa de simulación electromagnética basado en MoM es el FEKO (figura 24).

Figura 24. Ejemplo de discretización MoM en un camión



El mallado es adaptativo, de modo que la malla resulta más fina cerca de la ubicación de la antena (en la cabina del camión).

3.6. Ejemplos de aplicaciones

La figura 25 muestra algunas aplicaciones donde el método MoM es útil.

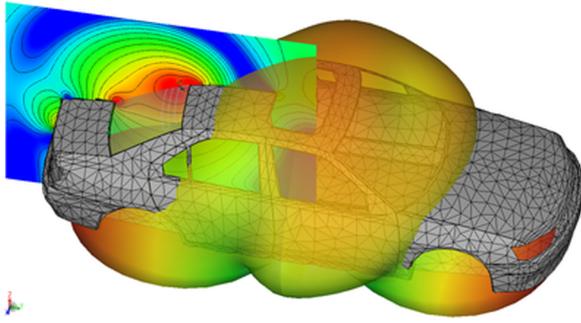
Lectura complementaria

Sobre el cálculo de los diagramas de radiación en campo lejano, puede consultarse la obra siguiente:

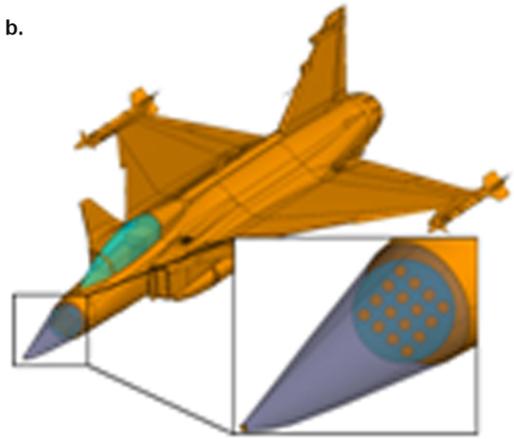
J. Anguera; A. Pérez (2008).
Teoría d'antenes (ISBN:
978-84-935665-4-8).

Figura 25. Ejemplos de aplicación del método MoM

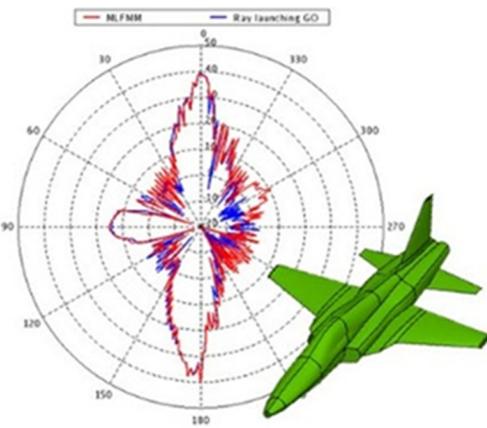
a.



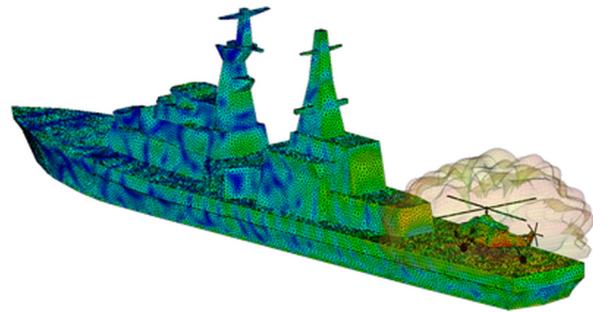
b.



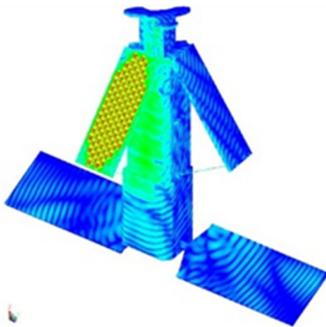
c.



d.



e.



f.



a. Automoción; b. Diseño de radomos; c. Radcar cross section (RCS); d. Naval; e. Aeroespacial; f. Antenas conformadas.
Fuente: Feko.

Resumen

Las ecuaciones de Maxwell en entornos complejos, bien por su geometría bien por la constitución de los materiales, provoca que su resolución deba abordarse por métodos numéricos. Entre los métodos más destacados encontramos el FDTD y el MoM.

El primero, el método FDTD, es un método iterativo que no requiere inversión de matrices pero necesita mallar no solo el dominio de la estructura sino todo el espacio. Este método pues resulta eficiente cuando intervienen en el problema antenas en entornos complejos, como puede ser antenas de telefonía móvil en presencia del cuerpo humano donde es necesario mallar no solo el dominio del teléfono móvil sino todo el volumen cercano, incluida la cabeza. El método trabaja en el dominio del tiempo y mediante la excitación con una fuente de banda ancha es posible calcular los parámetros de antena como la impedancia de antena mediante transformación de Fourier. Como el mallado no acostumbra a cubrir el campo lejano, se requiere de una rutina de transformación de los campos cercanos a campos lejanos con el objetivo de obtener los parámetros de radiación como diagramas, eficiencias y directividad de antena.

Por el contrario, el MoM realiza una discretización de la estructura de forma que se obtiene una matriz de impedancia que debe invertirse. Una vez se ha obtenido la matriz de impedancias, se imponen las fuentes que permiten encontrar las incógnitas (la corriente en cada punto del mallado). Una vez se han determinado las corrientes es posible determinar todos los parámetros de antena tales como la impedancia de entrada, y las corrientes sobre la estructura. Mediante integración de dichas corrientes, es posible determinar los campos tanto cercanos como radiados y a partir de aquí obtener la eficiencia de radiación, diagramas de radiación, o la polarización, entre los principales parámetros de radiación.

Tanto el MoM como el FDTD están presentes en muchos de los programas comerciales de simulación electromagnética.

Bibliografía

- Anguera, J.** (2002). "Simulación electromagnética mediante el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo". *Ingeniería y arquitectura* (núm. 23). Barcelona: La Salle, Universidad Ramon Llull.
- Anguera, J.; Pérez, A.** (2008). *Teoria d'antenes* (ISBN: 978-84-935665-4-8).
- Balanis, C. A.** (1997). *Antenna theory: Analysis and design* (2.^a ed.). John Wiley.
- Berenger, J. P.** (1994). "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves". *Journal of Computational Physics* (vol. 114, núm. 2, pág. 185-200, octubre).
- Berenger, J. P.** (1996). "Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves". *Journal of Computational Physics* (vol. 127, núm. 2, pág. 363-379).
- Courant, R.; Friedrichs, K.; Lewy, H.** (1967). "On the partial Difference Equations of Mathematical Physics". *Journal of Research and Development* (vol. 11, núm. 2, pág. 215-234).
- Elsherbeni, A.; Demir, V.** (2009). *The finite-difference time-domain method for electromagnetics with Matlab simulations*. Scitech Publishing Inc.
- Hallén, E.** (1938). "Theoretical investigations into transmitting and receiving qualities of antennas". *Nova Acta Regiae Soc. Sci. Upsaliensis* (enero, pág.1).
- Harrington, R. F.** (1993). "Field computations by moment methods". *IEEE press*. Piscataway (NJ).
- Hoorfar, A.; Jamnejad, V.** (2003). "Electromagnetic modeling and analysis of wireless communication antennas". *IEEE microwave magazine* (marzo, pág. 51-67).
- Mei, K. K.** (1965). "On the integral equations of thin wire antennas". *IEEE transaction on antennas and propagation* (vol. 12, núm. 3, pág. 354-378).
- Shlager, K. L.; Schneider, J.** (1995). "A selective survey of finite-difference time-domain literature". *IEEE antennas and propagation magazine* (vol. 37, núm. 4).
- Stutzman, W. L.; Thiele, Gary A.** (1998). "Antenna theory and design" (2.^a ed.). John Wiley.
- Taflove, A.; Hagness, S.** (2006). *Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method* (3.^a ed.). Artech House.
- Tsai, L. L.; Smith, C. E.** (1978). "Moment methods in electromagnetics for undergraduates". *IEEE trans. education* (E-21, 14).
- Yee, K. S.** (1966). "Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media". *IEEE trans. on antennas and propagation* (vol. 14, núm. 8, pág. 302-307).

