Universitat Rovira i Virgili (URV)
Universitat Oberta de Catalunya (UOC)

Máster en Ingeniería Computacional y Matemática

Trabajo Final de Máster

Árboles fractales binarios simétricos autocontactados y sus geometrías contenidas

Nombre Estudiante: Manuel Omar Cruz Banegas

Nombre Director: Dr. Antonio Garijo Real

Fecha de Entrega: 20 de junio de 2021

El Dr. Antonio Garijo Real, certifica que el estudiante Manuel Omar Cruz Banegas ha elaborado el trabajo bajo su dirección y autoriza la presentación de esta memoria para su evaluación.

Firma del director/a:

GARIJO REAL ANTONIO - 43420636V

Firmado digitalmente por GARIJO REAL ANTONIO - 43420636V
Fecha: 2021.06.11 09:01:16 +02'00'

A) Creative Commons:

Esta obra está sujeta a una licencia de Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 España de Creative Commons

B) GNU Free Documentation License (GNU FDL)
Copyright © 2021 MANUEL OMAR CRUZ BANEGAS.
Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts.
A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

C) Copyright
© (MANUEL OMAR CRUZ BANEGAS)
Reservados todos los derechos. Está prohibido la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la impresión, la reprografía, el microfilme, el tratamiento informático o cualquier otro sistema, así como la distribución de ejemplares mediante alquiler y préstamo, sin la autorización escrita del autor o de los límites que autorice la Ley de Propiedad Intelectual.

FICHA DEL TRABAJO FINAL DE MASTER

Título del trabajo:	*Árboles fractales binarios simétricos autocontactados y sus geometrías contenidas*
Nombre del autor:	Manuel Omar Cruz Banegas
Nombre del director:	Dr. Antonio Garijo Real
Fecha (mm/aaaa)**:**	06/2021
Titulación:	Máster en Ingeniería Computacional y Matemática
Área del trabajo Final:	*Sistemas Dinámicos*
Idioma del trabajo:	*Castellano*
Palabras clave: Máximo 3 palabras clave (propuestas por el autor del TFM o en base a listados, tesauros, etc. y validadas por el director)	1. Árbol fractal binario simétrico 2. Canopy 3. Dimensión fractal

Resumen del trabajo (máximo 250 palabras): *Con la finalidad, contexto de aplicación, metodología, resultados y conclusiones del trabajo.*

En la naturaleza se encuentran muchos objetos que pueden describirse con la geometría clásica, pero algunos como los árboles no admiten una explicación sencilla y tiene que adentrarse en la geometría fractal, es decir tratar con estructuras que se repiten a diferentes escalas. Este trabajo concierne a los árboles fractales binarios obtenidos simétricamente, clasificándolos de acuerdo al tipo o ausencia de contacto en sus ramas, enfatizando en los árboles autocontactados y en su respectivo canopy, el cual es una curva fractal formada por puntos a los que se puede acceder acercándose al árbol “desde arriba".

Cada árbol está definido por la relación de contracción crítica para ramas consecutivas y el ángulo de ramificación simétrica, datos con los que se construye el llamado Conjunto de Mandelbrot para árboles fractales binarios simétricos, donde se perciben observaciones meritorias de atención.

Se analiza gráficamente la estructura de cada árbol en todos los rangos de ángulos, detallando geometrías clásicas contenidas en ellos y se vinculan con otros conjuntos geométricos fractales mas complejos. Se presta especial análisis al número áureo y a la generación de los árboles “dorados” existentes con sus geometrías doradas incluidas.

Finalmente, se verifica gráficamente la dimensión fractal del conjunto de puntas de cada árbol y respectivamente se analiza de forma matemática la dimensión del canopy mediante la Ecuación de Moran en cada ángulo, encontrando que la dimensión del canopy del árbol es siempre menor que la dimensión del conjunto de puntas respectiva, puesto que el canopy es un subconjunto del árbol mismo.

Abstract (in English, 250 words or less):

In nature there are many objects that can be described with classical geometry, but some such as trees do not admit a simple explanation and have to delve into fractal geometry, that is, deal with structures that are repeated at different scales. This work concerns binary fractal trees obtained symmetrically, classifying them according to the type or absence of contact in their branches, emphasizing self-contacting trees and their respective canopy, which is a fractal curve formed by points that can be accessed approaching the tree "from above".

Each tree is defined by the critical contraction relationship for consecutive branches and the symmetric branching angle, data with which the so-called Mandelbrot Set for symmetric binary fractal trees is constructed, where meritorious observations of attention are perceived.

The structure of each tree is graphically analyzed in all angle ranges, detailing the classical geometries contained in them and they are linked to other more complex fractal geometric sets. Special analysis is given to the golden number and the generation of the existing "golden" trees with their golden geometries included.

Finally, the fractal dimension of the set of points of each tree is graphically verified and, respectively, the dimension of the canopy is analyzed mathematically using the Moran Equation at each angle, finding that the dimension of the tree canopy is always less than the dimension of the set of respective tips, since the canopy is a subset of the tree itself.

Índice

1. Introducción 1
   1.1. Contexto y justificación del trabajo 1
   1.2. Objetivos del trabajo 2
   1.3. Enfoque y método seguido 2
   1.4. Planificación del trabajo 3
   1.5. Breve sumario de productos obtenidos 5
   1.6. Breve descripción de los otros capítulos de la memoria 5
2. Árboles fractales binarios simétricos 6
   2.1. Definiciones 8
   2.2. Clasificación 13
      2.2.1. Árboles autoevitados 13
      2.2.2. Árboles autosuperpuestos 14
      2.2.3. Árboles autocontactados 15
   2.3. Número áureo y árboles fractales 16
   2.4. Fractales relacionados a los árboles fractales binarios simétricos 18
      2.4.1. Conjunto de Cantor 18
      2.4.2. Curva de Koch 19
      2.4.3. Curva de Koch – Cesàro 19
   2.5. Dimensión fractal 20
3. Análisis de los árboles fractales binarios simétricos autocontactados 24
   3.1. Primer rango de $0° < \theta < 90°$ 24
   3.2. Segundo rango de $90° < \theta < 135°$ 26
   3.3. Tercer rango de $135° < \theta < 180°$ 28
   3.4. Altura máxima de los árboles fractales binarios 31
4. El Conjunto de Mandelbrot para árboles fractales binarios simétricos 33
5. El número áureo en los árboles fractales binarios simétricos 34
6. Estructura del canopy C de un árbol fractal simétrico autocontactado 39
   6.1. Canopy en el primer rango de $0° < \theta < 90°$ 39
   6.2. Canopy en el valor de $\theta = 90°$ 44
   6.3. Canopy en el segundo rango de $90° < \theta < 135°$ 45
   6.4. Canopy en el valor de $\theta = 135°$ 46
   6.5. Canopy en el tercer rango de $135° < \theta < 180°$ 47
   6.6. Canopy en el valor de $\theta = 180°$ 47
   6.7. Dimensión del conjunto de puntas y del canopy 48
      6.7.1. La dimensión d del conjunto de puntas 48
      6.7.2. La dimensión dc del canopy 49
      6.7.3. Comparación de las dimensiones d y dc 52
7. Conclusiones 53
8. Glosario 54
9. Bibliografía 56
10. Anexos 57

Lista de figuras

1. Árbol fractal binario simétrico $T(r,\theta)$
2. Tronco, caminos y ramas en el árbol $T(r,\theta)$
3. Coordenadas (x,y) en el árbol $T(r,\theta)$ con relación de contracción r y ángulo θ.
4. Canopy en árboles fractales autocontactados.
5. Árboles fractales autoevitados.
6. Árboles fractales autosuperpuestos.
7. Árboles fractales autocontactados.
8. Segmento de línea para obtener la relación dorada $a = 1/\phi$.
9. Rectángulo dorado.
10. Figuras geométricas varias que contienen al número áureo.
11. El Conjunto de Cantor C_α de α – medio .
12. El Conjunto clásico de Cantor C con $\alpha = 1/3$.
13. La Curva de Koch (figura a) y la Curva de Koch – Cesàro (figura b).
14. Polvo de Cantor.
15. Triangulo de Sierpinski.
16. Alfombra de Sierpinski.
17. Rama relevante para el autocontacto en el primer rango de $0° < \theta < 90°$.
18. Árboles fractales autocontactados en el primer rango de $0° < \theta < 90°$.
19. Rama relevante para el autocontacto en el segundo rango de $90° < \theta < 135°$.
20. Árboles fractales autocontactados en el segundo rango de $90° < \theta < 135°$.
21. Rama relevante para el autocontacto en el tercer rango $135° < \theta < 180°$.
22. Árboles fractales autocontactados en tercer rango de $135° < \theta < 180°$.
23. Punta con la dirección $(RL)^\infty$ que tiene la máxima altura en árbol autocontactado.
24. Altura máxima y_{max} del árbol fractal en función del ángulo de ramificación θ.
25. Conjunto de Mandelbrot para los árboles fractales binarios simétricos.
26. Conjunto de Mandelbrot y los árboles autocontactados dorados para $r_{sc} = 1/\phi$.
27. Árboles autocontactados "dorados" para $\theta = 60°, \theta = 108°, \theta = 120°$ y $\theta = 144°$.
28. Primer árbol dorado en $\theta = 60°$.
29. Segundo árbol dorado en $\theta = 108°$.
30. Tercer árbol dorado en $\theta = 120°$.
31. Cuarto árbol dorado con $\theta = 144°$.
32. Copo de nieve dorado con $\theta = 144°$ y triángulos dorados en el decágono.
33. Canopy en un árbol fractal autocontactado con $0° < \theta < 90°$.
34. Curva de Koch contenida en un árbol fractal autocontactado con $0° < \theta < 90°$.
35. Canopy en árboles fractales llenos y cerca de llenarse.
36. Generadores en canopy de árbol autocontactado en el subrango $45° < \theta < 90°$.
37. Generadores en canopy de árbol autocontactado en el subrango $30° \leq \theta < 45°$.
38. Generadores en canopy de árbol autocontactado en el subrango general $90/N° \leq \theta < 90/(N-1)°$.
39. Generadores en canopy en el segundo rango $90° < \theta < 135°$.
40. Conjunto de Cantor en canopy en el segundo rango $90° < \theta < 135°$.
41. Canopy en el valor de $\theta = 135°$.
42. Generadores en canopy en el tercer rango $135° < \theta < 180°$.
43. Canopy en el valor de $\theta = 180°$.
44. Dimensión fractal d del conjunto de puntas de un árbol en función de θ.
45. Dimensión fractal d_c del canopy de un árbol en función de θ.
46. Discontinuidad del canopy en $\theta = 90°$.
47. Discontinuidad del canopy en $\theta = 135°$.
48. Dimensión fractal d_c del canopy y dimensión d del conjunto de puntas de un árbol fractal binario en función de θ.

1. Introducción

1.1. Contexto y justificación del trabajo

Los sistemas dinámicos en general son campos de la matemática de reciente estudio, se consideraban monstruos matemáticos, debido a la necesidad de poseer las herramientas computacionales adecuadas para trabajar procesos iterativos que generan las formas y figuras propios de la geometría fractal, tecnología que nos ha llegado hasta hace unas décadas, por tanto, es un campo de investigación que posee mucho potencial para desarrollarse.

El presente documento permite introducirse de manera especifica a los árboles fractales binarios simétricos, los cuales intentan explicar de manera matemática la forma en que suceden algunos fenómenos de las ciencias naturales.

Este estudio tiene relevancia como punto de partida para la generación de fractales que pueden asociarse a muchos fenómenos naturales, los árboles fractales binarios simétricos pueden introducir al estudio de árboles fractales o estructuras con más de dos ramificaciones o árboles asimétricos, los cuales evidentemente son más complejos de estudiar matemáticamente y de representar gráficamente.

El problema planteado puede tratarse con las herramientas de la ingeniería computacional y matemática, ya que se apoya en ambos campos de estudio, siendo muy importante la geometría clásica y la geometría fractal de reciente estudio, utilizando códigos de programación adecuados para mostrar gráficamente el fenómeno de los árboles fractales binarios simétricos tomando en consideración los recursos computacionales y tiempos de compilación.

El resultado esperado es aportar matemáticamente y gráficamente a la visualización de los árboles fractales binarios simétricos en todos los rangos de ángulos de ramificación, auxiliándose del software de generación gráfica adecuado y apoyándose en un editor de gráficos de vectoriales, que confirmen expresiones matemáticas que no pueden verse con claridad y así sentar las bases necesarias para avanzar a campos de investigación que requieren más análisis matemático y herramientas computacionales más potentes.

1.2. Objetivos del trabajo

(1) Definir todos los conceptos relacionados a los árboles fractales binarios simétricos que permitan comprender plenamente los fractales y conjuntos relacionados.

(2) Establecer gráfica y matemáticamente la relación entre el número áureo ϕ y los árboles fractales binarios simétricos.

(3) Determinar la dimensión fractal de múltiples conjuntos fractales relacionados a los árboles fractales e ilustrarlos gráficamente.

(4) Clasificar adecuadamente los árboles fractales y estudiar separadamente los árboles fractales autocontactados en todos los rangos de ángulos.

(5) Obtener el Conjunto de Mandelbrot para árboles fractales binarios, que relaciona el ángulo de ramificación y la relación de contracción crítica necesaria para el autocontacto.

(6) Estudiar ampliamente el comportamiento del canopy de cada uno de los árboles fractales binarios simétricos autocontactados, apoyándose gráficamente en todos los rangos de ángulos de ramificación.

(7) Graficar separadamente y comparar la dimensión del conjunto de puntas y del canopy de los árboles fractales en función del ángulo de ramificación y establecer la diferencias y similitudes entre ellas.

(8) Describir y comentar gráficamente uno por uno los subconjuntos formados en todos los grupos de árboles fractales, utilizando todas las herramientas gráficas y vectoriales para lograrlo.

1.3. Enfoque y método seguido

El enfoque que tiene este trabajo es completamente mixto, comprendido entre el análisis matemático, específicamente entre el análisis geométrico y las herramientas computacionales, obedeciendo a la naturaleza misma del Master en Ingeniería Computacional y Matemática. Este documento se basa en comprender de mejor manera estos conjuntos de geometría fractal relativamente nuevos, dándole el atractivo visual necesario para comprenderlos y proporcionar la base para comprender conjuntos más complejos computacionalmente.

Utilizando los algoritmos adecuados, se obtiene uno por uno los árboles fractales binarios autocontactados (además de los árboles autoevitados y autosuperpuestos), se grafican de manera ascendente de acuerdo al ángulo de ramificación y se buscan características en cada uno de los árboles (o grupos de árboles) para comentarse de manera separada. Esta estrategia es la más apropiada ya que entre árboles las características se asemejan para ángulos de ramificación cercanos y se diferencian mucho para ángulos de ramificación lejanos, por tanto, agrupándolos y estudiando características tales como la dimensión fractal se sacan conclusiones y observaciones importantes.

1.4. Planificación del trabajo

1.4.1. Recursos necesarios

(1) ***TFM_ECM_Plantilla_Memoria_2018_es.doc***: plantilla de Word proporcionada por la universidad como pauta para el TFM.

(2) ***Matlab_R2020b***: sistema de cómputo numérico que ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio.

(3) ***Inkscape*****:** editor de gráficos vectoriales libre y de código abierto.

(4) ***Excel*****:** una hoja de cálculo que cuenta con herramientas gráficas, tablas calculares y un lenguaje de programación macro.

(5) ***Presentación de documentos y elaboración de presentaciones***: documento proporcionado por la universidad como pauta para el TFM.

(6) ***Redacción de textos científico-técnicos*****:** documento proporcionado por la universidad como pauta para el TFM.

(7) ***Articulos cientificos y libros de texto relacionados***: documentos proporcionados por el Director del Trabajo de Fin de Master y adicionalmente buscados por el estudiante.

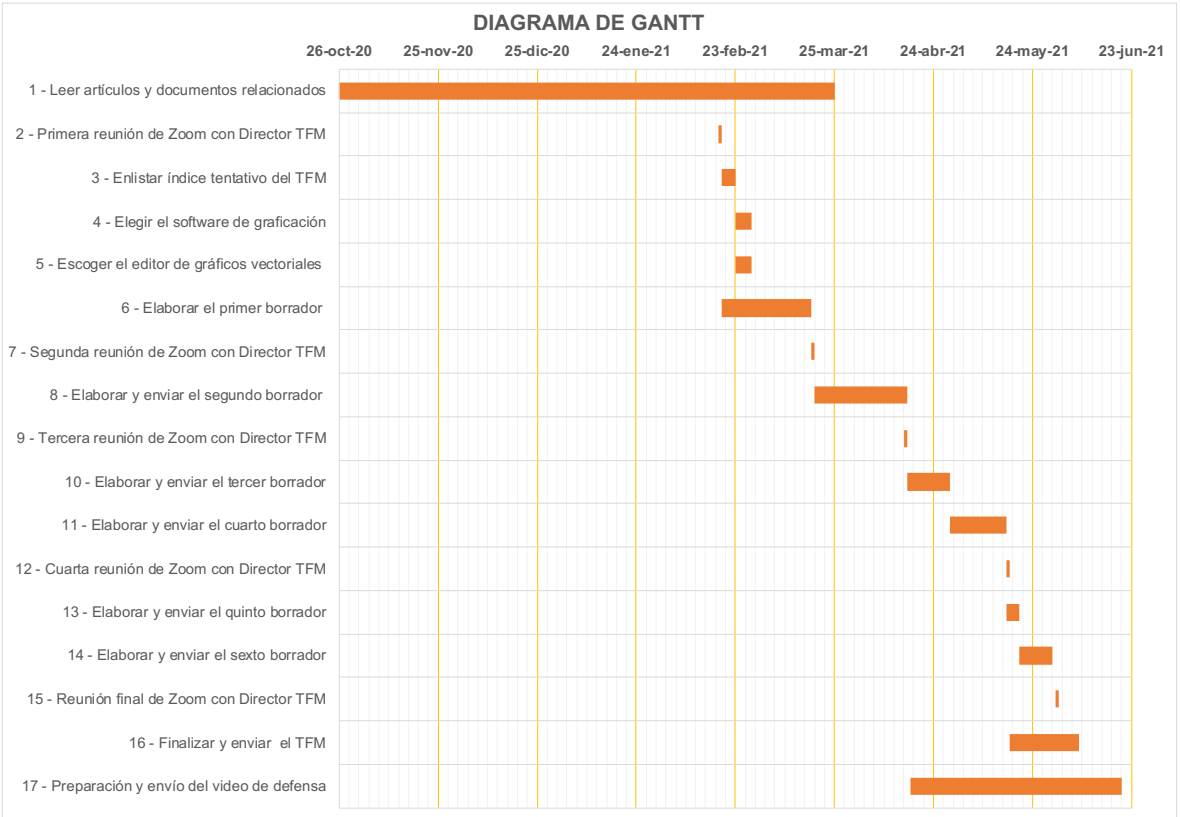
1.4.2. Tareas a realizar

(1) Leer artículos científicos sugeridos y relacionados al tema elegido para el TFM.
(2) Primera reunión de Zoom con el director del TFM.
(3) Enlistar el índice tentativo de cada sección del TFM.
(4) Elegir el software de graficación necesario para generar cada uno de los árboles fractales binarios simétricos.
(5) Escoger el editor de gráficos vectoriales óptimo para editar gráficos y elaborar imágenes.
(6) Elaborar el primer borrador del TFM.
(7) Segunda reunión de Zoom con el director del TFM
(8) Elaborar y enviar el segundo borrador del TFM.
(9) Tercera reunión de Zoom con el director del TFM.
(10) Elaborar y enviar el tercer borrador del TFM.
(11) Cuarta reunión de Zoom con el director del TFM.
(12) Finalizar el TFM y enviarlo al director del TFM y a la plataforma de la universidad.
(13) Reunión final de Zoom con el director del TFM.
(14) Preparación y envío del video de defensa del TFM ante el tribunal.

1.4.3. Planificación temporal (Diagrama de Gantt)

Se enlista la planificación temporal de las tareas a realizar en el TFM en la siguiente tabla y posteriormente se muestra el Diagrama de Gantt respectivo.

	ACTIVIDADES	FECHA INICIO	DURACION DIAS	FECHA FIN
1	Leer artículos y documentos relacionados	26-oct-20	150	25-mar-21
2	Primera reunión de Zoom con Director TFM	18-feb-21	1	19-feb-21
3	Enlistar índice tentativo del TFM	19-feb-21	4	23-feb-21
4	Elegir el software de graficación	23-feb-21	5	28-feb-21
5	Escoger el editor de gráficos vectoriales	23-feb-21	5	28-feb-21
6	Elaborar el primer borrador	19-feb-21	27	18-mar-21
7	Segunda reunión de Zoom con Director TFM	18-mar-21	1	19-mar-21
8	Elaborar y enviar el segundo borrador	19-mar-21	28	16-abr-21
9	Tercera reunión de Zoom con Director TFM	15-abr-21	1	16-abr-21
10	Elaborar y enviar el tercer borrador	16-abr-21	13	29-abr-21
11	Elaborar y enviar el cuarto borrador	29-abr-21	17	16-may-21
12	Cuarta reunión de Zoom con Director TFM	16-may-21	1	17-may-21
13	Elaborar y enviar el quinto borrador	16-may-21	4	20-may-21
14	Elaborar y enviar el sexto borrador	20-may-21	10	30-may-21
15	Reunión final de Zoom con Director TFM	31-may-21	1	1-jun-21
16	Finalizar y enviar el TFM	17-may-21	21	7-jun-21
17	Preparación y envío del video de defensa	17-abr-21	64	20-jun-21



1.5. Breve sumario de productos obtenidos

(1) Introducción a los árboles fractales binarios simétricos.
(2) Preliminares, número áureo, fractales relacionados, dimensión fractal y clasificación de los árboles fractales.
(3) Análisis de los árboles fractales binarios simétricos autocontactados.
(4) El Conjunto de Mandelbrot para los árboles fractales binarios autocontactados.
(5) El número áureo ϕ en los árboles fractales binarios autocontactados.
(6) Definición de canopy C en un árbol fractal binario autocontactado.
(7) Análisis de las dimensiones d del conjunto de puntas y d_c del canopy C como una función de θ.

1.6. Breve descripción de los otros capítulos de la memoria

Capítulo 2 – Introducción a los árboles fractales binarios simétricos
Se proporciona una introducción completa al estudio de los fractales, específicamente a los árboles fractales binarios simétricos, también se muestran los antecedentes de este tema de estudio y lo que se espera ilustrar a lo largo de todo el documento.

Capítulo 3 – Preliminares, número áureo, fractales relacionados, dimensión fractal y clasificación de los árboles fractales
Se describen cada uno de los conceptos necesarios para definir los árboles fractales, también su relación directa con el número áureo, otros fractales y su respectiva dimensión fractal. Se enlista la clasificación principal de los árboles fractales binarios.

Capítulo 4 – Análisis de los árboles fractales binarios simétricos autocontactados
Se analiza a los árboles fractales autocontactados en varios subrangos del ángulo de ramificación θ entre $0°$ y $180°$, encontrando la relación de contracción de autocontacto r_{sc}, graficando múltiples árboles en cada rango de θ.

Capítulo 5 – El Conjunto de Mandelbrot para los árboles fractales binarios simétricos autocontactados
Se grafica cada r_{sc} previamente obtenido en función de θ, obteniendo el Conjunto de Mandelbrot para los árboles fractales binarios simétricos autocontactados, observando algunos valores críticos merecedores de comentarios y observaciones importantes.

Capítulo 6 – El número áureo en los árboles fractales binarios autocontactados
Se obtienen los cuatro árboles fractales "dorados", haciendo un análisis geométrico de los mismos, buscando figuras geométricas conectadas con el número áureo e ilustrándolas claramente dentro de los árboles.

Capitulo 7 – Definición de canopy C en un árbol fractal binario autocontactado y su respectivo análisis
Se analiza los gráficos de la estructura del canopy, obteniendo los generadores de cada canopy y con ellos calculando las dimensiones d del conjunto de puntas y d_c del canopy como una función de θ.

2. Árboles fractales binarios simétricos

Los fractales son figuras geométricas recursivas que poseen autosimilaridad, una misma forma se repite a escala gradualmente más pequeña de manera indefinida, es decir, una forma idéntica dentro de la anterior y así sucesivamente *ad infinitum*.

Los fractales tienen área definida pero no poseen perímetros definidos, ya que tienen perímetros infinitos, durante mucho tiempo fueron considerados "monstros matemáticos" ya que no encajaban con la geometría Euclídea, donde todo es extremadamente regular.

"Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos y la corteza de los árboles no es lisa, ni los rayos viajan en línea recta", dijo Benoit Mandelbrot (1924–2010), nacido polaco y nacionalizado francés y estadounidense, quien tenía una mente excepcionalmente visual que le permitió encontrar la base matemática de los fractales y fue el responsable de acuñar en 1975 el término fractal (del latín fractus, quebrado o fracturado).

Este encuentro con la geometría fractal hace menos de cinco décadas ha permitido explorar matemáticamente las "anomalías" de la naturaleza en muchas de sus formas. ¿Cuál es la figura geométrica que mejor representa las nubes o un copo de nieve? ¿Qué lógica siguen los picos de las montañas o la trayectoria de los rayos en una tormenta, el ciclo de crecimiento de los microrganismos o la formación de las estrellas en una galaxia? Todos estos fenómenos naturales se pueden comenzar a desencriptar gracias a la geometría fractal.

Mandelbrot con el uso de una nueva tecnología por aquel entonces, los ordenadores, analizó el gráfico que representaba la turbulencia generada por el ruido blanco y descubrió que, sin importar la escala del gráfico, que los datos de un día, una hora o un segundo, tenían siempre el mismo patrón repetido. Fue entonces cuando recurrió a los trabajos de los matemáticos Pierre Fatou (1878–1929) y Gaston Maurice Julia (1893–1978), que habían estudiado la iteración de funciones racionales de variable compleja.

Gracias al potencial de los ordenadores con los que trabajaba, Mandelbrot pudo dibujar por primera vez el ahora conocido Conjunto de Mandelbrot, una curiosa imagen, de aspecto orgánico e irregular, que responde al principio matemático de autosimilaridad de los fractales y es infinitamente ampliable: el patrón de los bordes se repite una y otra vez al profundizar en la imagen.

Años después, Mandelbrot publicó "Fractal Geometry of Nature" [FGN] (1982), una obra con la que recibió la atención y legitimidad propias del creador de un nuevo campo de conocimiento, defendía que los fractales son más naturales e intuitivos que los objetos basados en la Geometría Euclídea, generados y regularizados artificialmente por el hombre.

Existen muchas aplicaciones de los fractales, tales como modelos de distribución de anillos planetarios y estrellas, fluctuaciones de precios, configuración de antenas en comunicación, compresión de datos, medicina, simulación de

crecimiento urbano, entre otros, incluso se puede pensar que todo lo que conocemos, la naturaleza y es decir todo el universo es parte de un gran fractal.

A pesar del poco tiempo de estudio de los fractales, se observa que tienen muchas ramas de aplicación, en este trabajo se explora el conocimiento fractal al tratar de contestar la siguiente pregunta ¿Qué lógica siguen las ramas de un árbol cuando crecen?, esto lo podemos explorar matemáticamente con la geometría fractal.

Los árboles fractales fueron introducidos por Mandelbrot en [FGN]. En general los árboles fractales son subconjuntos compactos conexos de $\mathbb{R}^n$, estos árboles muestran algún tipo de patrón de ramificación a niveles arbitrarios. Específicamente los árboles fractales binarios simétricos fueron estudiados más recientemente por Mandelbrot y Frame [MF].

En el presente trabajo se muestran las definiciones y conceptos relacionados a las características de los árboles fractales binarios simétricos. Se comienza con los componentes de la estructura del árbol mismo como lo son tronco, ramas, caminos y mapas generadores, con lo que se puede conceptualizar al árbol fractal binario.

Se clasifican los árboles fractales de forma que puedan estudiarse separadamente, enfatizando en los árboles autocontactados y encontrando la relación de contracción critica r_{sc} necesaria para asegurar el autocontacto para un determinado ángulo θ, con lo que se obtiene el Conjunto de Mandelbrot para árboles fractales binarios. Se define la dimensión de un fractal autosimilar para generalizar el cálculo de la dimensión de los árboles fractales y se presta especial atención al valor del número áureo ϕ y la generación de árboles fractales autocontactados bajo estas condiciones y las geometrías contenidas en ellos.

Se muestra la definición del canopy C del árbol fractal autocontactado, el cual se refiere a la curva fractal formada por todos aquellos puntos del árbol a los cuales se puede acceder “desde arriba” y se analiza gráficamente la estructura resultante en todos los rangos de ángulos θ y la conexión de los árboles fractales con otros conjuntos fractales relacionados y para finalizar se hará un análisis de la dimensión d_c del canopy. A lo largo del documento se ilustran suficientes gráficos y figuras para explicar los conceptos y observar las características que se describen en cada sección.

2.1. Definiciones

2.1.1. ***Árbol fractal binario simétrico***

Un árbol fractal binario simétrico $T(r, \theta)$ está definido por dos parámetros (véase la figura 1), la relación de contracción r (un número real entre 0 y 1) y el ángulo de ramificación θ (un ángulo entre $0°$ y $180°$).

El tronco se divide en dos ramas, una en la izquierda y la otra en la derecha. Ambas ramas tienen longitud igual a r veces la longitud del tronco anterior y forman un ángulo θ con la extensión lineal del tronco E. Cada uno de esas ramas se divide en dos ramas mas, siguiendo la misma idea y la ramificación continúa *ad infinitum* para obtener el árbol fractal.

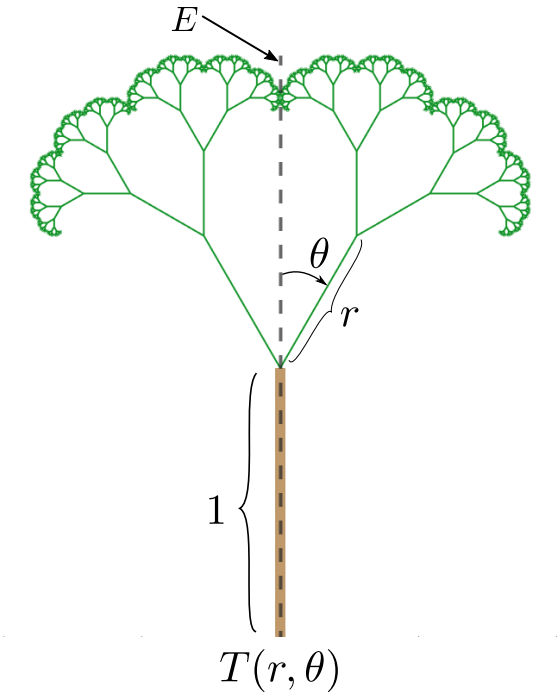


Figura 1. Árbol fractal binario simétrico, descrito por la relación de contracción r y el ángulo de ramificación θ.

2.1.2. ***Mapas generadores***

Para cualquier $r \in (0,1)$ y $\theta \in (0°, 180°)$, en intervalos abiertos, los *mapas generadores* $m_R(r, \theta)$ y $m_L(r, \theta)$ son transformaciones en $\mathbb{R}^2$ definidas como sigue, para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ [TT2]:

$$m_R\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = r \cdot \begin{bmatrix} cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$m_L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = r \cdot \begin{bmatrix} cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Sustituyendo $(0, 1)$ por (x_0, y_0) en las ecuaciones (1) y (2) se pueden generar las bifurcaciones para todas las ramas restantes del árbol.

Los mapas generadores consisten de rotación, contracción y traslación [TT2].

2.1.3. ***Tronco, caminos y ramas***

El *tronco* T_0 de cualquier árbol es el segmento lineal vertical cerrado entre los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$. Un *camino* define una secuencia de ramas, por ejemplo para el árbol que se muestra en la figura 2, $RLRLRL\ldots = (RL)^{\infty}$ es una secuencia hacia el costado derecho del árbol fractal, en la que cada rama L (a la izquierda) es vertical y cada rama R (a la derecha) forma un ángulo θ con la lineal vertical.

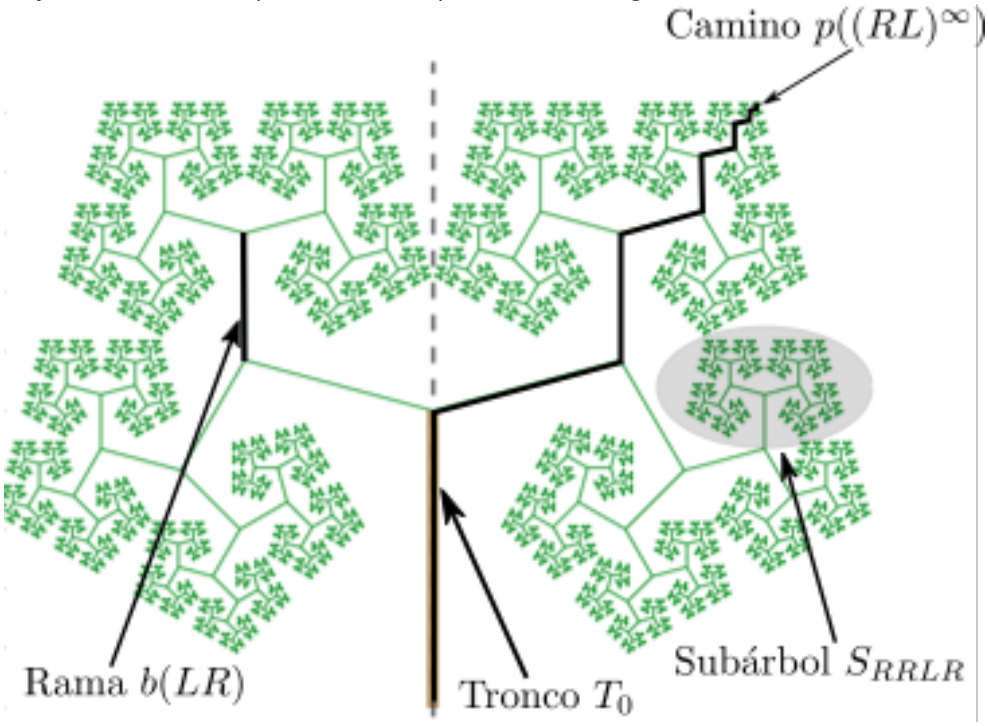


Figura 2. Tronco, caminos y ramas en el árbol $T(r,\theta)$.

2.1.4. ***Direcciones***

Una *dirección* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_1 A_2}$ ... es una cadena (finita o infinita) de $R's$ (para la derecha) o $L's$ (para izquierda) usada para identificar los objetos en el árbol. Dada una dirección $\boldsymbol{A}$, existe un camino natural en el árbol que inicia con el tronco y va al punto con dirección $\boldsymbol{A}$ [TT2].

2.1.5. ***Mapa de direcciones***

Un *mapa de direcciones* $\boldsymbol{m_A}$ es una composición (finita o infinita) de mapas generadores. Para cualquier dirección, existe un mapa de dirección correspondiente, el cual mueve un objeto de acuerdo a la dirección [TT2].

2.1.6. ***Nivel***

El nivel de un objeto está relacionado con el número de niveles de ramificación. El tronco es considerado de nivel 0, las dos ramas que provienen de el tronco son de nivel 1 y así sucesivamente. En general un objeto de nivel k es similar a algun objeto de nivel 0 con un factor de r^k y de hecho es la imagen de un objeto de nivel 0 bajo un mapa de direcciones del nivel k.

2.1.7. ***Coordenadas*** (x, y) ***de un punto***

Para un punto cualquiera P_A dentro de un árbol, corresponden un par de coordenadas (x, y), cada uno de las cuales se pueden expresar en función de r y θ.

En la figura 3, como ejemplificación se muestra que para un punto situado en la punta de la rama RL (encerrada en cuadrado azul) las coordenadas se escriben como:

$$(x, y) = \left(r^1 \sin\theta + r^2 \sin\left(\theta + (-\theta)\right), 1 + r^1 \cos\theta + r^2 \cos\left(\theta + (-\theta)\right)\right)$$

$$(x, y) = (r^1 \sin\theta + r^2 \sin(0), 1 + \ r^1 \cos\theta + r^2 \cos(0))$$

$$(x, y) = (r \sin\theta, 1 + r \cos\theta + r^2)$$

Muchas propiedades geométricas de los árboles se pueden deducir de la posición de las puntas de las ramas. Denotando con $A_1 A_2 A_3$ ... la dirección de la punta de una rama y con d_n el número de R's menos el número de L's en $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ y colocando la base del tronco en el origen, esta punta de rama se ubica en el punto con coordenadas [MF]:

$$\begin{aligned} x &= r \sin(d_1\theta) + r^2 \sin(d_2\theta) + r^3 \sin(d_3\theta) + \cdots \\ y &= 1 + r \cos(d_1\theta) + r^2 \cos(d_2\theta) + r^3 \cos(d_3\theta) + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

En la figura 3 se puede ver que la extensión vertical total y_t para el árbol es

$$y_t = 1 + r \cos\theta + r^2 + r^3 \cos\theta + r^4 + \cdots$$

2.1.8. **Árbol fractal binario simétrico autocontactado**

Para cualquier ángulo $\theta \in (0°, 180°)$, existe un único valor de r tal que el árbol fractal binario simétrico $T(r, \theta)$ es autocontactado y recibe el nombre de relación de contracción crítica de autocontacto para θ, la cual es denotada por $r_{sc}(\theta)$ o simplemente r_{sc}.

En un árbol fractal binario simétrico se obtiene el autocontacto cuando la punta de la rama está ubicada en la extensión lineal del tronco E, dicho de otra forma su coordenada horizontal resultante debe ser cero, $x = 0$.

Por lo tanto, realizando una observación cuidadosa en la dirección relevante para el autocontacto en los árboles pertenecientes a los diferentes rangos de θ, se puede deducir matemáticamente cada una de las ecuaciones que aseguran el autocontacto obteniendo de esta manera la relación de contracción crítica r_{sc}.

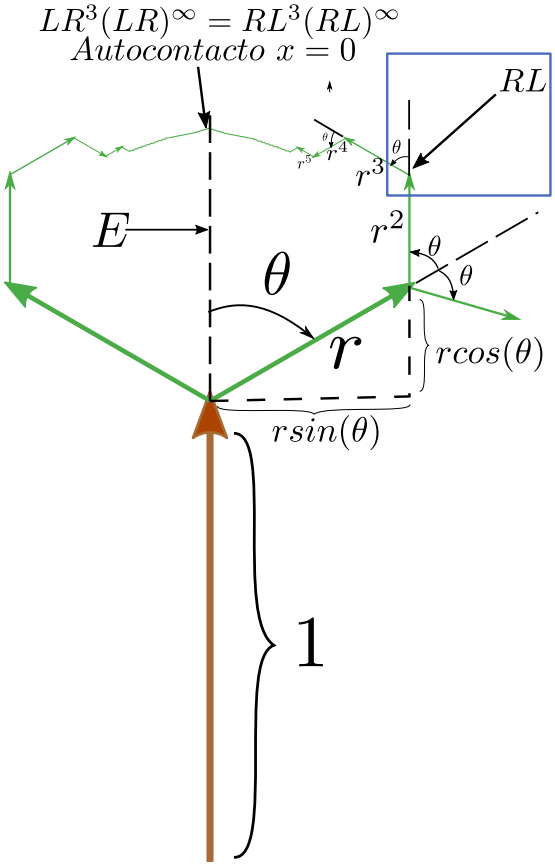


Figura 3. Coordenadas (x, y) en el árbol $T(r, \theta)$ que posee relación de contracción r y ángulo θ. En este árbol de ejemplo se puede notar el autocontacto en la dirección de la punta $RL^3(RL)^\infty$.

2.1.9. ***Subárboles***

Un *subárbol de nivel* k de un árbol $T(r, \theta)$ es especificado por una dirección $\boldsymbol{A}$ de nivel k, es decir $S_A(r, \theta) = m_A(T)$. El subárbol es denotado por $S_A(r, \theta)$, S_A o solamente S (véase la figura 2).

2.1.10. ***Puntos (Vértices y puntas)***

El *punto con dirección* A es denotado por P_A. Las *puntas* de un árbol son todos los puntos de un árbol que están en el valor máximo de y. Los *vértices* son los puntos finales de una rama.

2.1.11. ***Rangos de ángulos de ramificación***

A menudo se dividen en tres grandes rangos debido a que diferentes técnicas de estudio que pueden ser usadas en cada uno de esos intervalos, estos son:

(1) Primer rango de $0° < \theta < 90°$
(2) Segundo rango de $90° < \theta < 135°$
(3) Tercer rango de $135° < \theta < 180°$

Los dos ángulos $90°$ y $135°$ han sido identificados como puntos críticos topológicos para los árboles autocontactados.

2.1.12. ***Número de giro $N(\theta)$ y ángulos especiales***

Es un número definido como una función del ángulo θ de ramificación de un árbol para ángulos en el primer rango de $0° < \theta < 90°$, el cual es importante para la geometría del árbol y es usado para encontrar la relación de contracción r_{sc} para el autocontacto. [TT2]

Para ángulos $0° < \theta < 90°$ el *número de giro* $N(\theta)$ es el entero más pequeño tal que

$$N\theta \geq 90° \tag{4}$$

Para un valor dado de θ tal que $N\theta = 90°$ el árbol correspondiente $T(r, \theta)$ es especial por varias razones. Para $N \geq 1$, el *ángulo especial* θ_N es dado por

$$\theta_N = \frac{90°}{N}$$

2.1.13. **Canopy C de un árbol fractal binario autocontactado**

Los árboles fractales binarios simétricos con autocontacto incluyen puntos a los que no se puede acceder desde el infinito, excepto cruzando una curva compuesta llamada el "cascarón". Según [FGN], se define el “cascaron” del árbol como el conjunto de puntos a los que se puede llegar desde muy lejos siguiendo una curva que no se cruza con el árbol.

En los casos interesantes, el cascarón incluye un fractal llamado "*canopy*" C, el cual es una curva fractal formada por puntos que se pueden alcanzar acercándose al árbol "desde arriba”, el cual está hecho de puntas de ramas que de alguna manera se han unido. En la figura 4 se muestra gráficamente el canopy C de un árbol fractal binario autocontactado.

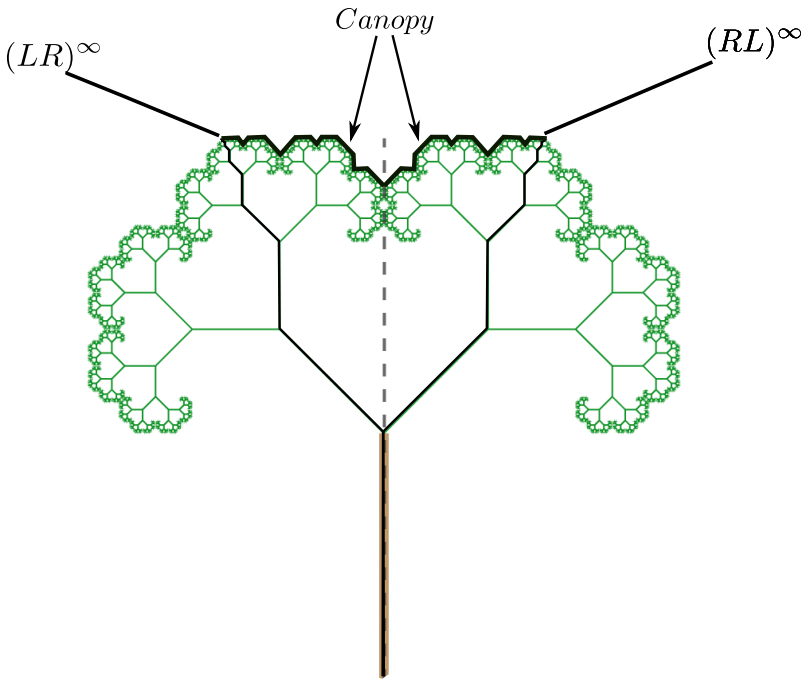


Figura 4. Canopy en los árboles fractales binarios autocontactados.

2.2. Clasificación

La clasificación general de los árboles fractales binarios simétricos suele dividirse de la siguiente manera [MF]:

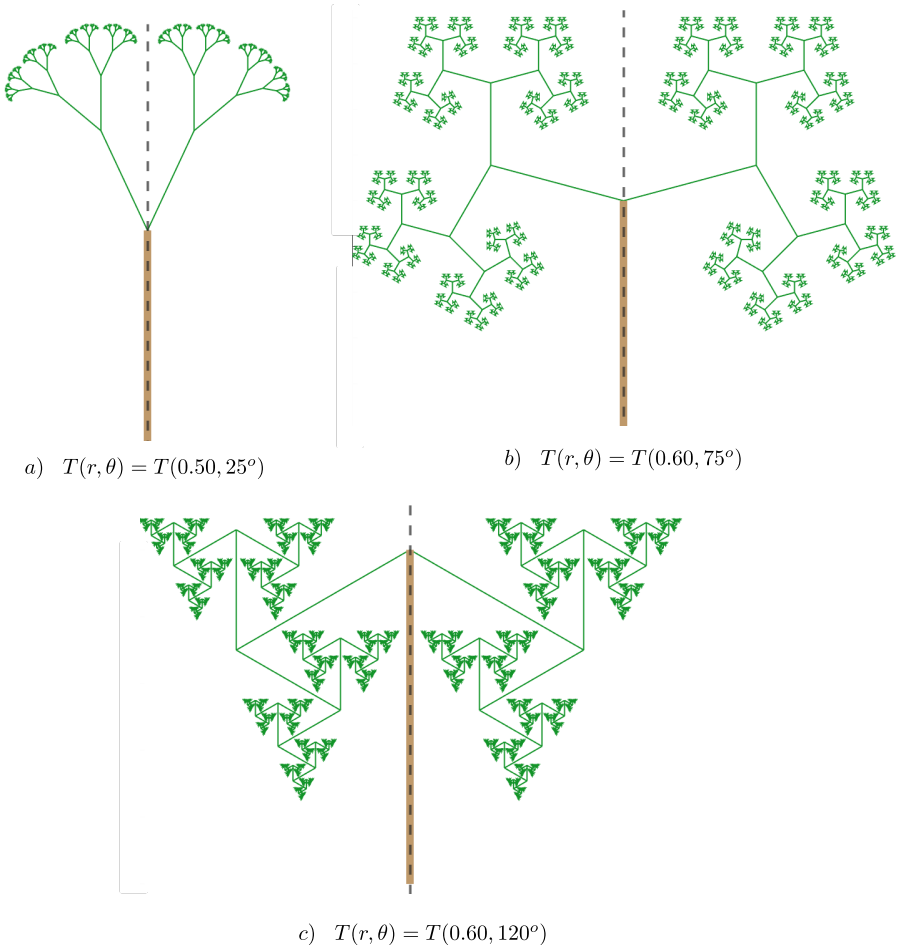
(a) Árboles autoevitados
(b) Árboles autosuperpuestos
(c) Árboles autocontactados

2.2.1. ***Árboles autoevitados***

Cuando el árbol $T(r,\theta)$ no tiene un punto doble, es decir cuando un punto de una rama no coincide con algún punto perteneciente a otra rama, se dice que el árbol es autoevitado [MF]. Si es así, las puntas de las ramas son puntos distintos y, como los puntos en un Conjunto de Cantor, no son numerables y forman un fractal autosimilar.

Para $r \leq 1/2$, el árbol $T(r,\theta)$ siempre se evita a sí mismo, independientemente del valor de θ. Sin embargo, para $1/2 < r < 1$, el árbol puede o no ser autoevitado, dependiendo de θ.

En la figura 5 se muestran tres árboles fractales autoevitados, en diferentes valores de ángulos θ.



$a)\quad T(r,\theta) = T(0.50, 25^o)$

$b)\quad T(r,\theta) = T(0.60, 75^o)$

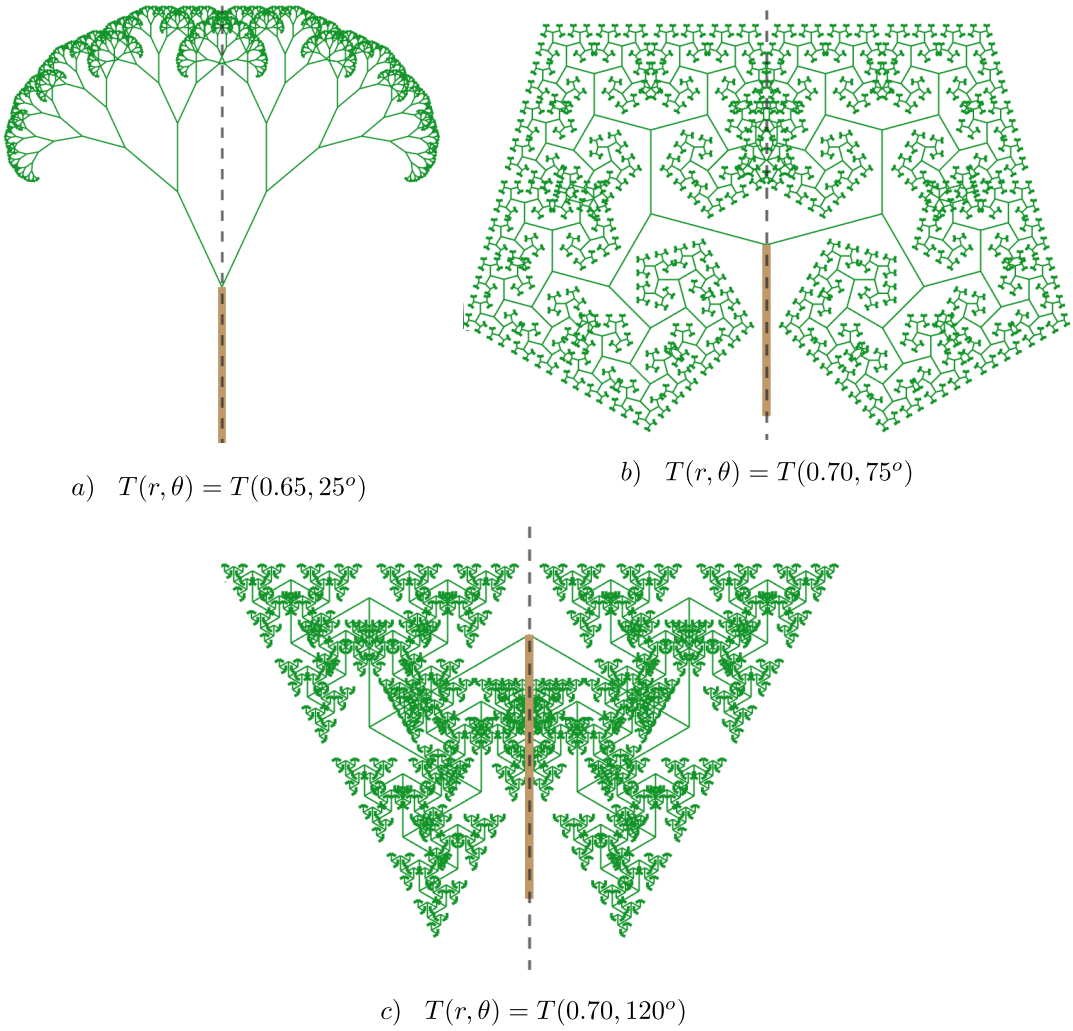
$c)\quad T(r,\theta) = T(0.60, 120^o)$

Figura 5. Árboles fractales autoevitados.

2.2.2. ***Árboles autosuperpuestos***

Cuando dos ramas de $T(r,\theta)$ se intersectan más allá de las puntas, el árbol se dice que está autosuperpuesto [MF].

Para ilustración en la figura 6 se muestran tres árboles fractales autosuperpuestos, que son los respectivos de los árboles autoevitados de la figura 5.



$a)\quad T(r,\theta) = T(0.65, 25^o)$

$b)\quad T(r,\theta) = T(0.70, 75^o)$

$c)\quad T(r,\theta) = T(0.70, 120^o)$

Figura 6. Árboles fractales autosuperpuestos.

2.2.3. ***Árboles autocontactados***

En un árbol fractal binario los autocontactos pueden ser de dos tipos (véase la figura 7) y pueden estar en el mismo árbol [MF]:

(1) Una punta de una rama puede caer en otra rama.
(2) Dos puntas pueden coincidir.

Para cualquier ángulo θ, existe un único valor de r tal que el árbol fractal binario simétrico $T(r,\theta)$ es autocontactado y recibe el nombre de relación de contracción crítica de autocontacto para θ y es denotada por $r_{sc}(\theta)$ o simplemente r_{sc}.

La singularidad de la relación de contracción r_{sc} de autocontacto es una característica importante de los árboles fractales binarios simétricos autocontactados.

También se puede determinar que un árbol tiene autocontacto si, según [TT2]:

(1) Existe una punta a la que se puede llegar a través de dos caminos distintos (contacto de punta a punta).
(2) Existe una punta que pertenece al interior de una rama (contacto de punta a rama).
(3) Existe un punto final de una rama que pertenece al interior de otra rama (contacto de vértice a rama).

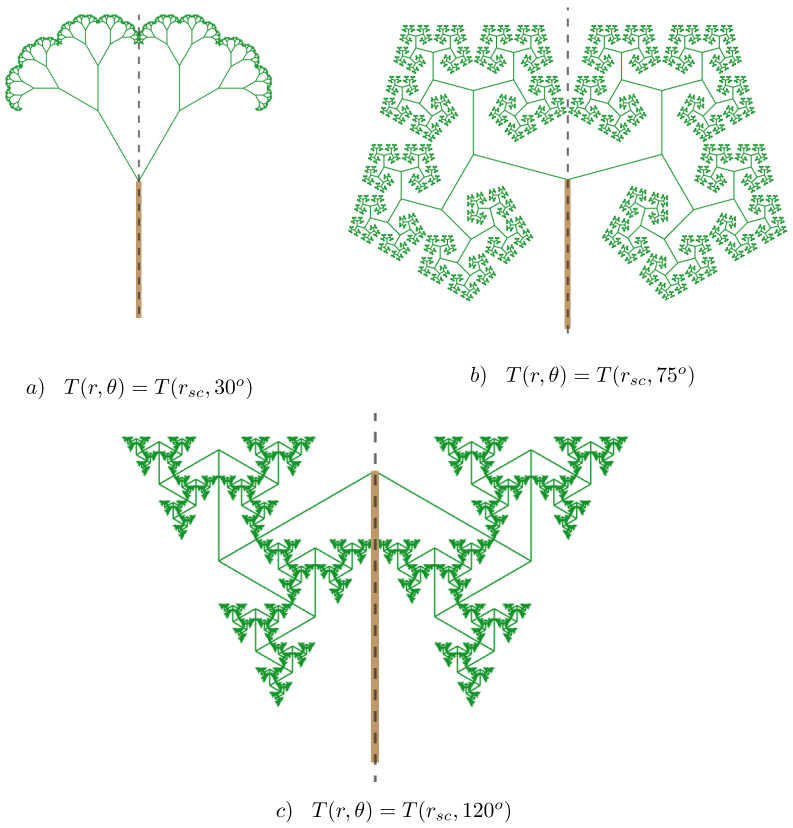


Figura 7. Árboles fractales autocontactados.

2.3. Número áureo y árboles fractales

El número áureo ϕ, también llamado número de oro, número de Dios, razón áurea, razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción, es un número irracional, representado por la letra griega ϕ, es un número remarcable que surge en varias áreas de las matemáticas, la naturaleza y el arte.

2.3.1. ***Segmento de línea dorada***

La más básica descripción geométrica de la relación dorada involucra un segmento de línea de $[0, 1]$, como se muestra en la figura 8 [TT1].

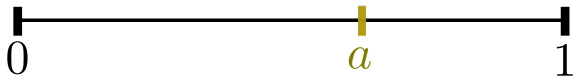


Figura 8. Segmento de línea para obtener la relación dorada $a = 1/\phi$, dividiendo el intervalo de unidad según la relación dorada.

Suponemos que existe un número$a \in (0, 1)$ de tal forma que la relación de la longitud de $[0, 1]$ a la longitud de $[0, a]$ es igual a la relación de $[0, a]$ a $[a, 1]$

$$\frac{longitud\ [0,1]}{longitud\ [0,a]} = \frac{longitud\ [0,a]}{longitud\ [a,1]} \quad \rightarrow \quad \frac{1-0}{a-0} = \frac{a-0}{1-a}$$

$$\frac{1}{1/\phi} = \frac{1/\phi}{1-1/\phi} \quad \rightarrow \quad \frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi-1} \quad \rightarrow \quad \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Tomando el valor positivo del número áureo ϕ

$$\phi = \frac{1+\sqrt{1-4(1)(-1)}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \rightarrow \quad \phi \approx 1.618033989 \qquad (5)$$

La relación aurea $a = 1/\phi$ queda entones

$$a = \frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \quad \rightarrow \quad a \approx 0.618033989 \qquad (6)$$

2.3.2. ***Rectángulo dorado***

Se puede dividir un rectángulo dorado en un cuadrado y un rectángulo dorado más pequeño como aparece en la figura 9 y continuar este proceso con los rectángulos dorados más pequeños *ad infinitum* [TT1].

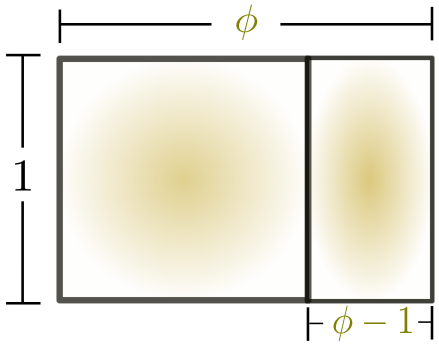


Figura 9. Rectángulo dorado.

Este rectángulo dorado, tiene lados en la relación $1 : \phi$, donde ϕ es tal que al particionar el rectángulo original en un cuadrado y un nuevo rectángulo resulta en un nuevo rectángulo que tiene lados con una relación $1 : \phi - 1$.

Por lo tanto, en este rectángulo dorado, también satisface

$$\frac{1}{\phi} = \frac{\phi - 1}{1} \qquad \rightarrow \qquad \phi^2 - \phi - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \phi \approx 1.618033989$$

La proporción áurea se puede encontrar en muchas figuras geométricas clásicas y se mencionan brevemente las figuras que serán relevantes para los árboles fractales.

2.3.3. ***Pentágono***

La proporción áurea ϕ también aparece en el pentágono. Considerando un pentágono y un pentagrama con los mismos vértices que en la figura 10a. Los ángulos interiores en cada vértice de un pentágono son $108°$. De nuevo, se puede demostrar que la relación de AC a AB es ϕ.

2.3.4. ***Triangulo dorado***

Un triángulo con los ángulos $72°$, $72°$ y $36°$ se llama comúnmente triángulo dorado ($\triangle$ ABC en la figura 10b).

2.3.5. ***Gnomon dorado***

Un triángulo con los ángulos $36°$, $36°$ y $108°$ es llamado un gnomon dorado ($\triangle$ ABD en la figura 10b). Cualquier triángulo de la figura 10b es un triángulo dorado o un gnomon dorado.

2.3.6. ***Decágono***

Los triángulos dorados también aparecen en el pentágono como se muestra en la figura 10c.

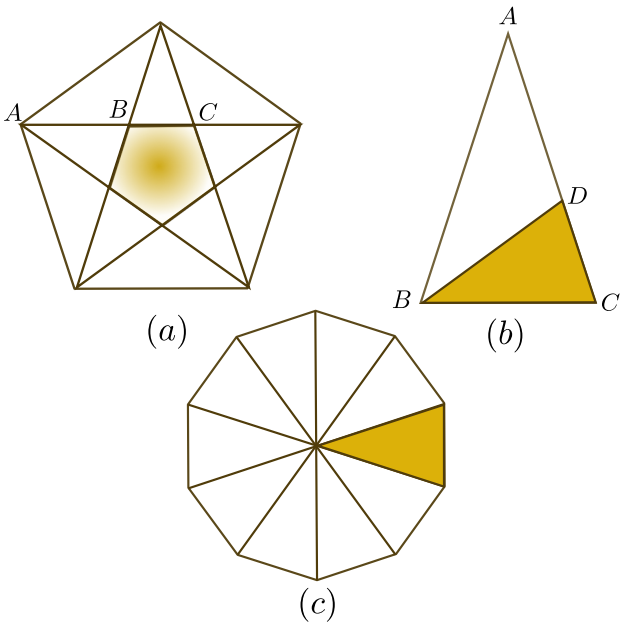


Figura 10. Figuras geométricas varias que contienen al número áureo y que aparecen en los árboles fractales.

2.4. Fractales relacionados a los árboles fractales binarios simétricos

Además de las figuras geométricas clásicas que se describen en la sección anterior, se aprecian también subconjuntos especiales en los árboles y sus fronteras que son otros fractales provenientes de la geometría fractal.

2.4.1. ***Conjunto de Cantor***

La familia general del Conjunto medio de Cantor $\{C_\alpha\}$ se puede definir de la siguiente manera [TT2]:

Dado $\alpha \in (0,1)$ y sean f_0, f_1 los mapas afines

$$f_0(x) = \beta x \qquad y \qquad f_1(x) = \beta x + (1-\beta)$$

Donde

$$\beta = \frac{1-\alpha}{2}$$

El Conjunto de Cantor de α –medio es el punto fijo único de las similaridades f_0 y f_1.

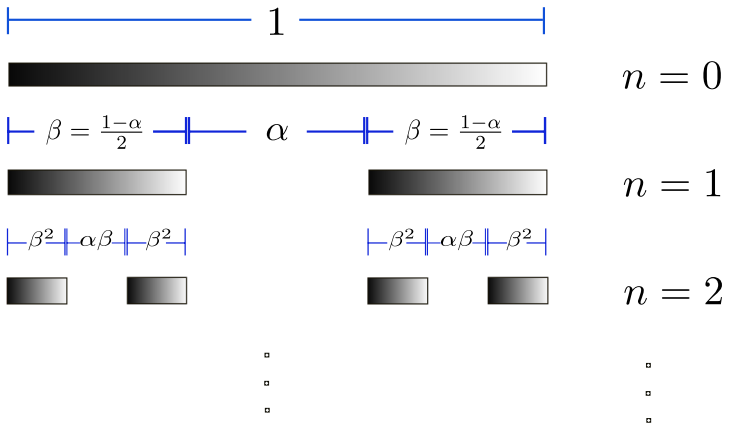


Figura 11. El Conjunto de Cantor C_α de α – medio.

La familia general del Conjunto medio de Cantor $C_\alpha$incluye el clásico Conjunto de Cantor de tercios medios (véase figura 12), el cual se obtiene quitando el intervalo abierto del tercio medio del intervalo unitario, luego quitando los tercios medios de los subintervalos restantes y continuando este proceso *ad infinitum*.

También se puede describir este ultimo C en términos de esquemas de funciones iteradas. Sean $f_0, f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f_0(x) = \frac{1}{3} \qquad y \qquad f_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

En este caso se observa que $\alpha = 1/3$.

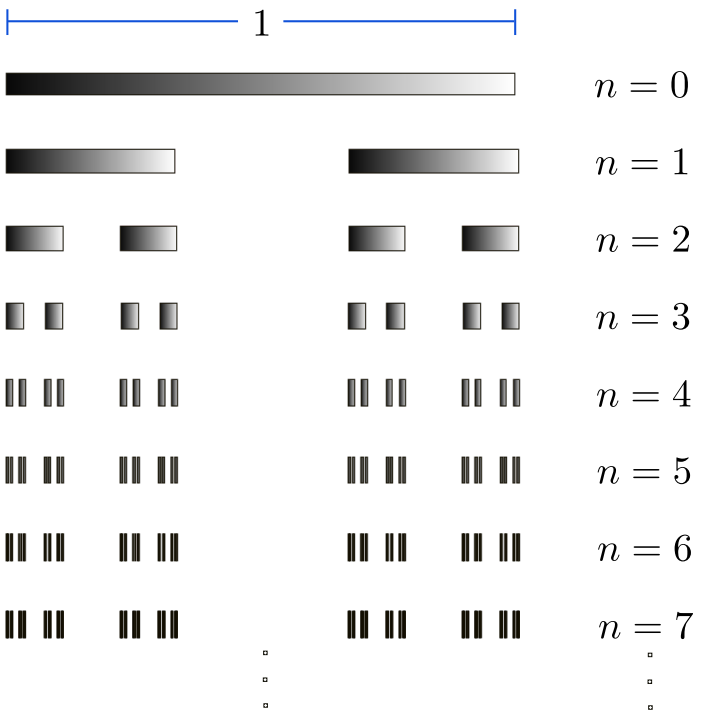


Figura 12. El Conjunto clásico de Cantor C con $\alpha = 1/3$.

Hay varios subconjuntos que se generan en los árboles fractales que forman conjuntos de Cantor intermedios, los cuales se observan gráficamente en los árboles.

2.4.2. ***Curva de Koch***

El copo de nieve de Koch es una curva fractal, que fue descrita por primera vez por Helge von Koch en 1904. Se construye comenzando con un triángulo equilátero, quitando el tercio interior de cada lado, construyendo otro triángulo equilátero en el lugar donde se quitó el lado, y luego repitiendo el proceso [WEB1].

Cada lado fractalizado del triángulo se le conoce como Curva de Koch, la cual se muestra en la figura 13a.

2.4.3. ***Curva de Koch – Cesàro***

La Curva de Koch – Cesàro es una variación de la curva Koch, en este fractal el grado a girar puede variar de $60°$ a $90°$, mientras la Curva de Koch solo se gira $60°$.

Para construirla, en lugar de elegir un grado para girar, el fractal de Koch – Cesàro es más fácil de implementar al establecer la relación de longitud original para *cada uno de los cuatro segmentos*. Para el copo de nieve de Koch, la proporción es $1/3$ mientras que para el fractal de Koch – Cesàro , la proporción (patas del triangulo isósceles formado) puede oscilar entre $1/3$ y $1/2$. Se muestra la Curva de Koch – Cesàro en la figura 13b [WEB2].

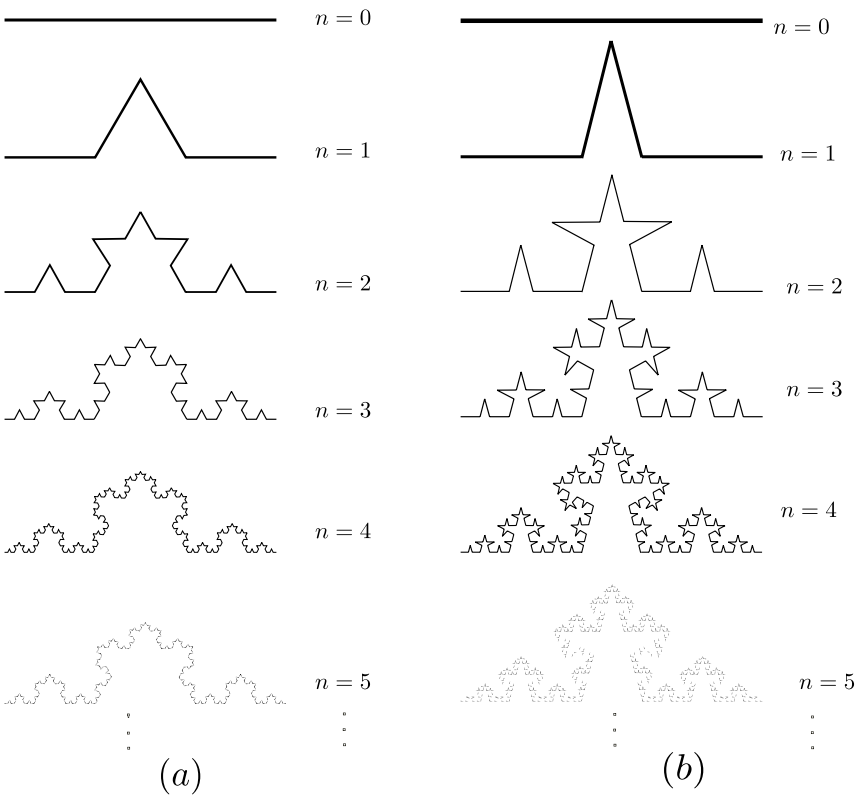


Figura 13. La Curva de Koch (figura a) y la Curva de Koch – Cesàro (figura b).

2.5. Dimensión fractal

De forma operacional se puede definir la dimensión de un objeto geométrico o de un conjunto de puntos como su capacidad de abarcar "espacio", o de forma equivalente como el número de coordenadas necesarias para especificar la posición de cada uno de sus elementos.

En este sentido, el punto no abarca "espacio" y se le asigna la dimensión 0, cualquier curva tiene dimensión 1, una superficie 2 y un sólido 3.

2.5.1. ***Dimensión de autosimilaridad de fractales con la misma relación de contracción r***

También llamada dimensión fractal, los fractales más sencillos son autosimilares, es decir están formados por copias a menor escala de ellos mismos.

Sea un conjunto autosimilar compuesto por N copias idénticas de el mismo reducida por un factor de escala $p = 1/r$ veces más pequeño, la dimensión d de autosimilaridad del conjunto se define como el exponente que verifica:

$$N = p^d$$

O lo que es lo mismo

$$d = \frac{\ln N}{\ln p} \tag{7}$$

Se muestran algunos cálculos de la dimensión fractal de autosimilaridad d de algunos fractales conocidos usando la ecuación (7).

a) Dimensión del Conjunto de Cantor

Viendo el Conjunto de Cantor en la figura 7, se puede ver que se generan $N = 2$ copias con un factor de escala $p = 3$ veces más pequeño, entonces la dimensión es

$$d = \frac{\ln N}{\ln p} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309$$

b) Dimensión del Polvo de Cantor

En cada paso se obtienen 4 copias replicadas por cada figura anterior. Se observa en la figura 14 el Polvo de Cantor, siendo cada uno de ellos la tercera parte como factor de escala, por tanto

$$d = \frac{\ln N}{\ln p} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.2618$$

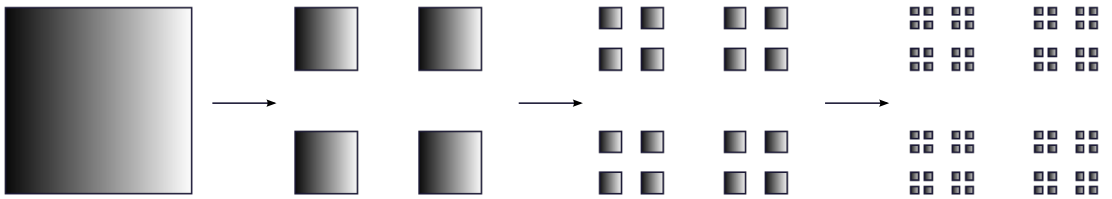


Figura 14. Polvo de Cantor.

c) Dimensión de la Curva de Koch

Cada segmento es una replica exacta de la curva completa anterior. Se observa en la figura de la Curva de Koch, que hay $N = 4$ subsegmentos que componen la curva como se muestra en la figura 13a, siendo cada uno de ellos la tercera parte de la curva total, por tanto

$$d = \frac{\ln N}{\ln p} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.2618$$

d) Dimensión del Triangulo de Sierpinski

Se observa en la figura 15, que en cada paso se obtienen $N = 3$ copias nuevas del triangulo original, con $p = 2$ veces más pequeño, la dimensión fractal sería

$$d = \frac{\ln N}{\ln p} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.5508$$

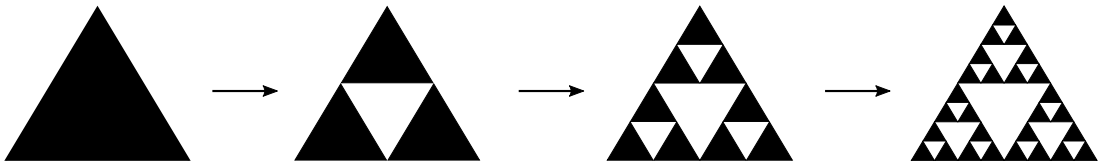


Figura 15. Triangulo de Sierpinski.

e) Dimensión de la Alfombra de Sierpinski

De la figura 16, que en cada paso se obtienen $N = 8$ copias nuevas del cuadrado original, con $p = 3$ veces más pequeño, la dimensión fractal sería

$$d = \frac{\ln N}{\ln p} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.8928$$

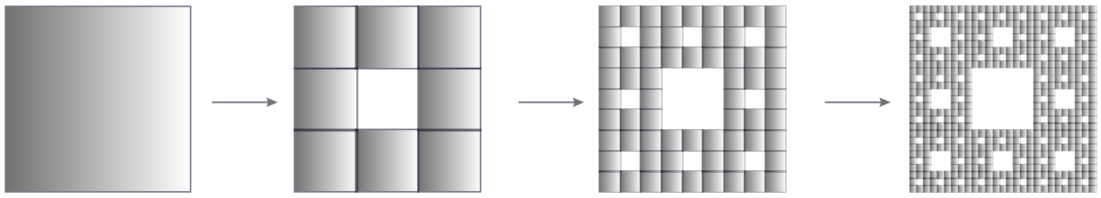


Figura 16. Alfombra de Sierpinski.

De manera ilustrativa se muestra la siguiente tabla 1 con las dimensiones fractales de varios objetos.

Tabla 1. *Dimensiones fractales de varios conjuntos fractales.*

Fractal	Número de copias *N*	Factor de escala *p*	Dimensión fractal *d = ln(N)/ln(p)*
Conjunto de Cantor	2	3	0.6309
Polvo de Cantor	4	3	1.2619
Curva de Koch	4	3	1.2619
Triangulo de Sierpinski	3	2	1.5850
Alfombra de Sierpinski	8	3	1.8928

Los árboles fractales no son autosimilares por si mismos, pero las fronteras del conjunto resultante lo son, y acorde a la definición previa con $N = 2$ copias consecutivas del árbol fractal anterior y con $p = 1/r$ veces más pequeño, entonces su dimensión fractal de similaridad del conjunto de puntas, de la ecuación (7)

$$d = \frac{\ln(N)}{\ln(p)} \qquad \rightarrow \qquad d = \frac{ln(2)}{ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

$$d = \frac{ln\,0.5}{ln\,r} \tag{8}$$

Esta ecuación (8) es solo cierta cuando las ramas del árbol no están traslapadas y es usada para graficar la dimensión de autosimilaridad en función de la relación de contracción critica [DP].

2.5.2. *Dimensión de autosimilaridad de fractales con diferente relación de contracción r (Ecuación de Moran)*

En los casos de fractales autosimilares que son hechos con piezas escaladas en valores de r diferente, es decir de manera más general, se debe usar una variante de la ecuación (7), de la cual reescribiendo y usando $p = 1/r$

$$d = \frac{ln(N)}{ln\left(\frac{1}{r}\right)} \qquad \rightarrow \qquad d\ln\left(\frac{1}{r}\right) = \ln(N)$$

Usando propiedades logarítmicas

$$\ln\left(\frac{1}{r}\right)^{d} = \ln(N)$$

Aplicando exponencial a ambos lados

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{d} = N \qquad \rightarrow \qquad 1^{d} = Nr^{d} \qquad \rightarrow \qquad 1 = Nr^{d}$$

De esta manera, se puede expresar que

$$1 = r^{d} + \cdots + r^{d}$$

Donde se tiene un r para cada una de las N copias del fractal en la descomposición. Reemplazando cada copia de r con r_i, la dimensión de similaridad d debe de satisfacer

$$1 = r_1^{d} + r_2^{d} + \cdots + r_N^{d} \tag{9}$$

Esta es conocida como la *Ecuación de Moran* la cual tiene solución única y es la dimensión de autosimilaridad d, donde cada una de las diferentes r_i satisface $0 < r_i < 1$.

Esta ecuación se usa con mucha frecuencia en el análisis de los árboles fractales binarios simétricos y en conjuntos fractales escalados con diferentes r_i [YALE].

3. Análisis de los árboles fractales binarios simétricos autocontactados

3.1. Primer rango de $0° < \theta < 90°$

El "primer" autocontacto de punta a punta ocurre donde la punta de la rama más a la derecha de la mitad izquierda del árbol se encuentra con la extensión lineal $\mathcal{L}$, del tronco [MF].

Para $0° < \theta < 90°$, se encuentra la punta de la rama apropiada, teniendo en cuenta que la rama LR es un segmento de línea vertical de longitud r^2 y está a un distanciador horizontal $r\ sin(\theta)$ de E, como se aprecia en la figura 3.

La punta de la rama más a la derecha del lado izquierdo del árbol se establece como el límite de una secuencia de ramas, cada una unida a su predecesora en la secuencia; esta punta se encuentra en E *si las longitudes de los desplazamientos horizontales de estas ramas suman 0*.

Suponiendo que N es el número entero más pequeño para el que $N\theta \geq 90°$. La secuencia deseada se describe mediante la dirección $LR^{N+1}(LR)^{\infty}$; es decir, después del LR inicial, los ramales giran a la derecha hasta el primer ramal horizontal o de pendiente negativa. Después de eso, alternan el rumbo izquierdo y derecho. Combinando todos los términos semejantes, vemos que la punta de la rama se encuentra en $\boldsymbol{E}$ si su coordenada x es 0, eso es si [MF]:

$$r\sin(-\theta) + r^3\sin(\theta) + \cdots + r^N\sin\big((N-2)\theta\big) + \frac{r^{N+1}}{1-r^2}\sin\big((N-1)\theta\big) + \frac{r^{N+2}}{1-r^2}\sin(N\theta) = 0 \qquad (10)$$

Esta ecuación no admite fácilmente soluciones explicitas, por lo tanto, se tiene que tratar numéricamente. Por ejemplo, con $\theta = 30°$ se tiene que $N = 3$, entonces la secuencia necesaria para garantizar el autocontacto sería $LR^{N+1}(LR)^{\infty} = LR^{4}(LR)^{\infty}$ lo cual se verifica en la figura 17.

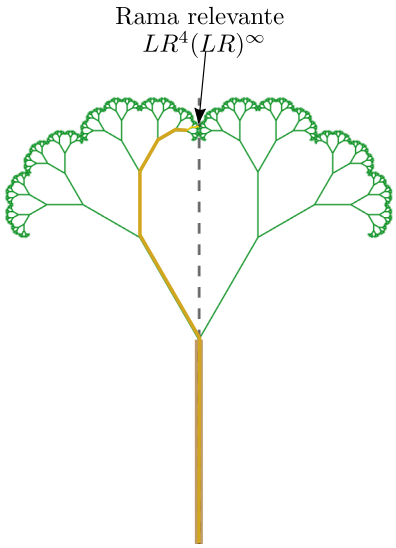
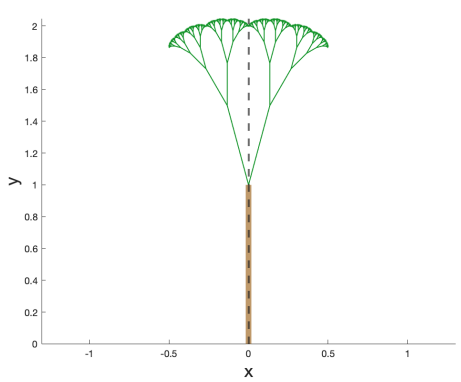
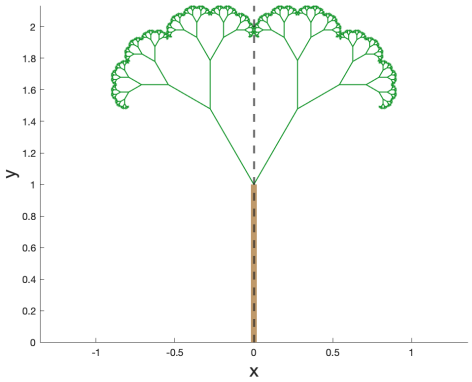


Figura 17. Rama relevante para el autocontacto en el primer rango de $0° < \theta < 90°$, en este caso en el árbol $T(r_{sc}, 30°)$.

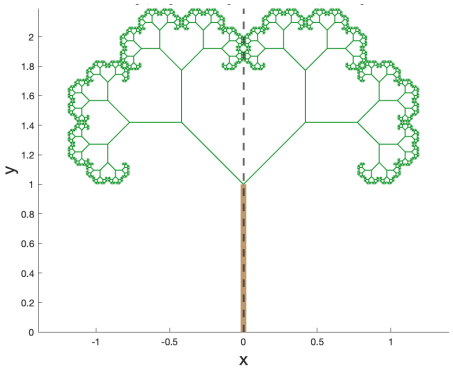
En la figura 18 se muestran seis árboles fractales en este primer rango, aumentando θ en cada subfigura. Se observa como se abren las ramas de los árboles hasta llenarse a medida que aumenta θ.



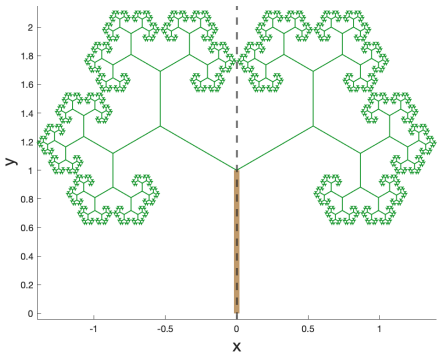
(a) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.516679, 15°)$



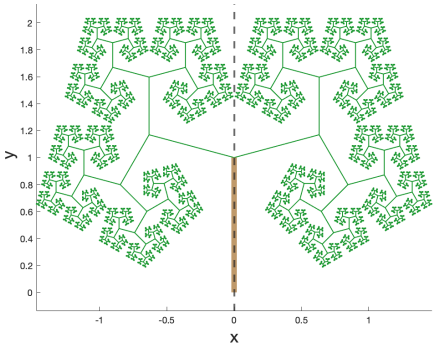
(b) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.553436, 30°)$



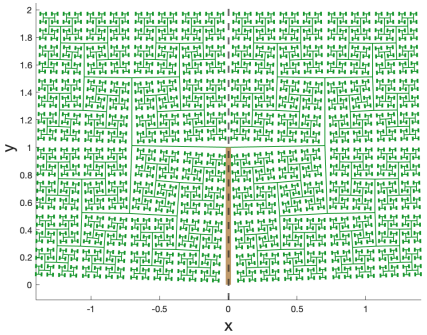
(c) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.593465, 45°)$



(d) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.618034, 60°)$



(e) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.653930, 75°)$



(f) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.702810, 89°)$

Figura 18. Árboles fractales autocontactados en el primer rango de $0° < \theta < 90°$.

3.2. Segundo rango de $90° < \theta < 135°$

Como se ve en la figura 19, para un ángulo dentro de este rango la secuencia correcta $L^3(RL)^\infty$ a ser utilizada para asegurar el autocontacto

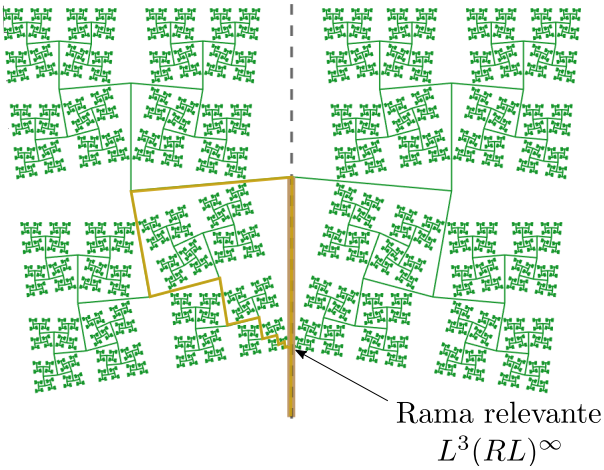


Figura 19. Rama relevante para el autocontacto en el segundo rango de $90° < \theta < 135°$, en este caso en el árbol $T(r_{sc}, 95°)$

Se tiene que para este rango la punta de la rama se encuentra en $\boldsymbol{E}$ si su coordenada x es 0, en este caso queda [MF]:

$$r\,sin(-\theta) + \frac{r^2}{1-r^2}sin(-2\theta) + \frac{r^3}{1-r^2}sin(-3\theta) = 0 \qquad (11)$$

Resolviendo la ecuación anterior para r,

$$(1-r^2)\,r\,sin(-\theta) + r^2\,sin(-2\theta) + r^3\,sin(-3\theta) = 0$$
$$(1-r^2)\;sin(-\theta) + r\,sin(-2\theta) + r^2\,sin(-3\theta) = 0$$

Ordenando con respecto al grado de r y usando las identidades trigonométricas necesarias

$$[sin(-3\theta) - sin(-\theta)]r^2 + [sin(-2\theta)]r + sin(-\theta) = 0$$
$$\left[2\,cos\left(\frac{-3\theta + (-\theta)}{2}\right) sin\left(\frac{-3\theta - (-\theta)}{2}\right)\right]r^2 + [2\,sin(-\theta)cos\,(-\theta)]r + sin(-\theta) = 0$$
$$[2\,cos(-2\theta)\,sin(-\theta)]r^2 + [2\,sin(-\theta)cos\,(\theta)]r + sin(-\theta) = 0$$

Eliminando $sin\,(-\theta)$ en todos los términos y simplificando,

$$[2\,cos(-2\theta)]r^2 + [2cos\,(\theta)]r + 1 = 0$$
$$[cos(2\theta)]r^2 + [cos\,(\theta)]r + 1/2 = 0$$

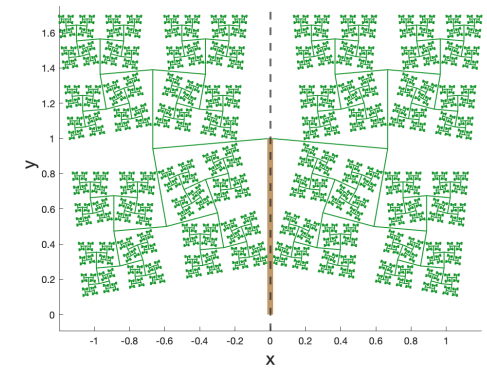
Resolviendo para r,

$$r = \frac{-\cos\theta \pm \sqrt{(\cos\theta)^2 - 4(\cos 2\theta)(1/2)}}{2(cos(2\theta))} \quad \rightarrow \quad r = \frac{-\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 2\cos 2\theta}}{2\cos 2\theta}$$

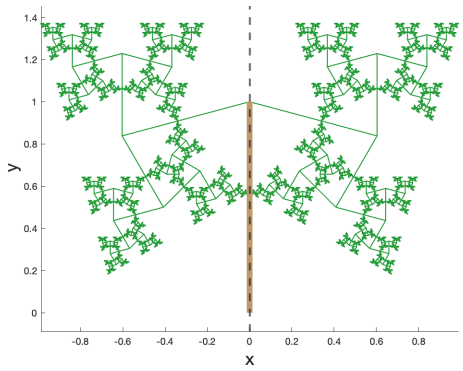
Tomando la raíz positiva para r, finalmente queda

$$r = \frac{-\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - 2\cos 2\theta}}{2\cos 2\theta} \qquad (12)$$

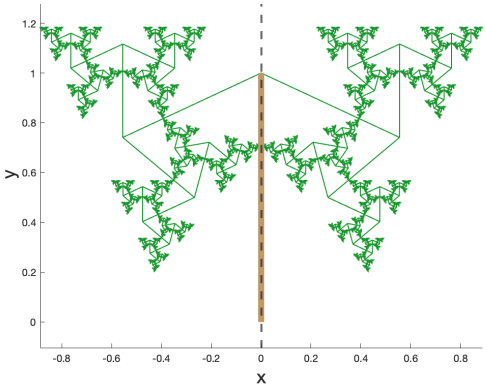
En la figura 20 se muestran seis árboles fractales en este rango, aumentando θ en cada subfigura.



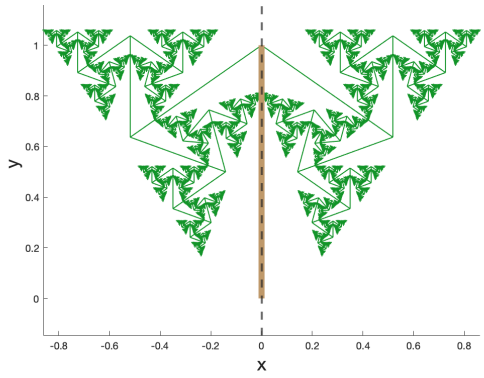
(a) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.669663, 95°)$



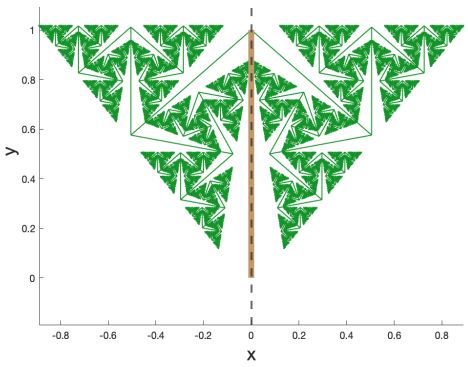
(b) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.624960, 105°)$



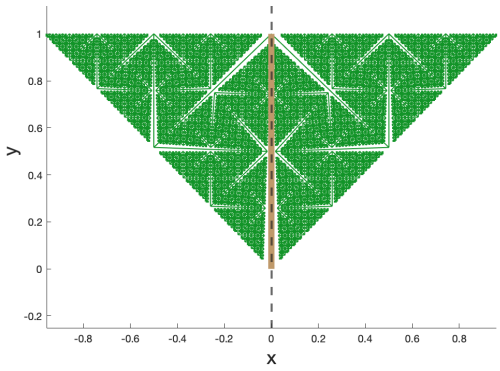
(c) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.612500, 115°)$



(d) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.632883, 125°)$



(e) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.660136, 130°)$



(f) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.695478, 134°)$

Figura 20. Árboles fractales autocontactados en el segundo rango de $90° < \theta < 135°$.

3.3. Tercer rango de $135° < \theta < 180°$

La secuencia correcta que asegura el autocontacto para este rango es $L^2(RL)^\infty$ la cual se observa en la figura 21.

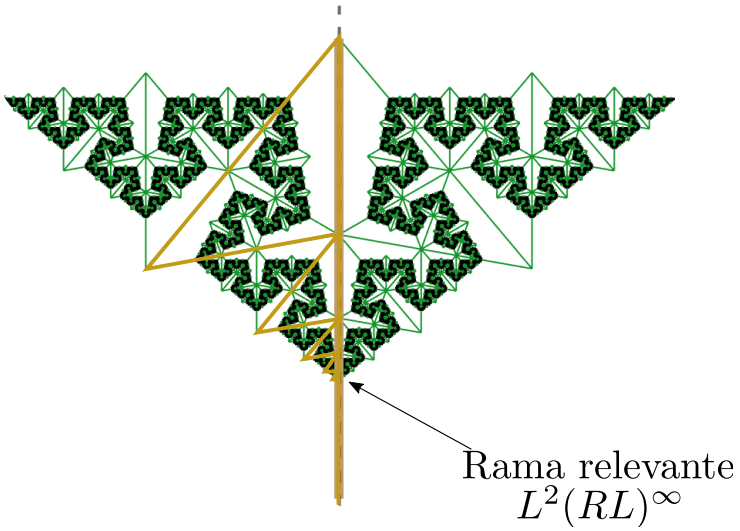


Figura 21. Rama relevante para el autocontacto en el tercer rango $135° < \theta < 180°$, en este caso en el árbol $T(r_{sc}, 140°)$

La punta de la rama relevante para el autocontacto se encuentra en $\boldsymbol{E}$ si su coordenada x es 0, [MF]

$$\frac{r}{1-r^2}\sin(-\theta) + \frac{r^2}{1-r^2}\sin(-2\theta) = 0 \qquad (13)$$

Resolviendo la ecuación anterior para r, simplificando los denominadores

$$sin(-\theta) + r\,sin(-2\theta) = 0$$

Ordenando y usando las identidades trigonométricas necesarias

$$[sin(-2\theta)]r + sin(-\theta) = 0$$

$$[2\,sin(-\theta)cos\,(-\theta)]r + sin(-\theta) = 0$$

$$[2\,sin(-\theta)cos\,(\theta)]r + sin(-\theta) = 0$$

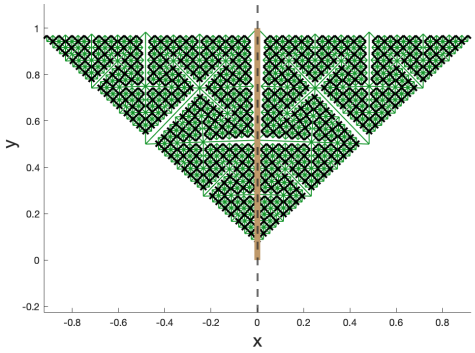
Eliminando $sin\,(-\theta)$

$$2\cos(\theta)\,r + 1 = 0$$

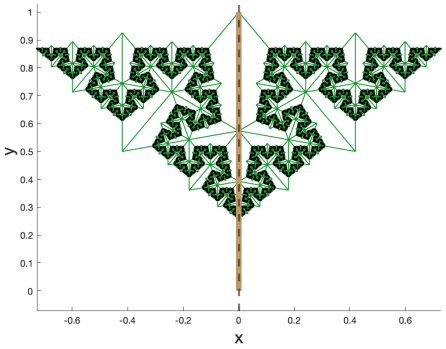
Resolviendo explícitamente para r

$$r = -\frac{1}{2\cos(\theta)} \qquad (14)$$

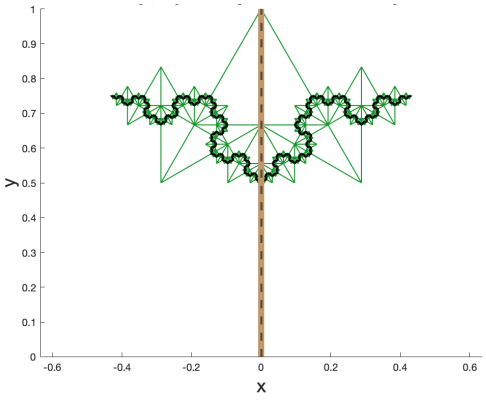
En la figura 22 se muestran seis árboles fractales en este rango, aumentando θ en cada subfigura . Se observa como se cierran los árboles a medida que aumenta θ, hasta que colapsan hacia su tronco.



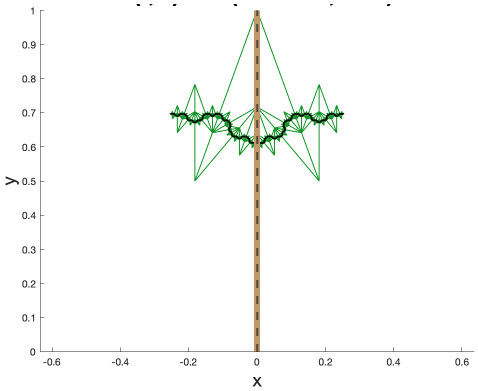
(a) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.695082, 136°)$



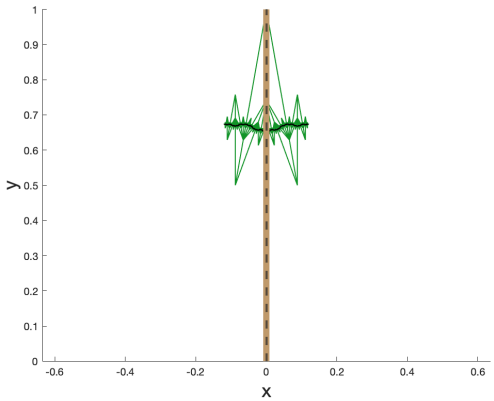
(b) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.652704, 140°)$



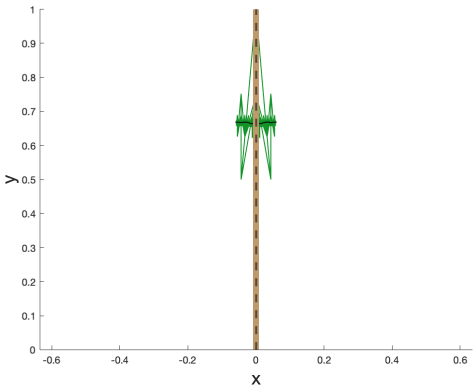
(c) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.577350, 150°)$



(d) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.532089, 160°)$



(e) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.507713, 170°)$



(f) $T(r_{sc}, \theta) = T(0.501910, 175°)$

Figura 22. Árboles fractales autocontactados en tercer rango de $135° < \theta < 180°$.

En la tabla 2 se enlistan las tres ecuaciones que contienen a r_{sc} en los tres rangos de θ definidos con anterioridad. Para el primer rango se encuentra la solución con un método numérico con el N apropiado, mientras que para el segundo y tercer rango se puede encontrar fácilmente una respuesta explicita, como se muestra en la tabla 3.

***Tabla 2**. Resumen de polinomios que contiene a r_{sc} y θ en los diferentes rangos.*

Rango de Ángulo θ	Polinomio que contiene a r_{sc}
$0° < \theta < 90°$	$r\sin(-\theta) + r^3\sin(\theta) + \cdots + r^N\sin\big((N-2)\theta\big) + \frac{r^{N+1}}{1-r^2}\sin\big((N-1)\theta\big) + \frac{r^{N+2}}{1-r^2}\sin(N\theta) = 0$
$90° < \theta < 135°$	$r\,sin(-\theta) + \frac{r^2}{1-r^2}sin(-2\theta) + \frac{r^3}{1-r^2}sin(-3\theta) = 0$
$135° < \theta < 180°$	$\frac{r}{1-r^2}sin(-\theta) + \frac{r^2}{1-r^2}sin(-2\theta) = 0$

Se puede graficar r_{sc} en función de θ utilizando las soluciones encontradas previamente y que se enlistan en la tabla 3 a manera de resumen.

***Tabla 3**. Resumen de relación de contracción de autocontacto r_{sc} para los diferentes θ.*

Ángulos θ	r_{sc}
$0° < \theta < 90°$	$Solución\ de\ ecuación\ (10)$
$90°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$90° < \theta < 135°$	$\frac{-\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - 2\cos 2\theta}}{2\cos 2\theta}$
$135°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$135° < \theta < 180°$	$-\frac{1}{2\cos(\theta)}$

3.4. Altura máxima de los árboles fractales binarios

Para cualquier árbol, los puntos de las esquinas de un árbol son el punto con dirección $(RL)^{\infty}$ y su imagen reflejada $(LR)^{\infty}$. La punta de la rama con la dirección $(RL)^{\infty}$ (véase la figura 23), es un punto de altura máxima del árbol para todos los ángulos $0° < \theta \leq 135°$ y tiene coordenada y_{max} [MF]

$$y_{max} = \frac{1 + r\cos(\theta)}{1 - r^2}$$

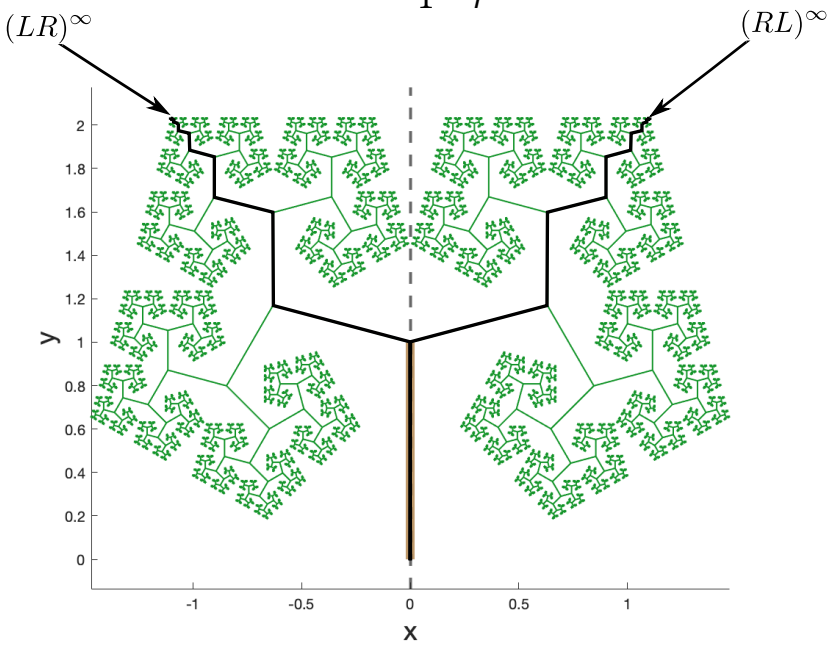


Figura 23. Punta con la dirección $(RL)^{\infty}$ que tiene la altura máxima, en un árbol autocontactado con $\theta = 75°$, esta dirección posee la altura máxima para los ángulos $0° < \theta \leq 135°$.

Para algunos árboles hay infinitamente muchos puntos a la altura máxima, y nos fijamos en otras propiedades de esta colección de puntos. En particular, forman un Conjunto de Cantor de α −medio.

Expresado de otra manera para todo árbol autoevitado o autocontactado, la altura máxima esta dada por [TT2]:

$$y_{max} = \begin{cases} \dfrac{1 + r\cos\theta}{1 - r^2} & si\ r > -\cos\ \theta \\ 1 & si\ \ r \leq -\cos\theta \end{cases} \qquad (15)$$

El punto de la punta con dirección $(RL)^{\infty}$ tiene altura máxima en comparación con todos los demás puntos, porque el camino al punto es lo más recto posible, (véase la figura 23). Los puntos altos de un árbol son todos los puntos que están a la altura máxima del árbol.

La figura 24 se genera tabulando un valor de r que genera autocontacto (utilizando la tabla 3) para cada θ y después evaluándolos en (15), de esta manera se muestra la variación de la altura máxima y_{max} en función de cada θ, adicionalmente se observa que la altura máxima es igual a 1 para todos los ángulos de ramificación $\theta \geq 135°$, algo que se confirma en los árboles de la figura 22.

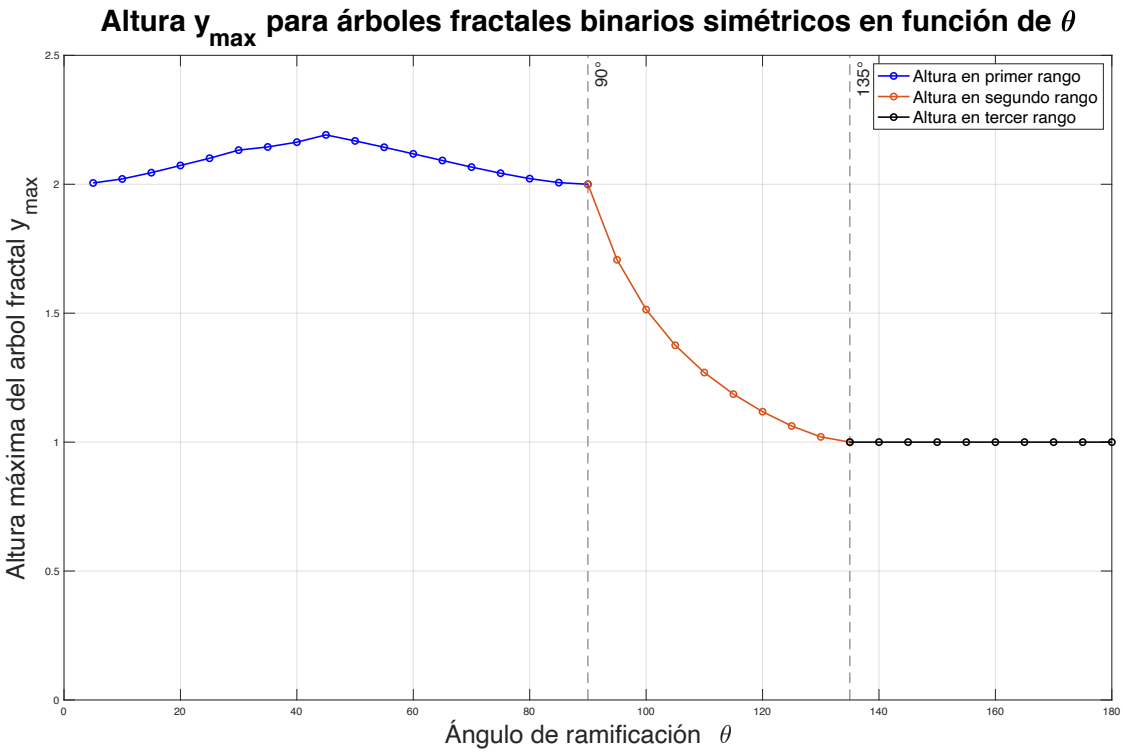


Figura 24. Altura máxima y_{max} del árbol fractal en función del ángulo de ramificación θ.

4. El Conjunto de Mandelbrot para árboles fractales binarios simétricos

Usando las diferentes ramas relevantes para asegurar el autocontacto para cada uno de los rangos de θ descritos con anterioridad, se encontraron las ecuaciones enlistadas en el resumen que se muestra en la tabla 3, las cuales al resolverse para r_{sc} se grafican en función de θ y se obtiene la figura 25, a esta gráfica también se le llama *Conjunto de Mandelbrot para árboles fractales binarios simétricos* [BE].

En la figura 25 se ilustran algunos ángulos especiales ($15°, 18°, 22.5°, 30°, 45°, ...$), que representan cambios de N, todos en el primer rango de θ. Examinando detenidamente esta figura, se tiene que el valor de $r_{sc} = \sqrt{3/8}$ es de especial análisis ya que:

(a) Cuando $r_{sc} < \sqrt{3/8}$, el autocontacto de punta a punta ocurre en solo dos valores de θ.

(b) Cuando $r_{sc} > \sqrt{3/8}$, el autocontacto ocurre en cuatro valores de θ.

(c) En $r_{sc} = \sqrt{3/8}$ se tiene también el valor mínimo de r_{sc} en el segundo rango, el cual ocurre para el valor de $\theta = arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 114.09°$.

Otro valor de especial interés es $r_{sc} = 1/\sqrt{2}$, acá el autocontacto ocurre en los puntos críticos de $\theta = 90°$ y $\theta = 135°$, se verifica en la gráfica que son los valores máximos.

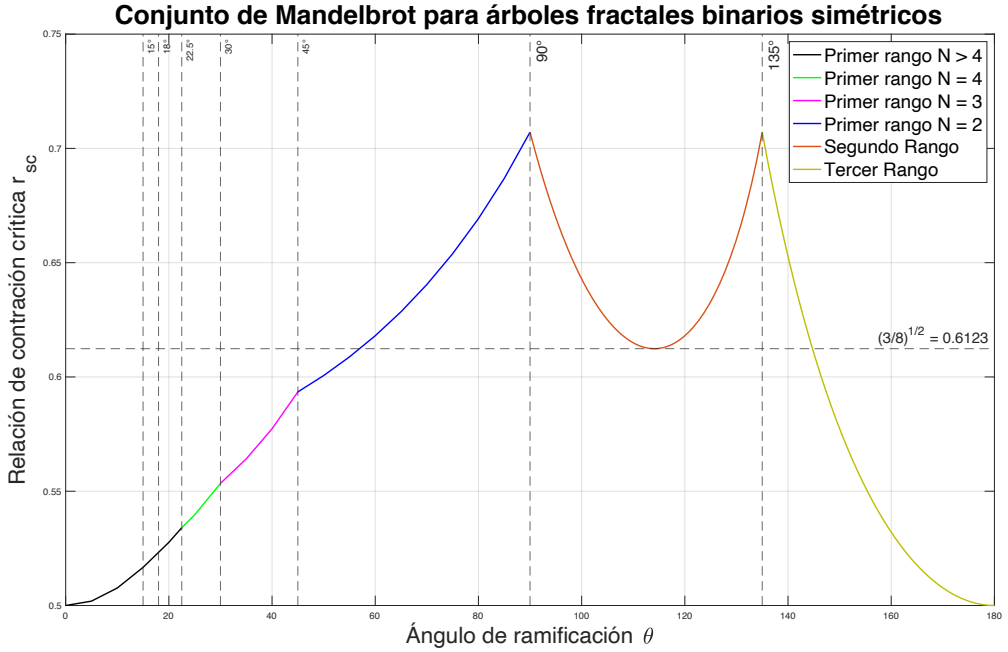


Figura 25. Conjunto de Mandelbrot para los árboles fractales binarios simétricos que muestra la relación de contracción critica r_{sc} en función de θ, en los tres diferentes rangos de θ.

5. El número áureo en los árboles fractales binarios simétricos

Para el valor de la relación dorada $r_{sc} = 1/\phi \approx 0.618033$ se observan 4 valores de θ en los cuales existe un árbol autocontactado "dorado", los cuales pueden visualizarse en la figura 26.

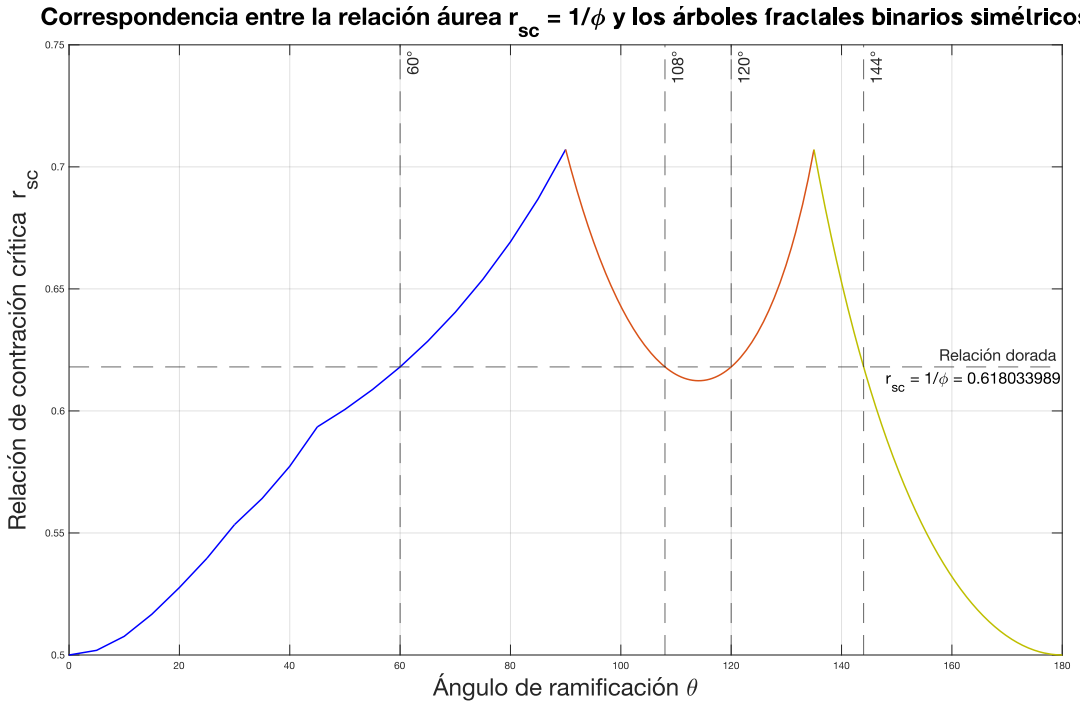


Figura 26. Conjunto de Mandelbrot y los árboles autocontactados dorados para $r_{sc} = 1/\phi$.

Múltiples figuras geométricas y fractales están relacionados con la proporción áurea y pueden ilustrarse con estos árboles autocontactados dorados.

Se presentan en las próximas figuras una demostración gráfica de algunos de esas geometrías euclídeas y fractales en los árboles que corresponden a cada uno de los 4 ángulos mencionados donde $r_{sc} = 1/\phi$, los cuales son [TT1]:

(a) $\theta = 60°$
(b) $\theta = 108°$
(c) $\theta = 120°$
(d) $\theta = 144°$

En la siguiente figura 27 se muestran los 4 árboles fractales dorados y en cada uno de ellos se remarcan los caminos de autocontacto (en color dorado).

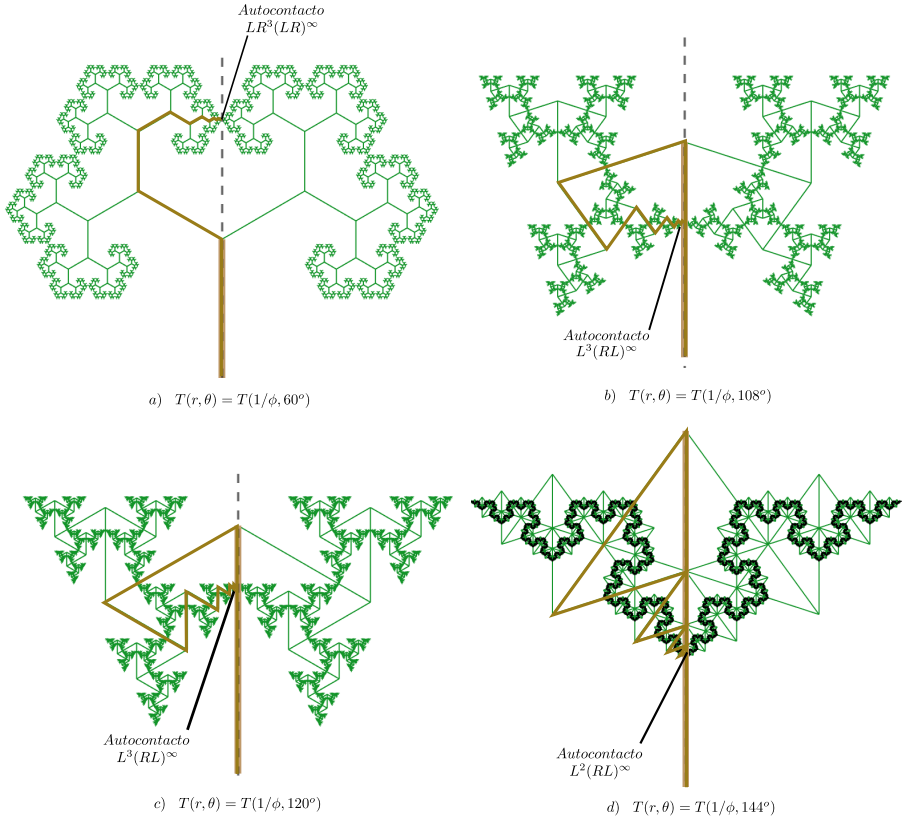


Figura 27. Árboles autocontactados "dorados" para $\theta = 60°, \theta = 108°, \theta = 120°$ y $\theta = 144°$.

(a) Primer árbol dorado con $\theta = 60°$

Los puntos superiores de este árbol forman un Conjunto de Cantor de α −medio, como es el caso de todos los demás árboles que se autocontacta con un ángulo de ramificación menor a $\theta = 135°$.

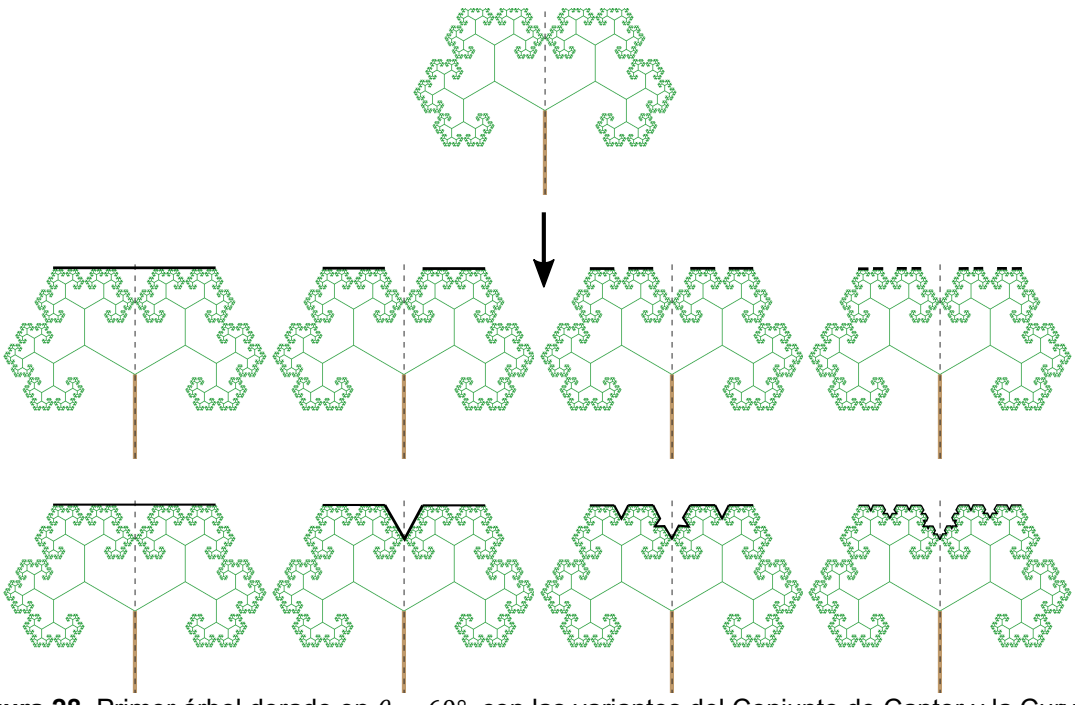


Figura 28. Primer árbol dorado en $\theta = 60°$, con las variantes del Conjunto de Cantor y la Curva de Koch.

Sea l la longitud de la copa del árbol, es decir, la longitud entre el punto superior más a la izquierda $(LR)^\infty$ y el punto superior más a la derecha $(RL)^\infty$, se puede demostrar fácilmente que $l = \sqrt{3}$.

Los puntos superiores son geométricamente similares (con un factor de $\sqrt{3}$) al Conjunto de Cantor medio con $\alpha = 1/\phi^3$. Las primeras iteraciones de eliminar los medios abiertos se muestran en la parte superior de la figura 28.

La dimensión de este Conjunto de Cantor medio es $\ln 2 \,/(2\, ln\, \phi) \approx 0.72$. La curva del árbol entre el punto superior más a la derecha y el punto superior más a la izquierda puede considerarse también una Curva de Koch "dorada" (consulte la parte inferior de la figura 28). En la primera iteración, el segmento de línea original de longitud $l = \sqrt{3}$ entre los puntos $(LR)^\infty$ y $(RL)^\infty$ se reemplaza con cuatro segmentos de línea (dos de los cuales tienen longitud l/ϕ^2 y las otras dos l/ϕ^3).

(b) Segundo árbol dorado con $\theta = 108°$

Los ángulos interiores en cada vértice de un pentágono son $108°$, por lo que parece natural que los pentágonos y, a su vez, la proporción áurea, sean relevantes para el árbol de autocontacto con este ángulo.

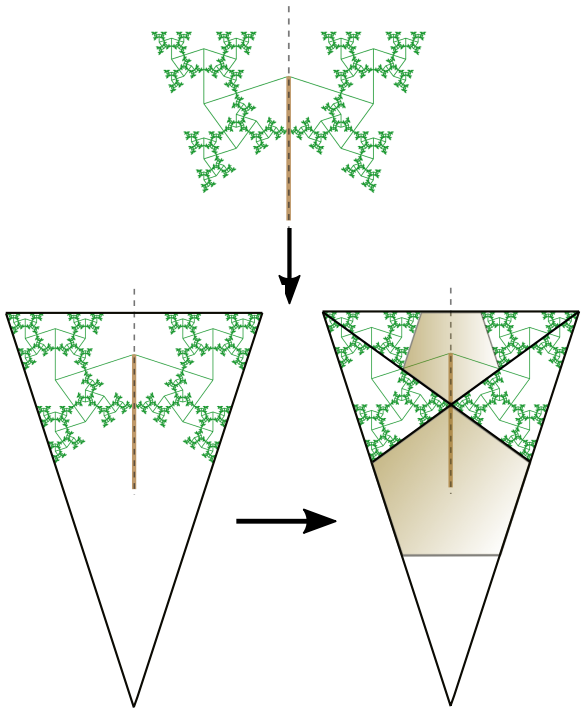


Figura 29. Segundo árbol dorado en $\theta = 108°$, con triángulos dorados, gnomon dorados y pentágonos.

Podemos asociar otros triángulos áureos con $T(1/\phi, 108°)$. Se puede formar un triángulo con un lado atravesando la parte superior del árbol y los otros dos lados atravesando las puntas de los subárboles del nivel uno (y extendidos de modo que se encuentren en un vértice) como en la figura 29, el triángulo es de hecho un triangulo dorado. La imagen final en la figura 29 muestra el triángulo dorado original con más segmentos de línea, mostrando más triángulos dorados y dos pentágonos. En esta figura, la longitud de la base es l y las longitudes de los lados son ϕl (porque es un triángulo dorado).

(c) Tercer árbol dorado con $\theta = 120°$

Se observa un triángulo equilátero que se puede asociar con este árbol es el triángulo que es el triángulo más pequeño que delimita el árbol, como se muestra en la figura 30. Las medianas de este triángulo poseen características interesantes, se observa que la mediana vertical coincide con el tronco y las otras dos medianas son tales que para cualquier subárbol que se crucen, la intersección es a lo largo del tronco del subárbol o solo en un punto de esquina del subárbol (por lo tanto, nunca cruza una rama).

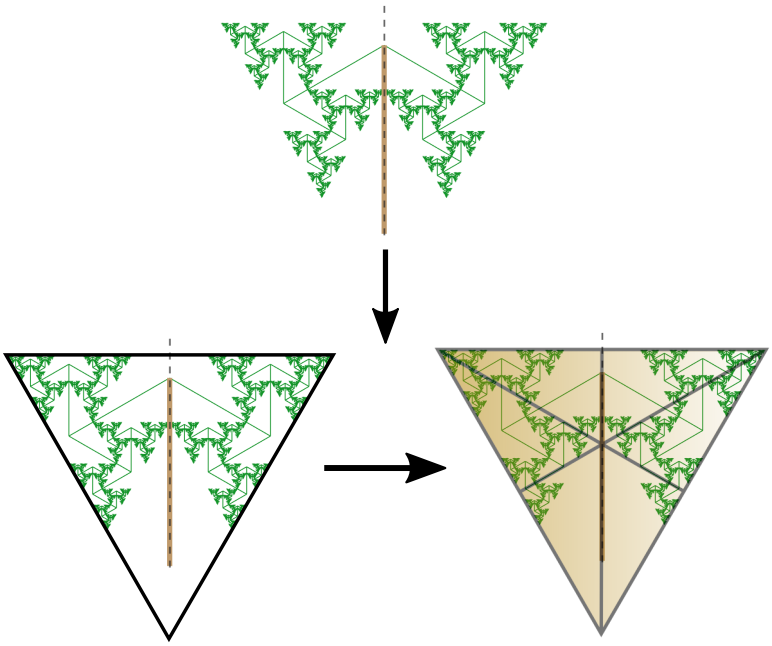


Figura 30. Tercer árbol dorado en $\theta = 120°$, con el triángulo equilátero asociado y sus respectivas medianas.

(d) Cuarto árbol dorado con $\theta = 144°$

Las puntas de este árbol forman una Curva de Koch dorada. El segmento de línea inicial y las primeras iteraciones se muestran en la figura 31.

En la figura 31 en la primera iteración con $n = 1$, un segmento de línea de longitud l se reemplaza con cuatro segmentos de línea de longitud l/ϕ^2 cada uno (porque corresponden a subárboles de nivel 2). El triángulo formado por los dos segmentos de línea internos es un triángulo dorado porque los ángulos son $36°, 72°, 72°$(en color dorado).

Adicionalmente la figura 32a muestra el árbol junto con cuatro copias, giradas alrededor de la parte inferior del tronco con ángulos que son múltiplos de $72°$. Las puntas de los árboles forman un copo de nieve dorado de Koch. También en la figura 32b muestra un decágono asociado con el árbol y cuatro copias del mismo.

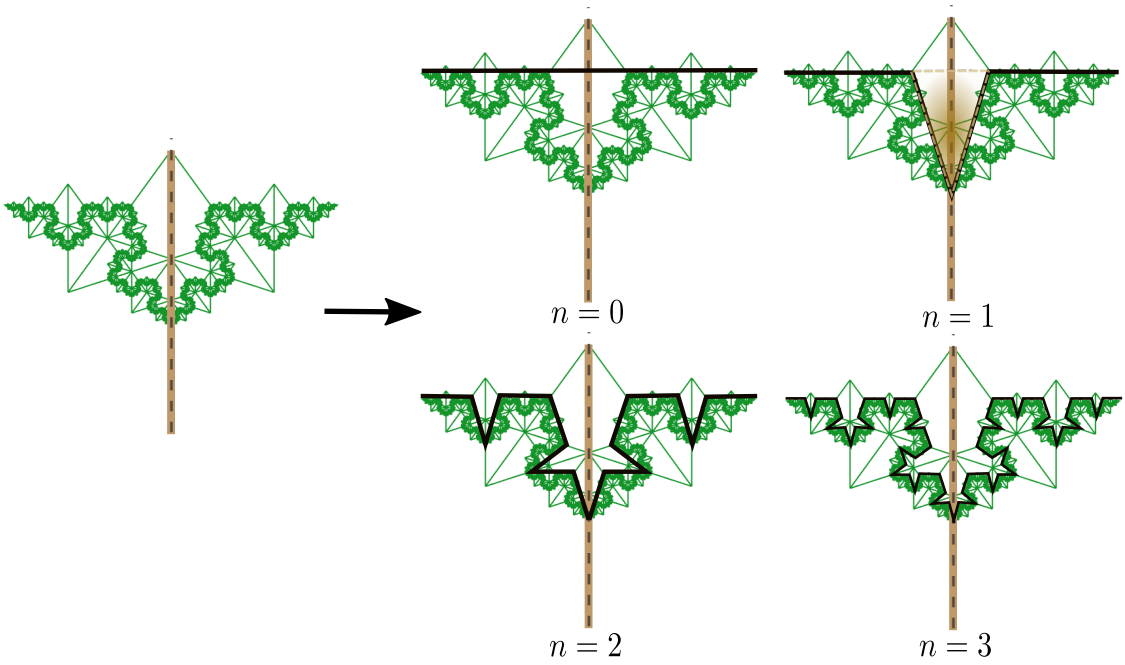


Figura 31. Cuarto árbol dorado con $\theta = 144°$, con el triángulo dorado asociado en la iteración $n = 1$ y la Curva de Koch dorada asociada en todas las iteraciones.

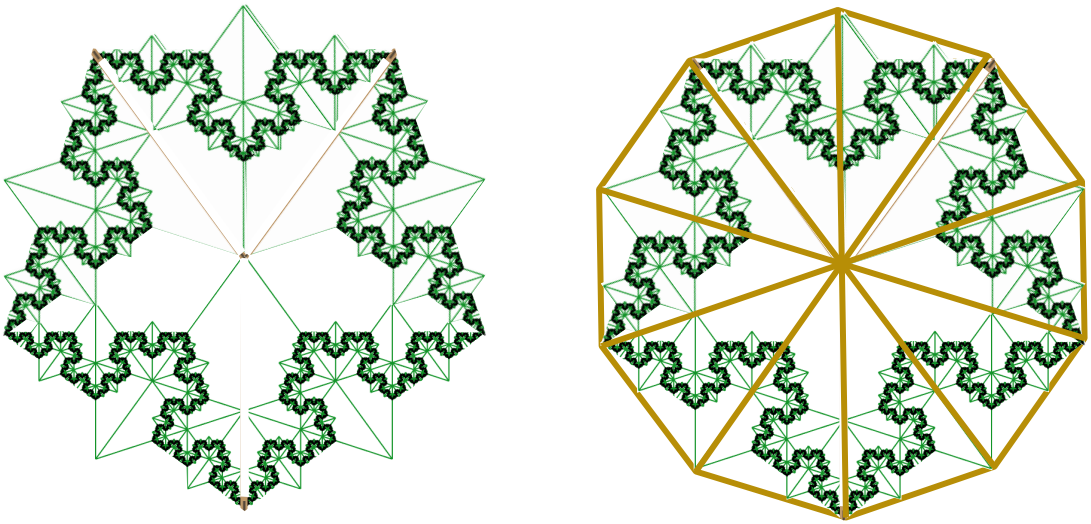


Figura 32. Copo de nieve dorado con $\theta = 144°$ y triángulos dorados contenidos en un decágono.

6. Estructura del canopy C de un árbol fractal simétrico autocontactado

En un árbol fractal binario, es bien sabido que las puntas de las ramas de estos árboles pueden tomar cualquier dimensión satisfactoria $0 < d < 2$. Además, cuando $1 < d < 2$, es posible que diferentes ramas tengan puntas, pero no otros puntos, en común. Estos árboles autocontactados, incluyen puntos a los que no se puede acceder desde el infinito, excepto cruzando una curva compuesta llamada el "cascarón". En los casos interesantes, el cascarón incluye un fractal llamado "*canopy*", el cual es una curva fractal C formada por puntos que se pueden alcanzar acercándose al árbol "desde arriba".

Acorde a la definición del canopy de un árbol fractal que aparece en 3.1.13, en términos generales, C está hecho de puntas de ramas que de alguna manera se han "unido", (véase la figura 4) esta idea se hará precisa y se evaluará la *dimensión fractal* d_C del canopy. Dado que C es una curva, tenemos que $d_c \geq 1$, y desde que C es un subconjunto de $T(r, \theta)$, tenemos que $d_c \leq d$.

Las dimensiones fractales del conjunto de puntas de las ramas d y del canopy d_c se comparan en el rango $0° < \theta < 180°$. Para ciertos rangos de θ, el canopy y el conjunto de puntas de las ramas son curvas de Koch. En consecuencia, las construcciones aquí presentadas proporcionan formas alternativas de dibujar curvas de Koch. Además, los ángulos $\theta = 90°$ y $\theta = 135°$ marcan profundas discontinuidades topológicas en el canopy. En consecuencia, pensamos en estos como puntos críticos topológicos.

6.1. Canopy en el primer rango de $0° < \theta < 90°$

En este rango, el canopy se puede caracterizar de otra manera: como el camino más corto a lo largo de las puntas de la rama desde la esquina superior izquierda a la esquina superior derecha.

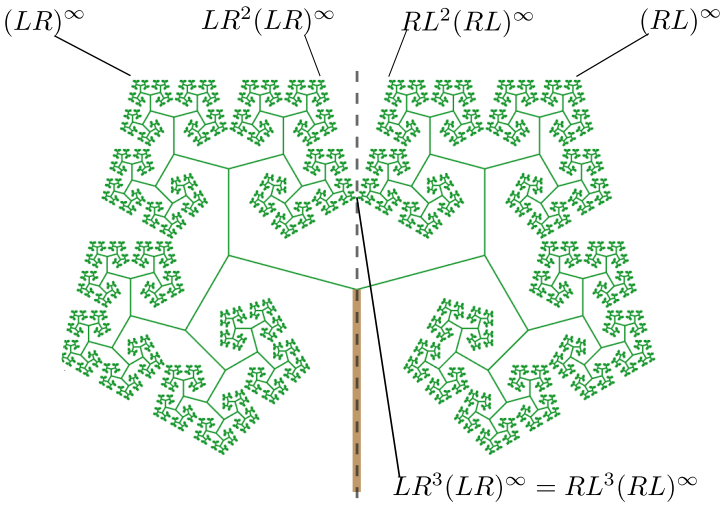


Figura 33. Canopy en un árbol fractal autocontactado con $0° < \theta < 90°$.

Las puntas de las ramas autocontactadas proyectan desde el infinito algunas otras puntas de las ramas, proporcionando así atajos entre las partes del árbol, saltando efectivamente sobre las regiones apantalladas [MF].

Cada pieza de C contiene puntos individuales y dobles. La figura 33 muestra claramente que las puntas $(LR)^{\infty}$ and $(RL)^{\infty}$ no se puede llegar de ninguna otra manera; son puntos individuales. Por el contrario, para $45° \leq \theta < 90°$ las puntas $LR^3(LR)^{\infty}$ y $RL^3(RL)^{\infty}$ coinciden y forman un punto doble como se ve en la figura.

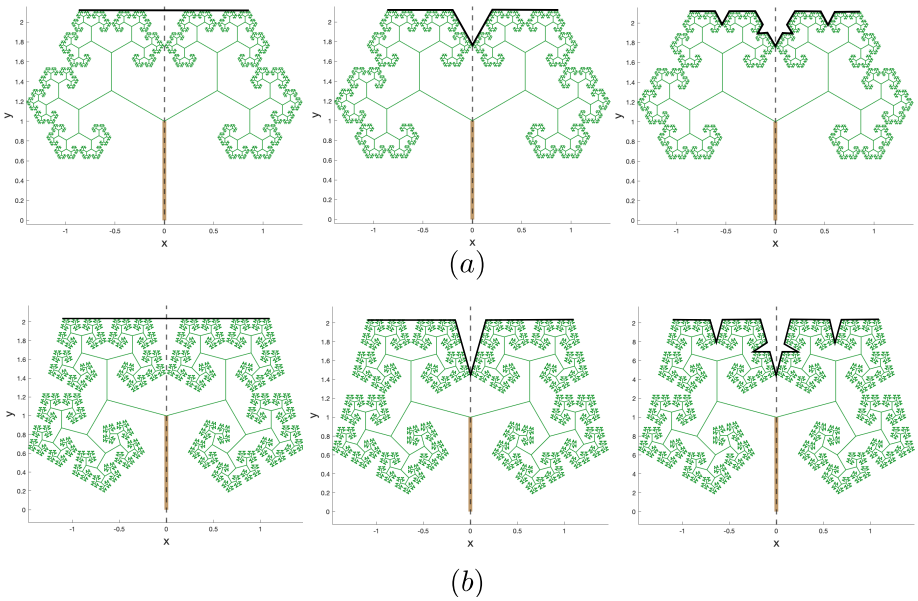
Generación de la Curva de Koch. La inspección de la parte superior del canopy, la parte entre $(LR)^{\infty}$ y $(RL)^{\infty}$, muestra que el canopy es una Curva de Koch (figura 34). La autosimilaridad del canopy nos permite usar esta parte superior para calcular la dimensión del canopy.

Aunque el valor numérico de la longitud del iniciador, l, no importa (se pueden elegir unidades para convertirlo en 1), necesitamos una expresión para ello en términos de r y θ para derivar las escalas de los generadores [MF].

Los extremos izquierdo y derecho del iniciador son las puntas de las ramas $(LR)^{\infty}$ y $(RL)^{\infty}$. Por lo tanto l es la diferencia de las coordenadas x de estas puntas, vemos que

$$l = \sin(\theta)\,(r + r^3 + \cdots) - \sin(-\theta)(r + r^3 + \cdots)$$

$$l = \frac{2r\sin(\theta)}{1 - r^2} \tag{16}$$



(a)

(b)

Figura 34. Curva de Koch contenida en un árbol fractal autocontactado con $0° < \theta < 90°$. Con $\theta = 60°$ (figura a) y con $\theta = 75°$ (figura b), son una variante de la Curva de Koch.

De manera general en este primer rango, los subrangos de θ se agrupan de acuerdo al N que cumple con la ecuación (5) y se resumen algunos de ellos en la siguiente tabla 4.

Tabla 4. Primeros subrangos en $0° < \theta < 90°$

N	Subrango del ángulo θ
2	$45° \leq \theta < 90°$
3	$30° \leq \theta < 45°$
4	$22.5° \leq \theta < 30°$
5	$18° \leq \theta < 22.5°$
6	$15° \leq \theta < 18°$

6.1.1. Canopy en el subrango de $45° \leq \theta < 90°$ con $N = 2$

Por inspección, la estructura del canopy es más clara a la vista cuando θ está cerca de $90°$. Por lo tanto, comparando un árbol de lleno (figura 35a) y uno que está cerca de llenarse (figura 34b). Como se observa, la parte superior de la figura 35a es simplemente un intervalo de dimensión $d_c = 1$.

Justo debajo de $\theta = 90°$ el canopy "se abre" de manera discontinua, como se ve en la figura 35b, pero su estructura es claramente reconocible, es una variante de la Curva de Koch cuyo generador se compone de cuatro intervalos [MF].

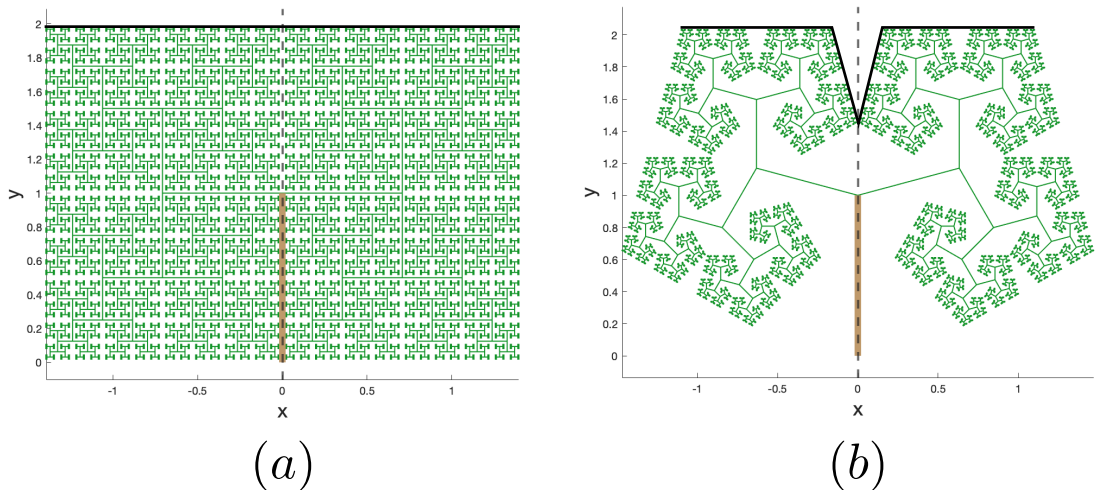


Figura 35. Canopy en árboles fractales llenos y cerca de llenarse.

Los puntos finales del intervalo izquierdo son las puntas de las ramas $(LR)^{\infty}$ y $LR^2(LR)^{\infty}$(véase la figura 36). A partir de las coordenadas de estos puntos, y luego por simetría bilateral del árbol, y usando las ecuaciones (4) se observa que los intervalos del generador de la Curva de Koch tienen longitudes

$$r_1 = lr^2, \qquad r_2 = lr^3, \qquad r_3 = lr^3, \qquad r_4 = lr^2 \tag{17}$$

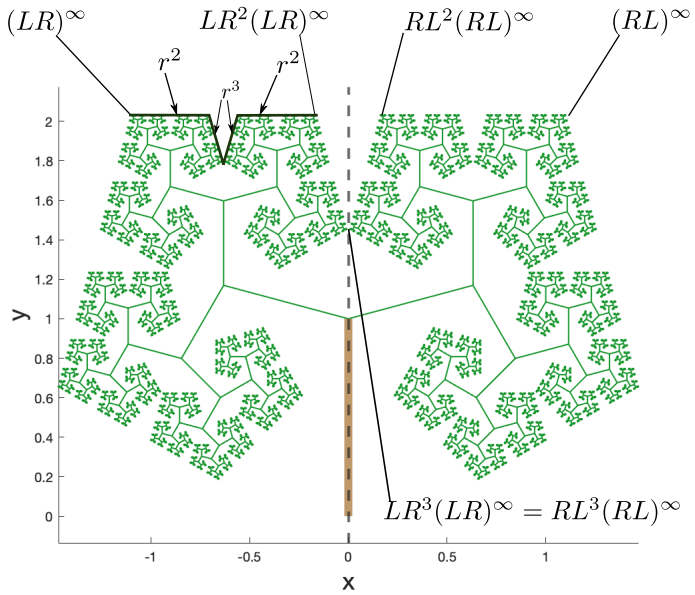


Figura 36. Generadores en canopy de árbol fractal autocontactado con $45° < \theta < 90°$.

Se sabe que la dimensión d_c del canopy es la solución (única) de la ecuación de Moran, tomando $l = 1$, la ecuación generadora queda

$$\sum r_i^{d_c} = 1$$

Aquí, la ecuación de Moran toma la forma [MF]

$$2r^{2d_c} + 2r^{3d_c} = 1 \qquad (18)$$

Es conveniente, escribir $\lambda = r^{d_c}$, entonces la ecuación anterior se convierte en

$$2\lambda^2 + 2\lambda^3 = 1 \qquad \rightarrow \qquad \lambda^2 + \lambda^3 = 1/2$$

Se puede resolver numéricamente la ecuación de Moran para cada valor de r que corresponde a todo el rango $45° \leq \theta < 90°$, de esta ecuación de Moran se obtienen los valores de d_c en este rango útiles para graficarlos.

6.1.2. Canopy en el subrango $30° \leq \theta < 45°$ con $N = 3$

A medida que θ disminuye continuamente a $45°$, el canopy alcanza una segunda discontinuidad porque no solo las puntas de las ramas $LR^3(LR)^\infty$ y $RL^3(RL)^\infty$ coinciden pero también $LR^4(LR)^\infty$ y $RL^4(RL)^\infty$ coinciden (y, por supuesto, también lo hacen muchas otras puntas de rama entre estos) [MF].

Cuando θ disminuye por debajo de $45°$, $LR^4(LR)^\infty$ y $RL^4(RL)^\infty$ coinciden en un valor r menor que $LR^3(LR)^\infty$ y $RL^3(R)^\infty$, por lo que el autocontacto mínimo ocurre cuando $LR^4(LR)^\infty$ coinciden que $RL^4(RL)^\infty$ (véase la figura 37), adicionalmente a partir de la ecuación 10, θ y r están relacionados por

$$rsin(-\theta) + r^3\, sin(\theta) + \cdots + r^N\, sin\big((N-2)\theta\big) + \frac{r^{N+1}}{1-r^2} sin\big((N-1)\theta\big) + \frac{r^{N+2}}{1-r^2} sin(N\theta) = 0$$

$$r\, sin(-\theta) + r^3\, sin\big((3-2)\theta\big) + \frac{r^{3+1}}{1-r^2} sin\big((3-1)\theta\big) + \frac{r^{3+2}}{1-r^2} sin(3\theta) = 0$$

$$rsin(-\theta) + r^3 \sin(\theta) + \frac{r^4}{1-r^2}\sin(2\theta) + \frac{r^5}{1-r^2}\sin(3\theta) = 0 \qquad (19)$$

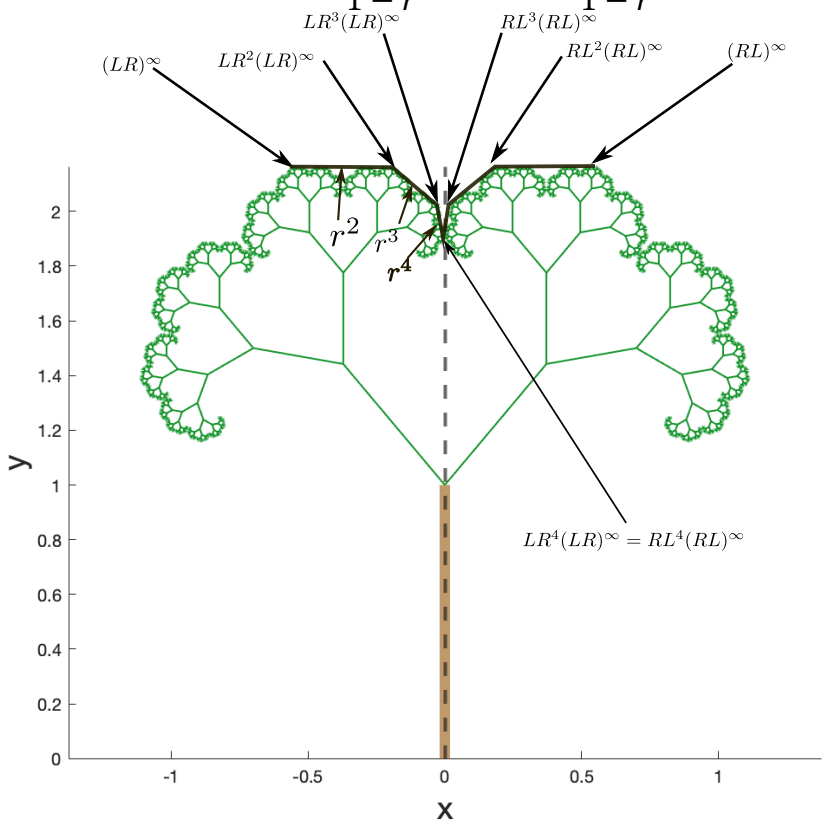


Figura 37. Generadores en canopy de árbol fractal autocontactado en el subrango $30° \leq \theta < 45°$.

Pasando $45°$ añade dos intervalos al generador, cada uno de longitud dada por la distancia entre las puntas de las ramas $LR^3(LR)^\infty$ y $LR^4(LR)^\infty$; es decir, el generador es una línea discontinua de seis intervalos de longitudes

$$r_1 = lr^2, \qquad r_2 = lr^3, \qquad r_3 = lr^4,$$
$$r_4 = lr^4, \qquad r_5 = lr^3, \qquad r_6 = lr^2,$$

La dimensión d_c es ahora la solución de la ecuación generadora de Moran,

$$\sum_{i=1}^{6} r_i^d = 2r^{2d_c} + 2r^{3d_c} + 2r^{4d_c} = 1 \qquad (20)$$

Nuevamente se puede resolver numéricamente para cada valor de r que corresponde en este caso a todo el rango $30° \leq \theta < 45°$, de acá se obtienen los valores puntuales de d_c en este rango.

6.1.3. Canopy en el subrango general $\frac{90}{N}° \leq \theta < \frac{90}{N-1}°$

La figura 38 muestra un ejemplo típico en este rango, la generalización es obvia. En este rango, el autocontacto mínimo ocurre cuando r y θ están relacionados por la ecuación (2) y λ es la solución de la ecuación

$$2r^{2d_c} + 2r^{3d_c} + 2r^{4d_c} + \cdots + 2r^{(N+1)d_c} = 1 \qquad (21)$$

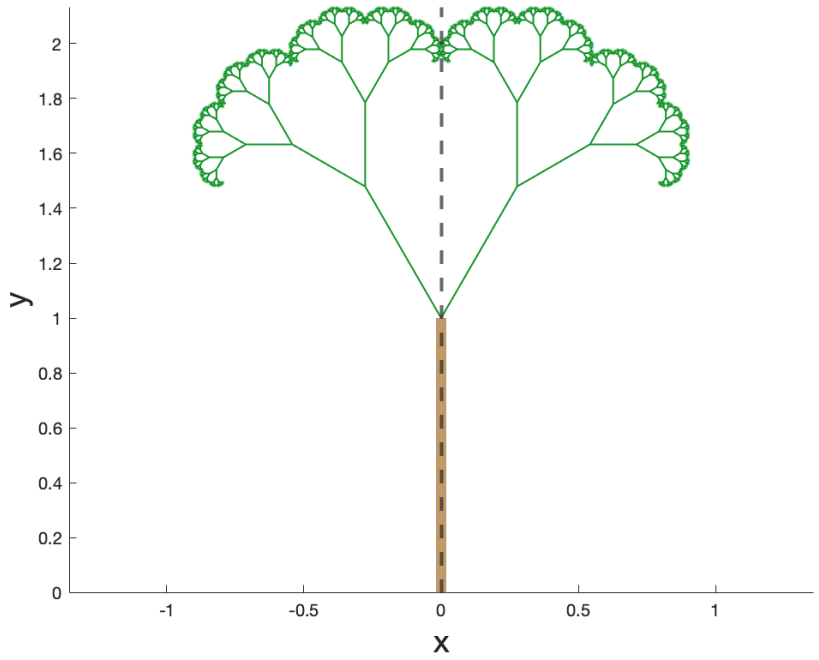


Figura 38. Generadores en el canopy en el subrango general $90/N° \leq \theta < 90/(N-1)°$

Cada paso por un valor de la forma $\theta = 90°/N$ va acompañado de un salto en el valor de d_c, como se ve en la gráfica de d_c en función del ángulo θ.

6.2. Canopy en el valor de $\theta = 90°$

Aquí el autocontacto mínimo requiere $r_{sc} = 1/\sqrt{2}$, consulte la figura 35a. Para ver que el espacio entre los lados superior izquierdo y derecho del árbol se cierra, observe que la punta de la rama $LR^2(LR)^\infty$ coincide con $RL^2(RL)^\infty$, $LR^3(LR)^\infty$ coinciden con $RL^3(RL)^\infty$, y cada punta de rama entre $LR^2(LR)^\infty$ y $LR^3(LR)^\infty$ con la coordenada x, 0 coincide con la punta correspondiente en el lado derecho del árbol [MF].

Un argumento similar muestra que la brecha entre los lados inferior izquierdo y derecho del árbol se cierra. Aquí, $L^3(RL)^\infty$ coincide con $R^3(LR)^\infty$ y $L^4(RL)^\infty$ coincide con $R^4(LR)^\infty$. Además, es fácil ver que el conjunto de puntas de las ramas es un rectángulo relleno. En consecuencia, el canopy consta de los bordes de este rectángulo y, por lo tanto, tiene una dimensión $d_c = 1$.

6.3. Canopy en el segundo rango de $90° < \theta < 135°$

Sin embargo, las figuras para las cuales $\theta > 90°$ ejemplifican una situación totalmente diferente. Los intervalos rectos no son ramas completas, sino porciones de ramas, y el canopy puede, en el mejor de los casos, definirse como un polvo de puntos: mucho de lo que parece un canopy está protegido desde el infinito por otras porciones de ramas [MF].

Como se ve en la figura 39, el generador del canopy consta de cuatro segmentos. Los dos de la izquierda tienen esquinas $(LR)^\infty$ y $LR^2(LR)^\infty$, y $LR^2(LR)^\infty$ y $LR^3(LR)^\infty = L^4(RL)^\infty$. [El segmento con esquinas $LR^3(LR)^\infty$ y $L^3(RL)^\infty = R^3(LR)^\infty$ se filtra desde el infinito por segmentos de rama.]

$$r_1 = lr^2, \qquad r_2 = lr^3, \qquad r_3 = lr^3, \qquad r_4 = lr^2,$$

El árbol es simétrico; por lo tanto, la ecuación generadora de Moran se convierte en

$$2r^{2d_c} + 2r^{3d_c} = 1 \tag{22}$$

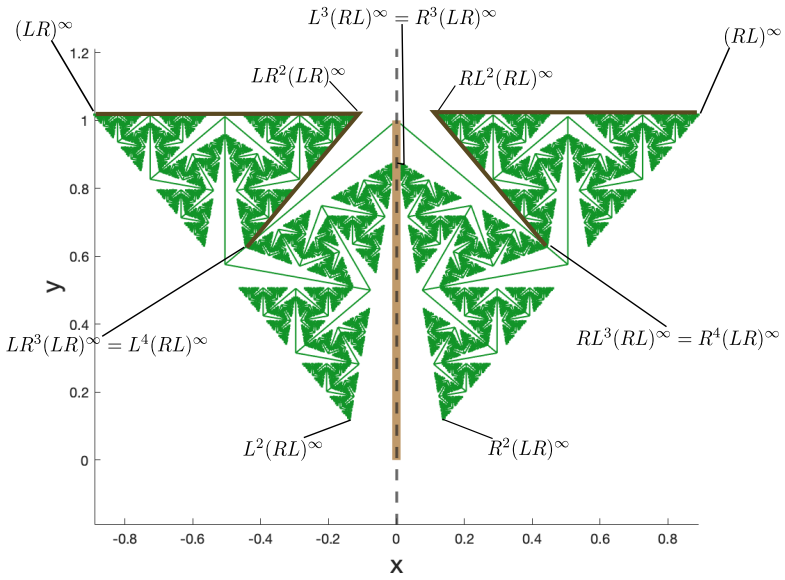


Figura 39. Generadores en canopy en el segundo rango $90° < \theta < 135°$, con $\theta = 130°$.

A diferencia de la situación en la que $\theta < 90°$ para un autocontacto mínimo, ahora solo hay dos puntas de rama relevantes, en lugar de una para cada intervalo $(90/N°, 90°/(N-1))$. Para $90° < \theta < 135°$ el autocontacto mínimo se obtiene al exigir que las puntas de las ramas $L^3(RL)^\infty$ coincide con $R^3(LR)^\infty$, como se ve en la figura 40.

Generación del Conjunto de Cantor. Además, a diferencia de la situación en la que $\theta \leq 90°$, las porciones de las ramas filtran desde el infinito algunas de las puntas de las ramas que pueden parecer visualmente pertenecer al canopy. La figura 40 ilustra esta situación. El efecto de esta pantalla es desconectar totalmente el canopy. En lugar de una variante de la Curva de Koch, ahora es una variante del Conjunto de Cantor.

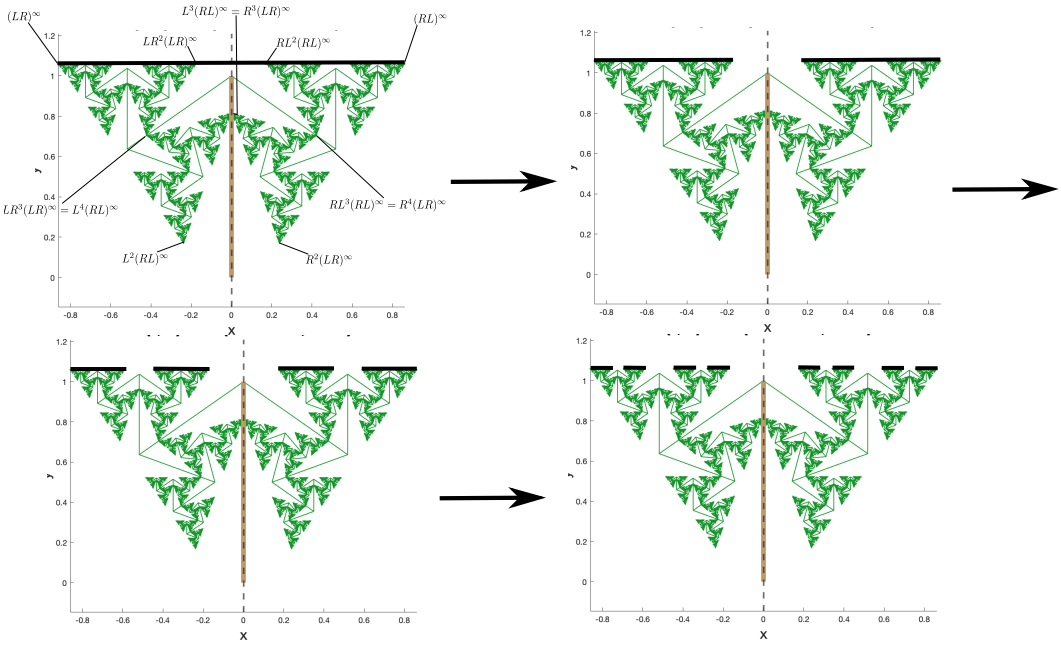


Figura 40. Conjunto de Cantor en canopy en el segundo rango $90° < \theta < 135°$, con $\theta = 125°$.

6.4. Canopy en el valor de $\theta = 135°$

Como en el caso de $\theta = 90°$, aquí el autocontacto requiere $r = 1/\sqrt{2}$. Para ver cómo se cierra el espacio entre los lados inferior izquierdo y derecho del árbol, tenga en cuenta que la punta de la rama $L^3(RL)^\infty$ coincide con $R^3(LR)^\infty$, $L^2(RL)^\infty$ coincide con $R^2(LR)^\infty$, y cada punta de rama entre $L^3(RL)^\infty$ y $L^2(RL)^\infty$ con la coordenada x, 0 coincide con la punta correspondiente en el lado derecho del árbol [MF].

Es fácil ver en la figura 41, que el conjunto de puntas de las ramas es un triángulo relleno, como en el caso de $\theta = 90°$ se tiene que $d_c = 1$.

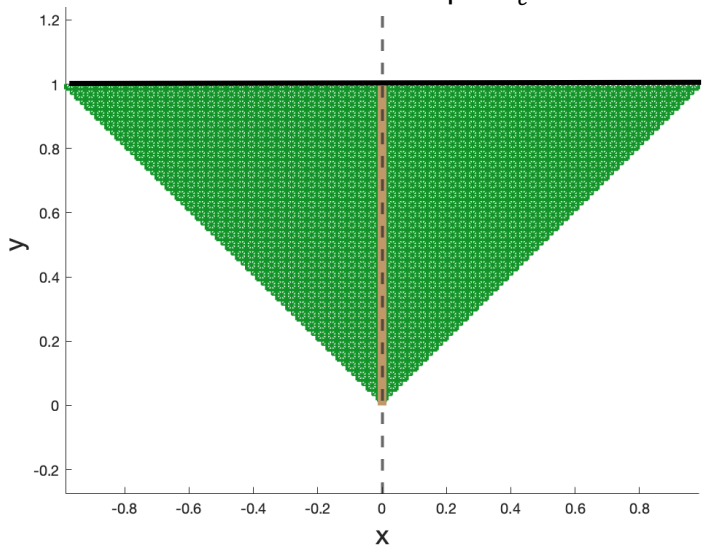


Figura 41. Canopy en el valor de $\theta = 135°$.

6.5. Canopy en el tercer rango de $135° < \theta < 180°$

En la figura 42 muestra un árbol con $\theta = 140°$ que pertenece a este rango, se observa una familia de la Curva de Koch en las puntas de las ramas (en negro) con el generador constituido por cuatro segmentos, los dos de la izquierda con esquinas $(LR)^{\infty}\ y\ LR^2(LR)^{\infty} = L^3(RL)^{\infty}$, y $L^3(RL)^{\infty}$ y $L^2(RL)^{\infty}$.

Los generadores restantes para el canopy tienen esquinas en la parte superior $(LR)^{\infty}\ \ y\ LR^2(LR)^{\infty}$, y $RL^2(RL)^{\infty}\ y\ (RL)^{\infty}$. Estos segmentos tienen longitud $r_1 = r^2 l$, entonces la ecuación de Moran es

$$2r^{2d_c} = 1 \tag{23}$$

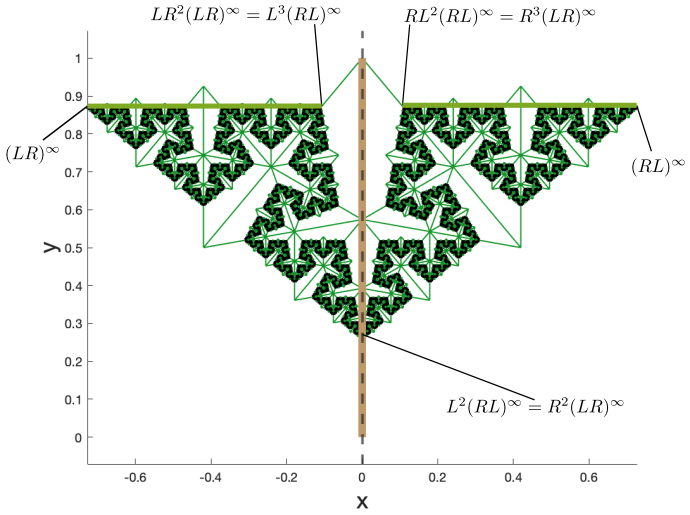


Figura 42. Generadores en canopy en el tercer rango $135° < \theta < 180°$ y la Curva de Koch contenida en las puntas de las ramas.

A nivel general, para ángulos $\theta > 135°$ el conjunto de puntas se convierte en una Curva de Koch – Cesàro que se describió en la figura 9b.

6.6. Canopy en el valor de $\theta = 180°$

Aquí el árbol se derrumba sobre su tronco como se aprecia en la figura 43.

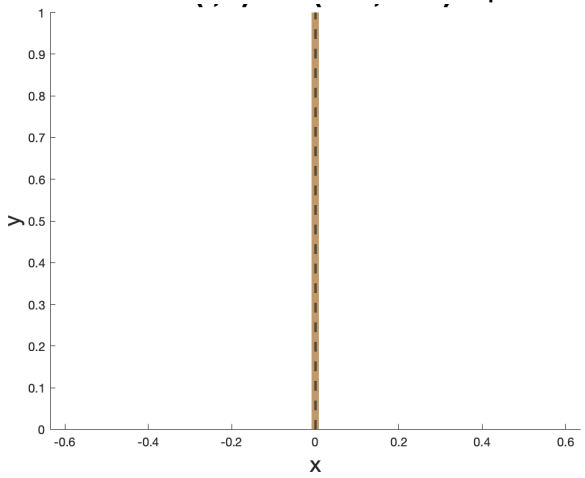


Figura 43. Canopy en árbol fractal autocontactado con $\theta = 180°$.

6.7. Dimensión del conjunto de puntas y del canopy

6.7.1. ***La dimensión d del conjunto de puntas***

Usando la ecuación (7) en las puntas de las ramas de los árboles fractales (no superpuestos) [DP], considerando la autosimilaridad de las fronteras de los sub-conjuntos resultantes se puede calcular para cada árbol:

$$d = \frac{ln\, 0.5}{ln\, r}$$

Para todo el rango $0° < \theta < 180°$ y sus respectivos r_{sc}, se muestran en la tabla 6 y figura 44 a continuación.

Tabla 6. Dimensión d del conjunto de puntas de los árboles fractales

θ (∘)	r_{sc}	d	θ (∘)	r_{sc}	d
5	0.501910	1.0055	95	0.669663	1.7286
10	0.507644	1.0224	100	0.642876	1.5689
15	0.516679	1.0497	105	0.624960	1.4746
20	0.527635	1.0841	110	0.614938	1.4255
25	0.539643	1.1237	115	0.612500	1.4140
30	0.553436	1.1716	120	0.618034	1.4404
35	0.564156	1.2109	125	0.632883	1.5152
40	0.577325	1.2618	130	0.660136	1.6690
45	0.593465	1.3284	135	0.707107	2.0000
50	0.600611	1.3596	140	0.652704	1.6247
55	0.608767	1.3966	145	0.610387	1.4041
60	0.618034	1.4404	150	0.577350	1.2619
65	0.628538	1.4927	155	0.551689	1.1654
70	0.640436	1.5555	160	0.532089	1.0986
75	0.653930	1.6319	165	0.517638	1.0526
80	0.669284	1.7262	170	0.507713	1.0226
85	0.686847	1.8452	175	0.501910	1.0055
90	0.707107	2.0000	180	0.500000	1.0000

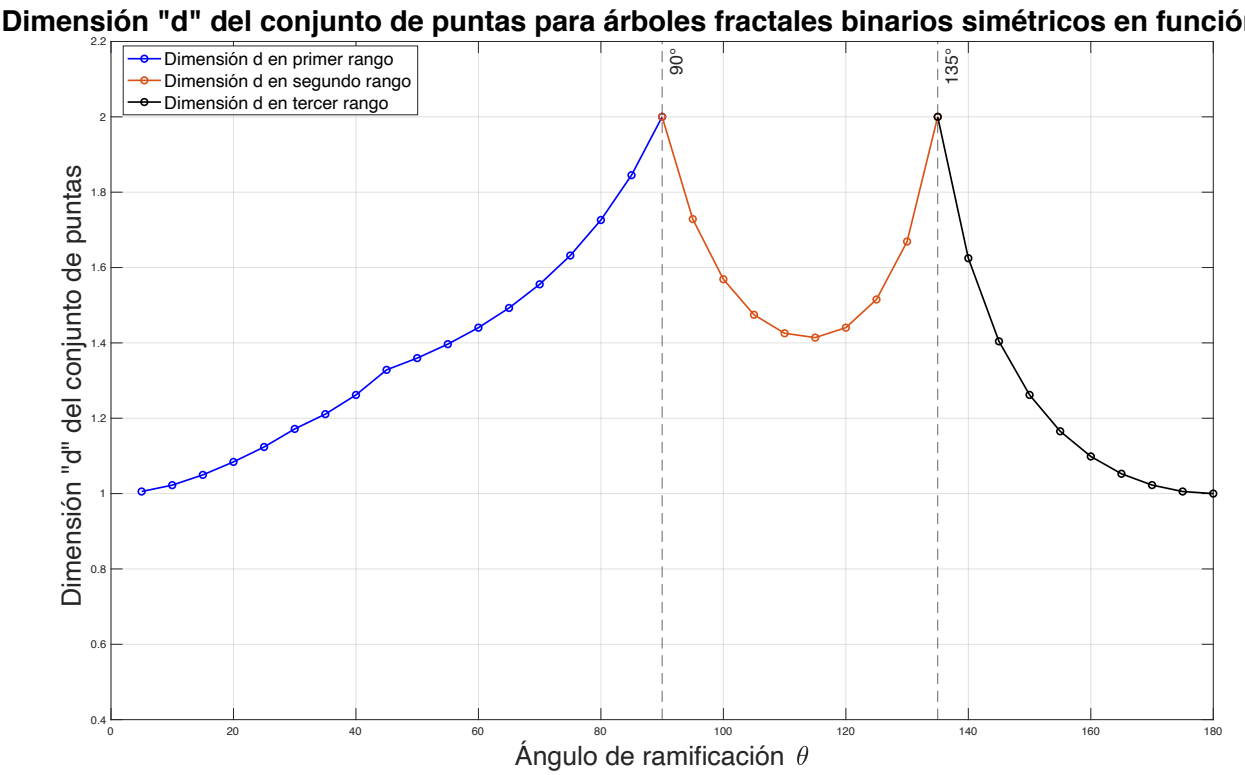


Figura 44. Dimensión fractal d del conjunto de puntas de ramas de un árbol fractal binario en función de θ.

6.7.2. La dimensión d_c del canopy

En función de θ, la dimensión del canopy d_c resulta tener discontinuidades negativas para $\theta = 135°$ y para todos los ángulos de la forma $\theta = 90°/N$ con $N > 1$. En la figura 45, se incluye la dimensión d_c del canopy en función de θ.

La figura 45, muestra un resumen graficado de las soluciones numéricas de las ecuaciones (18), (20), (21), (22) y (23), el cual es un gráfico de la dimensión del canopy d_c y en función del ángulo de ramificación θ.

En la tabla 6 se muestran algunos valores puntuales para d_c, se muestran el segundo y tercer rango completos, y los primeros 5 subrangos pertenecientes al primer rango, es decir para $\theta > 15°$. Estos datos se grafican en la figura 45 y se observan las discontinuidades en cada N del primer rango, como también en los ángulos $\theta = 90°$ y $\theta = 135°$, como era de esperarse.

Tabla 6. Dimensión d_c del canopy en los árboles fractales.

Rango	θ (∘)	r_{sc}	d_c
Primer Rango N = 6	15^+	0.516874	1.042089
	18^-	0.522977	1.060959
Primer Rango N = 5	18^+	0.523425	1.053490
	20	0.527635	1.066690
	22.5^-	0.533744	1.086248
Primer Rango N = 4	22.5^+	0.534296	1.068312
	25	0.539643	1.085558
	30^-	0.553123	1.130787
Primer Rango N = 3	30^+	0.553629	1.084964
	35	0.564156	1.120666
	40	0.577325	1.167738
	45^-	0.593109	1.228033
Primer Rango N = 2	45^+	0.593599	1.094005
	50	0.600611	1.119205
	55	0.608767	1.149621
	60	0.618034	1.185714
	65	0.628538	1.228747
	70	0.640436	1.280458
	75	0.653930	1.343315
	80	0.669284	1.420954
	85	0.686847	1.518938
	90	0.707107	1.646346

Rango	θ (∘)	r_{sc}	d_c
Segundo Rango	95	0.669663	1.422961
	100	0.642876	1.291479
	105	0.624960	1.213825
	110	0.614938	1.173468
	115	0.612500	1.163958
	120	0.618034	1.185714
	125	0.632883	1.247251
	130	0.660136	1.373866
	135^-	0.705880	1.638137
Tercer Rango	135^+	0.705876	0.994998
	140	0.652704	0.812349
	145	0.610387	0.702046
	150	0.577350	0.630929
	155	0.551689	0.582701
	160	0.532089	0.549293
	165	0.517638	0.526324
	170	0.507713	0.511292
	175	0.501910	0.502766
	180	0.500000	0.500000

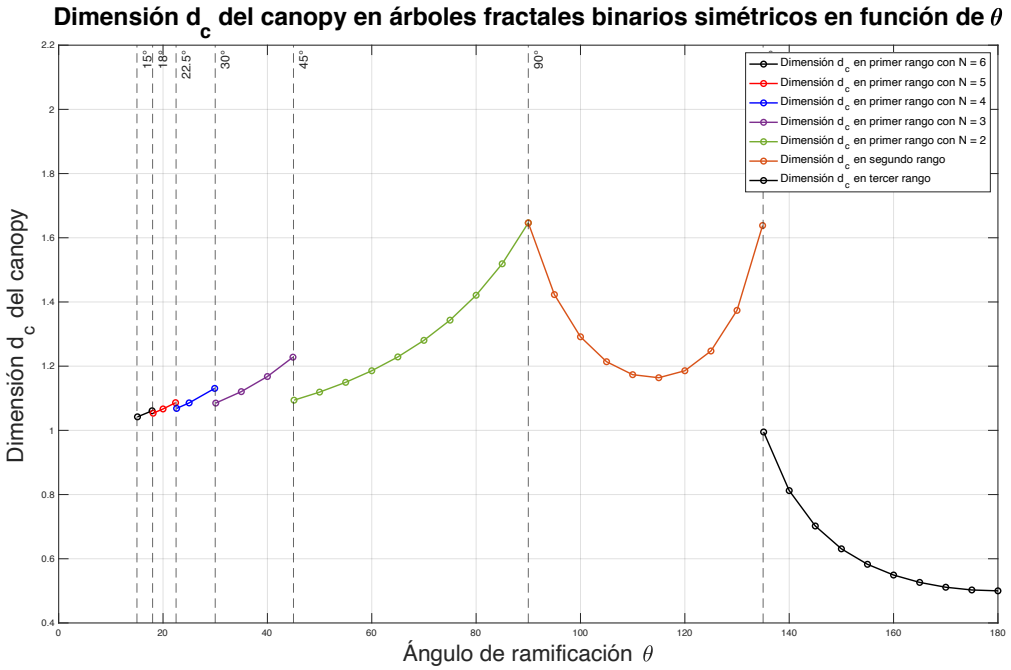


Figura 45. Dimensión fractal d_c del canopy de un árbol fractal binario en función de θ.

Las discontinuidades de d_c en los puntos críticos $\theta = 90°$ y $\theta = 135°$ merecen una mención especial. La comparación de las figuras 46a y 46b muestra el porqué d_c se acerca al mismo valor que $\theta \to 90\,°^{-}$ y que $\theta \to 90\,°^{+}$.

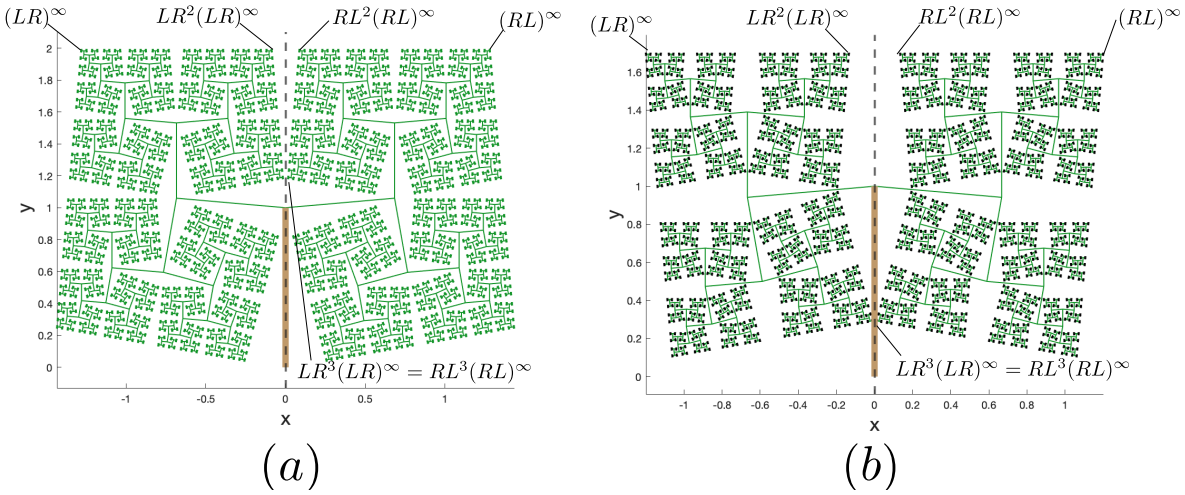


Figura 46. Discontinuidad del canopy en $\theta = 90°$, se muestran $\theta = 85°$ *y* $\theta = 95°$.

Para ambos $\theta \to 90°^{-}$ y $\theta \to 90°^{+}$ la parte de arriba del canopy es generada por dos copias de las porciones entre las puntas de ramas $(LR)^\infty$ y $LR^2(LR)^\infty$, y entre $LR^2(LR)^\infty$ y $LR^3(LR)^\infty$. Las distancias entre estos pares de puntas se acercan a los mismos límites que $\theta \to 90°$.

Las figuras 47a y 47b ilustran la discontinuidad en $\theta = 135°$. Para $\theta < 135°$ ejemplificada por la figura 47a, el generador de la parte superior del canopy consta de cuatro piezas. Para $\theta > 135°$ ejemplificado en la figura 47b, segmentos de ramas protegen dos de las cuatro piezas.

Por lo tanto, la discontinuidad en $\theta = 135°$ representa un cambio en el número de generadores, al igual que las discontinuidades en $\theta = 90°/N,\ N > 1$. Solo la discontinuidad $\theta = 90°$ no implica un cambio en el número de generadores [MF].

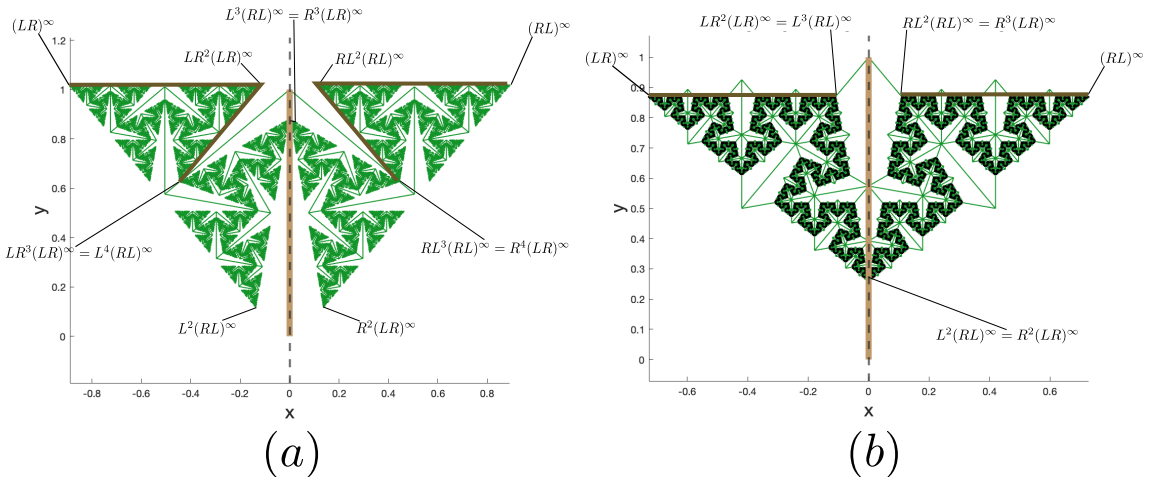


Figura 47. Discontinuidad del canopy en $\theta = 135°$, se muestran $\theta = 130°$ *y* $\theta = 140°$.

6.7.3. ***Comparación de las dimensiones d y d_c***

A manera comparativa se muestra en la figura 48, las dos dimensiones analizadas en este trabajo, se observa siempre $d_c < d$, lo cual se confirma ya que el canopy C es un subconjunto del árbol fractal $T(r, \theta)$.

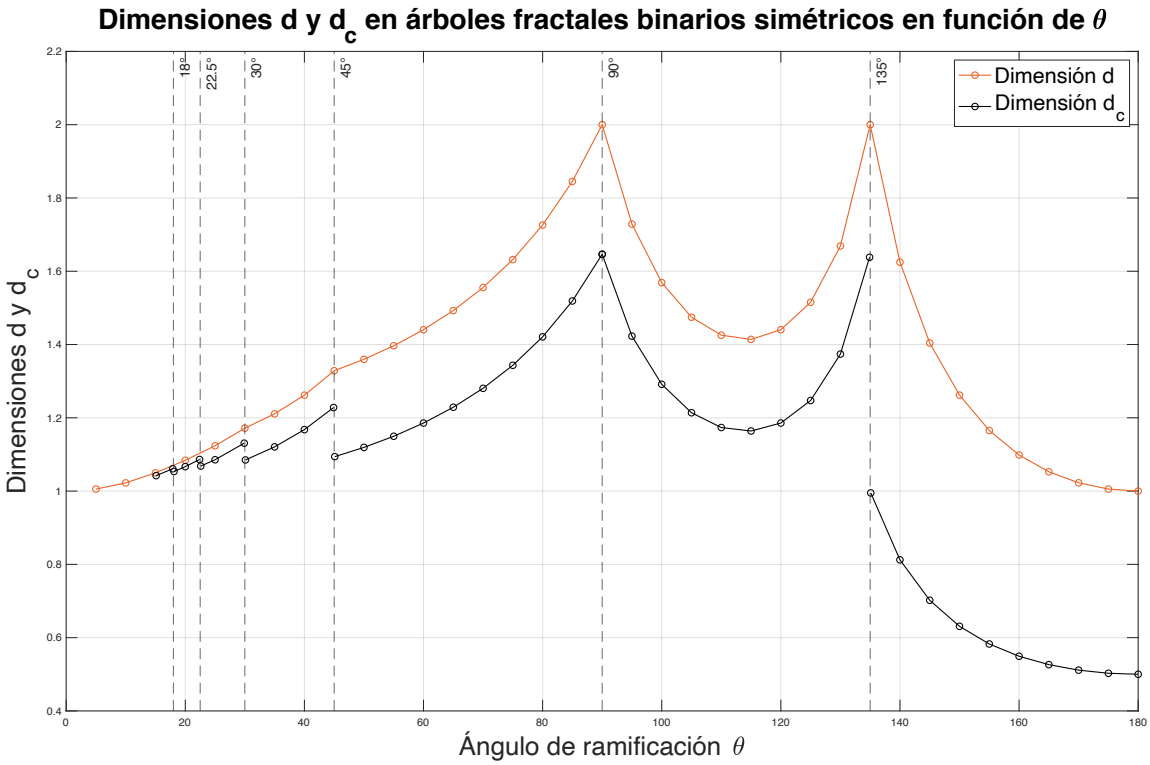


Figura 48. Dimensión fractal d_c del canopy y dimensión d del conjunto de puntas de un árbol fractal binario en función de θ.

7. Conclusiones

- Se estableció gráfica y matemáticamente la relación entre el número áureo ϕ y los árboles fractales binarios simétricos, obteniendo para $r_{sc} = 1/\phi$ cuatro árboles fractales "dorados" $(60°, 108°, 120°, 144°)$, en cada uno de ellos se comprueba la existencia de geometrías doradas dentro o en las fronteras de los mismos, las cuales se ilustran completamente.

- Se evidenció que las dimensiones fractales de algunos conjuntos fractales como el Polvo de Cantor, la Curva de Koch, el Triangulo de Sierpinski y la Alfombra de Sierpinski, están comprendidas entre los valores de 1 y 2, concordante ya que son conjuntos que se ubican entre las curvas (dimensión 1) y las superficies (dimensión 2).

- Utilizando las diferentes ramas relevantes en los árboles para el autocontacto en cada rango y resolviendo las ecuaciones necesarias para r_{sc} se logró obtener el Conjunto de Mandelbrot para árboles fractales binarios simétricos donde se establece la correlación entre el ángulo de ramificación θ y la relación de contracción crítica r_{sc} necesaria para el autocontacto.

- En este Conjunto de Mandelbrot se logró observar que para cada θ, se tiene un solo valor de r_{sc} para el cual se asegura el autocontacto. También se tienen dos valores críticos de θ $(90° \text{ y } 135°)$ para los cuales $r_{sc} = 1/\sqrt{2}$, siendo este el valor máximo de r_{sc} en el diagrama. Mientras que para un determinado valor de r_{sc} pueden existir 1, 2 o hasta 4 valores de θ; se observa que para valores $r_{sc} < \sqrt{3/8}$ existen solamente 2 valores de θ para cada r_{sc} y para valores comprendidos de $\sqrt{3/8} < r_{sc} < 1/\sqrt{2}$, existen 4 valores de θ para cada r_{sc} donde hay autocontacto.

- Se clasificó adecuadamente los árboles fractales binarios simétricos en los tres grandes rangos, y se logró estudiar con técnicas similares el cálculo de las dimensiones del canopy de cada árbol al aplicar la ecuación de Moran adecuada a cada rango, se observaron discontinuidades en la gráfica de d_c con referencia a θ, las cuales se comprueban gráficamente en los generadores en cada una de los árboles fractales.

- Al graficar y comparar visualmente las dimensiones del conjunto de puntas d y del canopy d_c de los árboles fractales en función del ángulo θ se logró observar que $d > d_c$ siempre, lo cual tiene sentido puesto que C es un subconjunto del árbol fractal binario simétrico $T(r, \theta)$.

- Usando las herramientas computacionales adecuadas y cambiando, ya sea los ángulos de ramificación θ o las relaciones de contracción r, se pueden generar árboles más complejos e incluso más hermosos a la vista, de esta manera se podría profundizar en el estudio de árboles con más ramificaciones e incluso árboles fractales asimétricos, que comprensiblemente requieren cálculos más extensos y algoritmos que logren generar cada uno de los árboles.

8. Glosario

- *Fractal:* es un objeto geométrico en el que se repite el mismo patrón a diferentes escalas y con diferente orientación. La expresión fractal viene del latín fractus, que significa fracturado, roto, irregular. La expresión y el concepto se atribuyen al matemático Benoit B. Mandelbrot.

- *Árbol fractal binario simétrico*: es el árbol $T(r, \theta)$ que está definido por dos parámetros, la relación de contracción r y el ángulo de ramificación θ.

- *Ángulo de ramificación:* es un ángulo comprendido entre $0°$ *y* $180°$, que define la inclinación a la cual se ramifica las ramas después de un vértice en el árbol fractal, se denota por θ.

- *Relación de contracción critic*a: es la relación de contracción única que produce un árbol de autocontacto, es denotada por r_{sc}.

- *Rango de ángulo de ramificación*: es la manera en que se divide convenientemente el estudio de los árboles fractales, los cuales se segmentan en tres grandes rangos debido a que pueden usarse técnicas similares de análisis.

- *Número áureo*: es denotado por ϕ, también llamado número de oro, número de Dios, razón áurea, razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción, es un número irracional, es un número remarcable que surge en varias áreas de las matemáticas, la naturaleza y el arte.

- *Conjunto clásico de Cantor* : conocido como el clásico Conjunto de Cantor de tercios medios, el cual se obtiene quitando el intervalo abierto del tercio medio del intervalo unitario, luego quitando los tercios medios de los subintervalos restantes y continuando este proceso *ad infinitum*.

- *Curva de Koch*: el copo de nieve de Koch es una curva fractal el cual se construye comenzando con un triángulo equilátero, quitando el tercio interior de cada lado, construyendo otro triángulo equilátero en el lugar donde se quitó el lado, y luego repitiendo el proceso. Cada lado del copo de nieve constituye una Curva de Koch.

- *Dimensión fractal de autosimilaridad:* también llamada solamente dimensión fractal, es la medida para calcular la dimensión de los fractales más sencillos que poseen autosimilaridad, es decir aquellos que están formados por copias a menor escala de ellos mismos.

- *Conjunto autosimilar: e*s aquel conjunto compuesto por N copias idénticas del mismo conjunto inicial, reducidas por un factor de escala $p = 1/r$ veces más pequeño.

- *Árboles autoevitados*: son aquellos árboles fractales $T(r,\theta)$ que no tienen un punto doble.

- *Árboles autosuperpuestos:* se dice de aquellos árboles fractales cuando dos ramas se intersectan más allá de las puntas en contacto.

- *Árboles autocontactados:* cuando la punta de alguna rama también pertenece a otra rama, se dice que el árbol se autocontacta. Para cualquier ángulo θ, existe un único valor de r_{sc} tal que el árbol fractal binario simétrico $T(r_{sc},\theta)$ es autocontactado.

- *El Conjunto de Mandelbrot para árboles fractales binarios:* son las soluciones de las ecuaciones que contienen a r_{sc} que se grafican en todo el rango de $0° < \theta < 180°$, muestra la correspondencia que existe entre r_{sc} y θ.

- *Canopy:* en un árbol fractal binario autocontactado, existen puntos a los que no se puede acceder desde el infinito, excepto cruzando una curva compuesta llamada el "cascarón". En los casos interesantes, el cascarón incluye un fractal llamado "*canopy*", el cual es una curva fractal C formada por puntos que se pueden alcanzar acercándose al árbol "desde arriba".

- *Ecuación de Moran:* es la ecuación utilizada para calcular la dimensión del canopy d_c en los casos de fractales autosimilares que son hechos con piezas escaladas en valores diferentes de r.

9. Bibliografía

[MF] – B. Mandelbrot and M. Frame, “The Canopy and Shortest Path in a Self-Contacting Fractal Tree”, The Mathematical Intelligencer, 18 – 27, Volume 21, Number 2, (1999).

[FGN] – B. Mandelbrot, “The Fractal Geometry of Nature”, New York: W. H. Freeman, (1982).

[TT1] – T.D. Taylor, “Finding Gold in the Forest: Self-Contacting Symmetric Binary Fractal Trees and the Golden Ratio”, St. Francis Xavier University, Nova Scotia, Canada.

[TT2] – T.D. Taylor, “Homeomorphism Classes of Self-Contacting Symmetric Binary Fractal Trees”, Fractals, 9 – 25, Volume 15, Number 1, (2007).

[TT3] – T.D. Taylor, “A new classification of non-overlapping symmetric binary fractal trees using epsilon hulls”, Fractals, 365 – 384, Volume 17, Number 3, (2009).

[DP] – D. Pagon, “Self-similar Planar Fractals Based on Branching Trees and Bushes”, Progress of Theoretical Physics Supplement, 176 – 187, No. 150, (2003).

[BE] – B. Espigulé Pons, “Generalized Self-Contacting Symmetric Fractal Trees”, Symmetry: Culture and Science, 333 – 351, Volume 21, (2013).

[YALE]–https://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/FracAndDim/Moran/Moran.html , 03/22/2021.

[WEB1]–https://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html, 03/15/2021.

[WEB2]–https://mathworld.wolfram.com/CesaroFractal.html, 03/15/2021.

[WEB3]–https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/fractales-el-codigo-geometrico-de-la-naturaleza/, 02/12/2021.

[WEB4]–http://www.ub.edu/matefest_infofest2011/triptics/fractal.pdf, 04/20/2021.

10. Anexos

Los gráficos que aparecen en este documento se han hecho en su totalidad utilizando el sistema de computo numérico Matlab, utilizando datos tabulados previamente con un procesador de datos y las funciones necesarias en cada sección, con lo que se grafica:

10.1. Altura máxima de los árboles fractales binarios simétricos

Se tabula un valor de r que genera autocontacto (utilizando la tabla 3) para cada θ y después evaluándolos en,

$$y_{max} = \begin{cases} \dfrac{1 + r\cos\theta}{1 - r^2} & si\ r > -\cos\ \theta \\ 1 & si\ r \leq -\cos\theta \end{cases}$$

La figura 23 se genera donde se muestra la variación de la altura máxima y_{max} en función de cada θ en los tres rangos.

```
% Altura máxima de los árboles fractales binarios simétricos

clc; clear
% Primer rango 0 < theta < 90
theta = [5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90];
y = [2.0051 2.0207 2.0450 2.0729 2.1009 2.1324 2.1447 2.1633
2.1915...
    2.1682 2.1436 2.1180 2.0922 2.0667 2.0428 2.0219 2.0064
2.0000];
plot(theta,y,'-o','Color','blue','LineWidth',1.5)
hold on

% Segundo rango 90 < theta < 135
theta = [90 95 100 105 110 115 120 125 130 135];
y = [2.0000 1.7072 1.5141 1.3755 1.2699 1.1861...
    1.1180 1.0626 1.0203 1.0000];
plot(theta,y,'-o','Color',[0.8500, 0.3250, 0.0980],'LineWidth',1.5)
hold on

% Tercer rango 135 < theta < 180
theta = [135 140 145 150 155 160 165 170 175 180];
y = [1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000];
plot(theta,y,'-o','Color','black','LineWidth',1.5)
hold on

xline(90,'--','90°','FontSize',16)
xline(135,'--', '135°','FontSize',16)

title(['Altura máxima y_{max} para árboles fractales binarios '...
    'simétricos en función de \theta'],'FontSize',28)
ylabel('Altura máxima del árbol fractal y_{max}','FontSize',24)
xlabel('Ángulo de ramificación \theta','FontSize',24)
axis([0 180 0 2.5])
grid on

legend('Altura en primer rango','Altura en segundo rango',...
        'Altura en tercer rango','FontSize',16)
set(legend,'location','southwest')
```

10.2. Conjunto de Mandelbrot para árboles fractales binarios simétricos

Las ecuaciones enlistadas en el resumen que se muestra en la tabla 3 se resuelven para r_{sc} y se grafican en función de θ, de esta manera se obtiene el llamado Conjunto de Mandelbrot para árboles fractales binarios simétricos.

```
% Conjunto de Mandelbrot para árboles fractales binarios simétricos
clc; clear

% Ángulos 0 < theta < 22.5   N > 4
a = [0 5 10 15 20 22.5];
r = [0.5 0.50191 0.507644 0.516679 0.527635 0.534019];
plot(a,r,'-k','LineWidth',1.5)
hold on

% Ángulos 22.5 < theta < 30   N = 4
a = [22.5 25 30];
r = [0.534019 0.539643 0.553436];
plot(a,r,'-g','LineWidth',1.5)
hold on

% Ángulos 30 < theta < 45    N = 3
a = [30 35 40 45];
r = [0.553436 0.564156 0.577325 0.593465];
plot(a,r,'-m','LineWidth',1.5)
hold on

% Ángulos 45 < theta < 90    N = 2
a = [45 50 55 60 65 70 75 80 85 90];
r = [0.593465 0.600611 0.608767 0.618034 0.628538...
    0.640436 0.65393 0.669284 0.686847 0.707107];
plot(a,r,'-b','LineWidth',1.5)
hold on

% Ángulos 90 < theta < 135
fplot(@(a) (- cosd(a) - sqrt(cosd(a).^2 - 2*(cosd(2.* a)))./...
    ((2*cosd(2*a))),[90 134.99],'Color',[0.8500, 0.3250, 0.0980],...
    'LineWidth',1.5)
hold on

% Ángulos 135 < theta < 180
fplot(@(a) -(1)./(2.*cosd(a)),[135 180],'Color',[0.75, 0.75, 0],...
    'LineWidth',1.5)
hold off

xline(15,'--','15°')
xline(18,'--','18°')
xline(22.5,'--','22.5°')
xline(30,'--','30°')
xline(45,'--','45°')
xline(90,'--','90°','FontSize',16)
xline(135,'--', '135°','FontSize',16)

title(['Conjunto de Mandelbrot para árboles fractales ' ...
    'binarios simétricos'],'FontSize',28)
xlabel('Ángulo de ramificación \theta','FontSize',24)
ylabel('Relación de contración crítica r_{sc}','FontSize',24)
axis([0 180 0.5 0.75])
grid on

legend('Primer rango N > 4', 'Primer rango N = 4',...
    'Primer rango N = 3','Primer rango N = 2','Segundo Rango',...
    'Tercer Rango','FontSize', 20)
```

10.3. Conjunto de Mandelbrot y los árboles fractales binarios simétricos dorados

Las ecuaciones enlistadas en el resumen que se muestra en la tabla 3 se resuelven para r_{sc} y se grafican en función de θ. Adicionalmente se marcan también los 4 ángulos dorados que corresponden a $r_{sc} = 1/\phi$.

```
% Conjunto de Mandelbrot y los árboles fractales binarios simétricos dorados
clc; clear

% Ángulos 0 < theta < 22.5   N > 4
a = [0 5 10 15 20 22.5];
r = [0.5 0.50191 0.507644 0.516679 0.527635 0.534019];
plot(a,r,'-k','LineWidth',1.5)
hold on

% Ángulos 22.5 < theta < 30   N = 4
a = [22.5 25 30];
r = [0.534019 0.539643 0.553436];
plot(a,r,'-g','LineWidth',1.5)
hold on

% Ángulos 30 < theta < 45    N = 3
a = [30 35 40 45];
r = [0.553436 0.564156 0.577325 0.593465];
plot(a,r,'-m','LineWidth',1.5)
hold on

% Ángulos 45 < theta < 90    N = 2
a = [45 50 55 60 65 70 75 80 85 90];
r = [0.593465 0.600611 0.608767 0.618034 0.628538...
    0.640436 0.65393 0.669284 0.686847 0.707107];
plot(a,r,'-b','LineWidth',1.5)
hold on

% Ángulos 90 < theta < 135
fplot(@(a) (- cosd(a) - sqrt(2 - 3*(cosd(a)).^2))./...
    ((4*cosd(a).^2) - 2),[90 134.99],'Color',[0.8500, 0.3250, 0.0980],...
    'LineWidth',1.5)
hold on

% Ángulos 135 < theta < 180
fplot(@(a) -(1)./(2.*cosd(a)),[135 180],'Color',[0.75, 0.75, 0],...
    'LineWidth',1.5)
hold off

xline(60,'--','60°','FontSize',16)
xline(108,'--','108°','FontSize',16)
xline(120,'--','120°','FontSize',16)
xline(144,'--', '144°','FontSize',16)
yline(0.618034,'--', 'Relación dorada','FontSize',16)
text(148,0.6125, 'r_{sc} = 1/\phi = 0.618033989','FontSize',16)

title(['Correspondencia entre la relación áurea r_{sc} = 1/\phi ' ...
    'y los árboles fractales binarios simétricos'],'FontSize',24)
xlabel('Ángulo de ramificación \theta','FontSize',24)
ylabel('Relación de contración crítica r_{sc}','FontSize',24)
axis([0 180 0.5 0.75])
grid on
```

10.4. Dimensión d del conjunto de puntas de un árbol fractal

Para cada ángulo en $0° < \theta < 180°$ se tabulan con sus respectivos r_{sc} y usando la ecuación (8) en las puntas de las ramas de los árboles fractales autocontactados

$$d = \frac{ln\, 0.5}{ln\, r}$$

Se grafica la dimensión d en cada uno de los rangos que corresponden a su respectivo θ.

```
% Dimensión "d" del conjunto de puntas de un árbol fractal
clc; clear

% Ángulos 0 < theta < 90
a = [5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90];
d = [1.0055 1.0224 1.0497 1.0841 1.1237 1.1716 1.2109 1.2618 1.3284...
    1.3596 1.3966 1.4404 1.4927 1.5555 1.6319 1.7262 1.8452 2.0000];

plot(a,d,'-ob','LineWidth',1.5)
hold on

% Ángulos 90 < theta < 135
a = [90 95 100 105 110 115 120 125 130 135];
d = [2.0000 1.7286 1.5689 1.4746 1.4255 1.4140 1.4404 1.5152 1.6690...
    2.0000];
plot(a,d,'-o','Color',[0.8500, 0.3250, 0.0980],'LineWidth',1.5)
hold on

% Ángulos 135 < theta < 180
a = [135 140 145 150 155 160 165 170 175 180];
d = [2.0000 1.6247 1.4041 1.2619 1.1654 1.0986 1.0526 1.0226 1.0055...
    1.0000];
plot(a,d,'-o','Color','black','LineWidth',1.5)
hold on

xline(90,'--','90°','FontSize',16)
xline(135,'--', '135°','FontSize',16)

title(['Dimensión "d" del conjunto de puntas para árboles fractales '...
    'binarios simétricos en función de \theta'],'FontSize',26)
ylabel('Dimensión "d" del conjunto de puntas','FontSize',24)
xlabel('Ángulo de ramificación \theta','FontSize',24)
axis([0 180 0.4 2.2])
grid on

legend('Dimensión d en primer rango','Dimensión d en segundo rango',...
    'Dimensión d en tercer rango','FontSize',16)
set(legend,'location','northwest')
```

10.5. Dimensión d_c del canopy de un árbol fractal autocontactado

Para cada ángulo $0° < \theta < 180°$ se obtiene un r y se resuelven numéricamente (ver los códigos respectivos) las ecuaciones (18), (20), (21), (22) y (23) numéricamente para d_c:

Para $45° \leq \theta < 90°$	$2r^{2d_c} + 2r^{3d_c} = 1$	(18)
Para $30° \leq \theta < 45°$	$2r^{2d_c} + 2r^{3d_c} + 2r^{4d_c} = 1$	(20)
Para $\frac{90°}{N} \leq \theta < \frac{90°}{N-1}$	$2r^{2d_c} + 2r^{3d_c} + \cdots + 2r^{(N+1)d_c} = 1$	(21)
Para $90° \leq \theta < 135°$	$2r^{2d_c} + 2r^{3d_c} = 1$	(22)
Para $135° \leq \theta < 180°$	$2r^{2d_c} = 1$	(23)

Se grafica entonces la dimensión d_c obtenida en cada uno de los rangos que corresponden a su respectivo θ.

```
% Dimensión del canopy de un árbol fractal autocontactado
clc; clear

% Ángulos 15 < theta < 18
a = [15.1 17.9];        dc = [1.042089 1.060959];
plot(a,dc,'-ok','LineWidth',1.5); hold on

% Ángulos 18 < theta < 22.5
a = [18.1 20 22.4];     dc = [1.053490 1.066690 1.086248];
plot(a,dc,'-or','LineWidth',1.5); hold on

% Ángulos 22.5 < theta < 30
a = [22.6 25 29.9];     dc = [1.068312 1.085558 1.130787];
plot(a,dc,'-ob','LineWidth',1.5); hold on

% Ángulos 30 < theta < 45
a = [30.1 35 40 44.9];  dc = [1.084964 1.120666 1.167738 1.228033];
plot(a,dc,'-o','LineWidth',1.5); hold on

% Ángulos 45 < theta < 90
a = [45.1 50 55 60 65 70 75 80 85 90];
dc = [1.094005 1.119205 1.149621 1.185714 1.228747...
    1.280458 1.343315 1.420954 1.518938 1.646346];
plot(a,dc,'-o','LineWidth',1.5); hold on

% Ángulos 90 < theta < 135
a = [90 95 100 105 110 115 120 125 130 134.9];
dc = [1.646346 1.422961 1.291479 1.213825 1.173468 ...
    1.163958 1.185714 1.247251 1.373866 1.638137];
plot(a,dc,'-o','Color',[0.8500, 0.3250, 0.0980],'LineWidth',1.5);
hold on

% Ángulos 135 < theta < 180
a = [135.1 140 145 150 155 160 165 170 175 180];
dc = [0.994998 0.812349 0.702046 0.630929 0.582701 ...
    0.549293 0.526324 0.511292 0.502766 0.500000];
plot(a,dc,'-o','Color','black','LineWidth',1.5); hold on
```

```
xline(15,'--','15°','FontSize',13)
xline(18,'--','18°','FontSize',13)
xline(22.5,'--','22.5°','FontSize',13)
xline(30,'--','30°','FontSize',13)
xline(45,'--','45°','FontSize',13)
xline(90,'--','90°','FontSize',13)
xline(135,'--', '135°','FontSize',13)

title(['Dimensión d_c del canopy en árboles fractales ' ...
    'binarios simétricos en función de \theta'],'FontSize',26)
ylabel('Dimensión d_c del canopy','FontSize',24)
xlabel('Ángulo de ramificación \theta','FontSize',24)
axis([0 180 0.4 2.2]); grid on

legend('Dimensión d_c en primer rango con N = 6',...
    'Dimensión d_c en primer rango con N = 5',...
    'Dimensión d_c en primer rango con N = 4',...
    'Dimensión d_c en primer rango con N = 3',...
    'Dimensión d_c en primer rango con N = 2',...
    'Dimensión d_c en segundo rango',...
    'Dimensión d_c en tercer rango ','FontSize',12)
set(legend,'location','southwest')
```

10.6. Dimensión d y d_c de los árboles fractales autocontactados

Se grafican las dimensiones fractales de 10.4 y 10.5 en conjunto, siguiendo las mismas instrucciones anteriores.

```
% Dimensión d y d_c de los árboles fractales autocontactados
clc; clear

% DIMENSIÓN DEL CONJUNTO DE PUNTAS - Ángulos 0 < theta < 180
a = [5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100 ...
    105 110 115 120 125 130 135 140 145 150 155 160 165 170 175 180];
d = [1.0055 1.0224 1.0497 1.0841 1.1237 1.1716 1.2109 1.2618 1.3284...
    1.3596 1.3966 1.4404 1.4927 1.5555 1.6319 1.7262 1.8452 2.0000...
    1.7286 1.5689 1.4746 1.4255 1.4140 1.4404 1.5152 1.6690 2.0000...
    1.6247 1.4041 1.2619 1.1654 1.0986 1.0526 1.0226 1.0055 1.0000];
plot(a,d,'-o','Color','#EB6123','LineWidth',1);
hold on

% DIMENSIÓN DEL CANOPY
% Ángulos 15 < theta < 18
a = [15.1 17.9];        dc = [1.042089 1.060959];
plot(a,dc,'-ok','LineWidth',1);
hold on

% Ángulos 18 < theta < 22.5
a = [18.1 20 22.4];     dc = [1.053490 1.066690 1.086248];
plot(a,dc,'-ok','LineWidth',1);
hold on

% Ángulos 22.5 < theta < 30
a = [22.6 25 29.9];     dc = [1.068312 1.085558 1.130787];
plot(a,dc,'-ok','LineWidth',1);
hold on
```

```
% Ángulos 30 < theta < 45
a = [30.1 35 40 44.9];  dc = [1.084964 1.120666 1.167738 1.228033];
plot(a,dc,'-ok','LineWidth',1);
hold on

% Ángulos 45 < theta < 90
a = [45.1 50 55 60 65 70 75 80 85 90];
dc = [1.094005 1.119205 1.149621 1.185714 1.228747...
    1.280458 1.343315 1.420954 1.518938 1.646346];
plot(a,dc,'-ok','LineWidth',1);
hold on

% Ángulos 90 < theta < 135
a = [90 95 100 105 110 115 120 125 130 134.9];
dc = [1.646346 1.422961 1.291479 1.213825 1.173468 ...
    1.163958 1.185714 1.247251 1.373866 1.638137];
plot(a,dc,'-ok','LineWidth',1);
hold on

% Ángulos 135 < theta < 180
a = [135.1 140 145 150 155 160 165 170 175 180];
dc = [0.994998 0.812349 0.702046 0.630929 0.582701 ...
    0.549293 0.526324 0.511292 0.502766 0.500000];
plot(a,dc,'-ok','LineWidth',1) ;
hold on

xline(18,'--','18°','FontSize',13)
xline(22.5,'--','22.5°','FontSize',13)
xline(30,'--','30°','FontSize',13)
xline(45,'--','45°','FontSize',13)
xline(90,'--','90°','FontSize',13)
xline(135,'--', '135°','FontSize',13)

title(['Dimensiones d y d_c en árboles fractales binarios ' ...
    'simétricos en función de \theta'],'FontSize',26)
ylabel('Dimensiones d y d_c','FontSize',24)
xlabel('Ángulo de ramificación \theta','FontSize',24)
axis([0 180 0.4 2.2]);  grid on
legend('Dimensión d','Dimensión d_c','FontSize',20)
```

10.7. Método para calcular la relación de contracción crítica r_{Sc} en los tres rangos del ángulo θ

En los tres rangos de θ, se calcula para cada θ un valor de r_{sc}, usando las expresiones de la tabla 3.

Ángulos θ	r_{sc}
$0° < \theta < 90°$	$Solución\ de\ ecuación\ (10)$
$90°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$90° < \theta < 135°$	$\frac{-\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - 2\cos 2\theta}}{2\cos 2\theta}$
$135°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$135° < \theta < 180°$	$-\frac{1}{2\cos(\theta)}$

```
% Cálculo de la relación de contracción crítica en el PRIMER RANGO
% Método de Newton - Raphson
clc, clear

% Introducir el ángulo de ramificación
a = 60;

% Introducir la ecuación no lineal del PRIMER RANGO
syms x
N = 1;          % N correspondiente a ecuación (3) en BE
                % Equivalente a N-1 con respecto a ecuación (2) en MF

% ECUACION (3) en BE
ecuacionNL(x) = (x^(N + 4)*cosd(N*a) - x^(N + 3)*cosd(a*(N + 1))...
    - x^3*cosd(a) + x^2)/(x^2 - 2*x*cosd(a) + 1) - 1/2;

x = 0.55;       % Aproximación de x inicial
i = 1;      error = 1;       tol = 1e-5;

dx = 1e-5;      % Para calcular la derivada numéricamente

disp('n           x              error')
while error > tol
    f = ecuacionNL(x);
    df = (ecuacionNL(x + dx) - ecuacionNL(x))/dx;
    % Definición de derivada
    xn = x - f/df;
    error = abs((xn - x)/xn);
    fprintf('%d\t%.6f\t %.6f\n',i,x,error)
    x = xn;
    i = i + 1;
end

   fprintf('\n 1er Rango – Para ángulo = %.f° --> r_{sc} = %.6f', a,x)
```

```
% Cálculo la relación de contracción crítica en SEGUNDO Y TERCER RANGO
clc, clear

% SEGUNDO RANGO DE THETA
% Introducir el ángulo de ramificación
a2 = 120;

rsc2 = (- cosd(a2) - sqrt(cosd(a2)^2 - 2*(cosd(2*a2))))/(2*cosd(2*a2));
fprintf('\n 2do Rango - Para ángulo = %.f° --> r_{sc} = %.6f',a2, rsc2)

% TERCER RANGO DE THETA
% Introducir el ángulo de ramificación
a3 = 144;

rsc3 = (- 1)/(2*cosd(a3));
fprintf('\n 3er Rango - Para ángulo = %.f° --> r_{sc} = %.6f', a3,rsc3)
```

10.8. Método de cálculo de dimensión del canopy d_c en el primer rango

Se calcula la dimensión del canopy de los árboles usando la ecuación de Moran adecuada, como ejemplo en el primer rango con $N = 2$, en $45° \leq \theta < 90$, usando la ecuación (18)

$$2r^{2d_c} + 2r^{3d_c} = 1 \qquad (18)$$

Para este rango también se usa la ecuación (20) y adecuadamente la ecuación (21). Con el método de Newton – Raphson se obtiene la dimensión d_c.

```
% Método de cálculo de dimensión del canopy dc en el primer rango con N = 2
% Método de Newton - Raphson
clc, clear

% Introducir la función NL (Ecuación de Moran)
syms x
% Relación de contracción crítica correspondiente al ángulo theta requerido
r = 0.707107;

% Ecuación de Moran correspondiente al primer rango con N = 2
ecuacionNL(x) = 2*r^(2*x) + 2*r^(3*x) - 1;

x = 1.6;            % Aproximación inicial
i = 1;   error = 1;  tol = 1e-5;

dx = 1e-5;          % Para calcular la derivada

disp('n           x              error')
while error > tol
    f = ecuacionNL(x);
    df = (ecuacionNL(x+dx) - ecuacionNL(x))/dx;
    % Definición de derivada
    xn = x - f/df;
    error = abs((xn - x)/xn);
    fprintf('%d\t%.6f\t %.6f\n',i,x,error)
    x = xn;
    i = i + 1;
end
fprintf('\n La dimensión del canopy es dc = %.6f', x)
```

10.9. Método de cálculo de dimensión del canopy d_c en el segundo rango

Se hace de manera similar para el segundo rango, para cada ángulo θ en este rango se usa la ecuación (22),

$$2r^{2d_c} + 2r^{3d_c} = 1 \qquad (22)$$

Con el método de Newton – Raphson se obtiene la dimensión d_c del canopy.

```
% Método de cálculo de dimensión del canopy dc en el segundo rango
% Método de Newton - Raphson
clc, clear

% Introducir la función NL (Ecuación de Moran)
syms x

% Relación de contracción crítica correspondiente al ángulo theta requerido
r = 0.669663;

% Ecuación de Moran correspondiente al segundo rango
ecuacionNL(x) = 2*r^(2*x) + 2*r^(3*x)- 1;

x = 1.4;              % Aproximación inicial
i = 1;   error = 1;   tol = 1e-5;
dx = 1e-5;            % Para calcular la derivada

disp('n            x                error')
while error > tol
    f = ecuacionNL(x);
    df = (ecuacionNL(x + dx) - ecuacionNL(x))/dx;
    % Definición de derivada
    xn = x - f/df;
    error = abs((xn - x)/xn);
    fprintf('%d\t%.6f\t %.6f\n',i,x,error)
    x = xn;
    i = i + 1;
end

fprintf('\n La dimensión del canopy es dc = %.6f', x)
```

10.10. Método de cálculo de dimensión del canopy d_c en el tercer rango

Se hace de manera similar para el primer y segundo rango, para cada ángulo θ en este rango se usa la ecuación (23),

$$2r^{2d_c} = 1 \qquad (23)$$

Con el método de Newton – Raphson se obtiene la dimensión d_c del canopy.

```
% Método de cálculo de dimensión del canopy dc en el tercer rango
% Método de Newton - Raphson
clc, clear

% Introducir la función NL (Ecuación de Moran)
syms x

% Relación de contracción crítica correspondiente al ángulo theta requerido
r = 0.705876;

% Ecuación de Moran correspondiente al tercer rango
ecuacionNL(x) = 2*r^(2*x) - 1;

x = 0.9;              % Aproximación inicial
i = 1;   error = 1;  tol = 1e-5;
dx = 1e-5;            % Para calcular la derivada

disp('n           x              error')
while error > tol
    f = ecuacionNL(x);
    % Definición de derivada
    df = (ecuacionNL(x+dx) - ecuacionNL(x))/dx;
    xn = x - f/df;
    error = abs((xn - x)/xn);
    fprintf('%d\t%.6f\t %.6f\n',i,x,error)
    x = xn;
    i = i + 1;
end

fprintf('\n La dimensión del canopy es dc = %.6f', x)
```

10.11. Generación de árboles fractales binarios simétricos $T(r,\theta)$

Se generan cada uno de los árboles fractales binarios simétricos $T(r,\theta)$ en los tres rangos del ángulo θ. Esta función FractalTree(n,r,phi,xb,yb) permite construir árboles fractales con algoritmos modificados basados en la llamada matriz de Cantor y el método de rastreo inverso. Estos métodos permiten ahorrar tiempo y memoria de la computadora considerablemente.

Sus argumentos son: FractalTree(n,r,phi,xb,yb)

1) n – número de iteraciones (es recomendable entre 1 y 12)
2) r – relación de contracción crítica: en caso de fractales no uniformes r puede ser un vector (en ese caso r y phi deben ser coincidentes en longitud)
3) phi – vector de ángulos de ramificación en el generador fractal
4) xb y yb – coordenadas del tronco

```
 % Generación de árboles fractales binarios simétricos

function FractalTree(n,r,phi,xb,yb)

h = figure;
 axes('Parent',h,'Color','white');       % Fondo del gráfico

% Longitudes de los vectores r y phi
mN = length(phi);
if length(r) == 1
    rM = ones(1,mN)*r;
elseif length(r) == mN
    rM = r;
else
    warndlg(['Los tamaños del vector de escala r y el vector de'...
        'ángulos phi en el generador del árbol no son iguales']);
end

 % Instrucción para ignorar las advertencias dividida por cero
   warning off MATLAB:divideByZero

 %{
ksi - ángulo del tronco con el eje vertical es calculado en la base
de las coordenadas xb y yb del tronco
Usando la ecuación lineal:

y = k*x + d,      aquí
          k = (yb(2) - yb(1))/(xb(2) - xb(1));
       d = (yb(1)*xb(2) - xb(1)*yb(2))/(xb(2) - xb(1));

 %}
        a = sqrt((xb(1) - xb(2))^2 + (yb(1) - yb(2))^2); % Factor escala
        b = 1;
        c = sqrt((1 - xb(2))^2 + (yb(2))^2);

        alpha = acosd((a^2 + b^2 - c^2)/(2*a*b));
        k = (yb(2) - yb(1))/(xb(2) - xb(1));              % Tangente
        d = (yb(1)*xb(2) - xb(1)*yb(2))/(xb(2) - xb(1)); % Miembro libre
            if yb(2) >= yb(1)
                  ksi = alpha;
              else
                  ksi = -alpha;
            end
```

```
  % Vectores auxiliares para theta y rD
    psi = zeros(n,mN^n);
    ralt = ones(n,mN^n);

 % Psi y ralt tienen estructura de matriz de Cantor
    for i = 1:1:n
        z = 1;
       for j = 1:1:mN^(i-1)
           for k = 1:1:mN
               for m = 1:1:mN^(n - i)
                   psi(i,z) = phi(k);      % Psi en la base de phi
                   ralt(i,z) = rM(k);      % ralt en la base de rM
                   z = z + 1;
               end
           end
       end
   end

   theta = zeros(n,mN^n);    % Vector de ángulos entre cada rama
   rD = ones(n,mN^n);        % Longitudes de ramas

   for i = 1:1:mN^n
       for j = 1:1:n
           for k = 1:1:j
           theta(j,i) = theta(j,i) + psi(k,i);  % Theta en la base de psi
           rD(j,i) = rD(j,i)*ralt(k,i);         % rD en la base de rD
       end
       end
   end

   theta = theta + ksi;

% ----MATRICES PARA LAS COORDENADAS-----
   A = ones(n+1,mN^n,2);

% Coordenadas iniciales
   A(1,:,1) = ones(1,mN^n)*xb(2);       % Coordenada x
   A(1,:,2) = ones(1,mN^n)*yb(2);       % Coordenada y
      for j = 1:1:mN^n
       for i = 1:1:n

           % Definir coordenadas siguientes
           A(i+1,j,1) = A(i,j,1) + a*rD(i,j)*cosd(theta(i,j));
           A(i+1,j,2) = A(i,j,2) + a*rD(i,j)*sind(theta(i,j));
       end
   end

 % Para visualización se utiliza el método de trazo inverso
 % ----------- RAMAS -------------
    tau = 1;
      for i = 1:mN:mN^n
          z = 1;
           for k = 1:1:mN-1
                for j = z:1:n-1
                 line([A(j,i,1),A(j+1,i,1)],[A(j,i,2),A(j+1,i,2)],...
                     'Color','#129428','LineWidth',1);
                end
              z = z + 1;
          end
      end
```

```
% ----------- RAMAS FINALES -------------
      for i = 1:1:mN^n
        line([A(n,i,1),A(n+1,i,1)],[A(n,i,2),A(n+1,i,2)],...
            'Color','#129428','LineWidth',2);
      end

 % -------------- TRONCO -----------------
    line([xb(1),xb(2)],[yb(1),yb(2)],'Color','#bf996a','LineWidth',6);


 % -------------- GRAFICA ----------------
    title({'T(r, \theta)  =  T(r_{sc}, 30\circ)'},'FontSize',20)
    xlabel('x','FontSize',18)
    ylabel('y','FontSize',18)
    xline(0,'--', 'LineWidth',2)
    axis equal
```