

Monográfico «Aprendizaje virtual de las matemáticas»

ARTÍCULO

# Teoría de la actividad y diseño de cursos virtuales: la enseñanza de matemáticas discretas en Ciencias de la Computación

**José Luis Ramírez**

jllram@cenidet.edu.mx  
CENIDET (México)

**Manuel Juárez**

juarezmanuel@cenidet.edu.mx  
CENIDET (México)

**Ana Remesal**

aremesal@ub.edu  
Universidad de Barcelona

Fecha de presentación: julio de 2011  
Fecha de aceptación: noviembre de 2011  
Fecha de publicación: enero de 2012

## Cita recomendada

RAMÍREZ, José Luis; JUÁREZ, Manuel; REMESAL, Ana (2012). «Teoría de la actividad y diseño de cursos virtuales: la enseñanza de matemáticas discretas en Ciencias de la Computación». En: «Aprendizaje virtual de las matemáticas» [monográfico en línea]. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC)*. Vol. 9, n.º 1, págs. 130-149 UOC. [Fecha de consulta: dd/mm/aa].

<<http://rusc.uoc.edu/ojs/index.php/rusc/article/view/v9n1-ramirez-juarez-remesal/v9n1-ramirez-juarez-remesal>>

ISSN 1698-580X

## Resumen

El objetivo de este estudio es presentar una experiencia de aprendizaje virtual a distancia en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas en educación superior. El curso se ofrece como programa de apoyo para alumnos de un máster de Ciencias de la Computación y está específicamente diseñado para satisfacer las necesidades de los estudiantes que iniciaban dicho programa, particularmente la falta de comprensión del lenguaje lógico detectada en varias promociones anteriores de los alumnos del CENIDET. El curso tiene como objetivo el desarrollo de la habilidad de uso del lenguaje lógico, la cual es básica para cursar con éxito el máster de Ciencias de la Computación, así como para su posterior aplicación en contextos profesionales relacionados con la Ingeniería computacional. Dieciocho estudiantes distribuidos por todo México participaron voluntariamente en el estudio bajo la dirección de un tutor. El diseño tecnopedagógico del curso se basa en dos premisas teóricas. Las decisiones didácticas relacionadas con el contenido se fundamentan en varios conceptos derivados de la segunda generación de la Teoría de la Actividad (TA). El concepto de «base de orientación para la acción» ha sido particularmente útil para definir las habilidades que se esperaba que desarrollaran los estudiantes. Las decisiones didácticas relacionadas con la interacción de los participantes se basan en el modelo de enseñanza acelerada en equipo de Slavin. A continuación se expone detalladamente la estructura del curso y se presentan algunos extractos de la interacción de los estudiantes para ilustrar su proceso de aprendizaje.

## Palabras clave

aprendizaje virtual, diseño didáctico, educación superior, matemática discreta, teoría de la actividad, habilidades matemáticas

## *Activity Theory and e-Course Design: An Experience in Discrete Mathematics for Computer Science*

### *Abstract*

*The aim of this article is to present a distance e-learning experience of mathematics in higher education. The course is offered as a remedial program for master's degree students of Computer Science. It was designed to meet the particular needs of the students entering the master's degree program, as a response to the lack of understanding of logical language which was identified in several previous cohorts of students at CENIDET. The course addresses mathematical abilities of comprehensive functional use of logical language as a basic ability to be developed for later successful participation in the Master of Computer Science and also for later use in professional contexts of Computer Engineering. Eighteen students distributed throughout Mexico volunteered to participate under the guidance of one instructor. The techno-pedagogical design of the course is grounded on two theoretical approaches. Content-related instructional decisions are supported by different concepts of the second generation of Activity Theory. The concept of Orienting Basis of an Action was particularly useful to define the skills the students were expected to develop. Instructional decisions related to the participants' interaction are underpinned by Slavin's Team Accelerated Instruction model. We present the course structure in detail and provide some student interaction excerpts in order to illustrate their learning progress*

### *Keywords*

*e-learning, instructional design, higher education, discrete mathematics, activity theory, mathematical abilities*

## 1. Introducción

El hecho de trabajar con enunciados formalizados o semiformalizados suele ser un reto para muchos estudiantes de matemáticas. Una de las estrategias más utilizadas por los estudiantes para hacer frente a textos que incluyen enunciados formalizados es leer únicamente la parte no formal e ignorar el formalismo matemático. Lamentablemente, cuando se utiliza esta estrategia se produce una pérdida importante de conocimientos matemáticos. Varios investigadores han asociado estas dificultades a: i) la negación de los enunciados matemáticos (Antonini, 2001; Durand-Guerrier, 2004); ii) la traducción (formalización) de los enunciados del lenguaje natural al lenguaje formal de la lógica de primer orden (LPO) (Barker-Plummer, Cox, Dale y Etchemendy, 2008); y iii) la identificación de la estructura lógica de los enunciados matemáticos (Selden y Selden, 1996).

Recientemente, en el ámbito de las Ciencias de la Computación, ha habido algunas propuestas para incluir métodos formales en el plan de estudios. Hoy en día, se espera que los estudiantes tengan capacidad para leer y escribir especificaciones formales en su práctica profesional (Boca, Bowen y Duché, 2006). Sin embargo, aunque muchos de ellos se familiarizan por primera vez con las matemáticas formalizadas o semiformalizadas en los cursos de Matemática discreta (MD), sus profesores esperan que posean un dominio suficiente de LPO. De ahí que los estudiantes tengan dificultades para entender y comunicar conceptos nuevos y complejos con textos semiformalizados. En consecuencia, requieren ayuda específica para desarrollar habilidades que les permitan leer textos matemáticos en distintos contextos. Una buena presentación de contenidos no basta; por lo tanto, en la educación superior los cursos de apoyo deberán orientarse explícitamente al desarrollo de esta habilidad (Merisotis y Phipps, 2000).

Este artículo describe el uso de determinados elementos de la segunda generación de la teoría de la actividad (TA) para diseñar un curso de apoyo en línea. En concreto, el concepto de «base de orientación para la acción» (BOA) ha sido muy útil para ofrecer a los estudiantes de máster el apoyo necesario en sus procesos de aprendizaje. El curso de apoyo en línea introduce conceptos preliminares de matemática discreta (lógica, conjuntos, relaciones y funciones) para los estudiantes que inician un máster de Ciencias de la Computación en México. En los siguientes apartados, presentamos el marco contextual, las premisas teóricas y las consecuencias para el diseño de materiales didácticos. Algunos extractos de las interacciones que tuvieron lugar durante el curso ilustran el progreso del aprendizaje.

## 2. El contexto institucional: la enseñanza de matemáticas en Ciencias de la Computación

La mayoría de los cursos de MD que pueden cursar los estudiantes de Ciencias de la Computación siguen un modelo tradicional de enseñanza de las matemáticas: (1) definición del concepto; (2) presentación de teoremas; (3) demostración y (4) resolución de problemas (véase, por ejemplo, Meyer, 2005). Los cursos alternativos siguen siendo una excepción. Además, en general, estos cursos no poseen la base teórica característica de la educación matemática (véase, por ejemplo, Sutner, 2005).

Tanto si son tradicionales o se basan en la resolución de problemas, estas propuestas didácticas ponen de relieve la precisión de las definiciones matemáticas. Todas ellas establecen las definiciones del contenido a partir del lenguaje lógico. En contraste, las evaluaciones previas en el contexto mexicano (Ramírez, 1996; 2005) han señalado repetidamente dos carencias de comprensión entre los estudiantes de Ciencias de la Computación: (a) traducir el lenguaje matemático al lenguaje natural (y viceversa); y b) analizar las definiciones matemáticas. En consecuencia, los programas docentes de matemáticas para estudiantes de Ciencias de la Computación deberían considerar ambos aspectos. En lo que concierne concretamente a la última cuestión, los alumnos necesitan asociar distintas representaciones de un concepto en el lenguaje natural, en el lenguaje lógico, en el lenguaje matemático y en el lenguaje pictográfico.

### 3. Marco teórico: la teoría de la actividad

La TA permite a los profesores de matemáticas atender a las deficiencias y los requisitos antes mencionados en los cursos de MD en línea. Actualmente, existen tres generaciones de la TA (Engeström, 2000). Los conceptos definidos por la primera generación –mediación, interiorización y zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1988)– y los propuestos por la tercera generación –aprendizaje expansivo, zona de desarrollo próximo grupal (Engeström, 1987) y aprendizaje situado (Lave y Wenger, 1991)– están ya bien establecidos. En cambio, el desarrollo y las aplicaciones de la segunda generación han sido menos conocidos. Nuestra experiencia didáctica está basada en la segunda generación de la TA. Uno de los elementos básicos de este planteamiento es la definición precisa de la estructura de actividad a través de acciones y operaciones (Leontiev, 1984). Estos conceptos permiten estudiar la actividad humana caracterizando la noción de habilidad –un elemento clave de nuestra propuesta didáctica– tanto para el diseño de actividades y materiales docentes como para el análisis de los progresos en el aprendizaje. En los siguientes subapartados se describen paso a paso las decisiones didácticas, guiándonos por este marco teórico.

#### 3.1. La segunda generación de la TA y la enseñanza de las matemáticas en la educación superior

El concepto de actividad de Leontiev ha sido utilizado por Tallizina (1988) y posteriormente por Hernández (1989) y Valverde (1990), entre otros, para describir las habilidades matemáticas. Para Leontiev, la actividad surge como un refinamiento del concepto de interiorización y es un elemento constituyente del sujeto psicológico, tanto en sus aspectos cognitivos (conciencia) como afectivos y motivacionales (personalidad). La actividad orienta al sujeto en la realidad objetiva, transformándola en una forma de subjetividad. Es decir, una actividad no es sólo una acción o una serie de acciones, sino un sistema con estructura, desarrollo, transiciones y cambios internos. Un sistema de actividad genera acciones y, a su vez, es materializado a través de acciones. Sin embargo, la actividad no puede reducirse a acciones particulares. Cada actividad está siempre conectada a un motivo (ya sea material

o abstracto) que responde a una necesidad. Los componentes de las actividades humanas son las acciones realizadas por los individuos. La acción posee un aspecto operativo (¿cómo y por qué medios podemos alcanzar un objetivo?), definido por las condiciones objetivas requeridas para lograr el objetivo de la actividad. Las actividades, acciones y operaciones son dinámicas: pueden cambiar su «nivel» dentro de la macroestructura de la actividad bajo ciertas condiciones.

El diseño de un proceso de aprendizaje parte de la caracterización psicológica de la actividad con relación a sus componentes estructurales: acciones y operaciones. La interpretación educativa de estos componentes se expresa en términos de habilidades y exige dominar un sistema complejo de acciones para autorregular la actividad. El proceso de adquisición de habilidades implica sistematizar las acciones de que constan. A su vez, este proceso requiere una ejecución consciente por parte del sujeto. La ejecución satisfactoria de acciones indica el nivel de desarrollo de habilidades para llevar a cabo la tarea. De ahí que el sujeto deba dominar el sistema de acciones para desarrollar plenamente una habilidad. En otras palabras, podríamos decir que para enseñar a comprender un texto matemático es esencial caracterizar las acciones e identificar las operaciones que comprende.

### 3.2. Diseñar la base orientadora de la acción

El desarrollo de funciones mentales superiores tiene un origen social (Vygotsky, 1988). Este desarrollo se produce en dos fases independientes: interpsicológico e intrapsicológico. Así, el desarrollo surge a raíz de acciones interiorizadas. La teoría de la formación por etapas de las acciones mentales de Galperin (1969) se basa en las premisas de Vygotsky aplicadas al contexto educativo. En primer lugar está la etapa de la actividad material, en la que el alumno necesita manipular objetos reales y llevar a cabo una actividad en el plano material, en el que puede manejar modelos, diagramas o gráficos de acuerdo con su edad. En segundo lugar está la verbalización, donde el estudiante necesita repetir la secuencia de las operaciones en voz alta. Expresándola en palabras, la acción pasa del exterior al interior. En último lugar, la actividad se lleva a cabo en el plano mental, completamente interiorizada.

El proceso de interiorización puede ser apoyado a través de la ejecución de ciertas acciones guiadas. Es precisamente este conjunto de acciones lo que permitirá a los alumnos y al tutor monitorizar y, si procede, corregir cada etapa de la asimilación. Galperin introdujo el término «base orientadora de la acción» (BOA) para referirse al conjunto de elementos orientadores con los que se guía al estudiante hacia la ejecución satisfactoria de una acción (también conceptualizado como «andamiaje» (Samaras y Gismondi, 1998).

En nuestro estudio, asumimos que la habilidad para leer y entender textos matemáticos consta de las siguientes acciones: (a) la traducción de un enunciado matemático al lenguaje natural, y viceversa; (b) la traducción de un enunciado al lenguaje de LPO a fin de revelar su estructura; y (c) la representación del enunciado mediante un lenguaje gráfico. Para avanzar en estas etapas e interpretar correctamente los enunciados matemáticos, los alumnos necesitan dominar ambos códigos. La identificación y caracterización de las acciones necesarias para leer y entender textos matemáticos ofrece una base para diseñar e implementar procesos didácticos en línea (véase la figura 1).

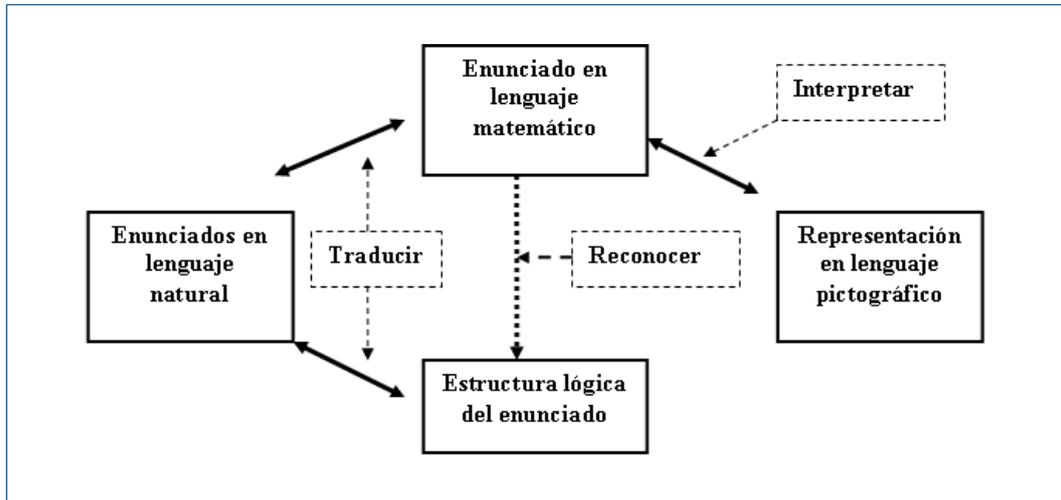


Figura 1: Sistema de habilidades para leer textos matemáticos.

## 4. Los retos del diseño didáctico

De acuerdo con la TA, tomamos tres elementos vertebrales del diseño didáctico: objetivos del curso, contenidos y Bases de orientación (BOA) para los estudiantes. En los siguientes apartados plantearemos cada uno de estos elementos y a continuación explicaremos cómo se implementan en un sistema de gestión del aprendizaje (SGA).

### 4.1. Objetivos del curso

Como resultado de los problemas identificados en cursos anteriores, nuestro objetivo era que los estudiantes desarrollaran habilidades para identificar y analizar el lenguaje formal (el lenguaje lógico y el lenguaje matemático) con el que se presentan los conceptos matemáticos y sus definiciones. El principal objetivo se dividió en tres subobjetivos:

*Los estudiantes deberían ser capaces de...*

- Analizar e identificar el lenguaje de LPO en el lenguaje natural.
- Identificar el lenguaje matemático que se expresa por medio del lenguaje lógico y las entidades matemáticas a las que se hace referencia.
- interpretar, del lenguaje formal al pictográfico, las definiciones del lenguaje matemático.

### 4.2. Contenido

El contenido básico de los cursos tradicionales de MD en educación superior es el siguiente: lógica proposicional, lógica de predicados, conjuntos, relaciones y funciones. La lógica se enseña, en general, a partir de un modelo deductivo de presentación de contenidos que se orienta a la demostración y utiliza sus propias reglas. En cambio, nuestro curso se centró en el manejo del lenguaje

de LPO, subrayando el proceso de traducción de los enunciados expresados en lenguaje natural al lenguaje lógico y matemático. Tras el módulo de lógica, se introdujo un módulo de lectura de textos matemáticos. Para la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático, se proporcionó a los estudiantes una BOA específica.

Los módulos de *Conjuntos*, *Relaciones* y *Funciones* tenían la siguiente estructura: en primer lugar, el tutor presentaba una breve lectura del ámbito disciplinario, en la que los conceptos matemáticos correspondientes aparecían en sus contextos habituales. A continuación, exponía el tema a partir de textos estándar. En tercer lugar, los estudiantes realizaban los ejercicios de cada tema, con dos actividades preferentes: (a) análisis de las definiciones y (b) uso de las BOA correspondientes. Finalmente, los alumnos tenían que leer otros textos adicionales del mismo ámbito, en los que aparecían los conceptos matemáticos correspondientes.

### 4.3. Bases orientadoras de la acción

Definimos una serie de BOA para ayudar a los estudiantes en el proceso de resolución de problemas. En este curso, las BOA servían para traducir enunciados: (a) de lenguaje natural a lenguaje lógico-proposicional; (b) de lenguaje natural a lenguaje de predicados; (c) de lenguaje natural a lenguaje matemático y viceversa. En último lugar, propusimos una BOA para (d) leer textos matemáticos y para (e) analizar la definición de conceptos matemáticos.

A lo largo del curso se proporcionaron las BOA, junto con el material utilizado por los alumnos, introduciéndolas con ejemplos. En el módulo de lógica, las BOA se caracterizaron y suministraron para desarrollar la habilidad de traducir del lenguaje natural al lenguaje de LPO. Para los módulos de *Conjuntos*, *Relaciones* y *Funciones*, se proporcionó una BOA para analizar las definiciones. A continuación se presenta un ejemplo de implementación parcial de una BOA para el análisis de definiciones.

#### 4.3.1. Ejemplo de BOA

Inicialmente, proporcionamos a los estudiantes ejemplos paso a paso para llevar a cabo las ocho acciones del análisis: (1) diferenciar entre la expresión de la definición en lenguaje natural y su expresión en lenguaje matemático; (2) identificar las entidades matemáticas contenidas en la misma; (3) dar ejemplos de objetos que cumplieran y no cumplieran con la definición; (4) encontrar diferentes modos de representarla; (5) identificar la estructura lógica subyacente; (6) establecer su negación; (7) encontrar la equivalencia lógica de la definición; y finalmente, (8) generalizarla.

El proceso presentado a los estudiantes como modelo para usar la BOA se describe en las figuras 2 y 3. En estas figuras, las acciones se indican en la columna izquierda y las posibles respuestas en la columna derecha.

Esta BOA apoya el desarrollo parcial de las habilidades para traducir enunciados expresados en lenguaje matemático, pictórico y natural. Realizar el análisis de definiciones ofrece a los estudiantes una buena base para incrementar su capacidad para leer textos matemáticos.

BOA	Análisis de la definición	
	Ejemplificación de la acción	
a. Diferenciar entre la expresión de la definición en lenguaje natural y su expresión en lenguaje matemático	<p><b>Definición expresada en lenguaje natural</b></p> <p>La unión de los conjuntos <math>A</math> y <math>B</math>, denotada como <math>A \cup B</math>, es el conjunto de los objetos que pertenecen a <math>A</math> o <math>B</math> o a ambos.</p>	<p><b>Definición en lenguaje matemático</b></p> <p><math>A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}</math></p>
b. Identificar las identidades presentes en la definición.	Conjunto, concepto de pertenencia.	
c. Analizar diferentes representaciones de la definición		
d. Dar ejemplos de objetos que satisfacen o no la definición.		

Figura 2: Acciones de 1 a 4 presentadas a los estudiantes como ejemplo para el análisis de una definición.

BOA	Análisis de la definición	
	Ejemplificación de la acción	
e. Identificar la estructura lógica de la definición.	Si $P(x, A)$ significa que $x$ pertenece a $A$ y $Q(x, B)$ significa que $x$ pertenece a $B$ , la estructura lógica de la definición: $P(x, A) \vee Q(x, B)$ .	
f. Establecer la negación de la definición.	De la estructura lógica $P(x, A) \vee Q(x, B)$ , aplicando la negación lógica se obtiene: $\neg P(x, A) \wedge \neg Q(x, B)$ . Así que la negación es: $\neg (A \cup B) = \{x \mid x \notin A \wedge x \notin B\}$	
g. Encontrar equivalencias lógicas de la definición	En este caso una equivalencia lógica de: $P(x, A) \vee Q(x, B)$ Sería poco natural, por ejemplo: $\neg (\neg P(x, A) \wedge \neg Q(x, B))$ . ¿Cómo leeríamos esta expresión en lenguaje natural?	
h. Generalizar la definición.	<p>La unión de un número finito de conjuntos:  <math>[(A \cup B) \cup C] \cup D \dots \cup W := \{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C \dots \vee x \in W\}</math>                      Puede resumirse como:</p> $\bigcup_{\beta \in B} A_{\beta} = \{x \in U \mid \exists \beta \in B : x \in A_{\beta}\}$	

Figura 3: Acciones de 5 a 8 presentadas a los estudiantes como ejemplo para el análisis de una definición.

## 4.4. Diseño tecnopedagógico del curso virtual

En el aprendizaje virtual, muchos abandonos están causados por falta de motivación (Juan, Huertas, Steegmann, Corcoles y Serrat, 2008); por lo tanto, el diseño didáctico de los cursos es un elemento clave en el contexto de la educación de adultos. El término «diseño tecnopedagógico» se refiere a las características didácticas de un curso basado en herramientas tecnológicas (Mauri, Colomina y De Gispert, 2009). En efecto, el diseño de cursos virtuales no puede reducirse a los elementos tradicionales del plan de estudios, es decir, objetivos, contenidos y actividades de aprendizaje y evaluación. Al contrario, debe incluir una selección razonada y una planificación de las herramientas tecnológicas que se usarán a lo largo del curso académico, junto con un plan que contemple el uso de estos espacios y herramientas. Por ello, el diseño tecno-pedagógico debe incluir una cuidadosa planificación de las interacciones (entre estudiante y estudiante, y entre el tutor y sus alumnos) que tendrán lugar a lo largo del curso.

### 4.4.1. El SGA

En este caso en concreto, utilizamos el programa Moodle (V.1.5.8) como SGA, ya que presenta una estructura flexible y deja abiertas muchas elecciones a los diseñadores y tutores del curso. Por ejemplo, permite gestionar distintos espacios para grupos heterogéneos y flexibles del mismo curso. Esta característica ha sido especialmente relevante en este caso ya que ha facilitado la interacción del grupo clase, así como espacios privados para grupos más reducidos. El administrador/tutor del curso es quien toma estas decisiones de acuerdo con el diseño tecnopedagógico. Además, permite la gestión de los contenidos en módulos independientes. En este curso, presentamos los cinco temas por separado, en «modalidad semanal», todos con la misma estructura recursiva para ayudar a los estudiantes a asumir las normas de participación.

### 4.4.2. Diseño interactivo

Para seleccionar y planificar las herramientas tecnológicas es necesario determinar la interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el tutor. Adaptamos la técnica colaborativa llamada «enseñanza acelerada en equipo» (EAE) (Slavin, 1994) al entorno virtual de aprendizaje (EVA). De acuerdo con esta técnica, los estudiantes deben realizar tres tipos de actividad. En primer lugar, deben trabajar independientemente con los materiales de aprendizaje. Se espera que lean los materiales del curso y que resuelvan los problemas y ejercicios correspondientes. En segundo lugar, deben trabajar por parejas para compartir e intercambiar las soluciones y dificultades que hayan surgido en los problemas y ejercicios. Con este objetivo, pueden acceder a una sala privada sincrónica (chat) y asincrónica (foro) en la plataforma en línea. El tercer nivel de interacción abarca a todo el grupo. De nuevo, tanto el chat como el foro sirven de apoyo para la interacción grupal. El uso de estos espacios y herramientas está regulado por normas de participación específicas. La figura 4 presenta un esquema de la organización de los participantes y del contenido de los materiales docentes.

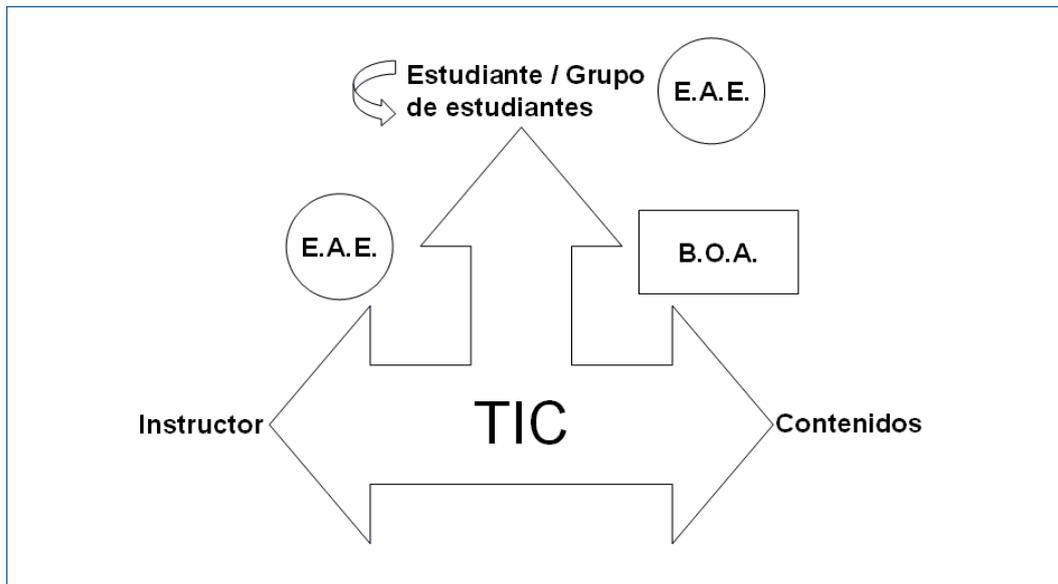


Figura 4: Diseño tecnopedagógico del curso.

*Interacción estudiante-contenido.* En las primeras ediciones del curso, surgió una dificultad técnica al utilizar las herramientas de chat y foro. Los participantes tuvieron problemas al escribir en lenguaje lógico y matemático. Estos problemas ya se habían detectado en estudios similares (Smith, Ferguson y Gupta 2004). Así, para facilitar la comunicación matemática, añadimos un editor HTML con un editor de ecuaciones matemáticas (WIRIS, V.2.1.26) a la herramienta de chat (Juárez y Ramírez, 2010). Las figuras 5 y 6 muestran el editor de ecuaciones y algunos ejemplos de cómo se puede utilizar.

*Interacción estudiante-tutor.* La principal área del curso estaba integrada por tres espacios de comunicación. En primer lugar, un foro para la discusión de grupos reducidos que ofrecía un espacio asincrónico para facilitar la continuidad de las discusiones y la comunicación del tutor con los estudiantes. En segundo lugar, dos salas de chat para la interacción sincrónica, con dos finalidades: una primera sala de chat para la discusión organizada de todo el grupo clase para resolver dudas bajo la guía del tutor; y una segunda sala para resolver cuestiones técnicas.

*Interacción estudiante-estudiante.* La interacción entre estudiantes se diseñó para que tuviera lugar entre parejas y se facilitó por medio de distintas herramientas. En primer lugar, una sala de chat para la interacción sincrónica; en segundo lugar, una wiki para la resolución conjunta de problemas matemáticos; y en tercer lugar, una base de datos para compartir resultados y reflexiones. Cada pareja de estudiantes podía decidir libremente qué herramienta prefería usar. Los espacios de grupo eran privados para cada pareja; solamente el tutor podía acceder a los espacios reservados a los grupos reducidos. Así podía verificar o participar en la interacción de los alumnos, como ocurriría por ejemplo en las situaciones presenciales de EAE.

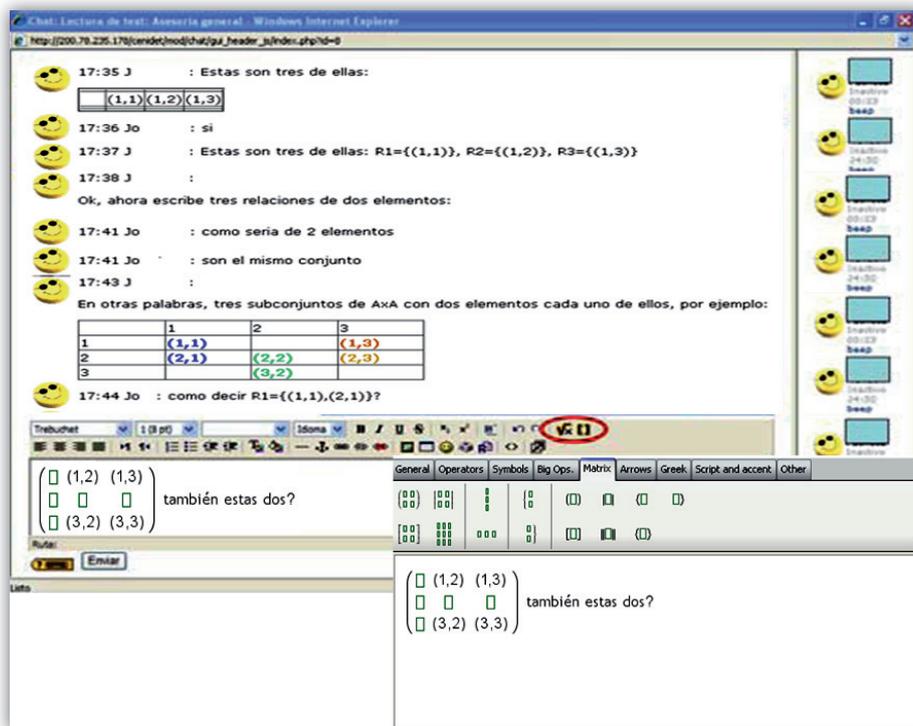


Figura 5: Ejemplo del editor de ecuaciones y su uso en la interacción sincrónica.

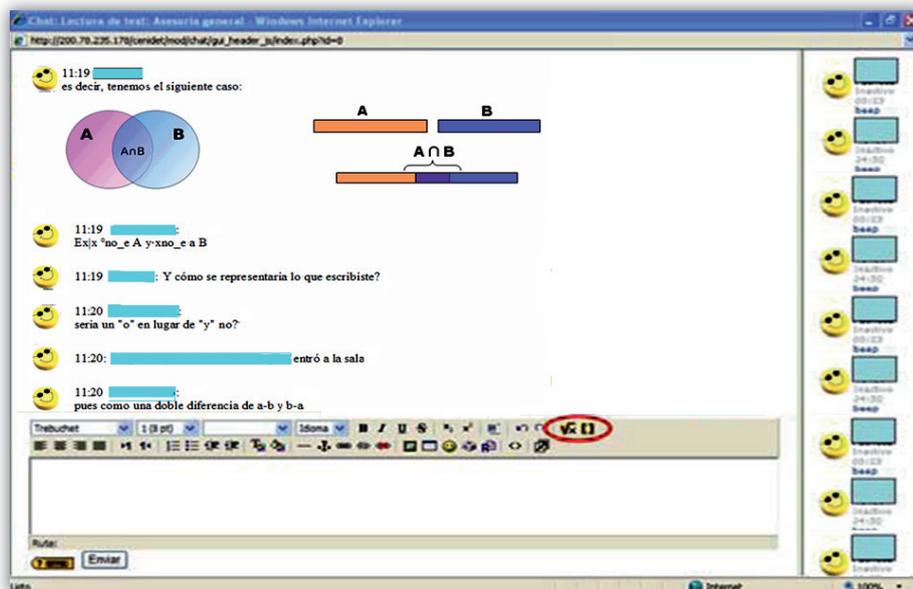


Figura 6: El uso de WIRIS para la representación gráfica en línea.

#### 4.4.3. Estructura del curso

El curso se prolongó durante cinco semanas, de julio a agosto de 2008. Un grupo de 18 estudiantes accedió voluntariamente a matricularse al curso de apoyo para el máster de Ciencias de la Computación en CENIDET. Los estudiantes eran ingenieros informáticos procedentes de varios estados de México. El tutor tenía experiencia en cursos convencionales sobre esta materia; además, estaba familiarizado con las herramientas tecnológicas básicas y había participado en el diseño del curso.

El curso estaba compuesto por cinco módulos (*Lógica y lenguaje matemático, Conjuntos, Relaciones, Funciones y Aplicaciones*), uno por semana. Los estudiantes trabajaron por parejas, siguiendo el modelo de EAE presentado previamente. Si seguían teniendo dudas tras la interacción con sus iguales, podían acceder al foro del grupo clase o al chat del grupo.

Al finalizar cada semana, los estudiantes llevaban a cabo una autoevaluación mediante un formulario de respuesta que les facilitaba el tutor como modelo de resolución. Los estudiantes tenían que comparar el modelo con sus propias respuestas para poder identificar desviaciones, fortalezas y debilidades. Esta autoevaluación no se calificaba. El tutor estaba disponible en sesiones semanales de dos horas para asesorar y clarificar dudas. Respondía e interactuaba con los alumnos tanto sincrónicamente (sala de chat con toda la clase) como asincrónicamente (foro con toda la clase). Se estableció un sistema estricto de turnos para facilitar la interacción sincrónica en la sala de chat de todo el grupo. Cada pareja de estudiantes interactuaba con el tutor en turnos de veinte minutos. Los demás participantes asistían a la sesión de chat como observadores y tenían la oportunidad de «escuchar» hasta el cambio de turno. Este diseño didáctico se presenta más detalladamente en una publicación anterior (Remesal, Juárez y Ramírez, 2011).

## 5. Resultados: evidencias del desarrollo de habilidades por medio del uso de bases orientadoras de la acción

Para evaluar el desarrollo de las habilidades de los estudiantes, llevamos a cabo un análisis interpretativo de los siguientes aspectos discursivos (Lacity y Janson, 1994; Willig, 2004):

1. Las respuestas a los ejercicios.
2. Las preguntas planteadas en el foro y el chat.
3. Los comentarios realizados en la interacción entre estudiantes.
4. Los resultados de la autoevaluación semanal.

A continuación presentamos los resultados específicos del análisis de los datos 1 a 3, con un propósito más ilustrativo que exhaustivo.

En la siguiente secuencia podemos observar un ejemplo del desarrollo de capacidades de una estudiante, es decir, su proceso de interiorización (los participantes se citan con pseudónimo). En primer lugar, podemos ver cómo Lois empieza el análisis indicando qué definición ha utilizado para las funciones inversas; luego plantea sus dudas respecto a la estructura lógica. Finalmente le explica a Mary cómo interpreta la definición matemática en lenguaje natural. Sus explicaciones y dudas muestran la adquisición de una aptitud para organizar definiciones según el modelo ejemplificado en la BOA. En esta interacción asincrónica, la respuesta de Mary muestra cómo analiza parcialmente la definición. Primero propone la definición en lenguaje natural y luego en lenguaje matemático. Mary ofrece más elementos sobre lo que considera la estructura lógica de la definición. Concluye comentando los tipos de propiedades que una función debe satisfacer para tener una función inversa. A pesar de su análisis, no está segura de la exactitud de la estructura lógica que propone:

[Foro para grupo reducido. Autora Lois. 08/02 08:59]

«Hola Mary<sup>1</sup>,

Cual definicion en lenguaje matematico usaste para la funcion inversa, yo use la siguiente pero no se cual sea su estructura lógica:

$$f^{-1}:B[A \mid x = f^{-1}(y),$$

lo que en lenguaje natural sería: una función inversa es cualquier regla o correspondencia que nos permita obtener los valores de

$$x \in A \text{ a partir de los valores de } y \in B$$

tienes alguna otra?»

[Foro para grupo reducido. Autora Mary. 08/02 11:27]

“¡Hola Lois! Buenos días,

Bueno pues a ver si te puedo ayudar vale...

Mira mi definicion en lenguaje natural me kedo asi...

Sea una función de A en B y B en A una función Inversa, si y solo si la función es Biyectiva, es decir la correspondencia de uno a uno y sobre del codominio.  $f \Leftrightarrow f^{-1}$  en lenguaje matematico...

Es una función inversa o invertible.

$$f = f^{-1} \text{ Si,}$$

$$f: A \rightarrow B \text{ y } f^{-1}: B \rightarrow A \text{ si,}$$

$$f: A \rightarrow B ( \forall x \exists y \wedge \forall y \exists x)$$

y en su estructura logica no esoy muy segura pero mira me keda..

$$P(x) \text{ ----> } Q(x) \text{ y } Q(x) \text{ ----> } P(x)$$

Bueno eso creo yo, mira por k leyendo la definicion es ke para que una funcion sea inversa, necesitas saber primero que sea una funcion, segundo si cuenta con las propiedades de inyectiva y sobreyectiva(biyectiva) para poder decir que  $f: A \rightarrow B \text{ y } f^{-1}: B \rightarrow A$ .

Bueno niña espero t haya ayudado y si no me dices y lo platicamos alo mejor stoy mal y asi nos sacamos las dudas vale...»

A través de la interacción entre iguales, compartiendo dudas y esforzándose conjuntamente para entender la BOA y manejar el contenido matemático en los múltiples espacios de comunicación del curso, los estudiantes demostraron interiorizar progresivamente estas habilidades. En los últimos módulos de este curso, la mayoría de alumnos generaron definiciones de acuerdo con la BOA a través de las siguientes acciones: primero, negando la función; segundo, traduciendo la función del lenguaje matemático al lenguaje natural y viceversa; tercero, representando las distintas formas de la función; y finalmente, representando la estructura lógica.

Por ejemplo, la siguiente intervención (figura 7) demuestra cómo Cinthya enuncia explícitamente la primera etapa de la BOA: «Primero está el análisis de las definiciones. Por favor, dime si voy bien». Algunas veces, el tutor intervenía activamente para recordar a los alumnos las acciones que estructuraban las BOA, orientándoles para conectarlas con el contenido. En la siguiente secuencia, por ejemplo, la estudiante muestra un primer reconocimiento de la estructura lógica de un enunciado. En consecuencia, el tutor interviene para recordarle una de las acciones de andamiaje relacionadas con la traducción de enunciados y el reconocimiento de su estructura lógica.

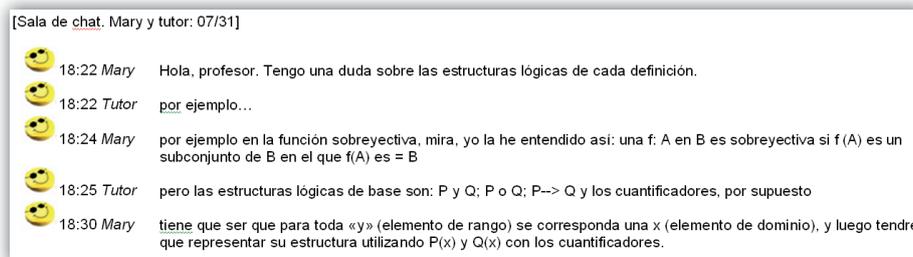


Figura 7: Ejemplo de las primeras etapas del uso de una BOA en una sesión de chat.

Después de las indicaciones del tutor respecto a las estructuras lógicas de base, Mary recuerda la necesidad de usar predicados y cuantificadores. No sólo el tutor ofrece retroalimentación y apoyo para resolver ejercicios; algunas veces, los demás estudiantes que participan en las sesiones de chat también contribuyen con su intervención.

Además del chat y de la interacción en el foro, los exámenes semanales que los estudiantes realizaban para cada unidad también daban cuenta del desarrollo de habilidades mediante el uso de la BOA. Por ejemplo, la figura 8 muestra parte de la respuesta de un estudiante a la primera pregunta del tercer examen. En este caso, empieza reescribiendo toda la BOA para el análisis de la definición. Luego resuelve el ejercicio por etapas.

La respuesta del estudiante muestra la primera etapa del análisis de la definición, expresada tanto en lenguaje natural como en lenguaje matemático. Inicia el análisis escribiendo las expresiones en ambos lenguajes en una tabla y concluye esta etapa proponiendo una forma distinta de expresar la definición en lenguaje natural y su correspondiente formalización en lenguaje matemático. El estudiante ha sido capaz de proponer su propia manera de describir el concepto de relación reflexiva y ha formalizado la definición en lenguaje matemático. Estas acciones demuestran de qué forma el estudiante utiliza la BOA y, por lo tanto, dan testimonio de su habilidad para traducir una frase expresada en lenguaje natural al lenguaje matemático.

**Análisis de la definición: relación reflexiva**

**SAGS**  
**Equipo Lambda**

Para analizar la definición deben seguirse siete pasos:

- a) Distinguir entre la definición expresada en lenguaje natural y su expresión en lenguaje matemático.
- b) Identificar la entidad o entidades matemáticas contenidas en la definición.
- c) Analizar varias representaciones de la definición.
- d) Dar ejemplos de situaciones en que la definición o bien se cumple o no se cumple.
- e) Identificar la estructura lógica de la definición
- f) Establecer la negación de la definición.
- g) Encontrar equivalencias lógicas de la definición.

a) Distinguir entre la definición expresada en lenguaje natural y su expresión en lenguaje matemático.

Definición en lenguaje natural	Definición en lenguaje matemático
*La relación R es reflexiva si todo elemento del conjunto A está relacionado consigo mismo. *Una relación <b>R</b> en un conjunto <b>A</b> es reflexiva si todo elemento de <b>A</b> se relaciona consigo mismo.	Supongamos que A sea un conjunto no vacío. Supongamos que R sea una relación en A. R es reflexivo si y sólo si ..... $\forall x(x \in A \Rightarrow xRx)$ .....

Para completar este paso, debemos pensar en otras formas de señalar que una relación es reflexiva y expresarlo en lenguaje matemático.

**«R es una relación reflexiva en A si y sólo si todos los elementos de A están relacionados consigo mismos a través de R»**

RR= es el conjunto de relaciones reflexivas en A  
R= una relación  
 $R \in RR \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow xRx)$  .....

Figura 8: Uso de la BOA para analizar una definición.

## 6. Conclusiones: evaluación del diseño del curso

En las últimas décadas se ha confirmado la necesidad de realizar cursos de apoyo (propedéuticos, o preparatorios) para promover la efectiva participación de los estudiantes mexicanos en el programa de máster del CENIDET (Ramírez, 1996; 2005). En la educación presencial, el desarrollo de habilidades matemáticas es una tarea compleja tanto para los profesores como para los alumnos. En consecuencia, ofrecer estos cursos en el contexto virtual es, de por sí, una empresa arriesgada. En concreto, el diseño didáctico y su implementación en un SGA constituyen un reto de primer orden para el profesorado de educación superior. En este curso, el diseño tecnopedagógico permitió anticipar la interacción de los participantes en el sistema, promoviendo la interacción sincrónica y asincrónica entre estudiantes seguida de una interacción sincrónica altamente estructurada entre el grupo y el tutor. Por un lado, desde el punto de vista pedagógico, esto fue posible gracias al modelo de EAE. Por el otro, a nivel tecnológico, estuvo facilitado por la flexibilidad del SGA y la incorporación de la aplicación WIRIS.

Sin embargo, lo más importante es que el diseño didáctico en línea presentado en este artículo sugiere fuertemente que la segunda generación de la TA ofrece elementos teóricos útiles para promover el desarrollo de habilidades mediante herramientas virtuales. A partir de la TA fue posible definir los objetivos del curso en cuanto a aptitudes, conocimientos y condiciones de acceso. Esto, a su vez, permitió centrarse en el desarrollo de habilidades, utilizando el contenido matemático como medio, en contraste con los planteamientos tradicionales de enseñanza de las matemáticas que suelen orientarse a la presentación de contenidos.

En trabajos anteriores hemos documentado la valoración positiva del curso por parte de los participantes (Remesal, 2008). Tras analizar las interacciones de los participantes en la plataforma virtual en relación con los ejercicios de traducción realizados tras haber facilitado las BOA, valoramos positivamente el diseño del curso respecto a tres importantes aspectos docentes. En primer lugar, en cuanto a la secuencia de contenido, el hecho de empezar con el dominio del lenguaje lógico y avanzar hacia la comprensión de textos matemáticos semiformalizados parece una estrategia muy apropiada para facilitar el desarrollo de las habilidades requeridas. En segundo lugar, la estructura y las normas de interacción tuvieron tres efectos positivos: (1) permitieron la resolución de ejercicios; (2) impulsaron la apropiación de contenido y el desarrollo de habilidades; y (3) fomentaron las relaciones sociales entre parejas de estudiantes físicamente distanciados. Y en tercer lugar, la incorporación de un software específico (WIRIS) ayudó a los participantes a superar dificultades para manejar expresiones lógico-matemáticas y pictográficas en la comunicación virtual escrita.

Sin embargo, la duración insuficiente del curso plantea una evidente limitación al pleno desarrollo de las habilidades previstas, ya que el desarrollo de éstas requiere una práctica gradual; de hecho, cinco semanas es un período de tiempo demasiado breve. En futuras ediciones de este curso, debería considerarse una mayor duración (hasta ocho semanas). Además, estamos estudiando tres posibles direcciones para las próximas etapas docentes y de investigación. Primero, es preciso realizar un estudio longitudinal para identificar cómo los alumnos utilizan la BOA para analizar las definiciones en el máster de Ciencias de la Computación después del curso propedéutico. Este proyecto longitudinal permitirá valorar la eficacia del curso preparatorio. Segundo, nuestra pretensión es ampliar el curso preparatorio a otros temas relacionados, como la lógica modal y la lógica dinámica, del programa de máster. Finalmente, en las próximas ediciones del curso se añadirán herramientas de audio y videoconferencia para determinar si su uso mejora la interacción entre los participantes.

## Agradecimientos

Este proyecto ha sido financiado por una beca CUDI/CONACYT I0101/131/07 C-229-07.

La Dra. Ana Remesal es miembro del Grupo de investigación sobre desarrollo, interacción y comunicación en contextos educativos, financiado por la Generalitat de Catalunya desde 1995 (2009 SGR 933).

## Nota

El idioma original de las interacciones de los alumnos es castellano en su variante mexicana. Los extractos se presentan en su forma original. Se mantienen los nombres anonimizados.

## Bibliografía

- ANTONINI, S. (2001). «Negation in mathematics: obstacles emerging from an exploratory study». *Proceedings of the 25<sup>th</sup> PME Conference*. Universitat d'Utrecht. Págs. 49-56.
- BARKER-PLUMMER, D.; COX, R.; DALE, R.; ETCHMENDY, J. (2008). «An empirical study of errors in translating natural language into logic». *Proceedings of the 30<sup>th</sup> Annual Meeting of the Cognitive Science Society/CogSci*. Págs. 505-510.
- BOCA, P.; BOWEN, J. P.; DUCE, A. (eds.) (2006). *Teaching Formal Methods: Practice and Experience*. Electronic Workshops in Computing (eWiC) series. Londres: BCS London Office.
- DURAND-GUERRIER, V. (2003). «Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective». *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 53, págs. 5-34.
- DURAND-GUERRIER, V.; BEN-KILANI, I. (2004). «Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire Tunisien». *Les Cahiers du Français Contemporain*. Vol. 9, págs. 29-55.
- ENGESTRÖM, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit Oy.
- ENGESTRÖM, Y. (2000). «Activity theory and the social construction of knowledge: A story of four umpires». *Organization*. Vol. 7, nº 2, págs. 301-310.
- GALPERIN, Y. (1969). «Stages in the development of mental acts». En: M. COLE, I. MALTZMAN (eds.). *A handbook of contemporary Soviet psychology*. Nueva York: Basic Books. Págs. 249-273.
- JUAN, A. A.; HUERTAS, A.; STEEGMANN, C.; CORCOLES, C.; SERRAT, C. (2008). «Mathematical e-learning: state of the art and experiences at the Open University of Catalonia». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Vol. 39, nº 4, págs. 455-471.
- JUÁREZ, M.; RAMÍREZ, J. L. (2010). «Colaborar para aprender y enseñar matemáticas online». *Didac*. Nº 56-57, págs. 71-75.
- JUNGK, W. (1981). *Conferencias sobre la enseñanza de la matemática*. La Habana: Ministerio de Educación.
- LAVE, J.; WENGER, E. (1991). *Situated Learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- LACITY, M. C.; JANSON, M. A. (1994). «Understanding qualitative data. A framework for text analysis methods». *Journal of Management Information Systems*. Vol. 11, nº 2, págs. 137-155.
- LEONTIEV, A. N. (1984). *Actividad, Conciencia y Personalidad*. México: Cartago.
- MAURI, T.; COLOMINA, R.; DE GISPERT, I. (2009). «Diseño de propuestas docentes con TIC en la enseñanza superior: nuevos retos y principios de calidad desde una perspectiva socioconstructivista». *Revista de Educación*. Vol. 348, págs. 377-399.

- MERISOTIS, J. P.; PHIPPS, R. A. (2000). «Remedial education in colleges and universities. What's really going on?» *The Review of Higher Education*. Vol. 4, nº 1, págs. 67-85.
- MEYER, A.; RUBINFELD, R. (2005). *Mathematics for computer science* [notas del curso]. MITOPENCOURSEWARE. Massachusetts Institute of Technology.  
<<http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-042JFall-2005/CourseHome/index.htm>>
- RAMÍREZ, J. L. (1996). *Reporte del proyecto: «Estructuración de una metodología para la enseñanza de las matemáticas discretas para la maestría en ciencias de la computación en el CENIDET»* [informe interno, notas del curso]. CENIDET. Departamento de Desarrollo Académico.
- RAMÍREZ, J. L. (2005). *Reporte del proyecto: «Identificación de dificultades en los cursos de matemáticas de los programas de maestría del CENIDET»* [informe interno]. CENIDET. Departamento de Desarrollo Académico.
- REMESAL, A. (2008). *Lectura de textos semi-formalizados de matemáticas para computación. Informe técnico de evaluación* [informe interno]. CENIDET/Universidad de Barcelona.
- REMESAL, A.; JUÁREZ, M.; RAMÍREZ, J. L. (2011). «Technopedagogical design versus reality in an inter-institutional online remedial course» [artículo en línea]. *EARLI 2011 Education for a Global Networked Society*.  
<<http://aremor.wordpress.com/publications-2/>>
- SAMARAS, A. P.; GISMONDI, S. (1998). «Scaffolds in the field: Vygotskian interpretation in a teacher education program». *Teaching and Teacher Education*. Vol. 14, nº 7, págs. 715-733.
- SELDEN, A.; SELDEN, J. (1996). «The role of logic in the validation of mathematical proofs». *Proceedings of The DIMACS Symposium on Teaching Logic and Reasoning in an Illogical World*. Rutgers University.
- SLAVIN, R. E. (1994). *Cooperative Learning. Theory, Research, and Practice*. Boston: Allyn and Bacon.
- SMITH, G. G.; FERGUSON, D.; GUPTA, S. (2004). «Diagrams and math notation in e-learning: Growing pains of a new generation». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Vol. 35, nº 1, págs. 681-695.
- SUTNER, K. (2005). *CDM: Teaching discrete mathematics to computer science majors*. Carnegie Mellon University.  
<<http://www.cs.cmu.edu/~esutner/papers/jeric.pdf>>
- TALLIZINA, N. F. (1988). *Los fundamentos de la educación superior*. México: UAM-Ángeles Editores.
- VALVERDE, L. (1990). *Un método para contribuir a desarrollar la habilidad fundamental-demostrar una proposición matemática* [tesis doctoral no publicada]. Universidad de la Habana.
- VYGOTSKY, L. S. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo.
- WILLIG, C. (2004). *Introducing qualitative research in psychology. Adventures in theory and method*. Fildelfia: Open University Press.

## Sobre los autores

*José Luis Ramírez*

[jlram@cenidet.edu.mx](mailto:jlram@cenidet.edu.mx)

CENIDET (México)

José Luis Ramírez Alcántara es licenciado en Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Obtuvo el grado de Maestría en Matemática Educativa en el CINVESTAV, México, y actualmente realiza estudios de doctorado de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad Autónoma de Barcelona. Durante 15 años ha impartido cursos de matemáticas, investigación educativa y metodología de la enseñanza de las matemáticas en programas de licenciatura y maestría. En el CENIDET ha colaborado con el Departamento de Ciencias Computacionales impartiendo los cursos de Matemáticas discretas (MD) y Teoría de la computación. Actualmente trabaja en la línea de investigación *Procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación superior en entornos virtuales: e-learning y b-learning*.

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET)

Interior Internado Palmira S/N

Col. Palmira Cuernavaca, Morelos. D.R.

C.P. 62490

México

*Manuel Juárez*

[juarezmanuel@cenidet.edu.mx](mailto:juarezmanuel@cenidet.edu.mx)

CENIDET (México)

Manuel Juárez es licenciado en Psicología, maestro en computación y doctor en Ciencias de la Educación por el Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV – IPN de México. Su tesis de doctorado versa sobre la utilización del CSCL en procesos de enseñanza de las ciencias a distancia. En el CENIDET ha desarrollado proyectos relacionados con la enseñanza de las matemáticas en línea, en programas de actualización docente en el área de las matemáticas y en el uso de las TIC para la enseñanza en ingeniería. Es miembro de la Red TIC del CONACYT y actualmente trabaja en la línea de investigación *Procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación superior en entornos virtuales: e-learning y b-learning*.

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET)

Interior Internado Palmira S/N

Col. Palmira Cuernavaca, Morelos. D.R.

C.P. 62490

México

Ana Remesal

aremesal@ub.edu

Universidad de Barcelona

Ana Remesal es licenciada en Psicopedagogía y doctora en Psicología de la Educación por la Universidad de Barcelona. Defendió su tesis en el ámbito de la evaluación del aprendizaje matemático en las etapas obligatorias de la educación. Es miembro del grupo GRINTIE, dirigido por el doctor César Coll. En el seno de este grupo ha participado en diferentes proyectos de investigación y de innovación docente relacionados con las nuevas tecnologías, y particularmente con el aprendizaje colaborativo apoyado por contextos virtuales. Ha colaborado en diversos cursos del CENIDET como auditora-asesora. A día de hoy, imparte docencia en la Facultad de Formación del Profesorado de la Universidad de Barcelona.

Universidad de Barcelona

Facultad de Formación del Profesorado

Passeig de la Vall d'Hebron, 171

08035 Barcelona

España

<http://www.psyed.edu.es/grintie/>



Los textos publicados en esta revista están sujetos –si no se indica lo contrario– a una licencia de Reconocimiento 3.0 España de Creative Commons. Puede copiarlos, distribuirlos, comunicarlos públicamente y hacer obras derivadas siempre que reconozca los créditos de las obras (autoría, nombre de la revista, institución editora) de la manera especificada por los autores o por la revista. La licencia completa se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/es/deed.es>.