Matrices en el grafismo digital y en el desarrollo de webs

Salvador Linares Mustarós

PID_00215910

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares del copyright.

Índice

Introducción 5

1. Conceptos básicos 7
1.1. Definición de matriz 7
1.2. Dimensión de una matriz 8
1.3. Tipos de matrices 8
1.4. Operaciones con matrices y propiedades de las operaciones 8
1.5. Ecuaciones con matrices 10
1.6. Aplicaciones en el mundo del diseño 10
1.7. Sistemas de coordenadas cartesianas 11
1.8. Sistema de coordenadas polares en el plano 12
1.9. Vectores 12

2. Ejercicios con solución 14

Introducción

El tema de matrices y vectores es un tema importante en el grafismo digital y en el desarrollo de webs por dos razones.

1) El hecho de tener ordenados un conjunto de datos en una estructura de filas y columnas permite acceder a los mismos rápidamente y trabajar con estos de una manera rutinaria una vez se ha establecido el convenio de ordenación.

2) Son fundamentales a la hora de hacer traslaciones, giros y simetrías, lo que permite introducir nuevos movimientos sorpresivos para los usuarios.

1. Conceptos básicos

1.1. Definición de matriz

A efectos teóricos, consideraremos una matriz como un conjunto de objetos ordenados en filas y en columnas. Habitualmente, los objetos son números.

Por convenio, una matriz se lee como una página de un libro de texto. De izquierda a derecha y de arriba abajo.

	Columna 1	Columna 2	Columna 3	...	Columna *m*
Fila 1					
Fila 2					
Fila 3					
... Fila *n*					

Con el convenio, cada elemento de la matriz queda perfectamente identificado con su número de fila y de columna (observad que la palabra mnemotécnica *fuego* sirve para recordar que primero siempre va la fila y después la columna).

Escribiremos, pues, una matriz general siguiendo la notación siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Con esta notación, el elemento a_{ij} es el número que está en la fila *i* empezando a contar por arriba, y la columna *j* empezando a contar por la izquierda.

1.2. Dimensión de una matriz

La dimensión de una matriz es el número de filas y columnas que tiene la matriz. Por convenio, si una matriz tiene *n* hilas y *m* columnas, diremos que la matriz tiene dimensión (o tiene orden) *n* x *m*. Para recordar que siempre se empieza diciendo el número de filas seguido después por el número de columnas, volveremos a utilizar la palabra mnemotécnica *fuego*.

1.3. Tipos de matrices

1) Una matriz formada por una sola fila se denomina **matriz fila**.

2) Una matriz formada por una sola columna se denomina **matriz columna**.

3) Una matriz formada con el mismo número de filas que de columnas se denomina **matriz cuadrada**.

4) Una matriz con todos los componentes iguales a 0 se denomina **matriz nula**. Se suele representar como matriz 0.

5) Una matriz cuadrada con 1 en la diagonal y 0 en el resto de las posiciones, es decir, una matriz tal que $a_{ii} = 1$ y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, se denomina **matriz identidad**. Se suele representar como Id.

1.4. Operaciones con matrices y propiedades de las operaciones

Dos matrices de la misma dimensión se pueden sumar o restar. Entonces, si denominamos *C* la suma (o resta) de las matrices *A* y *B*, cada elemento de la matriz *C* queda identificado como $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ en caso de suma y como $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, en caso de resta.

Si a una matriz cualquiera *A* le sumamos una matriz nula 0 adaptada para hacer la suma, obtendremos siempre la matriz de partida *A*. Es a decir, $A + 0 = A$, sea cual sea *A*. Por lo tanto, tenemos un **elemento neutro para la suma**.

Si a una matriz cualquiera *A* le sumamos la matriz con todos los mismos valores cambiados de signo, obtendremos la matriz nula. Por lo tanto, por cada matriz *A* tenemos un **elemento opuesto para la suma** que se suele representar como $-A$, y que cumple $A + (-A) = \mathrm{Id}$.

La suma de matrices cumple la propiedad conmutativa ($A + B = B + A$) y la propiedad asociativa ($A + B + C = [A + B] + C = A + [B + C]$).

La multiplicación de una matriz por un número *k* se hace multiplicando cada número de la matriz por el número *k*.

De este modo, si denominamos D la matriz resultante de hacer $k \cdot A$, cada elemento de la matriz D queda identificado como $d_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

En la multiplicación de matrices, debemos tener presentes cinco puntos muy importantes:

1) Para que la multiplicación de matrices esté definida, es necesario que el número de columnas de la primera matriz que multiplica coincida con el número de filas de la segunda. De este modo, dos matrices A y B que están adaptadas para hacer la multiplicación deben tener dimensiones tipo r x n y n x s.

2) Solo se pueden multiplicar las filas de la primera matriz por las columnas de la segunda matriz. Por lo tanto, la palabra mnemotécnica *fuego* (***f****ilas* o c *olumnas*) adquiere sentido completo en la multiplicación de matrices.

3) El resultado de multiplicar una fila por una columna siempre es un número que se obtiene de sumar los productos de elementos que ocupan "posiciones parecidas", en el sentido de que el primer elemento de la fila multiplica el primero de la columna; el segundo, el segundo; el tercero, el tercero, etc. Por lo tanto, un elemento cualquiera del producto está definido por $m_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

4) Si tenemos dos matrices adaptables para hacer la multiplicación, la dimensión de la matriz que se consigue tiene el mismo número de filas que la primera matriz que multiplica y el mismo número de columnas que la segunda matriz que multiplica. Por lo tanto, si las matrices A y B se pueden multiplicar, y A tiene dimensión m x n y B tiene dimensión n x s, entonces $A \cdot B$ tiene dimensión m x s.

La multiplicación de matrices cumple la propiedad asociativa

$(A \cdot B \cdot C = [A \cdot B] \cdot C = A \cdot [B \cdot C])$.

La multiplicación de matrices no tiene que cumplir de manera forzosa la propiedad conmutativa. Es decir, puede suceder que haya matrices A y B tales que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Si multiplicamos una matriz cuadrada A por una matriz identidad Id adaptada para hacer la multiplicación, obtenemos siempre la matriz A. Es decir, $A \cdot \mathrm{Id} = A$.

Si multiplicamos una matriz identidad Id adaptada para hacer una multiplicación con una matriz cuadrada cualquiera A, volvemos a obtener siempre la matriz A. Es a decir, $\mathrm{Id} \cdot A = A$.

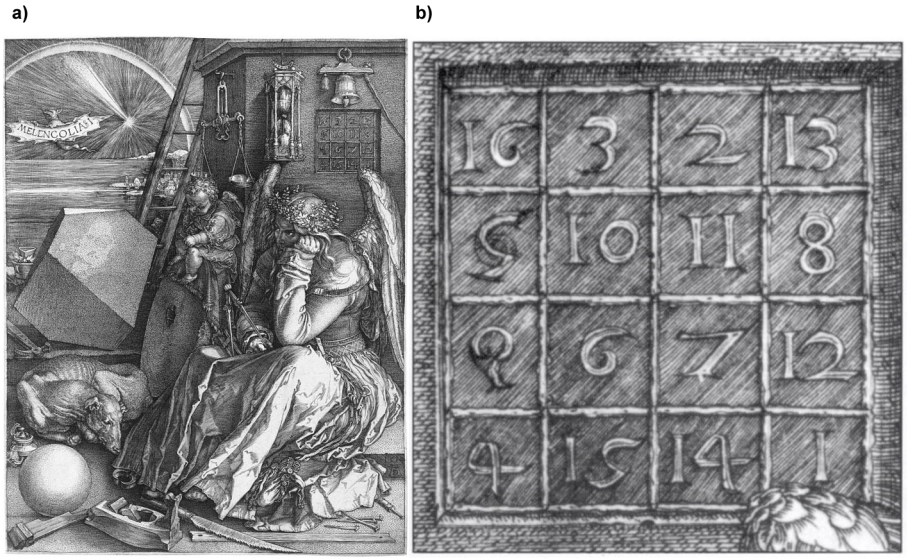
Hay otras muchas propiedades que combinan las diferentes operaciones de matrices vistas hasta ahora. Por ejemplo, dado un número real k y dos matrices A y B, se cumple que $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B$.

1.5. Ecuaciones con matrices

Si respetamos el convenio de orden de operaciones paréntesis, multiplicaciones y divisiones, sumas y restas, es posible crear ecuaciones en las que la incógnita es una matriz. Para encontrar la matriz resultante, suele haber dos vías posibles. O bien se sustituye la matriz por unos elementos en forma de incógnita y se encuentra por qué valores se cumple la ecuación, o bien se transforma la ecuación matricial en ecuaciones matriciales equivalentes hasta obtener una ecuación en la que la matriz se pueda encontrar de manera inmediata.

1.6. Aplicaciones en el mundo del diseño

Seguramente, la matriz más famosa aplicada a la creación de arte es la matriz que aparece en la obra de Albrecht Dürer, *Melancolía I*. Se trata de una matriz 4 x 4 en la que el resultado de todas las sumas por filas o por columnas es el número 34.



a) Albrecht Dürer (1415). *Melancolía I*. **b)** Detalle de la matriz. Las dos cifras centrales de la última fila, 15 y 14, forman el año en el que se ejecutó la obra, 1514.

Las matrices tienen muchas utilidades en el diseño y la creación de aplicaciones interactivas, además del embellecimiento gráfico de una obra.

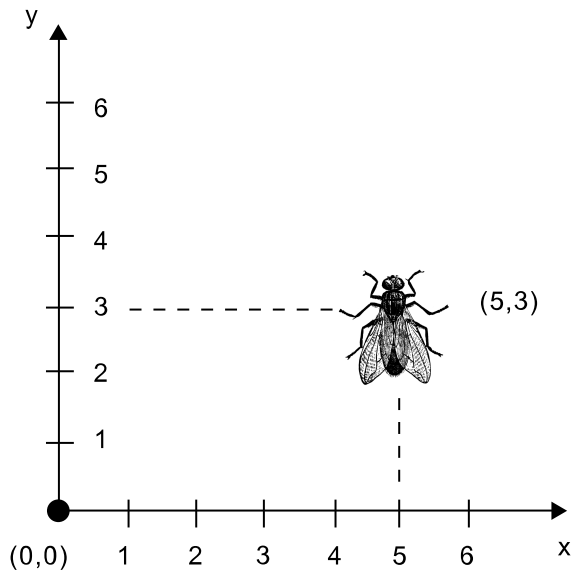
Por ejemplo, con las matrices fila es posible identificar puntos del plano o el espacio. También es posible representar numéricamente con las matrices los vectores, elementos básicos para obtener transformaciones del plano o el espacio tipo traslaciones, cambio de escalas, rotaciones y simetrías.

Finalmente, las matrices también tienen una utilidad increíble en la programación informática. Tener la información ordenada permite acceder sin errores a los datos y llevar a cabo un trabajo sistemático que minimiza los errores de operaciones entre datos.

1.7. Sistemas de coordenadas cartesianas

Si tenemos dos rectas reales perpendiculares con unidades asignadas, todo punto representado por una matriz fila tipo (x, y), con el convenio de que la x y la y son las distancias en las rectas en un orden determinado, identifica una sola posición en el plano.

Por ejemplo, la mosca del dibujo se encuentra en la posición (5,3), puesto que las distancias en las rectas son de 5 y 3 unidades.



Si aceptamos que una distancia negativa indica que la mosca se encuentra en el otro lado de la recta, la idea nos permite determinar de manera unívoca cada punto del plano mediante dos números reales denominados habitualmente la coordenada x o abscisa y la coordenada y u ordenada.

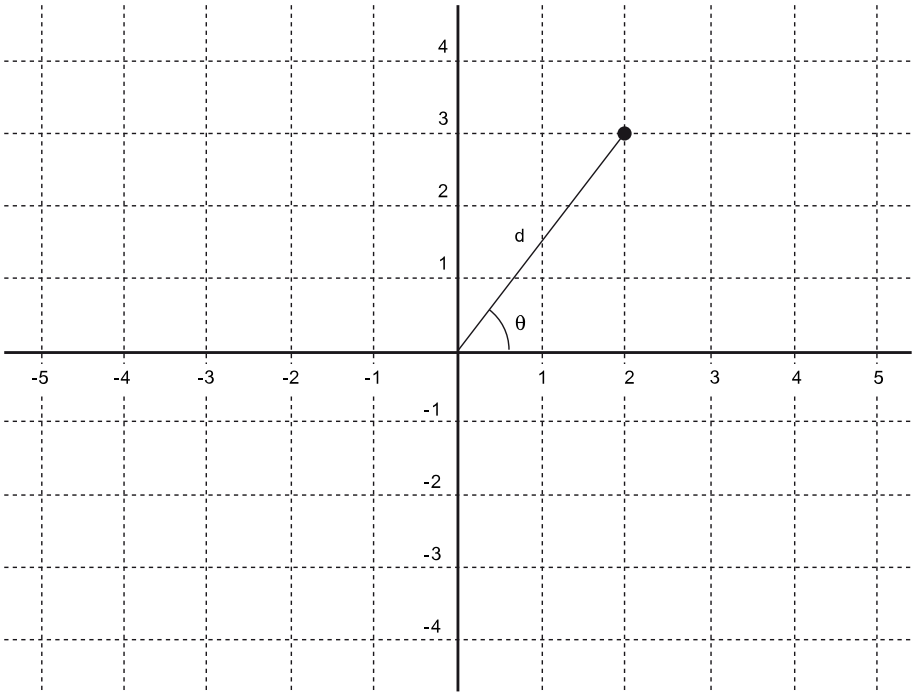
La misma idea puede extrapolarse para determinar unívocamente cada punto del espacio por medio de tres números reales, denominados habitualmente la coordenada x, la coordenada y y la coordenada z.

De hecho, se dice que esta forma de representar los puntos del plano o del espacio la ideó Descartes de pequeño cuando, enfermo en la cama, observaba el vuelo de una mosca por la habitación.

1.8. Sistema de coordenadas polares en el plano

Una segunda manera de identificar todos los puntos del plan bidimensional consiste en dar la distancia al centro de coordenadas y el ángulo respecto del eje 0X positivo.

De este modo, todo punto del tipo (x, y) del plano queda identificado con los valores $d=\sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = arctg\frac{y}{x}$ del dibujo siguiente.



1.9. Vectores

En el plano o en el espacio tridimensional, dados dos puntos, denominamos a la flecha que sale del primero y llega al segundo un **vector de dirección**.

Un vector no depende del punto origen ni del punto final. Un **vector** es una dirección de movimiento en el plano.

Los valores del desplazamiento en un eje y en el otro se denominan **componentes del vector**.

Una manera sencilla de encontrar los componentes de un vector que une dos puntos consiste en restar matricialmente el punto de salida a su punto de llegada.

Para no confundir puntos y vectores, los vectores suelen llevar una flecha. De esta manera, el vector que va de C a D se denota como $\overrightarrow{CD}$, con una flecha sobre las letras que sale de C y llega a D.

Los vectores tienen una dirección, un sentido y un módulo o longitud. La dirección es la recta que incluye el vector. El sentido es hacia donde señala la flecha. El módulo o la longitud del vector es su medida. Esta medida se puede calcular con el teorema de Pitágoras y el valor indica la distancia que separa el punto de salida y el punto de llegada.

Dados dos puntos $P_1 = (a, b)$ y $P_2 = (c, d)$, la fórmula para encontrar la distancia entre puntos o longitud del vector v con origen P_1 y llegada P_2 es:

$$d(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2) = |\mathrm{v}| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

2. Ejercicios con solución

El objetivo de esta sección es recordar conceptos y técnicas matemáticas de manera eminentemente práctica, a partir de ejemplos concretos.

Ejercicio 1

Encontrad las dimensiones de las matrices siguientes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz de una sola fila y tres columnas. Entonces tiene dimensión 1 x 3.

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ es una matriz de tres filas y una columna. Entonces tiene dimensión 3 x 1.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz de dos filas y tres columnas. Entonces tiene dimensión 3 x 2.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz de tres filas y tres columnas. Entonces tiene orden 3 x 3.

Ejercicio 2

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$, decid cuál es el elemento a_{23}.

Solución:

Del hecho de que el elemento a_{23} de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & 7\end{pmatrix}$ está en la segunda fila y tercera columna podemos deducir que el elemento pedido es el número 7.

Ejercicio 3

Calculad si es posible la suma de matrices siguiente: $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$.

Solución:

No es posible sumar matrices de distintas dimensiones.

Ejercicio 4

Calculad si es posible la suma de matrices siguiente: $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$.

Solución:

Al tener la misma dimensión, las matrices están adaptadas para poder sumarlas.

Entonces,

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1 & 3+2 & -1+(-1)\\ 4+0 & 0+0 & 5+(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5 & -2\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

Calculad si es posible la suma de matrices siguiente: $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

Solución:

Al tener la misma dimensión, las matrices están adaptadas para poder sumarlas.

Entonces,

$$\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

Nota

Observad que al sumar la matriz nula a la matriz $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$, obtenemos de nuevo la matriz $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$.

Ejercicio 6

Calculad si es posible la suma de matrices siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Puesto que las matrices tienen la misma dimensión y, por lo tanto, están adaptadas para hacer la suma, aplicando la propiedad asociativa de la suma obtenemos: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} =$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$

Dado que estamos haciendo sumas de la misma matriz, una segunda manera de hacerlo es a partir de la definición de multiplicación de una matriz por un número real:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7

Calculad la multiplicación de matrices siguiente: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Solución:

Dado que la multiplicación de una fila por una columna adaptadas para ser multiplicadas siempre es un número que se obtiene de sumar los productos de elementos que ocupan "posiciones parecidas", hacemos la operación siguiente: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$.

Por lo tanto, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 32$.

Se puede pensar que el resultado que obtenemos al multiplicar la matriz fila por la matriz columna del ejercicio es una matriz 1 x 1, es decir, una matriz que tiene solo una fila y una columna.

Ejercicio 8

Calculad si es posible la multiplicación de matrices siguiente: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Solución:

No es posible multiplicar esta fila por esta columna, puesto que no están adaptadas para hacer la multiplicación. El 1 multiplicaría el 4, el 2 multiplicaría al 5, ¡pero el 3 no puede multiplicar ningún número puesto que la segunda matriz acaba en el 5!

Ejercicio 9

Calculad la multiplicación de matrices siguiente: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Solución:

Observad que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda. Por lo tanto, las dos matrices están adaptadas para hacer su multiplicación. Encontramos una técnica que permite conocer el orden de la matriz resultante de la multiplicación. Si multiplicamos las dimensiones y tachamos los dos números iguales del medio, 2 x 3 · 3 x 1, obtenemos que la matriz resultante tiene por dimensión 2 x 1, es decir, tiene dos filas y una columna.

Dado que ahora tenemos dos filas que multiplican una columna, y recordando que siempre se multiplican filas de la primera por columnas de la segunda y que el resultado de multiplicar una fila por una columna siempre es un número, ahora tenemos dos opciones de multiplicación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Entonces el resultado de la multiplicación es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10

Calculad la multiplicación de matrices siguiente: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 5 & -5 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$.

Solución:

Si utilizáis la técnica de tachar los valores iguales para saber la dimensión de la matriz resultante, comprobaréis que la matriz resultante de la multiplicación tiene que ser 2 x 2, puesto que 2 x 3 · 3 x 2 = 2 x 2. Por lo tanto, la matriz resultante de la multiplicación se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

Dado que ahora tenemos dos filas que multiplican dos columnas, y recordando que el resultado de multiplicar una fila por una columna siempre es un número, la matriz resultante ha de tener los números siguientes:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 32$. Fila 1 de la primera matriz • Columna 1 de la segunda matriz. Entonces obtenemos el elemento m_{11}.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = -32$. Fila 1 de la primera matriz • Columna 2 de la segunda matriz. Entonces obtenemos el elemento m_{12}.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 15$. Fila 2 de la primera matriz • Columna 1 de la segunda matriz. Entonces obtenemos el elemento m_{21}.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = -15$. Fila 2 de la primera matriz • Columna 2 de la segunda matriz. Entonces obtenemos el elemento m_{22}.

La ordenación de los cuatro números es sencilla si tenemos en cuenta que deben respetarse las posiciones de las filas y columnas que multiplican siguiendo la regla mnemotécnica *fuego*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 5 & -5 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & -32 \\ 15 & -15 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 11

Calculad la multiplicación de matrices siguiente: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+0\cdot(-1) & 1\cdot 4+0\cdot 2 \\ 0\cdot 3+1\cdot(-1) & 0\cdot 4+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observad que para la estructura de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, siempre que multiplicamos esta por otra matriz adaptable para hacer la multiplicación obtendremos de nuevo la otra matriz. Esta matriz se conoce como la matriz identidad de dos dimensiones. Se trata de algo parecido al número 1 de los enteros, un objeto también especial, puesto que su multiplicación por cualquier número no cambia el número multiplicado.

Ejercicio 12

Comprobad con un ejemplo que la propiedad conmutativa en la multiplicación de matrices no tiene que ser forzosamente cierta.

Solución:

Observad, por ejemplo, que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (32)$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$.

¡Hemos encontrado dos matrices tales que A · B es diferente de B · A! ¡Recordad que en los números reales esto nunca sucedía, puesto que siempre se cumple que $a \cdot b = b \cdot a$, utilicemos los números que utilicemos!

Ejercicio 13

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, y el número $k = -3$, haced siempre que sea posible las operaciones que se indican en los apartados siguientes. Cuando la operación resulte posible, calculad la matriz resultante y las dimensiones que tiene. Cuando la operación no sea posible, indicad por qué.

a) $A+B$; **b)** $A \cdot B$; **c)** $B \cdot A$; **d)** $k \cdot B \cdot C$

Solución:

a) La matriz A tiene dimensiones 2 x 2 y la matriz B tiene dimensiones 2 x 3. Por lo tanto, la suma $A+B$ no está definida.

b) La matriz A tiene dimensiones 2 x 2 y la matriz B tiene dimensiones 2 x 3. Por lo tanto, el producto $A \cdot B$ está definido y dará una matriz con las filas de la primera (2) y las columnas de la segunda (3), es decir, una matriz de dimensiones 2 x 3.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 6 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

c) La matriz B tiene dimensiones 2 x 3 y la matriz A tiene dimensiones 2 x 2. Por lo tanto, su producto no está definido, puesto que el número de columnas de B (3) no coincide con el número de filas de A (2).

d) La matriz B tiene dimensiones 2 x 3 y la matriz C tiene dimensiones 3 x 1. Por lo tanto, el producto $B \cdot C$ está definido y da una matriz con las filas de la primera (2) y las columnas de la segunda (1), es decir, una matriz de dimensiones 2 x 1.

$$k \cdot B \cdot C = -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -39 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14

Calculad la matriz resultante:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Recordad el convenio operativo de que primero se tienen que hacer las multiplicaciones antes que las sumas o restas.

Entonces: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 2+5 & 2+0 \\ -4+15 & -4+0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1-1 & -1-1 \\ -1+0 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 15

Calculad $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Dado que la multiplicación de matrices se lleva a cabo haciendo filas por columnas, tenemos primero que: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2+0 \\ -2+6-3 \\ -2+2+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$

Entonces, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$

Ejercicio 16

Calculad $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Dado que la multiplicación de matrices se lleva a cabo haciendo filas por columnas, tenemos primero que: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

Entonces, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \\ 10 & -10 & -5 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -7 & -3 & -5 \\ 9 & -4 & 0 \\ 16 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 17

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, efectuad los productos siguientes si es posible, y si no lo es explicad por qué:

i) $A \cdot C$
ii) $C \cdot B$
iii) $C \cdot A$
iv) $B \cdot A$

Solución:

i) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \end{pmatrix}$

Se pueden multiplicar, puesto que A tiene 3 columnas y C tiene 3 filas. La matriz resultante tiene tantas filas como A (1) y tantas columnas como C (2).

ii) $C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Se pueden multiplicar, puesto que C tiene 2 columnas y B tiene 2 filas. La matriz resultante tiene tantas filas como C (3) y tantas columnas como B (1).

iii) Dado que C tiene 2 columnas y A 1 fila, el producto $C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ no es posible.

iv) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

Se pueden multiplicar, puesto que B tiene 1 columna y A tiene 1 fila. La matriz resultante tiene tantas filas como B (2) y tantas columnas como A (3).

Ejercicio 18

Encontrad las matrices A y B tales que:

$$A + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Una primera manera de encontrar A consiste en aislar la ecuación. De este modo, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Un segundo modo consiste en sustituir A por la matriz adaptable para hacer la suma: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$. De este modo, $A + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se transforma en $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y entonces, pensando cómo se suman las matrices, es necesario que $a_1 = -1$, $a_2 = -3$, $a_3 = 1$ y $a_4 = 0$ y, por consiguiente, $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dado que no sabemos dividir matrices, para encontrar B solo tenemos el segundo procedimiento. De esta manera, puesto que es necesario que la matriz B tenga dimensiones 2 x 2, debemos sustituir B por $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que sabemos multiplicar matrices, obtenemos la igualdad siguiente:

$$\begin{pmatrix} b_1 - b_2 & 3b_1 - 4b_2 \\ b_3 - b_4 & 3b_3 - 4b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $b_1 - b_2 = 1$, $3b_1 - 4b_2 = 0$, $b_3 - b_4 = 0$ y $3b_3 - 4b_4 = 1$.

Si resolvemos los sistemas $\begin{cases} b_1 - b_2 = 1 \\ 3b_1 - 4b_2 = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} b_3 - b_4 = 0 \\ 3b_3 - 4b_4 = 1 \end{cases}$, obtenemos: $b_1 = 4$, $b_2 = 3$, $b_3 = -1$ y $b_4 = -1$ y por consiguiente $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Nota

Es habitual que en ejercicios de muchos pasos como este se compruebe al final la solución, para asegurarnos de no haber cometido ningún error de cálculo. Si hacemos la multiplicación de matrices $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, comprobaremos que obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Esto muestra que hemos obtenido correctamente la B, puesto que precisamente la B que nos pide el ejercicio tenía que satisfacer esta condición.

Ejercicio 19

Encontrad x, y, z y w para que se verifique la igualdad siguiente:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -2 \\ 1/3 & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z+w & 4 \\ 3 & y-x \end{pmatrix}$$

Solución:

Desarrollando los dos lados llegamos a la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2z & 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3 & 2+y-x \\ 1+z+w & 3w+4 \end{pmatrix}$$

Igualando elemento a elemento de las dos matrices, obtenemos el sistema: $\begin{cases} 2x = -x+3 \\ 2y = 2+y-x \\ 2z = 1+z+w \\ 2w = 3w+4 \end{cases}$.

De la primera ecuación, obtenemos que $x = 1$. Entonces, de la segunda, si sustituimos x por 1 obtenemos $2y = 2 + y - 1$, de donde se obtiene $y = 1$. De la última, obtenemos $w = -4$ y de la tercera, sustituyendo w por -4, obtenemos $2z = 1 + z - 4$ y, por lo tanto, $z = -3$.

Nota

Si sustituimos x por 1, y por 1, z por -3 y w por -4 en $2 \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -2 \\ 1/3 & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z+w & 4 \\ 3 & y-x \end{pmatrix}$ y hacemos las operaciones en los dos lados, obtenemos en cada lado exactamente la misma matriz numérica $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$, lo que

confirma que los valores x, y, z y w han estado bien encontrados y no hemos cometido ningún error de cálculo.

Ejercicio 20

Encontrad los elementos de la matriz A de dimensiones 2 x 2 tales que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

A tiene que ser una matriz 2 x 2, puesto que debe ser una matriz adaptable para hacer las operaciones pedidas. Entonces, sustituimos A por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix}$ y operamos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5a+4b & b \\ 5c+4d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+4b+3 & b+4 \\ 5c+4d-5 & d+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De este modo, si analizamos la matriz miembro a miembro, obtenemos cuatro ecuaciones de primer grado:

$$\begin{aligned} &5a+4b+3=3 \\ &b+4=6 \\ &5c+4d-5=1 \\ &d+2=2 \end{aligned}$$

Obtenemos directamente de la segunda y cuarta ecuación que $b=2$ y $d=0$. Sustituyendo estos valores en la primera y tercera ecuación, obtenemos $a=\frac{-8}{5}$ y $c=\frac{6}{5}$.

Por consiguiente, $A=\begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & 2 \\ \frac{6}{5} & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 21

Encontrad una matriz A tal que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Si operamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ -a-4c & -b-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Así pues, obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (o dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas): $\begin{cases} a+3c=11 \\ -a-4c=6 \end{cases} \begin{cases} b+3d=0 \\ -b-4d=-6 \end{cases}$.

Si resolvemos los dos sistemas (por reducción) obtenemos $c=-17$, $d=+6$, $a=62$ y $b=-18$. Así pues,

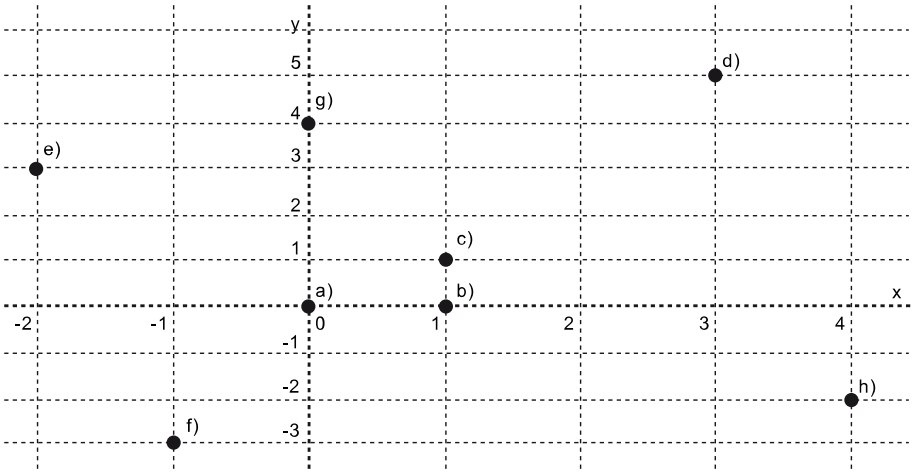
$$A = \begin{pmatrix} 62 & -18 \\ -17 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 22

Dibujad en unos ejes de coordenadas los puntos siguientes:

a) (0,0)
b) (1,0)
c) (1,1)
d) (3,5)
e) (–2,3)
f) (–1,–3)
g) (0,4)
h) (4,–2)

Solución:



Nota

Observad que la unidad de un eje y la unidad del otro no tienen que coincidir.

Ejercicio 23

Encontrad los vectores de dirección siguientes:

1) Vector director de origen $A = (0,0)$ y final $B = (1,1)$

2) Vector director de origen $C = (2,3)$ y final $D = (3,4)$

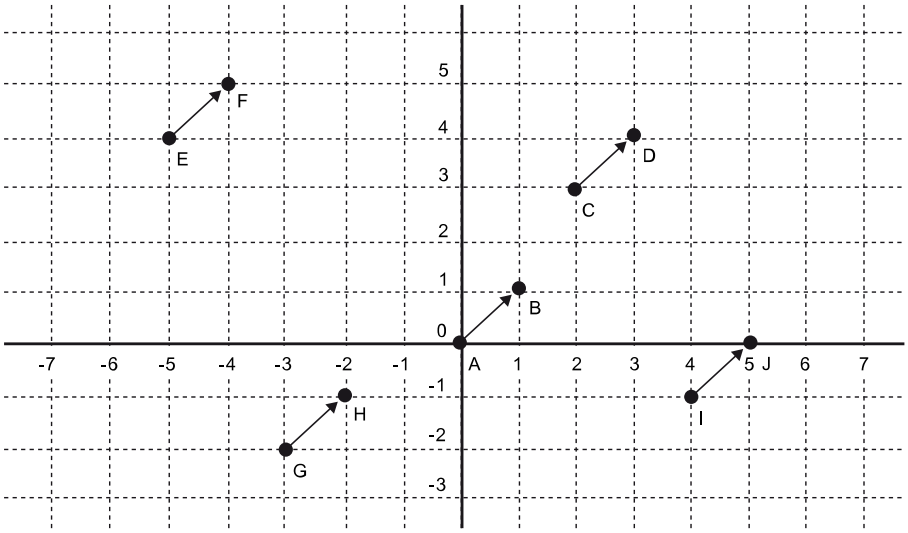
3) Vector director de origen $E = (–5,4)$ y final $F = (–4,5)$

4) Vector director de origen $G = (–3,–2)$ y final $H = (–2,–1)$

5) Vector director de origen $I = (4,–1)$ y final $J = (5,0)$

Solución:

Si representamos los puntos, los vectores que en principio se forman son los siguientes:



A partir de la anterior visualización de los vectores, tenemos la sensación de que si desplazamos las flechas una sobre las otras estas van coincidiendo y que, por lo tanto, solo tenemos un único vector representado en el dibujo.

Si calculamos los componentes de cada vector, veremos el acierto de esta percepción. Observad que cada punto final se encuentra a una distancia de una unidad en cada eje. Es decir, elegido un punto inicial A, C, E, G o I, si nos movemos una unidad hacia la derecha y una unidad hacia arriba del punto inicial, llegamos siempre a su punto final B, D, F, H y J.

En nuestro ejemplo todos los vectores tienen componentes (1,1) y, por lo tanto, solo tenemos un vector representado. Comprobémoslo:

$\overrightarrow{AB} = (1,1) - (0,0) = (1,1)$

$\overrightarrow{CD} = (3,4) - (2,3) = (1,1)$

$\overrightarrow{EF} = (-4,5) - (-5,4) = (1,1)$

$\overrightarrow{GH} = (-2, -1) - (-3, -2) = (1,1)$

$\overrightarrow{IJ} = (5,0) - (4, -1) = (1,1)$

Ejercicio 24

Encontrad los vectores de dirección siguientes:

a) Vector director de origen $A = (0,0)$ y final $B = (4, -2)$

b) Vector director de origen $C = (3,3)$ y final $D = (5,2)$

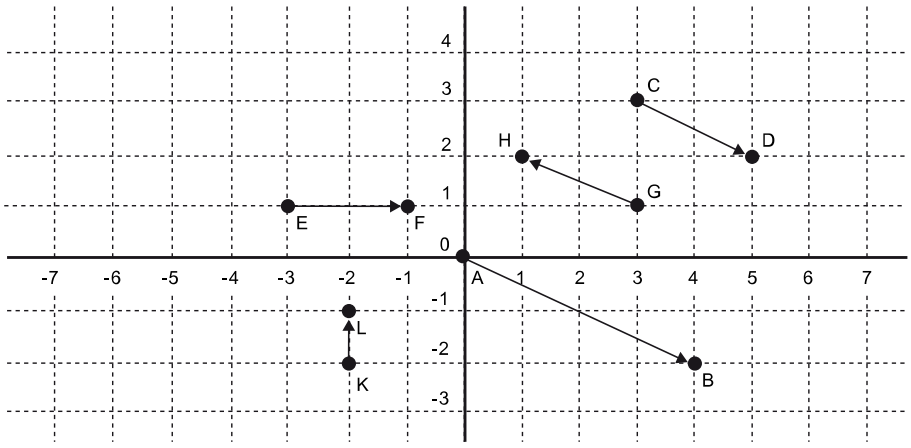
c) Vector director de origen $E = (-3,1)$ y final $F = (-1,1)$

d) Vector director de origen $G = (3,1)$ y final $H = (1,2)$

e) Vector director de origen $K = (-2, -2)$ y final $L = (-2, -1)$

Solución:

La representante de los puntos y vectores en unos ejes cartesianos es:



El cálculo de los vectores es:

$\overrightarrow{AB} = (4, -2) - (0,0) = (4, -2)$

$\overrightarrow{CD} = (5,2) - (3,3) = (2, -1)$

$\overrightarrow{EF} = (-1,1) - (-3,1) = (2,0)$

$\overrightarrow{GH} = (1,2) - (3,1) = (-2,1)$

$\overrightarrow{KL} = (-2, -1) - (-2, -2) = (0,1)$

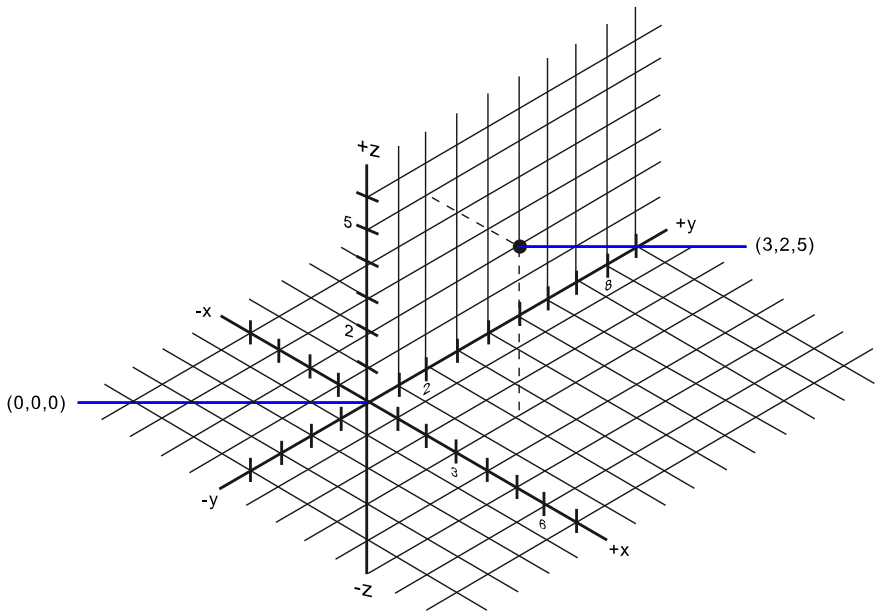
Observemos que el vector $\overrightarrow{AB}$ es el vector $\overrightarrow{CD}$ multiplicado por 2 y que el vector $\overrightarrow{GH}$ es el vector $\overrightarrow{CD}$ multiplicado por –1. Esto nos dice que $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{GH}$ tienen la misma dirección, que $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AB}$ tienen el mismo sentido y que $\overrightarrow{GH}$ tiene sentido opuesto a los anteriores.

Ejercicio 25

Representad en un sistema de coordenadas tridimensional el punto del espacio (3,2,5).

Solución:

Para construir un sistema de coordenadas tridimensional nos hacen falta tres rectas perpendiculares que pasen por el mismo punto. Una de las rectas determinará el eje *x*; una segunda, el eje *y*, y una tercera, el eje *z*. Todo punto de la forma (*x*,*y*,*z*) quedará identificado por las distancias a los planos que forman las rectas dos a dos.

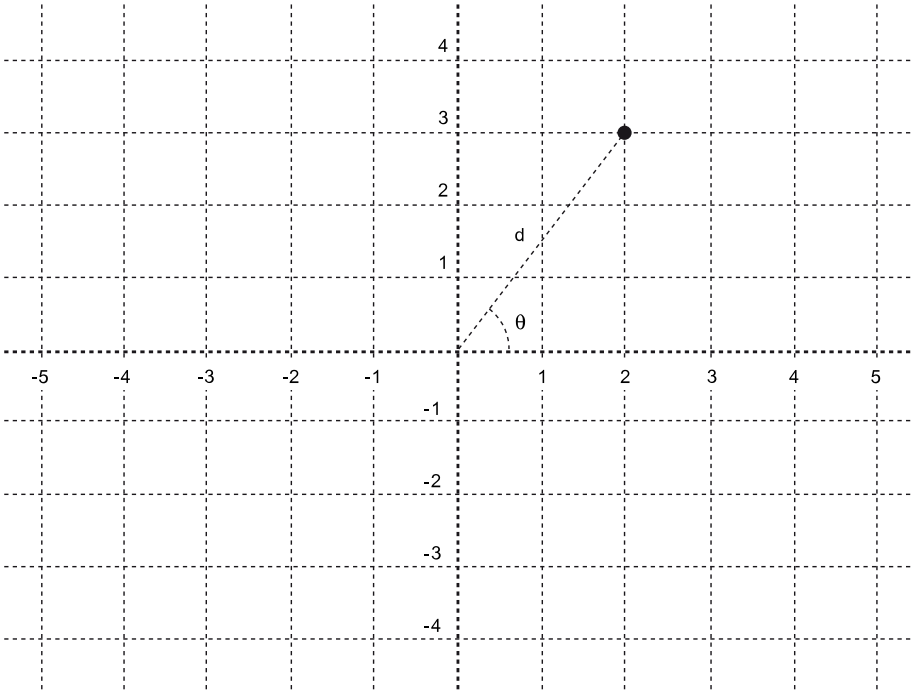


Ejercicio 26

Pasad a coordenadas polares los puntos (2,3) y (2, –3).

Solución:

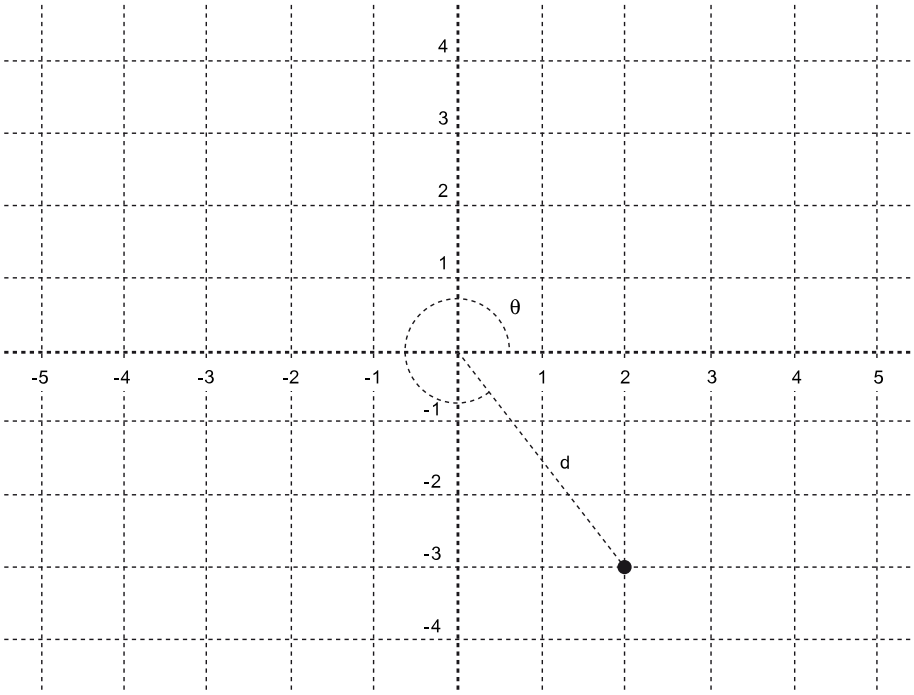
Si queremos encontrar las coordenadas polares del punto (2,3), hay que encontrar la d y el ángulo θ que señala el dibujo siguiente:



A partir del triángulo rectángulo formado, es muy sencillo comprobar que $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = arctg\frac{y}{x}$. Por lo tanto:

Para el punto (3,2) tenemos que $d = \sqrt{13}$ y $\theta = 56{,}3^{o}$ (primer cuadrante = ángulo entre 0° y 90°).

Para el (3, –2), $d = \sqrt{13}$ y $\theta = 360^{o} - 56{,}3^{o} = 303{,}7^{o}$ (4.º cuadrante = ángulo entre 270° y 360°).



Nota

Es muy habitual utilizar *r* (de radio) en lugar de *d* (de distancia).

Ejercicio 27

Dada la suma de matrices siguiente, encontradle una utilidad en el mundo del diseño.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Imaginemos un escenario con tres objetos colocados en las coordenadas (1,3), (3,5) y (–2, –5). Las coordenadas finales de cada objeto son (2,4), (4,6) y (–1, –4).

Con este tipo de suma de matrices, podemos representar una traslación en el plan de vector (1,1).

De manera parecida, toda traslación de vector (*a*,*b*) en el espacio bidimensional tiene como nuevas coordenadas la expresión siguiente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

O si lo preferís:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ejercicio 28

Dada la multiplicación de matrices siguiente, encontradle una utilidad en el mundo del diseño.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución:

Imaginemos un escenario con tres objetos colocados en las coordenadas (1,3), (3,5) y (–2, –5). Las coordenadas finales de cada objeto son (2,9), (6,15) y (–4, –15).

Un usuario tendría la sensación de que ha habido una expansión del universo donde vivían los objetos y que la expansión ha sido mayor en el eje de las y que en el de las x.

Este tipo de transformaciones de las posiciones de los objetos se denominan transformaciones de cambio de escala. También permiten producir dilataciones o contracciones (en función de si los valores son superiores a 1 o entre 0 y 1) en las dimensiones de los objetos según las direcciones de los ejes. El caso general se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nota

Si p o q valen 1, no hay ni contracción ni dilatación en el eje correspondiente.

Ejercicio 29

Dada la multiplicación de matrices siguiente, encontradle una utilidad en el mundo del diseño.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución:

Este tipo de transformaciones de las posiciones de los objetos se denominan giro en el plano respecto del origen de coordenadas (0,0).

Si α es positivo, se obtiene una rotación antihoraria, de sentido contrario a las agujas del reloj.

Ejercicio 30

Dada la multiplicación y suma de matrices siguiente, encontradle una utilidad en el mundo del diseño.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Solución:

Este tipo de transformaciones de las posiciones de los objetos se denominan giro en el plano respecto del punto (*a*,*b*).

Si α es positivo, se obtiene una rotación antihoraria, de sentido contrario a las agujas del reloj con el centro del movimiento en el punto (*a*,*b*).

Ejercicio 31

Dada la multiplicación de matrices siguiente, encontradle una utilidad en el mundo del diseño.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución:

Este tipo de transformaciones de las posiciones de los objetos se denominan simetría central respecto del origen de coordenadas. Se trata de un caso particular de giro con un ángulo de 180º.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180 & -\sin 180 \\ \sin 180 & \cos 180 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejercicio 32

Dada la multiplicación y suma de matrices siguiente, encontradle una utilidad en el mundo del diseño.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Solución:

Este tipo de transformaciones de las posiciones de los objetos se denomina simetría central respecto del punto (*a*,*b*). Se trata de un caso particular de giro con un ángulo de 180º.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ejercicio 33

Un cine que abre de lunes a domingo ha hecho las ventas de butacas siguientes por la mañana: 50, 48, 100, 30, 20, 40, 60. Las ventas de butacas por la tarde han sido: 60, 70, 150, 45, 100, 200 y 150. Encontrad los ingresos del cine si el precio de la entrada entre semana es de 6 €, salvo el miércoles, que es de 4 € y de 8 € el fin de semana.

Solución:

Una manera sencilla de hacer este ejercicio consiste en la multiplicación de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 50 & 48 & 100 & 30 & 20 & 40 & 60 \\ 60 & 70 & 150 & 45 & 100 & 200 & 150 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2010 \\ 5050 \end{pmatrix}$$

Observad que las matrices proporcionan una visión sencilla y mecánica para operar con los datos de un problema.