Geometría fractal

Pere Cruells
Germán Sáez

PID_00150816

UOC
Universitat Oberta
de Catalunya

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares del copyright.

Índice

1. Introducción a la geometría fractal 5
1.1. Introducción 5
1.2. Los primeros fractales 6

2. Dimensión fractal y otras construcciones fractales 12
2.1. Dimensión fractal 12
2.2. Fractales aleatorios 16
2.3. Otros tipos de fractales 18

Ejercicios de autoevaluación 21

Solucionario 23

1. Introducción a la geometría fractal

1.1. Introducción

Los objetos geométricos representados en los módulos anteriores, se describían mediante distancias y ángulos. A partir de estos elementos describimos un triángulo, un rectángulo o cualquier otro polígono. Lo mismo ocurre con las figuras geométricas en el espacio tridimensional como son los prismas, cilindros, conos, esferas, etc. Denominamos **geometría euclídea** la geometría en la que fundamentalmente se tienen en cuenta distancias y ángulos. En este apartado describiremos objetos geométricos a partir de procedimientos, lo que nos lleva a la **geometría fractal**. La representación fractal de objetos es muy usual para describir y explicar fenómenos naturales, ya que se obtienen representaciones bastante reales. Así, se usan objetos fractales para modelar superficies de terrenos, nubes, agua, árboles, plantas, plumajes, pieles, texturas para superficies, así como para crear patrones. En la generación de gráficos por ordenador se usan los fractales para generar objetos de la naturaleza. También se usan los fractales para la descripción de problemas físicos y matemáticos, así como en la compresión de datos.

Un objeto fractal puede ser una curva, una superficie o un sólido. Una característica básica de los fractales es la existencia de una cierta autosemejanza entre partes del objeto y el objeto total. Por **autosemejante** se entiende que cada trozo de una cierta figura sea semejante geométricamente a todo el objeto, por ejemplo, que sea una ampliación. Describiremos un objeto fractal con un procedimiento que especifique una operación que generará las partes del objeto por repetición. Los objetos naturales se representarán con procedimientos que, en teoría, se repiten infinitamente, aunque a la hora de representarlos deberemos generar un número finito de pasos. Para crear un fractal necesitaremos un objeto inicial que denominaremos **semilla**, y una transformación que aplicaremos sobre éste repetidamente, que llamaremos **iteración**.

Una de las particularidades de los objetos fractales es que son figuras aparentemente fragmentadas y fracturadas. En 1975, Benoît B. Mandelbrot les dio el nombre de fractales después de estudiar y crear varios tipos de estos objetos. Igual que entendemos que la dimensión de una recta es 1 y que la dimensión de un plano es 2, a cada objeto fractal se le asocia una dimensión, pero con la particularidad de que las dimensiones de los fractales no tienen por qué ser números enteros, ya que en general son números fraccionarios: razón de más para justificar el nombre que les dio Mandelbrot.

Benoît B. Mandelbrot delante del Newton Institute en Cambridge.

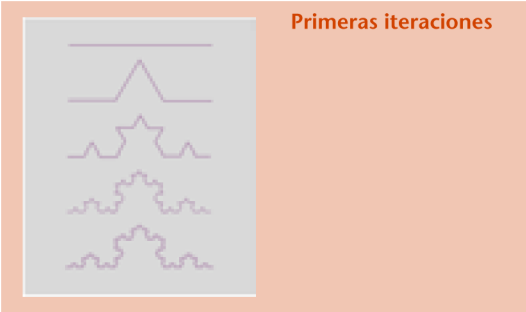
Tras la teoría de los fractales subyace una idea que ha revolucionado la concepción de nuestro entorno. El mundo donde vivimos es fractal: las costas, las nubes, los árboles, las montañas y muchos otros elementos que nos rodean se tienen que representar por medio de fractales y no por medio de rectas, circunferencias o polígonos. Las curvas con que representamos nuestro entorno no tienen dimensión uno, sino que tienen dimensiones fraccionarias (son **fractales**).

Los fractales, aunque antiguos, están en auge desde que los modernos ordenadores nos ayudan a representarlos y a estudiar sus propiedades. Como veremos al final de este módulo, los fractales nos permiten realizar diseños muy sugestivos.

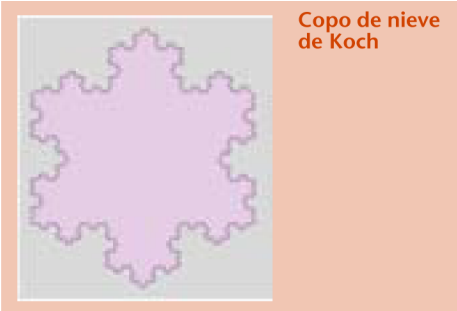
1.2. Los primeros fractales

Un objeto fractal se genera por aplicación reiterada de una transformación de los puntos de una región del plano. En general, esta transformación se puede aplicar a un punto concreto o a un conjunto de puntos, como segmentos de línea recta o curva, áreas, etc. Empezaremos dando un par de ejemplos para ilustrar estas generaciones.

En 1904, Niels Helge von Koch (1870-1924) definió una curva que nos llevará a uno de los primeros ejemplos de curva fractal usando la semilla y la iteración que describimos a continuación. Para empezar, Koch consideró un segmento como semilla. La iteración que aplicó es la siguiente: cada segmento que tengamos en la figura se divide en tres partes iguales, y la parte central se sustituye por dos segmentos de la misma medida como si formáramos un triángulo equilátero con el trozo de segmento que hemos suprimido. Esta transformación se repite indefinidamente. Las primeras iteraciones serán:



Koch utilizó este proceso a partir de los tres lados de un triángulo equilátero, lo que dio como resultado la conocida curva que lleva su nombre:



WEB

Recurso interactivo accesible sólo en la web.

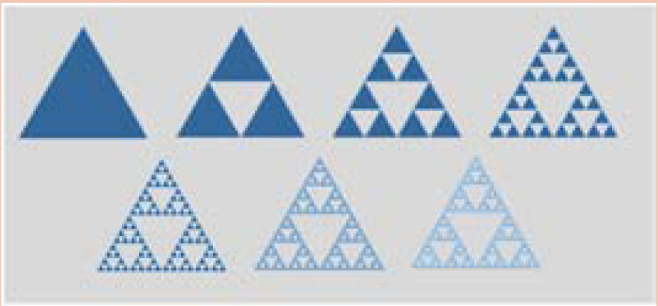
Actividad

Ejercicio

Construid un GIF animado con las cuatro primeras iteraciones del fractal conocido como anticopo de nieve de Koch. Se construye a partir de un triángulo equilátero. La iteración es idéntica que la del copo de nieve de Koch, pero construyéndolo hacia el interior de la figura. Para construir el GIF animado, cread cuatro imágenes GIF con las cuatro iteraciones del fractal, luego componedlas en un único GIF con el *software* adecuado.

Hacia 1915, Waclaw Sierpinski (1882-1969) creó otro fractal tomando un triángulo equilátero como semilla. La primera iteración consiste en suprimir el triángulo equilátero que se forma con los tres puntos medios de los tres lados del triángulo equilátero inicial. De este modo, obtenemos una figura formada

por tres triángulos equiláteros iguales. Las iteraciones siguientes consisten en realizar la misma transformación en cada uno de los triángulos equiláteros que nos quedan. Las primeras iteraciones son las siguientes:



Primeras iteraciones

Waclaw Sierpinski

WEB

Recurso interactivo
accesible sólo en la web.

Las definiciones de estos dos objetos son realmente simples, pero sus propiedades dejaron sorprendidos incluso a sus propios creadores. Estudiemos un poco estos dos ejemplos. Consideremos la curva de Koch a partir de un segmento de longitud 1 e intentemos calcular la longitud de la curva fractal que se obtiene. La primera iteración suprime un tercio del segmento y añade dos segmentos de esta misma longitud, con lo que tenemos una curva poligonal de longitud $\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Dicho de otra forma, hemos multiplicado la longitud por 4/3. En la siguiente iteración tenemos cuatro segmentos. Multiplicamos cada uno por 4/3, es decir, tenemos una curva poligonal de longitud $\left(\frac{4}{3}\right)^2$. Iterando el proceso, el perímetro de la curva después de aplicar k veces la iteración para crear el fractal será: $\left(\frac{4}{3}\right)^k$. Al aumentar el valor de k, la longitud del perímetro crece indefinidamente, como se puede observar con los primeros valores:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^1 = 1{,}333\ldots,\ \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1{,}777,\ \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2{,}370\ldots$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{10} = 17{,}757\ldots,\ \left(\frac{4}{3}\right)^{100} = 3.117.982.410.207{,}941\ldots$$

Con lo que podemos afirmar que la longitud de la curva de Koch es infinita.

En el caso del triángulo de Sierpinski, lo sorprendente es que su superficie total es cero y que la suma de los perímetros de todos los triángulos generados es infinito.

Actividad

Ejercicio 1

¿Cuántos triángulos se retiran y cuántos quedan en cada iteración del triángulo de Sierpinski? Considerando como semilla un triángulo equilátero de lado 1 cm, calculad el área de los triángulos que quedan y la suma de sus perímetros después de realizar sólo cuatro iteraciones.

Ejercicio 2

Partimos de un tetraedro regular y creamos sobre cada una de sus caras otro tetraedro regular cuya base está formada por el triángulo equilátero a partir de los puntos medios de las aristas que forman esta cara. Esta iteración se repite indefinidamente sobre cada uno de los triángulos que se van formando. ¿Cuántos tetraedros necesitaremos para la segunda iteración? ¿Y para la tercera? Construid este fractal hasta la segunda iteración en 3D Studio.

Ejemplo

Veamos otro ejemplo de construcción de un fractal:

WEB

Recurso interactivo
accesible sólo en la web.

Y así se podrían seguir calculando nuevas iteraciones. Acabamos de crear un fractal de tipo Sierpinski.

Actividad

Ejercicio 1

Calculad el área total ocupada por las fotografías en cada iteración si sabemos que las medidas de cada iteración son 2,75 cm x 3,8 cm.

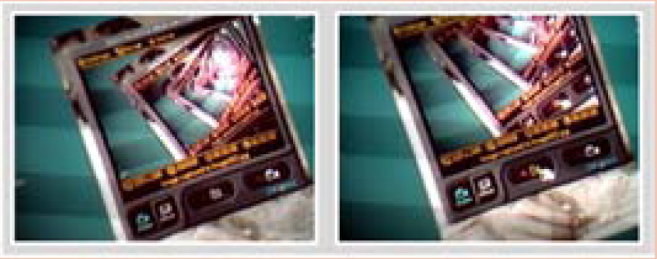
Ejercicio 2

Repetid el mismo fractal con fotografías tomadas del campus del tutor, del consultor de matemáticas y del rector. Cread un GIF animado con las distintas iteraciones para visualizar la construcción del fractal.

Ejercicio 3

Repetid el mismo fractal con tres fotografías de tres buenos amigos, pero esta vez colocando dos, una al lado de otra, y la tercera colocada encima de las dos pero centrada.

Un ejemplo muy clásico en televisión es el principio del *feedback* (retroalimentación). En éste, la cámara se enfoca a la propia pantalla en la que se está visualizando lo recogido por la propia cámara.



Ejemplos de algunas imágenes estáticas tomadas con una webcam utilizando feedback.

Los efectos que se pueden obtener dando movimiento a la cámara pueden ser vertiginosos. La imagen queda repetida dentro de la propia imagen hasta que la definición de la pantalla no da de sí para poder representar con nitidez el propio objeto. De hecho, el ojo humano también está limitado por un umbral a partir del cual no podríamos distinguir nada. En el mundo matemático de los fractales no hay ninguna limitación, y si definiéramos estas imágenes matemáticamente, al tomar una parte y compararla con el todo veríamos que son idénticas (sin haber desaparecido ninguna de las iteraciones).

Se han utilizado fractales desde hace mucho tiempo en publicidad ya que producen un efecto visual curioso y llamativo.

En la publicidad de las sopas Campbell se muestra una lata de sopas en la misma etiqueta de la lata, de forma que se produce el efecto *feedback*.

Existen numerosas formas de generar fractales. Los dos ejemplos explicados antes tienen una construcción determinista, y además producen un fractal autosemejante. Por construcción determinista se entiende una construcción que siempre que se aplique da un mismo resultado, en contraposición a construcciones aleatorias, que no siempre dan el mismo resultado. *Autosemejante* significa que cada fragmento de la figura es semejante geométricamente al todo o, dicho de otra forma, al ampliar cualquier parte de la figura obtenemos exactamente la misma figura.

Si ampliamos una parte de un objeto fractal, sea autosemejante o no lo sea, lo vemos exactamente con el mismo grado de detalle que el objeto original. Observando el ejemplo de Koch a partir de un segmento, podemos ampliar tanto como deseemos un trozo de curva, y siempre veremos exactamente lo mismo y con el mismo detalle.

A cada fractal se le asocia una dimensión fractal, que introduciremos en la siguiente etapa. La dimensión fractal mide la rugosidad del objeto fractal. Intuitivamente, el borde de una circunferencia no es rugoso, mientras que la curva

de Koch presenta una rugosidad muy alta. Esta dimensión no tiene por qué ser un número entero; en general escribiremos la dimensión como una fracción, y de ahí proviene el nombre de fractal.

Actividad

Ejercicio 1

Si se dispone de una webcam o de una cámara de vídeo, cread diferentes imágenes utilizando el principio del *feedback*; observad los efectos conforme se aleja la cámara del monitor o conforme se acerca, así como a medida que se gira la cámara respecto del monitor.

Ejercicio 2

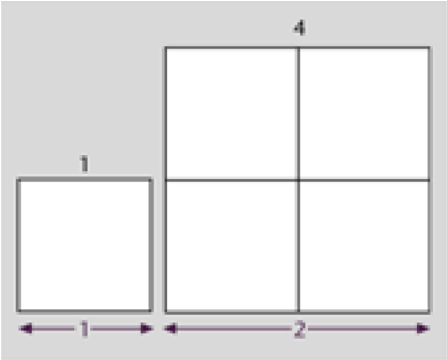
Diseñad un folleto (elemental) de propaganda de ordenadores utilizando alguna técnica parecida a la de las sopas Campbell.

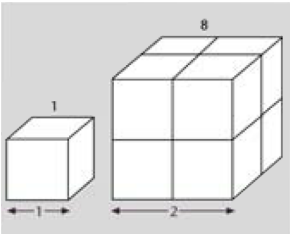
2. Dimensión fractal y otras construcciones fractales

2.1. Dimensión fractal

La rugosidad y la fragmentación de un objeto fractal se pueden describir mediante un número que denominaremos **dimensión fractal**. En general, calcular la dimensión fractal de un objeto es un proceso muy complejo. En este apartado intentaremos exponer una idea intuitiva de esta medida y daremos algunos ejemplos.

En geometría sabemos que si tenemos un segmento de longitud 1, al doblar su longitud obtenemos un segmento de longitud 2. Si consideramos un cuadrado de lado 1, al doblar esta medida obtenemos otro cuadrado de lado 2, pero al calcular el área de estos dos cuadrados observamos que la relación entre sus áreas no es doble. El área del cuadrado de lado 2 es cuatro veces mayor que el área de lado 1. Hagamos lo mismo con un cubo. Consideramos un cubo de lado 1; doblamos la longitud de su lado para obtener un segundo cubo de lado 2. El volumen de este segundo cubo es ocho veces mayor que el volumen del inicial.





Potencias de un número

Multiplicar un número varias veces por sí mismo se expresa de la forma siguiente $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3$, $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$, y así sucesivamente, con lo que, en general, tendremos una expresión del tipo a^n, cuando n sea un número natural. El número a se denomina **base** de la potencia, y el número n, **exponente**. Por ejemplo, para elevar el número 7 al exponente 3 deberemos realizar la operación: $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$. Cabe observar que si en una potencia el exponente es 1, entonces su valor es simplemente la base, es decir, $a^1 = a$; en el caso de que el exponente sea 0, el valor será 1, es decir, $a^0 = 1$ para cualquier valor de a distinto de 0.

La potenciación puede extenderse a cualquier exponente sin necesidad de que sea un número natural. Para enteros negativos entenderemos el exponente de la siguiente forma. Si el exponente es un número entero negativo, podemos considerar que $-n$, con n natural. Entonces:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \cdot a \ldots a}.$$

Por ejemplo, $5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{625}$

El exponente de una potencia también puede ser un número racional, circunstancia que entenderíamos de la forma siguiente: si el exponente es un número racional, éste podrá expresarse como una fracción de la forma $\frac{m}{n}$ con m, un número entero y n, un número natural distinto de 0, con lo que tenemos:

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Por ejemplo, $4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$

A partir de la potenciación con exponentes racionales, se puede extender el cálculo de potencias a todos los números reales; de este modo obtenemos lo que llamaremos **función exponencial**. De esta forma, para cualquier número real x podemos calcular a^x mediante la función $f(x) = a^x$.

Algunas propiedades básicas de la función exponencial son las siguientes:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Ejercicio

Realizad los cálculos siguientes:

a) 4^3
b) 2^{-3}
c) $\sqrt[3]{-8}$
d) $\left(\frac{1}{3^2}\right)^4 - \sqrt{5^4} + \frac{2^5}{2^2}$
e) $7^3 \cdot 7^{-5} \cdot 7^2$

Observemos que las relaciones obtenidas al doblar longitudes son 2^1, 2^2 y 2^3. Si en lugar de doblar los lados los hubiéramos triplicado, habríamos obtenido los números 3^1, 3^2, 3^3. Análogamente, si hubiéramos multiplicado cada lado por k, el resultado sería: k^1, k^2 y k^3. Esto nos conduce a relacionar la dimensión del objeto que estamos tratando: 1 para un segmento, 2 para un cuadrado, 3 para un cubo. En el caso de doblar el segmento, obtenemos dos objetos idénticos al inicial. Al doblar el lado del cuadrado, obtenemos cuatro cuadrados idénticos al inicial, y con el cubo obtenemos ocho cubos idénticos al inicial.

Así, tenemos las relaciones $2 = 2^1$; $4 = 2^2$ y $8 = 2^3$. Si llamamos n al número de objetos obtenidos al hacer una ampliación en cada uno de estos casos y k es el factor de ampliación, tenemos la relación:

$$n = k^D,$$

siendo D la dimensión en cada uno de estos casos. Generalizando esta propiedad se calcula la dimensión de un fractal al ampliarlo k veces, contando el número n de objetos que obtenemos idénticos al original y comprobando cuál es el valor de D que satisface $n = k^D$.

En general, el cálculo de la dimensión de un objeto fractal es muy difícil, aunque para los ejemplos que hemos expuesto anteriormente es relativamente sencillo.

Vamos a calcular la dimensión de la curva de Koch. La iteración que realizamos en cada paso de la creación de la curva de Koch nos proporciona cuatro veces esa misma curva, pero cada curva con una longitud tres veces menor. Dicho de otra forma, al ampliar $k = 3$ veces la curva de Koch (después de la primera iteración), obtenemos $n = 4$ veces la curva inicial. Esto nos conduce a la ecuación:$4 = 3^D$. Esta ecuación se resuelve con el uso de logaritmos. Así, tenemos que $\ln 4 = \ln 3^D$, que equivale a $\ln 4 = D \ln 3$, con lo cual:

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1{,}2618595...$$

Actividad

Ejercicio

Calculad la dimensión del triángulo de Sierpinski.

Logaritmos

Los logaritmos fueron introducidos a principios del siglo XVII por John Neper con el fin de facilitar operaciones de cálculo.

John Neper
(1550–1617)

En esta época, los cálculos debían realizarse manualmente. Sumar es mucho más simple que multiplicar y, gracias a una de las propiedades básicas de los logaritmos, se convierte un producto en una suma utilizando tablas de logaritmos.

Un logaritmo se define de la siguiente forma: el $\log_a b$ (lo leeremos como "logaritmo en base a de b") es un número x tal que $a^x = b$. En el caso de que la base del logaritmo no se especifique, supondremos que se trata de un logaritmo en base 10, es decir $a = 10$, y en el caso de que la base sea el número $a = 2{,}718281828459...$, lo llamaremos **logaritmo neperiano** (o natural) y lo denotaremos por "ln" en lugar de "log". El número

2,718281828459... se denomina número *e*; se trata de un número que, al igual que el número p, tiene una gran transcendencia en matemáticas.

Algunos ejemplos de logaritmo en base 10 son:

- log 1 = 0, ya que $10^0 = 1$
- log 10 = 1, ya que $10^1 = 10$
- log 100 = 2, ya que $10^2 = 100$

y en base número *e*:

- ln $e = 1$, ya que $e^1 = 1$ $e^1 = e$

$ln\ \sqrt{e} = \frac{1}{2}$, ya que $e^{1/2} = \sqrt{e}$

Algunas propiedades básicas de la función logaritmo son las siguientes:

1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

2) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$

Ejercicio 1

Realizad los siguientes cálculos:

a) $\log 10^{13}$
b) $\ln e^3$
c) ln 1

Ejercicio 2

Resolved las siguientes ecuaciones:

a) $3^x = 5$
b) $\ln x^2 = 4$
c) $2^x = 4^{x+1}$

Así como la dimensión de una recta es 1, la dimensión de una superficie plana es 2 y la de un volumen es 3, las dimensiones de fractales presentan muchas más posibilidades.

Vamos a dar una idea intuitiva sobre las dimensiones que pueden tener los fractales. Una curva fractal que se encuentre en un plano y que no se corte a sí misma tendrá como dimensión un número comprendido entre 1 y 2. Cuanto más próximo a 1 se encuentre la dimensión, más suave será esta curva. Una curva que rellenara una superficie plana finita, por ejemplo un cuadrado, tendría dimensión 2. Para dimensiones entre 2 y 3, la curva se corta consigo misma varias veces, de modo que podría rellenar un trozo de superficie plana finito infinitas veces.

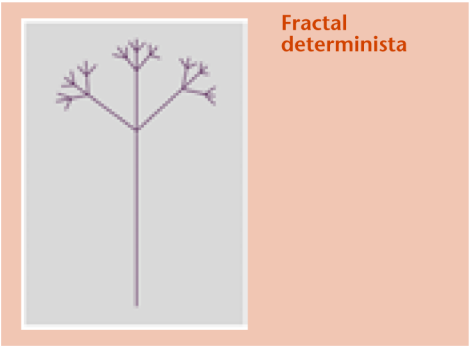
Para curvas en el espacio y que no se encuentren en un plano, también se obtienen dimensiones mayores que 1, aunque se pueden tener dimensiones superiores a 2 sin necesidad de intersecciones. Una curva que rellene un volumen finito, por ejemplo un cubo, tendrá dimensión 3.

2.2. Fractales aleatorios

Los dos ejemplos que hemos visto hasta ahora de fractales son algunos de los más fáciles de definir e, históricamente, los primeros que se crearon. Estos fractales son de tipo determinista y autosemejantes, ya que su construcción queda bien determinada a partir de la semilla y la iteración y, al considerar una parte del total, obtenemos un fractal similar al total. Aunque todo fractal se define, tal como hemos indicado, a partir de una semilla y una iteración, no todos los fractales son deterministas y autosemejantes. A continuación describiremos otros tipos de fractales.

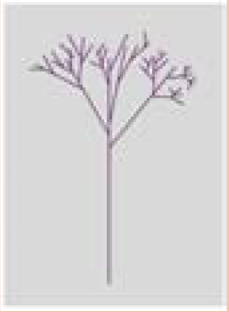
Se pueden construir fractales en los que la iteración tenga un componente aleatorio. En este caso, el fractal no tendrá esta propiedad de autosemejanza, aunque puede darse un cierto parecido entre las partes del fractal y el total. Este tipo de fractales se denominan **fractales autosemejantes aleatorios**.

Vamos a crear un fractal de este tipo. Para facilitar la explicación, empezaremos creando un fractal autosemejante determinista. Tomamos un segmento de longitud 1 como semilla. La iteración consistirá en colocar dos segmentos de longitud 1/3 a partir de un punto situado a un tercio del extremo del segmento inicial y formando un ángulo de 60° con éste. Obtendremos una figura parecida a un árbol con sólo tres ramas. Para cada uno de los tres segmentos que forman estas tres ramas aplicamos la misma iteración. Así sucesivamente obtenemos un fractal con forma de árbol pero totalmente simétrico respecto al segmento inicial. Este árbol que hemos creado es de tipo determinista, ya que cada segmento queda perfectamente definido.



Para crear un fractal autosemejante aleatorio, bastará con añadir variaciones aleatorias sobre esta contrucción. Empezamos igualmente con un segmento de longitud 1. La iteración será parecida, pero en lugar de añadir dos segmentos exactamente en el punto que divide el segmento inicial en tercios, lo haremos en un punto situado en un intervalo próximo a este punto, y en lugar de colocar los dos segmentos formando un ángulo de 60° con el segmento inicial, los colocaremos de manera que formen un ángulo cercano a 60°. Para conse-

guir estos efectos, escogeremos el punto de ramificación y el ángulo en cada iteración de forma aleatoria. Con la introducción de estas elecciones aleatorias en la construcción del fractal, obtendremos una rama mucho más natural.



Fractal aleatorio

A pesar de que los fractales más simples de definir sean deterministas, la importancia práctica de los fractales aleatorios resulta fundamental para representar objetos de la naturaleza. De la misma forma que hemos introducido aleatoriedad en la construcción geométrica, se puede escoger de forma aleatoria el color que se usará en cada parte del fractal. Con esto se pueden obtener, por tanto, fractales realmente espectaculares.

Esta imagen se ha creado a partir de varios fractales. La vegetación que aparece se ha creado siguiendo un proceso similar al descrito anteriormente.

Acabamos de ver cómo generar un fractal autosemejante aleatorio, pero hay muchísimas formas de introducir aleatoriedad en la construcción de un fractal. Para ello se inicia la creación del fractal a partir de una semilla y en la iteración que aplicamos se introduce algún dato de forma aleatoria. Este dato puede consistir en las coordenadas de un punto, la división de un segmento, etc.

Actividad

Ejercicio 1

Cread un fractal autosemejante aleatorio siguiendo la misma construcción que el copo de nieve de Koch pero escogiendo dos puntos aleatorios de cada uno de los segmentos que tengamos en el momento de aplicar la iteración. A partir de ahí, cread un triángulo equilátero cuya longitud sea el segmento medio que hayamos escogido aleatoriamente.

Ejercicio 2

Cread un fractal autosemejante aleatorio en 3D Studio que aparente un árbol siguiendo las instrucciones que presentamos a continuación. Cread un cilindro bastante alto y estrecho, que representará el tronco del árbol. Escoged un punto que esté a una altura aproximada de tres cuartas partes del tronco. Lanzad una moneda al aire. Si el resultado es cara, añadid dos ramas en ese punto del tronco, pero si sale cruz, añadid tres. El ángulo

que debe formar cada rama con el tronco principal lo determinaremos aleatoriamente lanzando un dado: se dividirá 60° entre el número que se obtenga al tirar el dado. El grosor de las dos o tres ramas debe disminuir respecto del tronco principal. Conseguiremos este efecto dividiendo el grosor del tronco por la mitad. La disposición de las dos o tres ramas entre sí queda a vuestra elección como creadores del fractal. Después de esta primera iteración, repetid el proceso considerando cada una de las ramas creadas como si fueran el tronco principal. Realizad cuatro iteraciones para este fractal.

Otro tipo de curva fractal aleatoria es el llamado **camino aleatorio**. Se parte de un punto cualquiera del plano. Se elige la dirección y la longitud que habrá que seguir de forma aleatoria. Se avanza desde ese punto en la dirección y la longitud escogidas. Desde el punto final de este primer trayecto se itera el proceso de nuevo. Esto crea un camino por el plano a partir de segmentos rectilíneos. Este tipo de proceso para la creación de un camino puede verse modificado al imponer condiciones en la elección de los puntos del plano, por ejemplo que no estén a una distancia mayor de una cierta longitud, que las direcciones que haya que tomar desde cada punto estén en un determinado rango, etc. Según las condiciones que pongamos, obtendremos un camino más o menos rugoso. Esta rugosidad se medirá según la dimensión fractal de la curva obtenida.

Hay otra forma de crear curvas de este tipo. Consideremos un segmento en el plano. Escogemos un punto del segmento que no sean sus extremos y lo desplazamos aleatoriamente. Este tipo de curva fractal se puede usar para crear imágenes tales como el contorno de la costa, el perfil de una montaña, etc.

Camino aleatorio

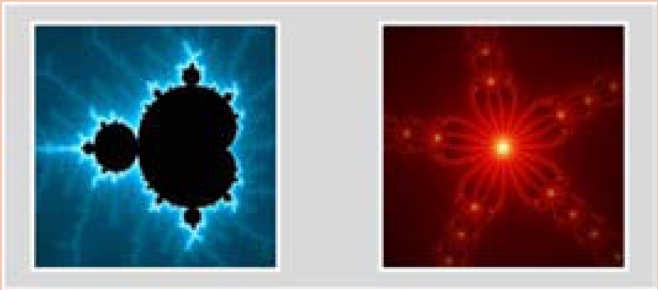
Un proceso parecido se puede crear con superficies si desplazamos puntos de la misma, en principio plana, de forma aleatoria. Esta aleatoriedad se puede enmarcar dentro de unos intervalos para crear la rugosidad deseada.

2.3. Otros tipos de fractales

Existen muchos más tipos de fractales. Todo depende de las operaciones que se realicen en las iteraciones. Se pueden aplicar distintas transformaciones geométricas como torsiones, giros, simetrías, ampliaciones, reducciones, deformaciones, etc.

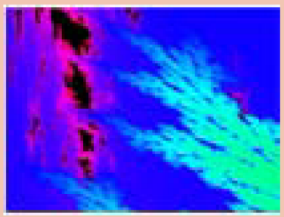
Helecho de Barnsley
Se trata de un fractal autosemejante, en el que se ha introducido una cierta inclinación en las hojas para adoptar una mayor similitud con una hoja de helecho real.

También es posible crear fractales introduciendo decisiones sobre el color que debe tomar cada punto del plano. Por ejemplo, se considera una función que se aplica a cada uno de los puntos del plano calculando $f(x, y)$. Esta función se itera calculando $f(f(x, y))$, $f(f(f(x, y)))$, etc., hasta obtener un resultado que cumpla cierta condición. En ese momento, se asigna al punto (x, y) un color según el número de veces que hayamos aplicado la función f al punto (x, y). Para crear un fractal de este tipo, se deben calcular millones de operaciones, con lo cual sólo pueden dibujarse con la ayuda del ordenador. Este tipo de fractales fue ideado por Benoît B. Mandelbrot. Los dos ejemplos que os presentamos a continuación se crearon siguiendo este procedimiento.



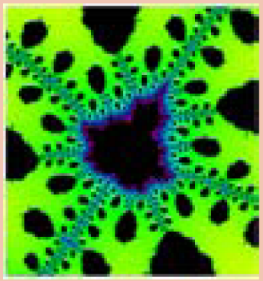
Fractal de Mandelbrot

A continuación, exponemos una colección de fractales que se han calculado de formas muy variadas, desde procedimientos deterministas hasta los procedimientos ideados por Mandelbrot en la creación de fractales. Estos ejemplos dejan patente la relación entre matemáticas y arte que existe en la geometría fractal.



Fractal que simula una nebulosa.

Fractal construido a partir de un poliedro.



Fractal tipo Mandelbrot.

Composiciones de fractales que simulan vegetación.

Actividad

Ejercicio

(Sólo apto para sibaritas de la música con una buena base matemática)

Estudiad el uso de la iteración, la recursión y los fractales en general en la composición de música con el artículo "Recursion: A Paradigm For Future Music?" de Nicholas Mucherino (74012.2265@compuserve.com), que podréis encontrar en la página web:

http://www-ks.rus.uni-stuttgart.de/people/ schulz/fmusic/recursion.html

Ejercicios de autoevaluación

1. Uno de los primeros fractales que se conocen fue creado por...

a) Mandelbrot.
b) Koch.
c) Sierpinski.

2. ¿Cuánto mide la longitud de la curva de Koch?

a) 4/3
b) Depende de la longitud del segmento que usemos como semilla.
c) Infinito.

3. ¿Cuántos triángulos quedan en la quinta iteración del triángulo de Sierpinski?

a) 81.
b) 12.
c) 27.

4. Observando la quinta iteración del triángulo de Sierpinski, ¿cuántos triángulos hay quitados?

a) 27.
b) 40.
c) 50.

5. La superficie del triángulo de Sierpinski es...

a) 0 cm^2.
b) 1 cm^2.
c) infinito.

6. Si un cuadrado tiene de lado 3 cm, al ampliarlo cuatro veces, se obtiene un cuadrado de área...

a) 12 cm^2.
b) 36 cm^2.
c) 144 cm^2.

7. Al calcular la dimensión D de un fractal, hemos llegado a la ecuación$15 = 7^D$, entonces...

a) $D = 1{,}39166...$
b) $D = 0{,}71856...$
c) $D = 2{,}14285...$

8. La diferencia entre un fractal determinista y un fractal aleatorio es...

a) la elección de la semilla.
b) que el proceso de iteración queda perfectamente definido en el primer caso, mientras que en el segundo intervienen factores aleatorios.
c) No hay ningún tipo de diferencia.

9. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es falsa?

a) Los fractales son un buen modelo para representar objetos de la naturaleza.
b) Los fractales se usan como una técnica de compresión de datos.
c) Los fractales aún no se han usado para la generación de gráficos por ordenador.

10. Se dice que un fractal es autosemejante cuando...

a) está formado por segmentos.
b) ciertas partes del fractal son semejantes geométricamente a todo el fractal.
c) la semilla con la que se ha formado el fractal es un triángulo.

Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1. b
a) Incorrecta. Aunque fue Mandelbrot quien dio nombre a los fractales, no fue él quien creó los primeros fractales.
c) Incorrecta. Koch creó su famoso fractal unos diez años antes que el triángulo de Sierpinski.

2. c
a) Incorrecta. Esto sería el valor de la primera iteración si la semilla es un segmento de longitud 1.
b) Incorrecta. Se supone que hacemos infinitas iteraciones. Volved a leer el apartado donde se explica la curva de Koch.

3. a
b) Incorrecta. Notad en que en cada iteración se multiplican por 3 el número de triángulos.
c) Incorrecta. Notad en que en cada iteración se multiplican por 3 el número de triángulos.

4. b
a) Incorrecta. Notad que el triángulo está formado por tres copias de la iteración anterior más el triángulo grande que se ha quitado.
c) Incorrecta. Notad que el triángulo está formado por tres copias de la iteración anterior más el triángulo grande que se ha quitado.

5. a
b) Incorrecta. Incorrecto, pensad que se supone que hemos hecho infinitas iteraciones.
c) Incorrecta. Calculando el área de una iteración, es 2/3 de la anterior. Al iterar el proceso infinitas veces, el área tiende a 0.

6. c
a) Incorrecta. Al multiplicar longitudes por 4, las áreas se multiplican por 16.
b) Incorrecta. Al multiplicar longitudes por 4, las áreas se multiplican por 16.

7. a
b) Incorrecta. Tenéis que calcular ln15 / ln7.
c) Incorrecta. Tenéis que calcular ln15 / ln7.

8. b
a) Incorrecta. Con una misma semilla se pueden crear fractales deterministas o aleatorios.
c) Incorrecta. Sí que hay diferencia.

9. c Correcto, esta afirmación es falsa.
a) Incorrecta. Incorrecto: esta afirmación es verdadera.
b) Incorrecta. Incorrecto: esta afirmación es verdadera.

10. b
a) Incorrecta. Hay fractales autosemejantes que no están formados por segmentos.
c) Incorrecta. Hay fractales autosemejantes que no están formados por segmentos.