Variables aleatòries

Carles Rovira Escofet

P08/05057/02305

Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

Introducció a les variables aleatòries. Variables aleatòries discretes

En el mòdul anterior hem vist el concepte de probabilitat i com podíem utilitzar-lo per a modelar el resultat d'un experiment.

Considerem, per exemple, l'espai mostral que obtenim si llancem una moneda 3 vegades. En aquest cas l'espai mostral té 8 elements i és el següent:

$$\Omega = \{(C,C,C),(C,C,+),(+,C,C),(C,+,C), (C,+,+),(+,C,+),(+,+,C), (+,+,+)\}$$

on C indica que ha sortit una "cara" i + indica que ha sortit una "creu". Tenim també una probabilitat sobre aquest espai mostral, en concret sabem que la probabilitat de cadascun dels elements de l'espai mostral és d'1/8.

Espai mostral

És l'espai amb tots els possibles resultats del nostre experiment.

1. Introducció a les variables aleatòries

Ens podria, però, interessar estudiar el nombre de cares que han sortit. Obtenim així una funció, que anomenarem X, que a cada element de l'espai mostral li fa correspondre un valor numèric, el corresponent al nombre de cares, per exemple, $X((C,C,+)) = 2$.

Un cop tenim definida aquesta funció X, ens podem plantejar preguntes com "quina és la probabilitat que surtin dues cares?" que podem formalitzar com el càlcul de la probabilitat del succés $\{X = 2\}$. Fixeu-vos que:

$$\{X = 2\} = \{(C,C,+), (C,+,C), (+,C,C)\}$$

Així,

$$P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

Aquesta funció X serà el que anomenarem una *variable aleatòria*.

Una **variable aleatòria** és una funció que associa un valor numèric a cada element de l'espai mostral.

Alea jacta est

El mot *aleatori* prové del fet que utilitzem les variables aleatòries per a formalitzar fenòmens en què intervé l'atzar. Recordeu que a les pel·lícules de romans diuen *alea jacta est*, que en català seria *la sort ja està tirada.*

Altres exemples de variables aleatòries

Si considerem com a espai mostral els estudiants d'aquesta assignatura, la funció que associa a cada individu el seu pes és una variable aleatòria.

Si considerem com a espai mostral el resultat del llançament de 5 daus, podem considerar diverses variables aleatòries com: el màxim dels 5 daus, el mínim dels 5 daus o la suma dels 5 daus.

Estudiarem bàsicament dos tipus de variables aleatòries, les variables aleatòries discretes i les variables aleatòries contínues (n'hi ha d'altres tipus que no estudiarem). Com a idea bàsica les podem diferenciar de la manera següent: quan una variable aleatòria pren valors només sobre un conjunt finit és una variable aleatòria discreta i quan pren valors sobre tot un interval dels nombres reals és una variable aleatòria contínua. Aquesta definició no és rigorosa, però ens serveix per a fer-ne una primera aproximació.

El nostre entorn...

... està ple de variales aleàtories. Només un exemple, el nombre de lletres de cada pàgina d'aquestes notes.

2. Variables aleatòries discretes

Una **variable aleatòria discreta** és una variable aleatòria que pot prendre un nombre finit o numerable de valors, on cadascun d'aquests valors té una probabilitat més gran de zero de ser observat.

Conjunt numerable de valors

És aquell que podem numerar utilitzant els nombres naturals.

Fixeu-vos en els exemples que hem donat de variables aleatòries. N'hi ha de variables aleatòries discretes i n'hi ha que no ho són. L'exemple dels daus és un cas clarament discret, on la variable aleatòria que ens dóna el màxim dels 5 resultats només pot assolir un dels 6 valors següents: 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Som, a més, capaços de calcular la probabilitat que la variable prengui cadascun d'aquests valors.

Exemple de les tres monedes

Si llancem tres vegades una moneda, el conjunt de resultats possibles és:

$\Omega = \{(c,c,c),(c,c,+),(+,c,c),(c,+,c),\ (c,+,+),(+,c,+),(+,+,c),\ (+,+,+)\}$

on c indica una "cara" i + indica una "creu". En aquest espai mostral podem definir moltes variables aleatòries diferents. Anomenarem X el nombre de cares que han sortit. Aquesta variable pot prendre els valors següents:

Valors possibles X	Resultats del llançament del dau
0	$(+,+,+)$
1	$(c,+,+),(+,c,+),(+,+,c)$
2	$(c,c,+),(+,c,c),(c,+,c)$
3	(c,c,c)

Podem veure quina és la probabilitat associada a cadascun dels possibles valors de la variable X. De la taula anterior i sabent que els resultats són equiprobables, és ben clar que obtenim les probabilitats següents:

Valors possibles $X = x$	$P(X = x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

Utilitzant aquesta taula, és fàcil calcular la probabilitat de qualsevol esdeveniment que es pugui escriure en termes de la variable X. Per exemple, podem contestar la pregunta, "quina és la probabilitat que surti més d'una cara?"

$$P(X > 1) = P(\{X = 2\} \cup \{X = 3\}) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{4}{8}$$

Fixeu-vos que podem tenir successos amb probabilitat zero. Per exemple, "quina és la probabilitat que surtin 4 cares?" És clar que la probabilitat és zero!

2.1. Funció de massa de probabilitat i funció de distribució

Una variable aleatòria discreta quedarà determinada si coneixem quina és la probabilitat que prengui cadascun dels possibles valors. La funció que ens dóna la probabilitat de cada valor es coneix com la *funció de massa de probabilitat*.

La **funció de massa de probabilitat** d'una variable aleatòria és la funció que ens dóna, per a cada valor x, la probabilitat que la variable tingui aquest valor, $P(X = x)$.

Una propietat fonamental d'aquesta funció és que la suma de la funció de massa de probabilitat en tots els possibles valors val sempre 1, és a dir:

$$\sum_x P(X = x) = 1$$

Sumatoris

El símbol $\sum_x f(x)$ indica fer un sumatori dels valors de $f(x)$ per tots els possibles valors de la x.

Recordeu que la probabilitat del conjunt total era 1. Fixeu-vos, per tant, que en la propietat anterior només recordem aquest resultat, ja que quan sumem les probabilitats de tots els valors possibles obtenim la probabilitat del conjunt total.

En definitiva, la funció de massa de probabilitat ens explica com es distribueix una probabilitat total igual a la unitat en els resultats que pren la variable X.

Una altra eina fonamental per a l'estudi de les variables aleatòries es l'anomenada *funció de distribució*.

La **funció de distribució** d'una variable aleatòria és la funció que ens dóna, per a cada valor x, la probabilitat que la variable tingui un valor inferior o igual a x, és a dir:

$$F(x) = P(X \le x)$$

CDF

En anglès la funció de distribució s'anomena *Cumulative Distribution Function*. Això fa que en el programari estadístic s'anomeni usualment CDF.

Per a les variables discretes tenim:

$$F(x) = \sum_{y \leq x} P(X = y)$$

Aquesta funció a vegades és molt útil. Coneixent la funció de massa de probabilitat podem calcular la funció de distribució i és fàcil comprovar que coneixent la funció de distribució podem calcular la funció de massa de probabilitat. Quan coneixem una d'aquestes dues funcions direm que coneixem la **llei** o la **distribució** de la variable aleatòria discreta.

Conèixer la llei o la distribució d'una variable aleatòria X vol dir ser capaços de calcular qualsevol probabilitat que faci referència al comportament de la variable aleatòria X.

Direm així que tant la funció de massa de probabilitat com la funció de distribució determinen la llei de la variable aleatòria. Observeu que dues variables diferents poden tenir la mateixa llei. Per exemple, si llancem dos daus i considerem les dues variables que ens donen el resultat de cada dau, aquestes dues variables aleatòries tenen la mateixa llei però no són la mateixa (corresponen a dos llançaments diferents; en el primer ha pogut sortir un 1 i en el segon ha pogut sortir un 2).

Exemple de les tres monedes

Reprenem l'exemple anterior de les tres monedes. A partir de la funció de massa de probabilitat podem calcular fàcilment la funció de distribució. Per exemple:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{4}{8}$$

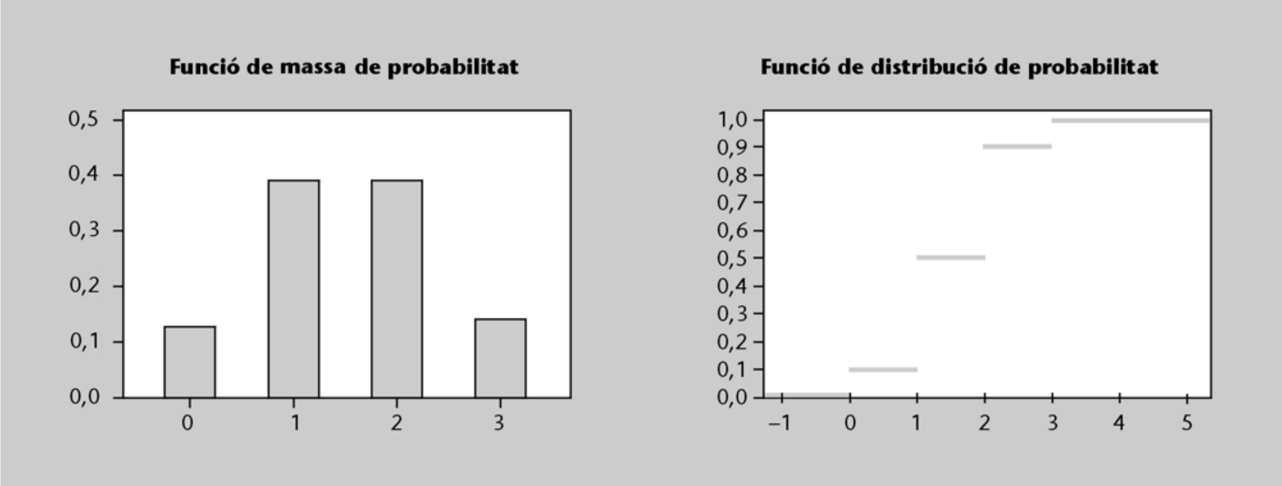
Podem recollir la funció de distribució en la taula següent:

Valors x	$P(X \leq x)$
0	1/8
1	4/8
2	7/8
3	1

Fixeu-vos que podem calcular la funció de distribució per a qualsevol valor de la x. Per exemple:

$$F(2{,}7) = P(X \leq 2{,}7) = P(X \leq 2) = \frac{7}{8}$$

Podem dibuixar també els gràfics de la funció de massa de probabilitat i de la funció de distribució.



La funció de distribució té algunes propietats importants que cal que coneguem:

– Arrenca sempre des de zero i arriba fins a u.

– És sempre una funció creixent.

Histograma de freqüències

Si repetim un experiment moltes vegades, l'histograma de les freqüències relatives per a cada valor s'assembla al gràfic de la funció de massa de probabilitat.

La funció de distribució...

... està ben definida en qualsevol punt, no sols en els valors *x* que pot prendre la variable aleatòria.

2.2. Independència

Per a finalitzar aquesta sessió, introduïm el concepte d'**independència**.

En l'exemple de les tres monedes, la variable X ens donava el nombre de cares que han sortit. Considerem també la variable Y que valdrà 1 si en tirar la moneda la primera vegada surt una cara i valdrà 0 si surt una creu. Finalment definim la Z que valdrà 1 si en tirar la moneda la segona vegada surt una cara i valdrà 0 si surt una creu.

És clar que si coneixem el valor de la variable Y, ja tenim certa informació sobre els valors que pot prendre la variable X. Per exemple, si $Y = 1$, ja sabem que X no pot ser zero. Això ens indica que X i Y no són independents.

En canvi, encara que coneguem el valor que pren Y, no tenim cap informació sobre què pot passar amb la variable Z. En aquest cas direm que Y i Z són independents.

La definició rigorosa d'independència entre variables aleatòries, que ens permetrà de tractar fàcilment amb parelles de variables aleatòries, és molt semblant al concepte de successos independents que vam veure en el mòdul de "Càlcul de probabilitats".

Les variables aleatòries discretes X i Y són **independents** si:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

per a tota possible parella de valors x i y.

La definició d'independència implica que per a tot y amb $P(Y = y) > 0$:

$$P(X = x \mid Y = y) = P(X = x)$$

per a tot x.

Notació

Observeu que utilitzem la notació:
$P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) =$
$= P(X = x,\ Y = y)$.
I recordeu que: $P(X = x \mid Y = y)$ indica la probabilitat que $X = x$ si sabem que $Y = y$.

Exemple de les tres monedes

Recordeu que hem definit les variables X, Y i Z (inici de la subsecció 1.2.2). Observeu que:

$$P(X = 0, Y = 1) = 0 \text{ i } P(X = 0) = \frac{1}{8}, P(Y = 1) = \frac{1}{2}$$

Per tant, és clar que X i Y no són independents, ja que:

$$P(X = 0, Y = 1) \neq P(X = 0)\ P(Y = 1)$$

D'altra banda, si z i y són o 0 o 1:

$$P(Y = y,\ Z = z) = \frac{1}{4}, \text{ i } P(Z = z) = P(Y = y) = \frac{1}{2}$$

Per tant, és clar que Z i Y són independents ja que sempre es compleix:

$$P(Z = z, Y = y) = P(Z = z)P(Y = y).$$

3. Resum

En aquesta secció hem après el concepte de variable aleatòria i n'hem estudiat un tipus particular: les variables aleatòries discretes. Hem presentat els conceptes de funció de massa de probabilitat i funció de distribució. Finalment, hem estès el concepte d'independència de successos a variables aleatòries.

Exercicis

1. Tirem 2 vegades un dau i considerem les variables aleatòries següents: Y és el resultat del primer dau, Z és el resultat del segon dau i X és la suma dels dos daus.

a) Determineu l'espai mostral associat a l'experiment.

b) Determineu les funcions de massa de probabilitat i de distribució de X. Dibuixeu-les.

c) Calculeu $P(X = 2, Y = 3)$, $P(X = 8)$, $P(X = 7{,}5)$, $P(X > 7)$, $P(X \leq 7{,}5)$.

d) Són independents les variables X i Y ? Són independents les variables Z i Y ?

2. Un estudiant ha de contestar un qüestionari amb 4 preguntes. Totes les preguntes tenen dues possibles respostes. L'estudiant que no s'ha preparat per al qüestionari contesta les preguntes a l'atzar. Sigui X el nombre total de respostes correctes de l'estudiant i Y el nombre de respostes incorrectes a les tres primeres preguntes.

a) Calculeu la funció de massa de probabilitat de X.

b) Calculeu la probabilitat que l'estudiant contesti almenys una pregunta bé.

c) Calculeu $P(X = 2, Y = 3)$.

d) Són independents les variables X i Y ?

Solucionari

1.

a) Si llancem dues vegades un dau, els resultats possibles són totes les parelles de nombres de l'1 al 6. Fixeu-vos que el conjunt d'aquestes parelles forma l'espai mostral i té 36 elements (tenim en compte l'ordre):

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (6,5), (6,6)\}$$

b) Per a la variable X tenim

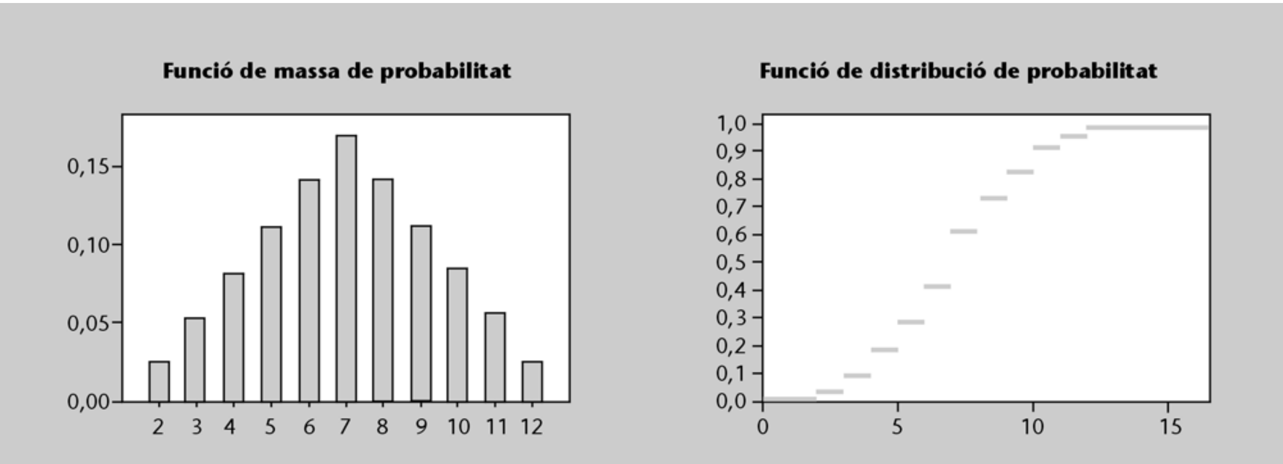
Valors possibles X	Resultats llançament del dau
2	(1,1)
3	(1,2), (2,1)
4	(1,3), (2,2), (3,1)
5	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)
6	(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)
7	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)
8	(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)
9	(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)
10	(4,6), (5,5), (6,4)
11	(5,6), (6,5)
12	(6,6)

La funció de massa de probabilitat és, per tant:

Valors possibles $X = x$	$P(X = x)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

I la funció de distribució:

x	$P(X \leq x)$
2	1/36
3	3/36
4	6/36
5	10/36
6	15/36
7	21/36
8	26/36
9	30/36
10	33/36
11	35/36
12	36/36



c) Utilitzant aquestes taules és fàcil calcular la probabilitat dels esdeveniments que es poden escriure en termes de la variable X. Així:

$$P(X = 8) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 7{,}5) = 0$$

$$P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - F(7) = 1 - \frac{21}{36} = \frac{15}{36}$$

$$P(X \leq 7{,}5) = P(X \leq 7) = \frac{21}{36}$$

També és clar que el succés $\{X = 2,\ Y = 3\}$ és el succés buit, així que:

$$P(X = 2,\ Y = 3) = 0$$

d) Observeu:

$$P(X = 8,\ Y = 1) = 0$$

i en canvi:

$$P(X = 8) = \frac{5}{36} \text{ i } P(Y = 1) = \frac{1}{6}$$

En aquest cas és clar que X i Y no són independents.

D'altra banda, si z i y són dos valors entre 1 i 6:

$$P(Y = y,\ Z = z) = \frac{1}{36}, \text{ i } P(Z = z) = P(Y = y) = \frac{1}{6}$$

Per tant, Z i Y són independents.

2.

a) Si diem que la resposta a cada pregunta és independent de les altres podem calcular fàcilment:

$$P(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$P(X = 1) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$P(X = 2) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$P(X = 3) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$P(X = 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Els coeficients 4, 6 i 4 surten del nombre de combinacions en què podem fer 1, 2 o 3 respostes correctes respectivament. Aquest càlcul està relacionat amb l'anomenada *distribució binomial* que s'explica a la sessió "Algunes distribucions discretes".

b) L'esdeveniment "contestar almenys alguna pregunta bé" és l'esdeveniment "contestar una pregunta o més bé". Així hem de calcular:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{16}$$

c) És clar que l'esdeveniment $\{X = 2,\ Y = 3\}$ no es pot donar mai. Per tant:

$$P(X = 2,\ Y = 3) = 0$$

d) Ja hem vist que la $P(X = 2) = 6/16$. Amb un raonament anàleg és fàcil comprovar que:

$$P(Y = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Per tant,

$$P(X = 2,\ Y = 3) \neq P(X = 2)P(Y = 3)$$

i les variables no són independents.

Esperança i variància

En aquesta sessió estudiarem un parell de característiques importants de les lleis de les variables aleatòries discretes: l'esperança i la variància. Es tracta d'una mesura numèrica pel centre i una per la dispersió, respectivament, de la distribució de la variable aleatòria. Dues variables aleatòries amb la mateixa llei tindran, per tant, la mateixa esperança i la mateixa variància.

No seran conceptes radicalment nous, ja que estan relacionats amb els conceptes de mitjana mostral i de variància mostral que vam estudiar anteriorment. Les mesures de centralitat i de dispersió d'un conjunt de dades tenen el seu equivalent a les distribucions de probabilitat.

Representabilitat de l'esperança i la variància

L'esperança i la variància ens permeten de conèixer una mica com és una variable aleatòria.

1. Definicions

Suposeu que llancem un dau 20 vegades i obtenim els valors següents:

2, 2, 6, 1, 1, 6, 2, 5, 3, 2, 4, 6, 4, 4, 5, 2, 6, 6, 5, 4

La mitjana d'aquestes dades, utilitzant les freqüències relatives tal com hem vist en el mòdul "Estadística descriptiva", es pot calcular com:

Recordeu com...

... calculàvem la mitjana i la variància mostral.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{6} i f_i = 1\left(\frac{2}{20}\right) + 2\left(\frac{5}{20}\right) + 3\left(\frac{1}{20}\right) + 4\left(\frac{4}{20}\right) + 5\left(\frac{3}{20}\right) + 6\left(\frac{5}{20}\right) = 3{,}8$$

on cada f_i indica la freqüència relativa d'i. De la mateixa manera podríem calcular la variància mostral de les dades com:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{6} (i - \bar{x})^2 f_i \approx 3{,}06$$

D'altra banda, podem pensar que si tenim un dau (no trucat) i el llancem moltes vegades, les freqüències esperades de cadascun dels 6 possibles valors s'anirà acostant cada vegada més cap a 1/6 (que és la probabilitat de cada valor). Així, la mitjana de les dades quan féssim molts llançaments seria:

$$\sum_{i=1}^{6} i\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

i la variància mostral:

$$\sum_{i=1}^{6} (i - 3{,}5)^2 \frac{1}{6} \approx 2{,}916$$

Aquests dos valors, equivalents a la mitjana i la variància mostral, seran l'esperança i la variància de la variable aleatòria que ens dóna el resultat del llançament d'un dau. Hem substituït les freqüències relatives de cada valor per la probabilitat que es doni aquest valor.

Què esperem?

Com indica el seu propi nom, l'esperança d'una variable aleatòria és el valor que "esperem" que surti. Però què vol dir que "esperem" que surti? Penseu en l'exemple del dau.

L'**esperança** d'una variable aleatòria discreta X, que denotarem per $E(X)$, es defineix com:

$$E(X) = \sum_x xP(X = x)$$

> **Notació**
>
> En alguns llibres l'esperança s'anomena *valor esperat.*

L'esperança d'una variable aleatòria X es pot mirar també com la mitjana ponderada del valors que pren la variable aleatòria.

Exemple de la ruleta

Un exemple molt fàcil és el de la ruleta. Ens podem plantejar la pregunta següent. Si anem al casino a jugar a la ruleta a vermell o negre, quins guanys esperem tenir?

Per a aquells que no tingueu aquest vici, recordem com funciona una ruleta. La ruleta té 18 caselles vermelles, 18 de negres i 2 de blanques. Si juguem 1.000 u.m. a vermell i la bola cau a una casella vermella guanyem 1.000 u.m., i si cau en una de negra o en una de blanca perdem les 1.000 u.m. que hem jugat. Si diem X als guanys que esperem obtenir, tenim la taula següent:

Valors possibles $X = x$	$P(X = x)$
1.000	18/38
–1.000	**20/38**

I podem calcular l'esperança:

$$E(X) = 1.000\frac{18}{38} - 1.000\frac{20}{38} = -52{,}63$$

És a dir, en cada jugada "esperem" perdre 52,63 u.m. A llarg termini, un mal negoci per al jugador i un bon negoci per al casino.

Exemple de la borsa

Vegem, ara, un exemple en els mercats financers. Comprem una acció en borsa de la companyia A per 1.000 u.m. i creiem que amb probabilitat 1/3 la setmana següent valdrà 1.200 u.m., amb probabilitat 1/2 el preu no variarà i amb probabilitat 1/6 valdrà només 900 u.m. Us sembla que hem fet una bona inversió?

Per a decidir-ho, hauríem de calcular el valor que "esperem" que tindrà la setmana vinent. Podem considerar que tenim una variable aleatòria X que és el preu de l'acció la propera setmana i que sabem que té funció de massa de probabilitat:

Valors possibles $X = x$	$P(X = x)$
1.200	1/3
1.000	1/2
900	1/6

I podem calcular l'esperança:

$$E(X) = 1.200\frac{1}{3} + 1.000\frac{1}{2} + 900\frac{1}{6} = 1.050$$

Per tant, esperem obtenir uns beneficis de 50 u.m.

Considerem també la companyia B. Podem comprar les seves accions també per 1.000 u.m. i sabem que amb probabilitat 1/3 la setmana següent valdran 1.500 u.m., amb probabilitat 1/2 el preu no variarà i amb probabilitat 1/6 valdrà només 300 u.m. (quin desastre!).

Podem calcular l'esperança de la variable Y, que ens donarà el preu de l'acció la setmana següent:

$$E(X) = 1.500\frac{1}{3} + 1.000\frac{1}{2} + 300\frac{1}{6} = 1.050$$

que és la mateixa que teníem si compràvem una acció de la companyia A.

Per tant, sembla que és indiferent comprar accions de la companyia A o de la companyia B. Però ja veurem que això **no** és veritat.

Un cop calculada l'esperança podem calcular la dispersió per cada valor x que pot prendre la variable aleatòria X, com la distància entre el valor x i l'esperança $E(X)$, és a dir, $x - E(X)$. La variància, mesura de la dispersió, és en realitat el valor esperat de les desviacions al quadrat. El fet que les elevem al quadrat és per a evitar que si tenim desviacions de diferents signes aquestes es poguessin cancel·lar.

La **variància** d'una variable aleatòria X, que denotarem per $Var(X)$, es defineix com:

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Si es fa servir la definició d'esperança que hem donat, és fàcil comprovar que per a una variable aleatòria discreta podem calcular la variància com:

$$Var(X) = \sum_x (x - E(X))^2 P(X = x)$$

Tenim també una expressió alternativa de la variància:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Com en l'estudi poblacional (estadística descriptiva) podem definir també la desviació típica.

La **desviació típica** d'una variable aleatòria X, que denotarem per $s(X)$, es defineix com:

$$s(X) = \sqrt{Var(x)}$$

Mesura de la dispersió d'una variable aleatòria

Com en el cas poblacional, la desviació típica és molt útil ja que es dóna amb les mateixes unitats que l'esperança, de manera que ens pot donar una idea més clara de la mesura de la dispersió d'una variable aleatòria.

Com ja hem comentat, la variància és una mesura de dispersió. Així, mentre que l'esperança ens dóna el centre de la distribució (fa el paper de la mitjana mostral a "Estadística descriptiva"), la variància ens indica fins a quin punt és dispersa aquesta distribució.

Vegem l'exemple següent:

Exemple de la borsa

En l'exemple dels mercats financers, per a la companyia A, tenim les dispersions següents:

Valors possibles $X = x$	Dispersió $x - E(x)$	$P(X = x)$
1.200	150	1/3
1.000	–50	1/2
900	–150	1/6

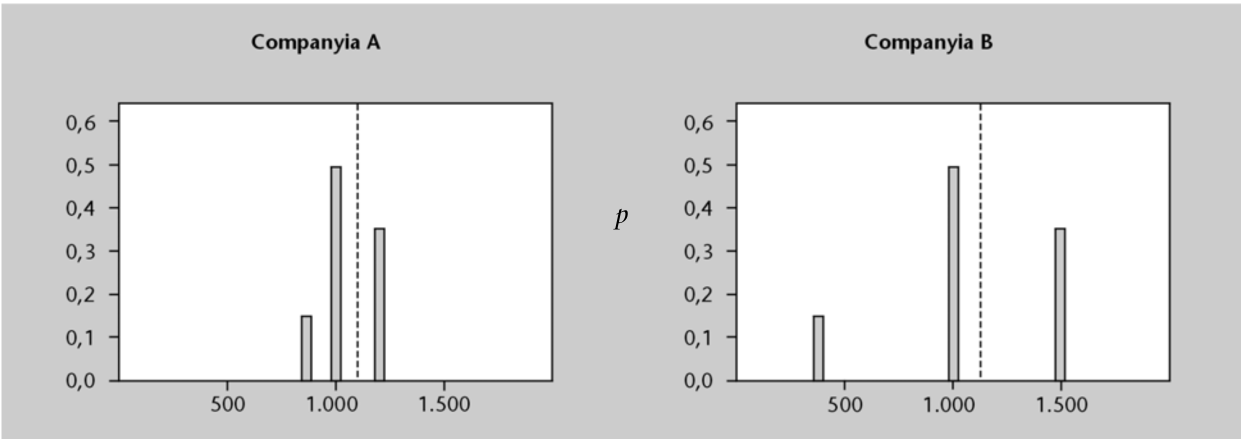
I, per tant, la variància serà aquesta:

$$Var(X) = 150^2\frac{1}{3} + (-50)^2\frac{1}{2} + (-150)^2\frac{1}{6} = 12.500$$

i la desviació típica és de 111,80. En canvi, si calculem la variància per a la variable Y (companyia B):

$$Var(Y) = (1.500 - 1.050)^2\frac{1}{3} + (1.000 - 1.050)^2\frac{1}{2} + (300 - 1.050)^2\frac{1}{6} = 162.500$$

mentre que la desviació típica és de 403,11. Com podem veure, la variància de la variable Y és bastant més gran que la de la variable X. Així X i Y tenen la mateixa esperança (el centre de les dues variables és al mateix punt), però les variàncies són força diferents. Ho podem veure en els gràfics de les corresponents funcions de massa de probabilitat.



Com ho podem interpretar? El guany que esperem en comprar una acció de la companyia A o una de la companyia B és el mateix, però en la companyia B la variància és més gran de manera que tant podem guanyar més diners com en podem perdre més. El cas extrem seria una companyia on compréssim una acció per 1.000 u.m. i sabéssim que la setmana següent la podrem vendre per 1.050. L'esperança serà la mateixa però, en canvi, la variància seria zero!

Tenim encara una darrera companyia anomenada C. En aquest cas, el preu és també de 1.000 u.m. i sabem que amb probabilitat 1/3 la setmana següent valdrà 1.300 u.m., amb probabilitat 1/2 el preu serà de 800 i amb probabilitat 1/6 valdrà només 100 u.m.

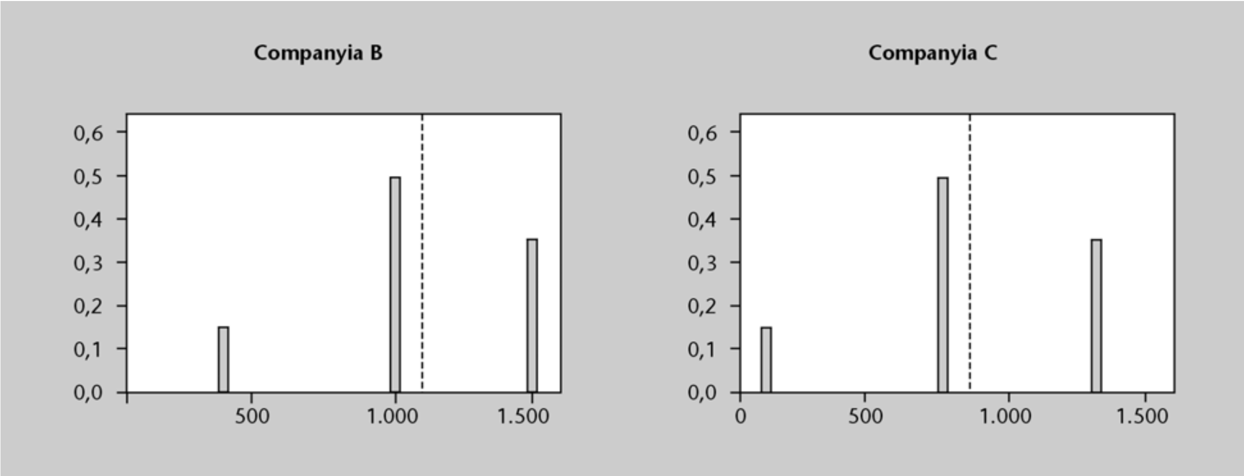
Podem calcular l'esperança de la variable Z, indicada per una línia discontínua, que ens dóna el preu de l'acció per a la setmana següent:

$$E(Z) = 1.300\frac{1}{3} + 800\frac{1}{2} + 100\ \frac{1}{6} = 850$$

que és més petita que la de les altres companyies. La variància, en canvi, val:

$$Var(Z) = (1.300 - 850)^2\frac{1}{3} + (800 - 850)^2\frac{1}{2} + (100 - 850)^2\frac{1}{6} = 162.500$$

que és la mateixa que per la companyia B. Així Z i Y tenen la mateixa variància i esperances diferents. Ho podem veure també comparant els gràfics de les funcions de massa de probabilitat.



2. Algunes propietats de l'esperança

La majoria de les propietats de l'esperança les podem obtenir d'una manera bastant intuïtiva. Si en l'exemple de la ruleta sabíem que quan jugàvem una vegada "esperàvem" perdre 52,63 u.m., si juguem dues vegades "esperarem" perdre el doble. En termes d'esperances, estem dient que l'esperança de la suma de dues variables aleatòries és la suma de les esperances.

Ens trobem també amb les propietats següents:

1) L'esperança d'una constant és la mateixa constant. Una constant és una variable aleatòria que pren un únic valor k amb probabilitat 1. Així:

$$E(X) = kP(X = k) = k \cdot 1 = k$$

2) L'esperança de kX, on X és una variable aleatòria i k és una constant, és igual a l'esperança de X multiplicada per k:

$$E(kX) = kE(X)$$

La demostració d'aquesta propietat s'obté directament de la definició d'esperança:

$$E(kX) = \sum_x kxP(X = x) = k\sum_x xP(X = x) = kE(X)$$

Observeu que si prenem $k = -1$, trobem que $E(-X) = -E(X)$.

3) Si tenim dues variables aleatòries X i Y, l'esperança de la suma de les dues variables aleatòries és la suma de les dues esperances. És a dir:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Aquesta propietat no la demostrarem. Veurem només un cas particular: si sumem una constant a la variable X, l'esperança augmenta també en la mateixa constant, és a dir:

Extensió de *n* variables

Aquesta propietat s'estén fàcilment a n variables, de manera que l'esperança de la suma de n variables aleatòries és la suma de les seves esperances.

$$E(X + k) = E(X) + k$$

Per a demostrar-ho només cal utilitzar la definició d'esperança i pensar que la nova variable $X + k$ pren els valors $x + k$, on les x són els valors que pren la variable X amb probabilitat $P(X = x)$. Vegem-ho:

$$E(X + k) = \sum_x (x + k)\,P(X = x) = \sum_x xP(X = x) + \sum_x kP(X = x) =$$

$$= E(X) + k\sum_x P(X = x) = E(X) + k$$

Recordeu que...

$$\sum_x P(X = x) = 1$$

3. Algunes propietats de la variància

Tenint en compte que la variància és una mesura de dispersió de la variable, és fàcil justificar-ne algunes de les seves propietats. D'altres, no. Vegem-les:

1) La variància d'una constant és zero. Una constant és una variable aleatòria que pren un únic valor k amb probabilitat 1. Així:

$$Var(X) = E\big((k - E(k))^2\big) = E(0) = 0$$

Aquest resultat és l'esperat, ja que la variància és una mesura de la dispersió de la variable de manera que, si la variable és constant, aquesta mesura ha de ser zero.

2) La variància de kX, on X és una variable aleatòria i k és una constant, és igual a la variància de X multiplicada per k^2:

$$Var(kX) = k^2 Var(X)$$

Per tant, $s(kX) = k\,s(X)$.

La demostració d'aquesta propietat s'obté de la definició i de les propietats de l'esperança:

$$Var(kX) = E\big((kX - E(kX))^2\big) = E\big(k^2(X - E(X))^2\big) = k^2 Var(X)$$

Observeu que, si agafem $k = -1$, obtenim $Var(-X) = Var(X)$.

3) Si sumem una constant a la variable X, la variància no varia:

$$Var(k + X) = Var(X)$$

Aquest resultat és també intuïtiu si pensem que la variància és una mesura de dispersió i que, en sumar una constant, la dispersió de la variable no es modifica. La demostració és semblant a la de la propietat anterior:

$$Var(k + X) = E((k + X - E(k + X))^2) = E((k + X - k - E(X))^2) =$$
$$= E((X - E(X))^2) = Var(X)$$

Obseveu que...

... si tenim dues variables aleatòries X i Y que no són independents, aleshores en general $Var(X + Y) \neq Var(X) + Var(Y)$.

Encara que dues variables aleatòries X i Y siguin independents, en general:

$$s(X + Y) \neq s(X) + s(Y).$$

4) Si tenim dues variables aleatòries X i Y independents, la variància de la suma de les dues variables aleatòries és la suma de les variàncies. És a dir:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Extensió a *n* variables

Aquesta propietat s'estén fàcilment a n variables, de manera que la variància de la suma de n variables aleatòries independents és la suma de les variàncies.

Aquesta propietat no la demostrarem. La independència entre les dues variables és fonamental per a obtenir aquesta propietat. Per exemple, si agafem ($Y = -X$) sabem que la $Var(X + Y) = Var(0) = 0$, mentre que si la propietat fos certa tindríem $Var(X + Y) = Var(X) + Var(-X) = 2Var(X) \neq 0$.

4. La desigualtat de Txebixev

La desigualtat de Txebixev ens permet d'interpretar la informació conjunta que ens donen l'esperança i la variància d'una variable aleatòria indicant la massa de probabilitat mínima en intervals de longitud $2n\sqrt{Var(X)}$ centrats en $E(X)$.

Sigui X una variable aleatòria, aleshores la desigualtat de Txebixev ens diu que per a tot $k > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{1}{k^2} Var(X)$$

Demostració de la desigualtat de Txebixev

Per la definició de la variància tenim:

$$Var(X) = \sum_x (x - E(X))^2 P(X = x) =$$

$$= \sum_{x, |x - E(X)| \geq k} (x - E(X))^2 P(X = x) + \sum_{x, |x - E(X)| < k} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

en què en el darrer pas hem partit el sumatori en dos trossos, en el primer, sumem les x on $|x - E(X)| \geq k$ i, en el segon, sumem les que $|x - E(X)| < k$. Com que el segon sumand és positiu, obtenim:

$$Var(X) \geq \sum_{x, |x - E(X)| \geq k} (x - E(X))^2 P(X = x) \geq \sum_{x, |x - E(X)| \geq k} k^2 P(X = x) = k^2 P(|X - E(X)| \geq k)$$

que ens prova la desigualtat de Txebixev.

Aquesta desigualtat és important ja que ens diu que si agafem $k = n\sqrt{Var(X)}$, és a dir, n vegades la desviació típica, tindrem:

$$P\left(|X - E(X)| \geq n\sqrt{Var(x)}\right) \leq \frac{1}{n^2}$$

és a dir, que tindrem com a mínim una massa de probabilitat de $1 - \frac{1}{n^2}$ en l'interval:

$$\left(E(X) - n\sqrt{Var(x)},\ E(X) + n\sqrt{Var(x)}\right)$$

Probabilitat per a *n* = 2

Per a qualsevol variable X, en l'interval:

$(E(X) - 2s,\ E(X) + 2s)$

es concentra com a mínim una probabilitat de 0,75. Recordeu que:

$s = \sqrt{Var(X)}$.

Exemple

Considerem una variable aleatòria X amb esperança 2 i variància 4, aleshores:

$$P(|X - 2| \geq 6) \leq \frac{1}{9}$$

és dir:

$$P(-4 < X < 8) \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Observació

Fixeu-vos que $6 = 3\sqrt{4}$.

5. Resum

En aquesta sessió hem après els conceptes d'esperança i de variància d'una variable aleatòria. Hem estudiat les seves propietats bàsiques i hem vist com calcular-les per a variables aleatòries discretes. Per acabar, hem vist com utilitzar la desigualtat de Txebixev per a relacionar tots dos conceptes.

Exercicis

1. Tirem 2 vegades un dau i considerem la variable aleatòria que ens dóna el màxim dels dos valors obtinguts.

a) Calculeu la funció de massa de probabilitat d'aquesta variable aleatòria.
b) Calculeu la seva esperança i la seva variància.

2. A la companyia ACBXX tenen quatre tipus de treballadors: directius amb un sou de 15.000.000 u.m., especialistes amb un sou de 5.000.000, obrers amb un sou de 2.000.000 i aprenents amb un sou d'1.000.000. Sabem que la companyia té 4 directius, 40 especialistes, 200 obrers i 100 aprenents. Agafem un treballador a l'atzar i diem X a la variable aleatòria que ens dóna el sou d'aquest treballador.

a) Calculeu l'esperança i la variància d'aquesta variable.
b) Si a la companyia es fa un augment lineal de 200.000 a tots els treballadors, com varia l'esperança i la variància de la variable X?
c) I si fem un augment proporcional del 10%?

3. Tenim una variable aleatòria X amb esperança 10 i variància 1.

a) Calculeu $E(3X)$, $Var(2X + X)$.
b) Utilitzant la desigualtat de Txebixev, trobeu una fita inferior per a $P(8 < X < 12)$.

Solucionari

1.
a) Per a calcular la funció de massa de probabilitat observeu el quadre següent amb tots els possibles resultats (fixeu-vos que hem tingut en compte l'ordre):

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Hem marcat la taula amb dos colors per a distingir més bé quins casos ens dóna cada valor. Per exemple, el màxim igual a 1 només l'obtindrem amb el resultat (1,1). En canvi, obtenim que el màxim és igual a 2 en tres situacions (1,2),(2,2) i (2,1). Si fem servir aquesta taula i els resultats són equiprobables, podem construir fàcilment la funció de massa de probabilitat.

Valors possibles $X = x$	$P(X = x)$
1	1/36
2	3/36
3	5/36
4	7/36
5	9/36
6	11/36

b) Podem calcular fàcilment l'esperança:

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{36}\right) + 2\left(\frac{3}{36}\right) + 3\left(\frac{5}{36}\right) + 4\left(\frac{7}{36}\right) + 5\left(\frac{9}{36}\right) + 6\left(\frac{11}{36}\right) = \frac{161}{36} \approx 4{,}47$$

Per a calcular la variància, farem una taula amb les desviacions:

Valors possibles $X = x$	$P(X = x)$	Dispersió $x - E(X)$	$\lvert x - E(X) \rvert^2$
1	1/36	–125/36	$15.625/(36)^2$
2	3/36	–89/36	$7.921/(36)^2$
3	5/36	–53/36	$2.809/(36)^2$
4	7/36	–17/36	$289/(36)^2$
5	9/36	19/36	$361/(36)^2$
6	11/36	55/36	$3.025/(36)^2$

I si fem servir la fórmula:

$$Var(X) = \sum_x (x - E(X))^2 P(X = x)$$

obtenim fàcilment $Var(X) = \dfrac{91.980}{36^3} \approx 1{,}971$.

2.

a) Tenim una variable X que té funció de massa de probabilitat:

Valors possibles $X = x$	$P(X = x)$
15.000.000	4/344
5.000.000	40/344
2.000.000	200/344
1.000.000	100/344

Podem calcular l'esperança,

$$E(X) = 15.000.000\left(\frac{4}{344}\right) + 5.000.000\left(\frac{40}{344}\right) + 2.000.000\left(\frac{200}{344}\right) +$$

$$+ 1.000.000\left(\frac{100}{344}\right) \approx 2.209.302,33$$

I també la variància,

$$Var(X) = (15.000.000 - E(X))^2\left(\frac{4}{344}\right) + (5.000.000 - E(X))^2\left(\frac{40}{344}\right) +$$

$$+ (2.000.000 - E(X))^2\left(\frac{200}{344}\right) + (1.000.000 - E(X))\left(\frac{100}{344}\right) \approx 3.258.518.117.902$$

Com podeu veure, la variància no ens dóna una idea clara del nivell de dispersió i, en canvi, si mirem la desviació típica, 1.805.137 u.m., ho veiem més clar.

b) No farem càlculs. Fixeu-vos que si diem Y a la variable que ens dóna el sou després de l'augment lineal, tenim que $Y = X + 200.000$. Per les propietats de l'esperança, tindrem $E(Y) = E(X) + 200.000$, mentre que la variància no variarà.

c) Tampoc no farem càlculs. Si diem ara Z a la variable que ens dóna el sou després de l'augment proporcional, tenim que $Z = (1,1)X$. Per les propietats de l'esperança i de la variància, tindrem $E(Z) = 1,1E(X)$, mentre que la variància compleix $Var(Z) = (1,1)^2 Var(X) = (1,21)Var(X)$, de manera que representa un increment del 21%.
Com podeu veure en aquest cas, la variància dels sous augmenta, de manera que sembla més just fer un augment lineal que no fer-ne un de proporcional.

3.
a) Si fem servir les propietats que hem estudiat obtenim:

$$E(3X) = 3E(X) = 30$$
$$Var(2X + X) = Var(3X) = 9Var(X) = 9$$

b) Tenim:

$$P(8 < X < 12) = P(-2 < X - 10 < 2) = P(|X - 10| < 2) = 1 - P(|X - 10| \geq 2)$$

Fent servir la desigualtat de Txebyschev, tenim:

$$P(|X - 10| \geq 2) \leq \frac{1}{2^2}\,Var(V) = \frac{1}{4}\,1 = \frac{1}{4}$$

Per tant, la desigualtat demanada quedarà:

$$P(8 < X < 12) = 1 - P(|X - 10| \geq 2) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Algunes distribucions discretes

Ara estudiarem algunes de les distribucions discretes més usuals. Imaginem la situació següent. Sabem que cada cop que intentem connectar-nos a Internet utilitzant la línia telefònica hi ha la possibilitat que la connexió falli i no ens puguem connectar. Sabem, a més, que la probabilitat que això succeeixi, és a dir, que falli la connexió, és de 0,1. Finalment, suposarem també que el resultat de cada trucada que intentem és independent de les altres trucades que hàgim fet. Indicarem finalment amb una C l'esdeveniment "trucada que obté la connexió" i amb $\overline{C}$ l'esdeveniment complementari, "trucada que no obté la connexió".

1. Distribució de Bernoulli

Considerem ara una variable aleatòria X que, quan ens intentem connectar una vegada a Internet, val 1 si ens podem connectar i val 0 si la connexió falla i no ens podem connectar. Aquesta variable té la funció de massa de probabilitat següent:

Bernoulli

El nom de Bernoulli prové d'un important matemàtic del segle XVII.

$$P(X = 0) = 0{,}1$$
$$P(X = 1) = 0{,}9$$

La llei d'aquesta variable es coneix com una distribució de Bernoulli de paràmetre 0,9.

Una variable aleatòria X segueix una **distribució de Bernoulli** de paràmetre p, $p \in (0,1)$, escriurem $B(p)$, si només pren els valors 0 i 1 amb probabilitats:

$$P(X = 1) = p, \;\; P(X = 0) = 1 - p$$

Com podeu veure...

... la distribució de Bernoulli és la distribució discreta més senzilla ja que només pot prendre dos valors: zero i u.

Podem calcular fàcilment l'esperança i la variància d'una variable X amb una distribució $B(p)$:

$$E(X) = 0P(x = 0) + 1P\,(x = 1) = p$$
$$Var(X) = (0 - p)^2P(X = 0) + (1 - p)^2P(X = 1) = p(1 - p)$$

Si X és una variable aleatòria amb llei $B(p)$, aleshores $E(X) = p$ i $Var(X) = = p(1 - p)$.

En general, aquest tipus de distribució es pot utilitzar per a modelar qualsevol "experiment" en què tinguem una probabilitat p de tenir èxit i una probabilitat $1 - p$ de tenir un fracàs. Es tracta només de codificar l'èxit com un "1" i el fracàs com un "0".

Per exemple, quan comprem un bitllet de loteria hi ha una certa probabilitat p que ens toqui el premi (i això seria un "èxit") i una probabilitat $1 - p$ que no ens toqui res (seria el fracàs). Ja deveu sabeu per experiència que, en aquest cas, la probabilitat p d'èxit és força petita!

Concepte d'"èxit"

El concepte d'"èxit" és relatiu. Per exemple, en un procés de control de qualitat, podem considerar un "èxit" la producció d'una peça defectuosa.

2. Distribució binomial

Tornem al nostre exemple de la connexió a Internet. En general no intentem connectar-nos només una vegada. Imaginem així que, durant tot un dia, ens intentem connectar n vegades i diem Y a la variable aleatòria que compta el nombre de vegades que ens hem pogut connectar. Els valors que pot prendre aquesta nova variable aleatòria són els nombres naturals entre zero (si tots els cops que ens hem intentat connectar la connexió ha fallat) i n (si ens hem pogut connectar tots els cops que ho hem intentat).

Vegem com podem calcular la funció de massa de probabilitat associada a la variable Y:

Condicions de l'experiment

Durant bona part d'aquesta sessió suposarem que estem repetint un experiment sota les condicions següents: el resultat de cada prova pot ser èxit o fracàs, la probabilitat d'èxit (bé, del que entenem per èxit) sempre és p i cada repetició de la prova és independent de la resta.

- La probabilitat, $P(Y = 0)$, que no ens hàgim pogut connectar cap vegada es calcula fàcilment. L'esdeveniment $\{Y = 0\}$ és en realitat l'esdeveniment:

$$\overline{C}\overline{C}\ldots\overline{C}$$

  Si diem que cada trucada és independent de les altres, hem de calcular el producte de les probabilitats que cada trucada hagi fallat:

$$P(Y = 0) = (0{,}1) \ldots (0{,}1) = (0{,}1)^n$$

- La probabilitat, $P(Y = 1)$, que la connexió hagi funcionat bé exactament una vegada vindrà donada per la fórmula següent:

$$P(Y = 1) = n(0{,}9)(0{,}1)^{n-1}$$

  Vegem-ho: si suposem que la trucada en què ens hem pogut connectar ha estat la primera, l'esdeveniment que hi hagi exactament una única connexió i que aquesta s'hagi produït en la primera trucada, és l'esdeveniment:

$$C\overline{C}\overline{C}\ldots\overline{C}$$

Fent un raonament anàleg a l'utilitzat per a calcular $P(Y = 0)$, la probabilitat d'aquest esdeveniment és igual a:

$$(0{,}9)(0{,}1)\ \dots\ (0{,}1) = (0{,}9) * (0{,}1)^{n-1}$$

Però és possible que la connexió bona s'hagi produït en el segon intent, o en el tercer, o en el n–èsim. Això fa que per a calcular $P(Y = 1)$, hàgim de multiplicar per n la quantitat anterior.

- Ja podem calcular l'expressió general de $P(Y = k)$, on la k serà un nombre natural entre zero i n. El raonament que farem servir serà semblant al que hem fet servir per a calcular la $P(Y = 1)$, encara que haurem d'utilitzar també algunes nocions de combinatòria que vam veure en el mòdul dedicat al càlcul de probabilitats.

  Si suposem que les k connexions les hem assolit en els primers k intents, la probabilitat d'aquest resultat particular és:

$$(0{,}9)^k(0{,}1)^{n-k}$$

  Però les k connexions les hem pogut obtenir de moltes maneres diferents entre els n intents que hem fet. Tal com vam veure en el mòdul corresponent, el nombre de maneres que podem triar k elements diferents dins un grup de n és:

Observació

Evidentment si $k < 0$ o $k > n$, aleshores $P(Y = k) = 0$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Així, tenim que:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k}\ (0{,}9)^k\ (0{,}1)^{n-k}$$

on $k = 0,\dots, n$.

La llei de la variable Y es coneix com la distribució **binomial** de paràmetres n i 0,9.

Una variable aleatòria Y segueix una distribució **binomial** de paràmetres n i p, n natural i $p \in (0,1)$, (escriurem $B(n, p)$) si pren valors sobre els naturals entre 0 i n amb funció de massa de probabilitat:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

on $k = 0,\dots, n$.

A l'exemple hem utilitzat $p = 0{,}9$.

Recordeu que la distribució $B(p)$ es pot interpretar com la realització d'un experiment amb probabilitat p de tenir èxit i una probabilitat $1 - p$ de no tenir èxit. Ara el que fem és repetir l'experiment n vegades, de manera independent, i comptar el nombre d'èxits. És a dir, obtenim la distribució $B(n, p)$ com a suma de n Bernouillis independents de paràmetre p.

Si $X_1, \ldots, X_n$ ón variables aleatòries independents amb distribució $B(p)$, aleshores $X_1 + \ldots + X_n$ segueix una distribució $B(n, p)$.

Obsevació

En particular la distribució de Bernoulli $B(p)$ és una binomial $B(1, p)$.

El càlcul de l'esperança i la variància de la binomial s'obté de l'esperança i la variància d'una distribució de Bernoulli:

$$E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = np$$
$$Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n) = np(1 - p)$$

Si Y és una variable aleatòria amb llei $B(n, p)$, aleshores $E(Y) = np$ i $Var(Y) = np(1 - p)$.

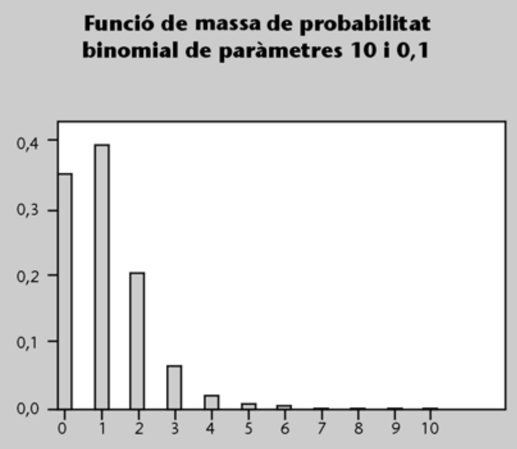
Valor de *p*

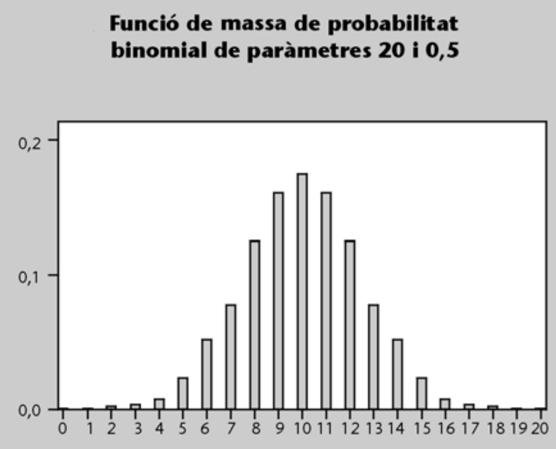
Observeu que si p és petita la probabilitat d'assolir pocs èxits és gran.

Com es veu per la seva esperança i la seva variància, la forma d'una distribució binomial depèn molt dels valors dels paràmetres. Ho podeu veure també en els gràfics de les funcions de massa de probabilitat d'una $B(10, 0{,}1)$ i d'una $B(20, 0{,}5)$.

Simetria

Observeu que la funció de massa de probabilitat és simètrica quan $p = 0{,}5$.





3. Distribució geomètrica

Tornem a la situació en què estàvem: continuem intentant connectar-nos a Internet. El més usual és que ho intentem fins que aconseguim connectar-nos, de manera que podem comptar el nombre de vegades que cal intentar la connexió fins a aconseguir-la. És a dir, ara ens mirem el problema des d'una altra òptica. En la situació anterior intentàvem n connexions, en què n era un valor fixat des del principi, i volíem determinar en quants d'aquests intents la connexió s'havia pogut establir. Ara ho fem a l'inrevés, anirem intentant connectar-nos fins que aconseguim la primera connexió i comptarem quants cops ho hem hagut d'intentar per a aconseguir-la.

Anomenem Z la variable aleatòria que compta el nombre de vegades que cal intentar la connexió fins que aconseguim connectar-nos per primer cop.

Podem calcular ara la funció de massa de probabilitat associada a la variable Z:

Observació

Els valors que pot prendre aquesta nova variable aleatòria són els nombres naturals des d'1 (si ens connectem al primer intent) en endavant (sense límit superior).

- La probabilitat $P(Z = 1)$ que ens puguem connectar al primer intent és clarament la probabilitat de C, que és:

$$P(Z = 1) = 0{,}9$$

- La probabilitat $P(Z = 2)$ que ens puguem connectar per primera vegada al segon intent, és la probabilitat que a la primera trucada la connexió hagi fallat i que a la segona trucada l'hàgim pogut establir, és a dir, la probabilitat de $\overline{C}C$. Per tant:

$$P(Z = 2) = (0{,}1)(0{,}9)$$

- I l'expressió general per a $P(Z = k)$, on k serà un nombre natural més gran que 1, vindrà donada per:

$$P(Z = k) = (0{,}1)^{k-1}(0{,}9)$$

Aquesta expressió surt fàcilment del fet que l'esdeveniment $\{Z = k\}$ significa que els $k - 1$ primers intents la connexió ha fallat i que en k-èsim hem aconseguit connectar-nos.

La llei de la variable Z es coneix com la distribució geomètrica de paràmetre 0,9.

Una variable aleatòria Z segueix una distribució **geomètrica** de paràmetre p, $p \in [0,1]$, (escriurem $geom(p)$) si pren valors sobre tots els naturals estrictament positius amb funció de massa de probabilitat:

$$P(Z = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

on $k \geq 1$ natural.

Si tornem a la interpretació de la variable a partir de la realització d'un experiment amb probabilitat p de tenir èxit i una probabilitat $1 - p$ de tenir un fracàs, ara es tracta de comptar quantes vegades hem repetit l'experiment fins al primer èxit.

Disparitat d'experiments

Recordeu que el concepte d'experiment és molt ampli: pot incloure tirar una moneda i mirar si surt cara, posar en marxa un cotxe i mirar si s'engega, etc.

Per a aquesta distribució, el càlcul de l'esperança i la variància és una mica més complicat, així que només donarem el resultat.

Si Z és una variable aleatòria amb llei *geom*(p), aleshores $E(Z) = \frac{1}{p}$ i $Var(Z) = \frac{1-p}{p^2}$.

Tornant a la situació de la connexió a Internet, ens podem demanar la probabilitat que aconseguim la connexió amb 5 intens com a màxim. Hem de calcular:

$$P(Z \leq 5) = \sum_{i=1}^{5} P(Z = i) = \sum_{i=1}^{5} (0{,}1)^{i-1} 0{,}9$$

que utilitzant la fórmula per a sumar sèries geomètriques és

$$1 - (0{,}1)^5 = 0{,}99999$$

És una probabilitat força alta! Però el que ens interessa destacar és que la resposta a aquesta pregunta s'obté fàcilment si coneixem la funció de distribució de la variable Z. I és fàcil calcular-la! Si k és un nombre natural, partint que sabem sumar una sèrie geomètrica tenim:

$$F(k) = P(Z \leq k) = \sum_{i=1}^{k} P(Z = i) = \sum_{i=1}^{k} (0{,}1)^{i-1} 0{,}9 = 1 - (0{,}1)^k$$

Si Z és una variable aleatòria amb llei *geom*(p) aleshores la seva funció de distribució és $F(k) = 1 - (1 - p)^k$, per als $k > 1$ naturals.

Exemple del control de qualitat

Una de les situacions més usuals en què podem utilitzar aquestes lleis és un procés de control de qualitat. Imaginem que tenim una màquina que fabrica al dia 100 unitats d'una determinada peça A i sabem que la probabilitat que una peça sigui defectuosa és de 0,05. Suposem, a més, que el que passa en una peça és independent de les altres peces.

Si diem X al nombre de peces defectuoses fabricades durant un dia, és clar que segueix una llei binomial de paràmetres 100 i 0,05. I podem respondre preguntes del tipus següent:

a) Probabilitat que fabriquem exactament 10 peces defectuoses:

$$P(X = 10) = \binom{100}{10} (0{,}05)^{10} (0{,}95)^{90}$$

b) Probabilitat que fabriquem més d'una peça defectuosa:

$$P(X > 1) = 1 - P(x \leq 1) = 1 - [P(x = 0) + P(X = 1)] =$$
$$= 1 - \binom{100}{0}(0{,}05)^0(0{,}95)^{100} - \binom{100}{1}(0{,}05)^1(0{,}95)^{99}$$
$$= 1 - (0{,}95)^{100} - 100(0{,}05)(0{,}95)^{99} \approx 0{,}9629$$

c) Nombre esperat de peces defectuoses fabricades durant un dia: correspondrà a l'esperança:

$$E(X) = 100(0{,}05) = 5$$

Si diem Z a la variable que ens dóna el número de la primera peça defectuosa, és clar que seguirà una distribució geomètrica de paràmetre 0,05. Podem també respondre preguntes del tipus:

a) Probabilitat que abans de 10 peces en surti alguna de defectuosa:

$$P(Z < 10) = P(Z \leq 9) = F(9) = 1 - (0{,}95)^9 \approx 0{,}3698$$

b) Quan esperem que surti la primera peça defectuosa. En aquest cas correspon a l'esperança que serà:

$$E(Z) = \frac{1}{0{,}05} = 20$$

4. Distribució de Poisson

La darrera distribució discreta que estudiarem és l'anomenada *distribució de Poisson*. Aquest tipus de distribució s'utilitza per a modelar diverses classes de situacions, com el nombre de cotxes que passen per un peatge durant una hora, el nombre de clients que rep una perruqueria durant un dia, el nombre de trucades que passen per una centraleta durant una hora o el nombre de terratrèmols que hi ha durant un any, etc.

Primeres utilitzacions de la Poisson

Un dels primers exemples de la utilització de la distribució de Poisson que recull la literatura (segle XIX) tractava del nombre de soldats prussians morts per una guitza de cavall.

Una variable aleatòria X segueix una distribució de Poisson de paràmetre λ, $\lambda > 0$, (escriurem $poiss(\lambda)$) si pren valors sobre tots els naturals amb funció de massa de probabilitat:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$$

on $k \geq 0$.

Observació

Fixeu-vos que per a valors de k grans el valor de la probabilitat $P(X = k)$ serà petit.

La distribució de Poisson té la propietat que tant l'esperança com la variància coincideixen amb el valor del paràmetre.

Si X és una variable aleatòria amb llei $poiss(\lambda)$ aleshores $E(X) = \lambda$ i $Var(X) = \lambda$.

Recordeu $\exp(-\lambda) = e^{-\lambda}$

Exemple del peatge

Sabem que el nombre de cotxes que passen durant 1 minut per un determinat peatge de l'autopista segueix una distribució de Poisson de paràmetre 5. Diem X a la variable aleatòria que compta el nombre de cotxes que passen pel peatge. Podem respondre preguntes del tipus següent:

a) Probabilitat que passin exactament 3 cotxes pel peatge durant 1 minut:

$$P(X = 3) = \frac{5^3}{3!}\exp(-5) = 0{,}1404$$

b) Probabilitat que passi algun cotxe:

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \exp(-5) = 0{,}9933$$

c) Nombre esperat de cotxes que passen pel peatge durant un minut:

$$E(X) = 5$$

La distribució de Poisson s'utilitza en certes condicions com una aproximació de la distribució binomial. Es considera que si tenim una variable aleatòria X amb distribució $B(n, p)$ amb n gran i p petita la podem aproximar per una variable Y amb distribució de Poisson de paràmetre np. Per exemple, fixat $k > 0$, sota les condicions anteriors, podem aproximar la probabilitat que una binomial de paràmetres n i p prengui el valor k:

Condicions per a fer l'aproximació

Per a poder fer l'aproximació, en alguns llibres donen la condició $p < 0{,}1$ i $np \leq 5$.

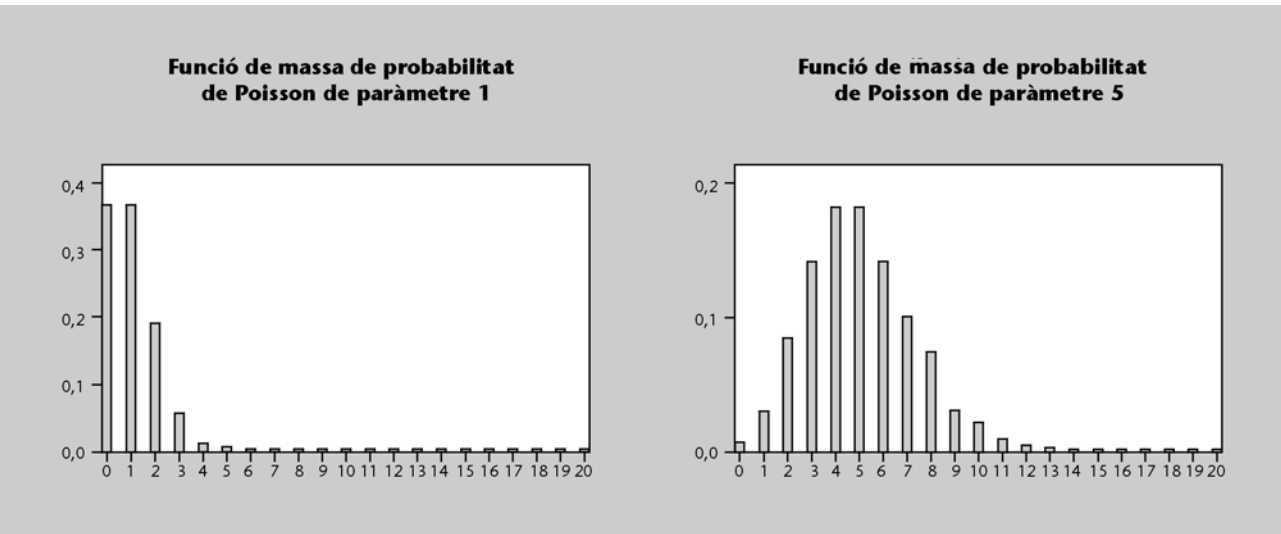
$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

per la probabilitat corresponent a la llei de Poisson de paràmetre np, és a dir:

$$\frac{(np)^k}{k!}\exp(-np)$$

que és més fàcil de calcular.

Observeu que estem aproximant una distribució binomial, que només pot prendre un nombre finit de valors, per una distribució de Poisson, que pren valors sobre tots els naturals. Això és possible perquè les probabilitats de la distribució de Poisson per a valors grans són pràcticament nul·les. Vegem alguns exemples de la funció de massa de probabilitats:



Exemple dels dos daus

Tirem dos daus 60 vegades i diem X a la variable aleatòria que compta el nombre de vegades que han sortit 2 sisos. Tal com hem vist, X segueix una distribució:

$$B\left(60, \frac{1}{6^2}\right)$$

Així podem calcular la probabilitat que surtin exactament 2 sisos 15 vegades que serà:

$$P(X = 15) = \binom{60}{15}\left(\frac{1}{6^2}\right)^{15}\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)^{45}$$

Aquest càlcul no és fàcil de fer. En canvi, si fem servir l'aproximació per la distribució de Poisson podem aproximar la probabilitat anterior:

$$\frac{\left(\frac{10}{6}\right)^{15}}{15!}\exp\left(-\frac{10}{6}\right)$$

que és més fàcil de calcular.

5. Resum

Hem presentat les distribucions discretes més habituals: la de Bernoulli, la binomial, la geomètrica i la de Poisson. Hem après a calcular probabilitats expressades a partir d'aquestes lleis i hem vist quines són les seves esperances i les seves variàncies.

Exercicis

1. A la carretera C–969 hi ha una única gasolinera. Els cotxes que hi passen per davant decideixen fer gasolina amb una probabilitat de 0,1. Sabem que entre les 3 i les 4 de la tarda han passat 10 cotxes per la carretera.

a) Quina és la probabilitat que com a mínim hagin decidit fer gasolina 8 cotxes?
b) Quants cotxes esperem que hagin parat a fer gasolina?

Suposem ara que el nombre de cotxes que passen entre les 4 i les 5 de la tarda per la carretera C-969 segueix una llei de Poisson de paràmetre 10.

c) Quina és la probabilitat que no hi passi cap cotxe?
d) Quina és la probabilitat que en passin almenys 3?
e) Quants cotxes esperem que hi passin?

2. Per problemes del nostre servidor de correu sabem que cada cop que rebem un correu electrònic hi ha una probabilitat de 0,05 que no el puguem llegir correctament.

a) Quina és la probabilitat que no puguem llegir correctament el tercer missatge?
b) Quina és la probabilitat que el tercer missatge sigui el primer que no puguem llegir correctament?
c) Quina és la probabilitat que puguem llegir correctament més de tres missatges abans que n'arribi algun que no puguem llegir correctament?
d) Quin missatge esperem que sigui el primer que no podem llegir correctament?

Solucionari

1. Diem X a la variable aleatòria que ens dóna el nombre de cotxes que han parat a la gasolinera entre les 3 i les 4. Segons l'enunciat, és clar que la variable X segueix una distribució $B(10,\ 0{,}1)$.

a) Aleshores, com que l'esdeveniment {almenys vuit cotxes parin a fer gasolina} és l'esdeveniment $\{X \geq 8\}$, hem de calcular:

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$

$$= \binom{10}{8}(0{,}1)^8(0{,}9)^2 + \binom{10}{9}(0{,}1)^9(0{,}9)^1 + \binom{10}{10}(0{,}1)^{10}(0{,}9)^0 =$$

$$= 45(0{,}1)^8(0{,}9)^2 + 10(0{,}1)^9(0{,}9)^1 + (0{,}1)^{10}(0{,}9)^0 \approx$$

$$\approx 0{,}0000003736$$

Com veieu, és molt petita.

b) El nombre de cotxes que esperen que parin a fer gasolina és l'esperança de X. Com que coneixem l'esperança d'una binomial, tenim:

$$E(X) = 10(0{,}1) = 1$$

és a dir, un cotxe.

Diem ara Y a la variable aleatòria que ens dóna el nombre de cotxes que paren a la gasolinera entre les 4 i les 5. És clar que la variable Y segueix una distribució *poiss*(10).

c) L'esdeveniment {no hi passi cap cotxe} és l'esdeveniment $\{Y = 0\}$, així que hem de calcular:

$$P(Y = 0) = \frac{10^0}{0!}\exp(-10) = \exp(-10) \approx 0{,}000045$$

d) D'una manera anàloga, calcularem:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)] =$$

$$= 1 - \left[\frac{10^0}{0!}\exp(-10) + \frac{10^1}{1!}\exp(-10) + \frac{10^2}{2!}\exp(-10)\right] =$$

$$= 1 - ([1 + 10 + 50]\exp(-10)) \approx 0{,}9973$$

e) El nombre de cotxes que esperen que passin vindrà donat per l'esperança de Y. Com que coneixem l'esperança d'una llei de Poisson, tenim:

$$\mathrm{E(Y)} = 10$$

és a dir, deu cotxes.

2.

a) El tercer missatge és com tots els altres i, per tant, hi ha una probabilitat de 0,05 que no el puguem llegir correctament.

Considerarem ara la variable aleatòria X que ens donarà el número del primer missatge que no podem llegir correctament. La variable X seguirà una distribució *geom*(0,05).

b) L'esdeveniment {el tercer missatge és el primer que no podem llegir correctament} és l'esdeveniment $\{X = 3\}$. Utilitzant la funció de massa de probabilitat d'una llei geomètrica tenim:

$$P(X = 3) = (0{,}95)^2\ (0{,}05) \approx 0{,}0451$$

c) Ara hem de calcular:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3)$$

I utilitzant la funció de distribució per una llei geomètrica tindrem:

$$P(X \geq 4) = 1 - [1 - (0,95)^3] = (0,95)^3 \approx 0,8574$$

d) El número del primer missatge que esperem no poder llegir correctament correspon a l'esperança de *X*, que serà:

$$E(X) = \frac{1}{0,05} = 20$$

és a dir, el vintè.

Variables aleatòries contínues

A continuació estudiarem les distribucions contínues. Fins ara hem vist les distribucions discretes que recordem que només podien prendre un nombre finit o numerable de valors.

Parlant sense gaire rigor, podem dir que les **variables aleatòries contínues** seran aquelles que poden prendre qualsevol valor en un interval dels reals. En podem donar molts exemples:

Terminologia

Nosaltres parlem de variables aleatòries contínues, però en molts llibres les anomenen *variables aleatòries absolutament contínues.*

a) El pes d'una persona adulta: podem pensar que pot prendre qualsevol pes entre 30 kg i 300 kg. A més, si tenim les eines de mesura necessàries, podem donar el pes amb tanta precisió com calgui.

b) La velocitat a la qual va un cotxe determinat: en aquest cas podrà agafar qualsevol velocitat entre 0 i 400 km/h.

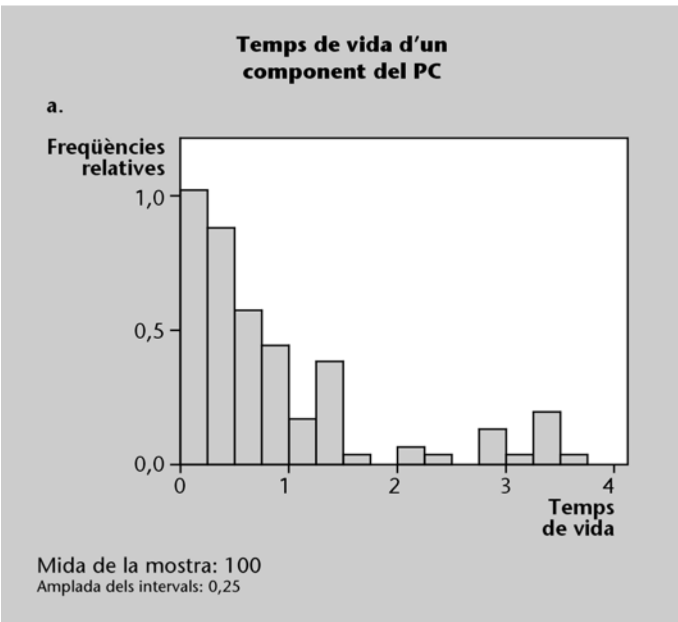
1. Funció de densitat

L'eina bàsica per a l'estudi d'aquest tipus de distribucions és l'anomenada *funció de densitat*. Per a poder-la entendre bé, la relacionarem primer amb els histogrames de densitats.

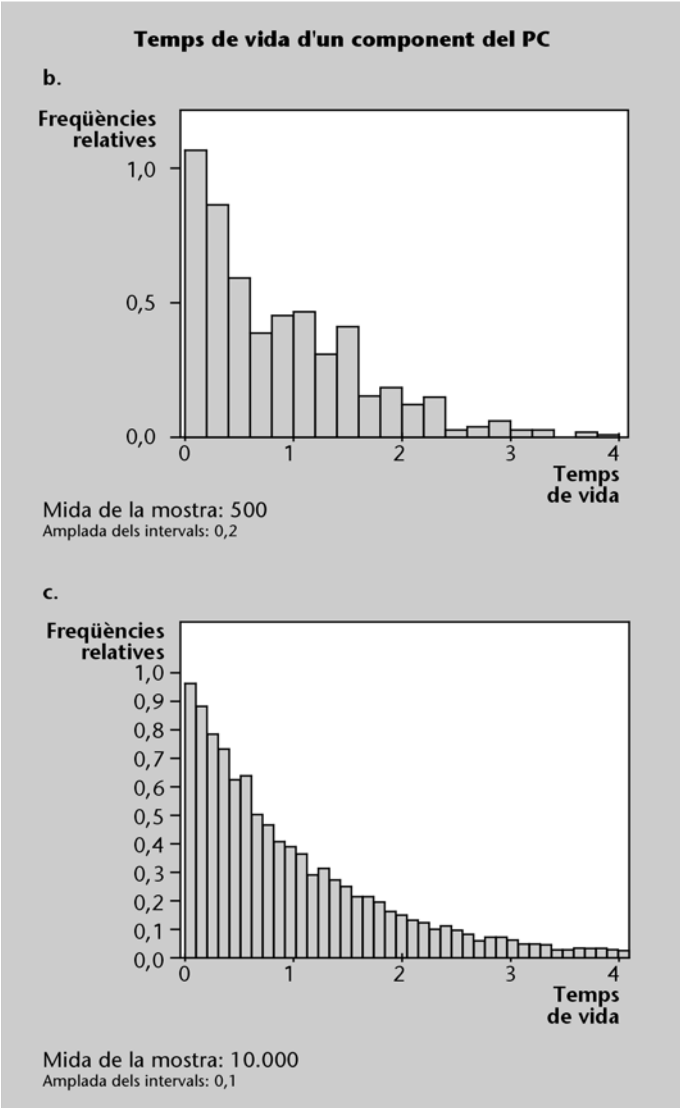
Suposem que volem estudiar el temps de vida d'un component determinat dels PC. Observem primer els temps de vida d'una mostra de 100 discos durs, després de 500 i després de 10.000. Representem les dades en els histogrames de densitats següents.

Temps de vida

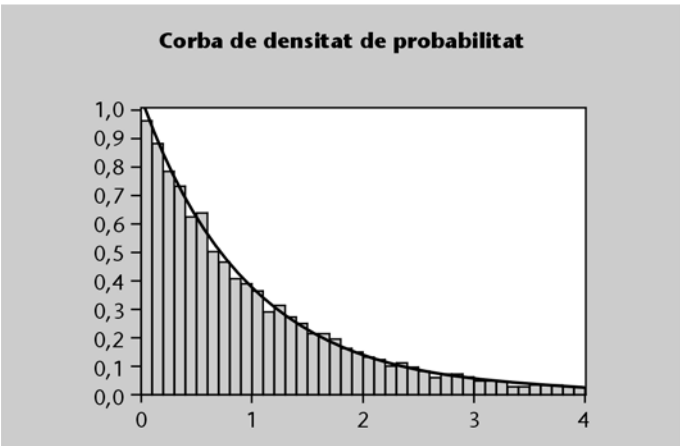
Quan parlem del temps de vida d'un disc dur ens referim al temps que durarà fins que es faci malbé.



Com que cada cop agafem mostres més grans, podem augmentar el nombre de classes i agafar intervals de longitud més petita, de manera que obtindrem els histogrames de densitat de probabilitat següents:



Si agafem cada vegada mostres més grans i fem un histograma de densitats amb un nombre més elevat de classes, el perfil de l'histograma de densitats s'acosta cada cop més a la corba següent, que anomenem **corba de densitat de probabilitat**:



A partir de les propietats de l'histograma és fàcil comprovar que aquesta corba també satisfà les condicions següents:

1) L'àrea total sota la corba de densitat és 1.

2) La probabilitat que el temps de vida d'un component estigui entre dos valors a i b és l'àrea sota la corba de densitat entre aquests punts.

3) La funció de densitat és sempre positiva.

Podem definir així la funció de densitat.

La **funció de densitat** d'una variable aleatòria X contínua és una funció $f(X)$ positiva tal que per tot $a \leq b$:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(X)dx$$

Signe de la funció de densitat

Observeu que la funció de densitat sempre ha de ser positiva.

De la definició és fàcil deduir que, donada f una funció de densitat, f verifica la propietat següent:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx = 1$$

Recordeu que...

... l'àrea sota una corba es podia calcular utilitzant integrals.

Exemples de funcions de densitat

Aquí teniu alguns exemples de funcions de densitat. És fàcil comprovar que compleixen les condicions:

$$f_1(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x), & x > 0 \end{cases}$$

$$f_2(X) = \begin{cases} x - \dfrac{9}{2}, & 5 < x \leq 6 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

$$f_3(X) = \begin{cases} 2, & -\dfrac{3}{2} \leq x \leq -1 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

En tots els casos és fàcil comprovar que es tracta de funcions positives i que la seva integral val 1.

Ara, si ens demanem quina és la probabilitat que el nostre disc dur hagi tingut un temps de vida d'exactament 3 anys (ni un segon més, ni un segon menys), la resposta haurà de ser zero. Pot semblar una paradoxa. El que ens està dient és que, com que la mesura teòrica del temps pot ser tan precisa com vulguem, la possibilitat que un component duri exactament 3 anys és pràcticament negligible. Podríem pensar la probabilitat que el temps de vida estigués entre 3 anys menys un segon i 3 anys més un segon. La probabilitat seria molt petita. I la podem fer encara més petita. Penseu en una centèsima de segon o una milionèsima, etc.

En una variable aleatòria contínua X, la probabilitat que $X = x$ és sempre zero, per a qualsevol x. Per aquest motiu, en aquest tipus de variables, només té sentit parlar de la probabilitat que la X pertanyi a un cert interval.

Si X és una variable aleatòria contínua aleshores:
$P(X = x) = 0$, per a tot x.

A partir de la funció de densitat podem recuperar, per a les variables contínues, alguns conceptes que ja havíem vist per a variables discretes.

2. Relació entre les funcions de distribució i de densitat. Càlcul de probabilitats

La definició de funció de distribució és la mateixa que la que vam utilitzar per a les variables discretes. Fixeu-vos, però, que utilitzant la funció de densitat podem calcular fàcilment els seus valors.

Donat x real, podem calcular la funció de distribució en aquest punt com:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

Recordatori

La funció de distribució es defineix com:

$$F(X) = P(X \leq x)$$

i arrenca sempres des de zero i arriba fins a u. A més, és sempre una funció creixent.

Les propietats de la funció de distribució són les mateixes que ja havíem comentat quan vam estudiar les variables discretes.

Ja hem vist com podem obtenir la funció de distribució a partir de la funció de densitat. Podem fer també el procés invers, ja que si calculem la funció de distribució integrant la funció de densitat, podem obtenir la funció de densitat derivant la funció de distribució.

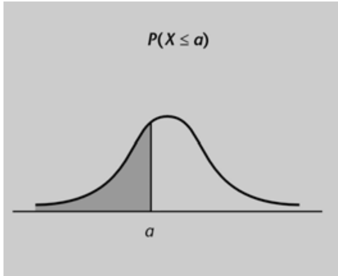
Si F és la funció de distribució d'una variable aleatòria i F és una funció derivable, aleshores F és la funció de distribució d'una variable contínua amb densitat F'.

Per les variables discretes...

... no es pot derivar la funció de distribució. Aquest tipus de variables no tenen associada una funció de densitat.

Evidentment, tant la funció de distribució com la funció de densitat caracteritzen la llei d'una variable aleatòria contínua, ja que permeten de calcular qualsevol probabilitat que es pugui descriure amb la variable aleatòria X.

Acabem aquest apartat veient com podem calcular diverses probabilitats a partir de la funció de densitat. També veurem com fer-ho amb la funció de distribució utilitzant la relació que coneixem entre les dues funcions.



1) Càlcul $P(X \leq a)$.

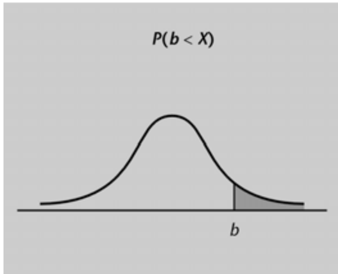
Observeu que la probabilitat correspon a l'àrea més fosca. En termes de la funció de densitat o de la funció de distribució tindrem:

$$P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

A més, com que la probabilitat que la variable prengui un valor concret és zero, tenim:

A vegades no és fàcil o no és possible calcular una integral.

$$P(X \leq a) = P(X < a)$$



2) Càlcul $P(b < X)$.

Ara en termes de la funció de densitat:

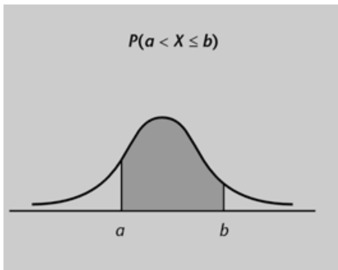
$$P(b < X) = \int_{b}^{\infty} f(x)dx$$

A més:

$$P(b < X) = 1 - P(X \leq b) = 1 - \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = 1 - F(b)$$

I com abans:

$$P(b < X) = P(b \leq X)$$



3) Càlcul de $P(a < X \leq b)$.

Fixeu-vos que, utilitzant:

$$\{a < X \leq b\} \cup \{X \leq a\} = \{X \leq b\}$$

tenim:

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

A més, tenim:

$$P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b)$$

Exemple del temps de processament

El temps que tarda (en minuts) el nostre ordinador a processar una determinada quantitat de dades segueix una variable aleatòria amb funció de densitat

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-(x-2)), & x > 2 \\ 0 & x \le 2 \end{cases}$$

Anomenem X aquesta variable aleatòria. Aleshores, utilitzant la funció de densitat, podem calcular la probabilitat de tota una sèrie d'esdeveniments:

a) probabilitat que tardi com a molt 5 minuts,
b) probabilitat que tardi més de 8 minuts i menys de 10,
c) probabilitat que tardi com a mínim 8 minuts,
d) probabilitat que tardi més de 4 minuts i menys de 10 si sabem que com a mínim en tarda 8.

a) $P(X \le 5) = \int_2^5 \exp(-(x-2))dx = \exp(2)\int_2^5 \exp(-x)dx =$

$= \exp(2)[-\exp(-x)]_2^5 = \exp(2)(-\exp(-5) + \exp(-2)) = 1 - \exp(-3)$

b) $P(8 < X < 10) = \int_8^{10} \exp(-(x-2))dx = \exp(2)\int_8^{10} \exp(-x)dx =$

$= \exp(2)[-\exp(-x)]_8^{10} = \exp(2)(-\exp(-10) + \exp(-8)) = \exp(-6) - \exp(-8)$

c) $P(X \ge 8) = \int_8^{\infty} \exp(-(x-2))dx = \exp(2)\int_8^{\infty} \exp(-x)dx =$

$= \exp(2)[-\exp(-x)]_8^{\infty} = \exp(2)(\exp(-8)) = \exp(-6)$

d) $P(4 < X < 10 | X \ge 8) = \dfrac{P(8 \le X < 10)}{P(X \ge 8)} = \dfrac{\exp(-6) - \exp(-8)}{\exp(-6)} =$

$= 1 - \exp(-2)$

Fixeu-vos que hi ha alguns esdeveniments que tenen clarament probabilitat zero, com: probabilitat que tardi com a molt –4 minuts (fixeu-vos que no té sentit) o la probabilitat que tardi exactament 10 minuts.
Podem fer també els càlculs anteriors utilitzant la funció de distribució. Calculem-la:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_2^x \exp(-(y-2))dy = \int_2^x e^{(-(y-2))}dy = \int_2^x e^{-y}e^2 dy = e^2\int_2^x e^{-y}dy = -e^2\left[e^{-y}\right]_2^x =$$
$$= -e^2\left[e^{-y}\right]_2^x = -e^2\left(e^{-x} - e^{-2}\right) = e^2\left(-e^{-x} + e^{-2}\right) = -e^{-x}e^2 + e^2e^{-2} = -e^{2-x} + 1 =$$
$$= 1 - e^{-(x-2)}$$

si $x \ge 2$ i $F(x) = 0$ si $x < 2$.

Observeu que si derivem la funció de distribució recuperem la funció de densitat.

Donem ara les respostes utilitzant la funció de distribució:

a) $P(X \le -4) = F(-4) = 0$
b) $P(X \le 5) = F(5) = 1 - \exp(-3)$
c) $P(8 < X < 10) = P(X \le 10) - P(X \le 8) = F(10) - F(8) = \exp(-6) - \exp(-8)$
d) $P(X \ge 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - P(X \le 8) = \exp(-6)$

3. Independència

El concepte d'independència s'estén també a les variables contínues. Encara que la idea és la mateixa que per a les variables discretes, hem de donar una altra caracterització ja que ara la condició $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ no té sentit.

Les variables aleatòries contínues X i Y són **independents** si:

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

per a tota possible parella de valors x i y.

Aquesta caracterització és equivalent a la que vam veure per a les variables aleatòries discretes. En tot cas, l'estudi en profunditat de la independència per a aquest tipus de variable supera els objectius d'aquest curs.

4. Esperança i variància

L'esperança i la variància es poden calcular també utilitzant la funció de densitat.

Recordem que per a calcular la funció de distribució per a una variable aleatòria discreta X, havíem de calcular el sumatori:

$$F(x) = \sum_{y \le x} P(X = y)$$

mentre que en el cas continu hem de calcular una integral de la funció de densitat del tipus:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

Així, sempre que passem a treballar amb variables aleatòries absolutament contínues el que hem de fer es convertir els sumatoris en integrals.

Per a passar de variables discretes a contínues...

... haurem de convertir els sumatoris en integrals.

Per a les variables discretes, podíem calcular l'esperança i la variància:

$$E(X) = \sum_{x} xP(X = x)$$

$$Var(X) = \sum_{x} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

Les definicions per al cas continu són les següents.

L'**esperança** d'una variable aleatòria contínua X, que denotarem per $E(X)$, es defineix com:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

La **variància** d'una variable aleatòria contínua X, que denotarem per $Var(X)$, es defineix com:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$$

Les propietats de l'esperança i la variància i la desigualtat de Txebivev que vam veure per a variables discretes en la sessió "Esperança i variància" (apartats 2, 3 i 4) continuen essent certes.

Recordatori

La variància es podia calcular com:

$E(X^2) - (E(X))^2$

Exemple del temps de processament

Tornem a l'exemple del temps de processament. Volem calcular ara el temps que esperem que tardi el procés. Ens caldrà, per tant, calcular l'esperança de la variable X. Si utilitzem la fórmula i fem integració per parts tindrem:

$$E(X) = \int_2^{\infty} x \exp(-(x-2))dx = \exp(2)\int_2^{\infty} x \exp(-x)dx =$$

$$= \exp(2)\left\{[-x \exp(-x)]_2^{\infty} + \int_2^{\infty} \exp(-x)dx\right\} =$$

$$= \exp(2)\{2\exp(-2) + \exp(-2)\} = 3$$

Per tant, esperem que tardi 3 minuts.

Considerem, ara, una variable amb funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Volem calcular l'esperança i la variància d'aquesta variable que anomenarem X:

$$E(X) = \int_0^2 x\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

I com que:

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2$$

tenim:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

5. Resum

En aquesta sessió hem après el concepte de variable aleatòria contínua. Hem estudiat la funció de densitat i hem estès a aquesta classe de variables els conceptes de funció de distribució, independència, esperança i variància que havíem estudiat per a les variables discretes.

Exercicis

1.

Sigui X una variable aleatòria contínua amb funció de densitat $f(x) = \frac{1}{9}x^2$, si $0 \le x \le 3$.

a) Comproveu que és una funció de densitat.
b) Calculeu la funció de distribució.
c) Calculeu: $P(X > 2)$ i $P(X = 5)$.
d) Calculeu l'esperança i la variància de X.

2.

Sigui X una variable aleatòria contínua amb funció de distribució:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{(x-1)^2}{9}, & 1 < x \le 4 \\ 1 & 4 < x \end{cases}$$

a) Calculeu la funció de densitat.
b) Calculeu: $P(X < 2)$, $P(2 < X \le 3)$, $P(X < 5)$ i $P(X > 5)$.
c) Calculeu l'esperança i la variància de X.

Solucionari

1.

a) Clarament és una funció de densitat, ja que es tracta d'una funció positiva i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{9}x^2 dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_0^3 = 1$$

b) Per a calcular la seva funció de distribució, per $x \in (0,3)$ hem de fer la integral:

$$\int_0^x \frac{1}{9}y^2 dy = \left[\frac{y^3}{27}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

Per tant, la funció de distribució és:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^3}{27}, & 0 < x \le 3 \\ 1 & 3 < x \end{cases}$$

c) La probabilitat $P(X = 5)$ és zero.

L'altra la podem calcular utilitzant la funció de densitat:

$$P(X > 2) = \int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^3 \frac{1}{9}x^2 dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_2^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

o la funció de distribució:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

d) Primer calculem l'esperança:

$$E(X) = \int_0^3 x\frac{x^2}{9}dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{9}{4}$$

I com que:

$$E(X^2) = \int_0^3 x^2\frac{x^2}{9}dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \frac{27}{5}$$

tenim:

$$Var(X) = E(X^2)-(E(X))^2 = \frac{27}{5}-\frac{81}{16} = \frac{432-405}{80} = \frac{27}{80}$$

2.

a) Per a obtenir la funció de densitat hem de derivar la funció de distribució. Fixeu-vos que la derivada de la funció:

$$\frac{(x-1)^2}{9}$$

és:

$$\frac{2(x-1)}{9}$$

Per tant, la funció de densitat és:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-1)}{9}, & 1 < x \le 4 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Com abans, és fàcil comprovar que es tracta d'una funció de densitat.

b) La probabilitat $P(X > 5)$ és clarament zero.
La probabilitat $P(X < 5)$ és clarament u.
La probabilitat $P(X < 2)$ la podem calcular utilitzant la funció de densitat:

$$P(X < 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)dx = \int_1^2 \frac{2(x-1)}{9}dx = \left[\frac{(x-1)^2}{9}\right]_1^2 = \frac{1}{9}-0 = \frac{1}{9}$$

o la funció de distribució:

$$P(X < 2) = P(X \le 2) = F(2) = \frac{1}{9}$$

La probabilitat $P(2 < X \le 3)$ la podem calcular també utilitzant la funció de densitat:

$$P(2 < X \le 3) = \int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 \frac{2(x-1)}{9}dx = \left[\frac{(x-1)^2}{9}\right]_2^3 = \frac{4}{9}-\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

o la funció de distribució:

$$P(2 < X \le 3) = P(X \le 3)-P(X \le 2) = F(3)-F(2) = \frac{4}{9}-\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

c) Una vegada coneguda la funció de densitat de probabilitat, calculem l'esperança i la variància de X seguint el mateix procediment que en l'exercici 1:

$$E(X) = \int_1^4 x\frac{2(x-1)}{9}dx = \left(\frac{2}{27}x^3 - \frac{1}{9}x^2\right)_1^4 = 3$$

I com que: $E(X^2) = \int_1^4 x^2\ \frac{2(x-1)}{9}dx = \left(\frac{1}{18}x^4 - \frac{2}{27}x^3\right)_1^4 = \frac{19}{2}$

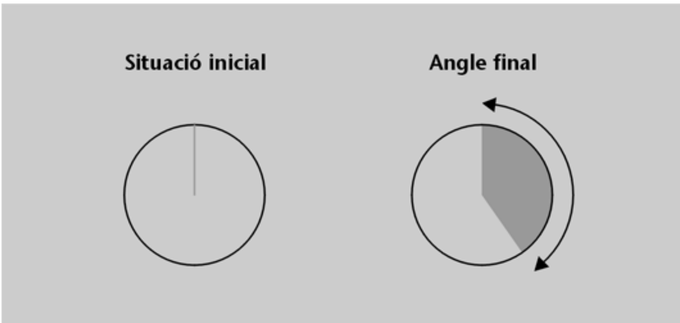
$$Var(X) = E(X^2)\ - (E(X))^2 = \frac{19}{2}\ - 9 = \frac{1}{2}$$

Algunes lleis contínues. La llei normal

Ara estudiarem algunes distribucions contínues. La llei contínua més important i que apareix constantment en diferents contextos és l'anomenada *llei normal*. En aquesta sessió la presentarem i l'estudiarem a fons. Comencem, però, per l'estudi d'altres distribucions importants, com són la distribució uniforme i la distribució exponencial.

1. Distribució uniforme

Comencem amb un exemple senzill. Imagineu que tenim una mena de ruleta i la fem girar al voltant del seu eix. Mesurem després l'angle que hem recorregut.



Suposem que en fer girar la nostra "ruleta" aquesta pot parar en qualsevol punt de la circumferència i que no hi ha punts on tingui més tendència a parar. Si diem X a la variable que ens dóna l'angle, tindrem que prendrà valors entre 0 i 2π. Sota les nostres hipòtesis, si ens demanen quina és la probabilitat que l'angle estigui entre zero i $\frac{\pi}{2}$, tenim:

Com ja sabeu...

... l'angle pot prendre un valor entre 0 i 2π.

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

ja que l'angle que hem demanat correspon a una quarta part dels angles possibles i hem suposat que la probabilitat està distribuïda d'una manera "uniforme".

Tenim així un primer exemple d'una distribució uniforme, en aquest cas a l'interval $(0,2\pi)$.

És habitual, però, prendre una variable uniforme amb valors entre 0 i 1. Com que la probabilitat de qualsevol nombre ha de ser la mateixa, la funció de densitat haurà de ser constant. Imposant que la integral de la funció de densitat ha de valer 1, obtenim que la funció de densitat ha de ser constant a 1.

La funció de densitat de la distribució **uniforme** (0,1) és:

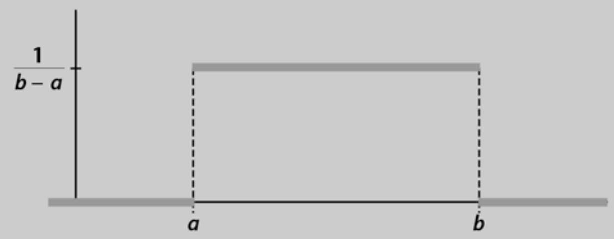
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

En general, podem definir una distribució uniforme en un interval (a,b). Seguint el mateix raonament anterior, podem obtenir ara la seva funció de densitat.

La funció de densitat de la distribució **uniforme** (a,b) és:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

La funció de densitat té la forma següent.



Com ja hem vist en la sessió anterior, a partir de la funció de densitat podem calcular les probabilitats que vulguem, la funció de distribució, l'esperança i la variància. Vegem aquests càlculs per a la distribució uniforme.

Considerem X una variable aleatòria amb distribució uniforme (0,1).

Calculem primer la probabilitat que X prengui valors entre 0,4 i 0,6. Utilitzant la funció de densitat:

$$P(0{,}4 \le X \le 0{,}6) = \int_{0{,}4}^{0{,}6} 1\,dx = 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}2$$

Fixeu-vos que la probabilitat depèn només de l'amplada de l'interval. Així, aquesta probabilitat serà la mateixa que la probabilitat d'obtenir un valor entre 0,1 i 0,3.

La funció de distribució és:

$$F(x) = \int_0^x 1\,dy = x$$

Així, podem calcular la probabilitat anterior utilitzant la funció de distribució:

$$P(0{,}4 \le X \le 0{,}6) = F(0{,}6) - F(0{,}4) = 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}2$$

Finalment, mitjançant integrals, obtenim la mitjana i la variància de la distribució:

$$E(X) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = E[(X - 0{,}5)^2] = \int_0^1 (x - 0{,}5)^2 dx = \frac{1}{3}(x - 0{,}5)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

Amb càlculs similars podem obtenir la funció de distribució, l'esperança i la variància d'una uniforme (a,b). Per exemple, la funció de distribució serà:

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}dy = \frac{x-a}{b-a}$$

si $a \le x \le b$. Podem calcular també l'esperança,

$$E(x) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{2(b-a)}x^2\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{1}{2}(b+a)$$

mentre que el càlcul de la variància es fa d'una manera semblant.

Si X és una variable aleatòria amb distribució uniforme, aleshores la seva funció de distribució és:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & b < x \end{cases}$$

A més, $E(X) = \frac{1}{2}(b+a)$ i $Var(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$

2. Distribució exponencial

Una distribució contínua molt important és l'anomenada *distribució exponencial*.

Moltes vegades està relacionada amb la distribució de Poisson que vam veure fa dues sessions. Recordem que la distribució de Poisson s'utilitza per a modelar el nombre de successos que es donen en una unitat de temps. Per exemple, consideràvem que podíem modelar amb una Poisson el nombre de peticions que rep un servidor d'Internet durant una hora o el nombre de clients que entren en una oficina d'una caixa d'estalvis durant un dia. En aquestes circumstàncies, la distribució exponencial serveix per a determinar la distribució de probabilitat del temps entre dos successos consecutius. Per exemple, en el cas del servidor d'Internet comentat abans, utilitzarem la distribució exponencial per a modelar el temps entre dues peticions. Com en el cas de la Poisson la distribució exponencial dependrà també d'un paràmetre que anomenarem λ.

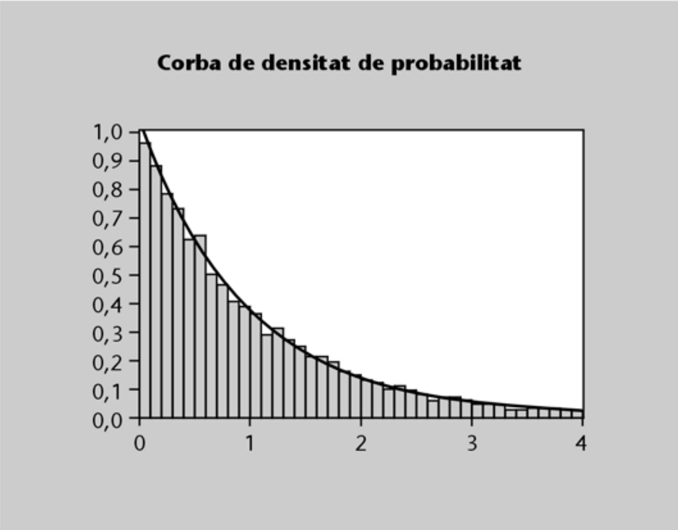
Considerem el peatge d'una autopista

El nombre de cotxes que passen pel peatge durant 1 minut hem vist que es pot representar amb una variable aleatòria Poisson. En canvi, utilitzem una exponencial per a modelar el temps que passa entre el primer i el segon cotxe (i entre el segon i el tercer, i entre el tercer i el quart i etc.).

La funció de densitat de la distribució exponencial de paràmetre λ és:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & 0 \le x \end{cases}$$

Hi ha una altra situació en què apareix sovint la distribució exponencial. A la sessió anterior hem estudiat els temps de vida del disc dur dels PC. A còpia d'anar recollint cada cop més dades arribàvem a veure que el perfil de l'histograma de freqüències tenia la forma següent.



Per a modelitzar els temps de vida també s'utilitza la distribució exponencial. Fixeu-vos que, en una distribució exponencial, com més temps passa menys probable és que es doni el succés.

Calculem-ne ara la funció de distribució, l'esperança i la variància. La funció de distribució serà aquesta:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\, dy = -e^{-\lambda y}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

si $0 \le x$ Calculem també l'esperança, on ens caldrà fer una integral per parts:

Valors de la variable

Aquesta distribució permet que la variable prengui qualsevol valor positiu. En realitat, a la pràctica, hi haurà un valor de manera que la probabilitat que la variable sigui més gran serà negligible.

$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

Si X és una variable aleatòria amb distribució exponencial de paràmetre λ aleshores la seva funció de distribució és:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 < x \end{cases}$$

A més, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ i $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Fixeu-vos que tant l'esperança com la variància es poden donar en termes del paràmetre de l'exponencial.

Exemple del temps de vida

El temps de vida d'una bombeta (en anys) segueix una exponencial de paràmetre 3. Diem X a la variable aleatòria que ens dóna aquest temps de vida. Aleshores tenim que la seva funció de densitat serà:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 3e^{-3x}, & 0 \le x \end{cases}$$

La seva funció de distribució serà:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-3x}, & 0 < x \end{cases}$$

El temps de vida esperat de la bombeta serà de 1/3 i la seva variància de 1/9.
A partir d'aquí també podem calcular qualsevol probabilitat:
a) probabilitat que duri menys d'un any; si ho resolem amb la funció de densitat:

$$P(X < 1) = \int_0^1 3\exp(-3x)dx = [-\exp(-3x)] = 1 - \exp(-3) = 0{,}9502$$

b) probabilitat que duri més de 2 anys; si ho resolem amb la funció de distribució:

$$P(X > 2) = 1 - F(2) = \exp(-6) = 0{,}0025$$

Notació

Recordeu que a vegades utilitzem la notació e^{-x} i a vegades *exp*(–*x*).

3. Distribució normal

La llei més utilitzada en estadística és l'anomenada *llei normal*. La corba normal apareix en molts fenòmens naturals: en l'alçada d'una espècie d'arbres, en el nombre de glòbuls vermells a la sang i en la majoria de característiques biològiques que es poden determinar. També la distribució dels errors en un procés de fabricació s'acosta a una llei normal, la qual cosa fa que sigui una eina fonamental en els processos de control de qualitat.

Una variable aleatòria X segueix una llei normal amb mitjana μ i variància σ^2, que denotarem per $N(\mu, \sigma^2)$, si la seva funció de densitat és:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$

per a tot x real.

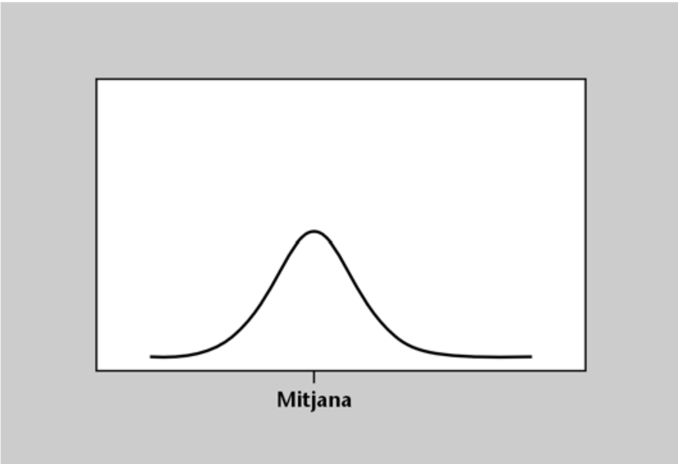
El nom de *normal*...

... prové del fet que es pensava que era el patró natural de les distribucions.

A primer cop d'ull, fixeu-vos en dues coses importants:

- la funció de densitat és una mica complicada.
- la llei normal queda determinada per dos paràmetres, μ (serà l'esperança) i σ^2 (serà la variància).

Parlem primer de l'expressió de la funció de densitat. Segurament no us dirà res, però si la dibuixem, ens trobem amb la forma següent:



Campana de Gauss

Aquesta forma és coneguda amb el nom de *la campana de Gauss*. El nom de Gauss prové del fet que ell va ser un dels primers a deduir-la quan estudiava els errors en observacions astronòmiques. Gauss va ser un famós matemàtic alemany del segle XVIII.

En aquest cas no tenim una expressió explícita per a la funció de distribució. Evidentment la podem donar com la integral de la densitat, és a dir, si X és una variable aleatòria amb llei $N(\mu, \sigma^2)$ la seva funció de distribució és:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right) dy$$

però com que no sabem calcular aquesta integral, aquesta expressió no ens serveix de gaire i haurem d'utilitzar les anomenades *taules de la normal*.

3.1. El paper dels paràmetres

Com ja hem comentat, la llei normal queda determinada pels dos paràmetres: μ i σ^2.

Si X és una variable aleatòria $N(\mu, \sigma^2)$, aleshores $E(X) = \mu$ i $Var(X) = \sigma^2$.

El càlcul de l'esperança i la variància requereix resoldre unes integrals força complicades.

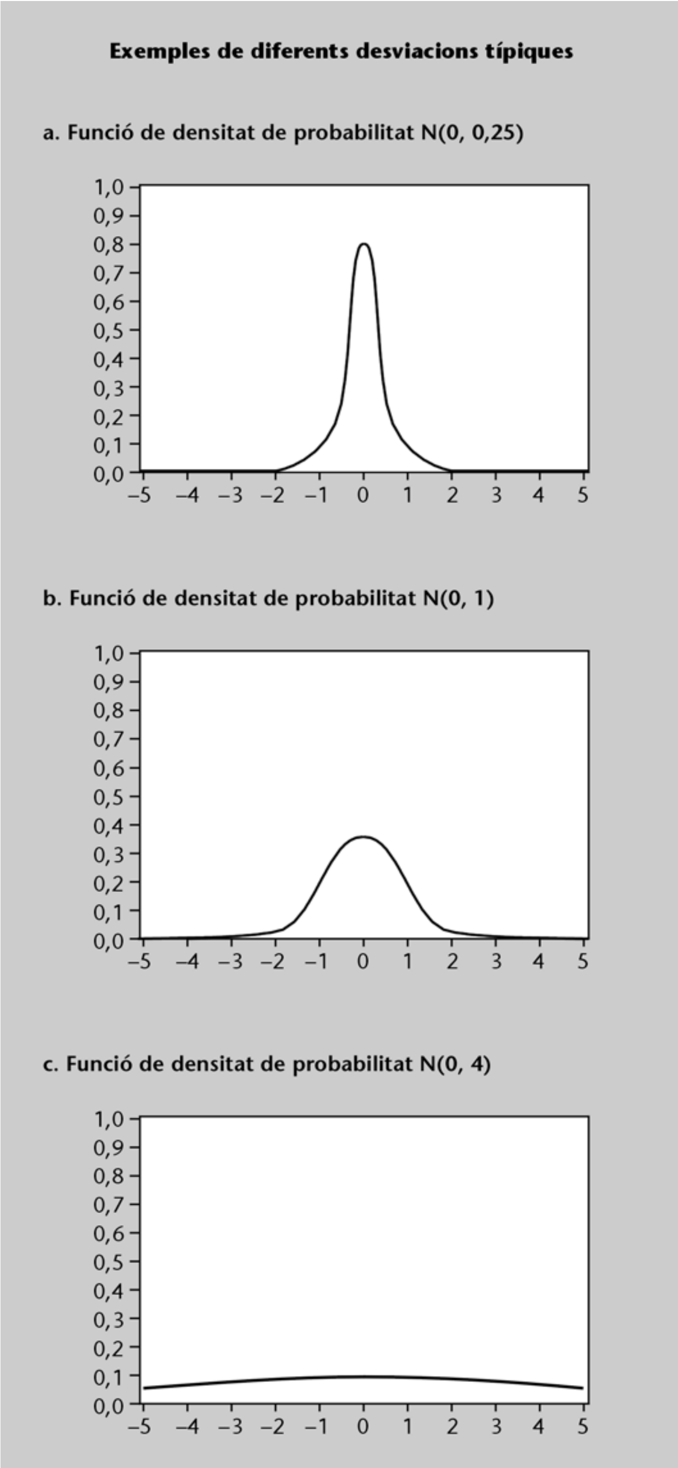
El valor de la μ ens dóna el punt on hi ha el centre de la corba. En canvi, la σ^2 afecta la forma de la corba: si la σ^2 és petita, la corba serà més punxeguda i, per tant, es concentrarà més massa en un entorn de la μ (bé, això ja ho sabíem, ja que precisament la σ^2 ens dóna la variància), mentre que si la σ^2 és gran, la dispersió serà més gran i la corba serà més plana.

En alguns llibres (o programari), en lloc de donar la variància ens donen la desviació típica i, per tant, tindrem lleis normals $N(\mu, \sigma)$. Així, si ens diuen que tenim una $N(0,4)$, hem de saber si el 4 es refereix a la desviació típica o a la variància. Nosaltres fem referència sempre a la variància.

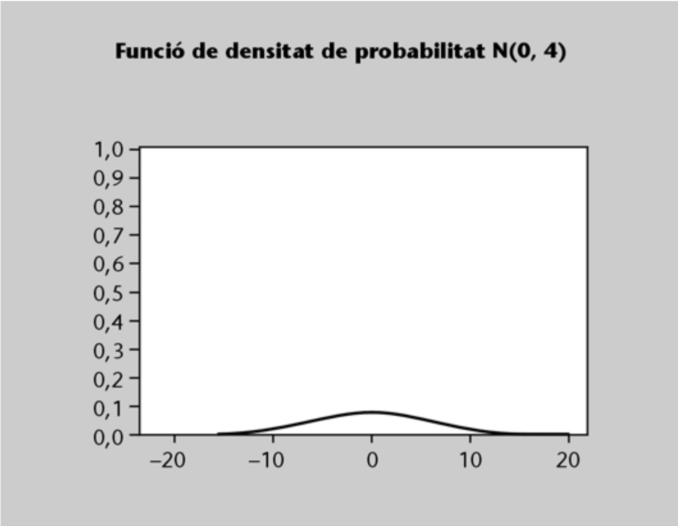
Alerta

Aneu sempre en compte quan us donen una llei normal. Cal saber si us estan donant la variància o la desviació típica.

Vegem el paper de la desviació en els gràfics següents (dibuixem la densitat de lleis normals $N(0, 0{,}25)$ $N(0,1)$i $N(0,4)$, en l'interval [–5,5]).



Com podeu veure, les formes són diferents. Per tal que veieu bé la darrera potser serà millor veure-la amb una altra escala:



En les representacions gràfiques hem vist dibuixat què passa quan varia la σ. Quan varia la μ l'únic que hem de fer és una translació i moure la corba cap a la dreta o cap a l'esquerra.

3.2. Estandarditzar

Una propietat especial de la llei normal ens permet de reduir l'estudi de qualsevol probabilitat de qualsevol variable normal a l'estudi d'una llei $N(0,1)$. Aquesta llei l'anomenarem una *distribució normal estàndard*.

La distribució **normal estàndard** és la distribució normal amb esperança 0 i variància 1. La seva funció de densitat és:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Normalment la denotarem amb la lletra Z.

Suposeu que teniu X una variable aleatòria amb distribució $N(\mu, \sigma^2)$, si utilitzem la funció de densitat tenim:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)dx$$

Però, si fem el canvi de variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, podem escriure aquesta darrera integral com:

$$\int_{\frac{x_1-\mu}{\sigma}}^{\frac{x_2-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)dz$$

Repasseu com es feia un canvi de variable.

Fixeu-vos que d'aquesta manera podem escriure:

Normal estàndard

La llei normal estàndard és important perquè podem reduir qualsevol altra llei normal a una llei normal estàndard.

$$P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) = \int_{\frac{x_1-\mu}{\sigma}}^{\frac{x_2-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)dz$$

on la Z indica la variable $\frac{x-\mu}{\sigma}$.

Així, la probabilitat que la variable $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ prengui valors en l'interval $\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}, \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)$ ve donada per la integral entre aquests punts de la funció de densitat d'una distribució normal estàndard. Per tant, Z haurà de ser una llei normal estàndard.

Si X és una variable aleatòria amb distribució $N(\mu, \sigma^2)$, aleshores la variable $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ seguirà una distribució normal estàndard, és a dir, serà una $N(0,1)$.

La conseqüència fonamental d'aquesta propietat és que els càlculs de l'àrea sota la corba en termes de la desviació són els mateixos per a totes les densitats normals.

Si X és una variable aleatòria amb distribució $N(\mu, \sigma^2)$ i Z una distribució $N(0,1)$, aleshores per a tota parella k_1,k_2 de nombres positius:

$$P(\mu - k_2\sigma \le X \le \mu + k_1\sigma) = P(-k_2 \le Z \le k_1)$$

En particular, per a tot k:

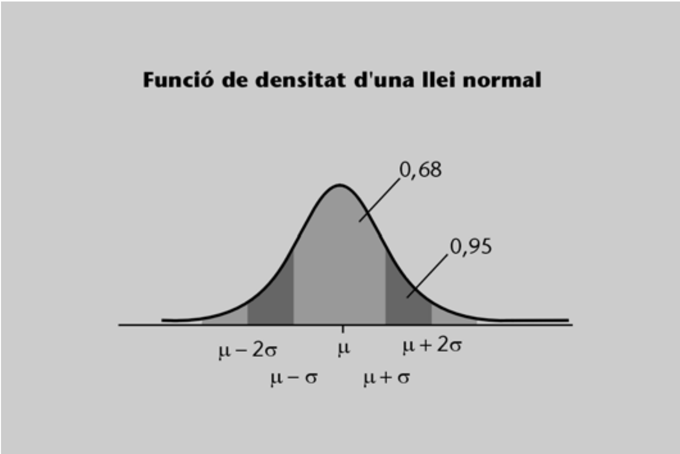
$$P(\mu - k\sigma \le X \le \mu + k\sigma) = P(-k \le Z \le k)$$

on k no ha de ser necessàriament enter.

Així, trobem:

- la probabilitat de l'interval donat per una desviació estàndard a una banda i l'altra de la mitjana és sempre la mateixa i és de 0,68. Podem dir, per tant, que en una distribució normal, el 68% dels individus prenen valors entre la mitjana menys una desviació estàndard i la mitjana més una desviació estàndard

- si agafem dues desviacions estàndard, la probabilitat és de 0,95
- si en considerem tres, la probabilitat és de 0,997



- podem fer també el procés invers: si volem tenir una probabilitat del 0,90, hem d'agafar l'interval donat per la mitjana menys 1,645 desviacions estàndard i la mitjana més 1,645 desviacions estàndard, és a dir:

$$P(\mu - 1{,}645\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}645\sigma) = 0{,}90$$

Exemple de les resistències

La fàbrica XSE fabrica unes resistències amb un valor nominal de 100 Ω (Ω és el símbol de l'ohm, unitat de resistència), però en realitat la resistència de les resistències segueix una distribució normal amb mitjana 100,6 i desviació estàndard 3. Per tant, tindrem:
a) el 68% de les resistències tindran un valor real entre 97,6 Ω i 103,6 Ω
b) el 95% de les resistències tindran un valor real entre 94,6 Ω i 106,6 Ω
c) el 99,7% de les resistències tindran un valor real entre 91,6 Ω i 109,6 Ω
d) si volem un interval que contingui el valor real del 90% de les resistències, hem de considerar l'interval 95,6650 Ω i 105,5350 Ω

Tot això ens permet de:

- comparar valors de diferents lleis normals per veure quins són més probables.
- reduir els càlculs de probabilitats de qualsevol variable normal a l'estudi de la distribució normal estàndard.

Vegem primer com comparar diversos valors de diferents poblacions normals. Per exemple, imagineu que les alçades dels homes d'una determinada tribu de la selva de l'Amazònia segueixen una distribució normal amb mitjana 167 cm i desviació estàndard 3, mentre que les alçades de les dones segueixen també una distribució normal però ara amb mitjana 162 cm i desviació estàndard 2. Agafem un home i una dona d'aquesta tribu i els mesurem: l'home fa 168 cm i la dona 163 cm. És clar que la dona és més baixa que l'home però dins dels seus sexes, quin dels dos es pot considerar més alt?

Per a respondre aquesta pregunta, el que fem és estandarditzar els dos valors, és a dir, passar-los a observacions d'una normal estàndard i després comparar-los. Així, el valor estandarditzat per a l'home és:

$$\frac{168-167}{3} = 0{,}333$$

i per a la dona:

$$\frac{163-162}{2} = 0{,}5$$

Com que 0,333 < 0,5 i les dades fan referència a la mateixa distribució, la dona és, dintre del seu sexe, més alta que l'home.

Donada x una observació d'una llei normal amb mitjana μ i variància σ^2, el seu valor estandarditzat és $\frac{x-\mu}{\sigma}$.

Exemple de les resistències

Sabem que la fàbrica XSE fabrica unes resistències amb un valor nominal de 100 Ω, però en realitat segueixen una distribució normal amb mitjana 100,6 i desviació estàndard 3. D'altra banda, la SXX fabrica també resistències amb un valor nominal de 100 Ω, però ara en realitat segueixen una distribució normal amb mitjana 100,2 i desviació estàndard 4.

Comprem una resistència a la fàbrica SXX i el seu valor real és de 106 i una resistència a la fàbrica XSE amb un valor real també de 106. Així, els seus valors estandarditzats són:

$$106-100{,}6/3 = 1{,}8$$

per la resistència comprada a XSE i de:

$$106-100{,}2/4 = 1{,}45$$

per la comprada a la fàbrica SXX. Per tant, la de XSE està en una banda alta si la comparem amb la de SXX.

3.3. Càlcul de probabilitats usant la llei normal estàndard

Mitjançant el procés d'estandardització, el càlcul de probabilitats per una llei normal $N(\mu, \sigma^2)$ es redueix a l'avaluació de la funció de distribució d'una normal estàndard. Com ja hem vist abans, si X és una variable aleatòria $N(\mu, \sigma^2)$, aleshores:

$$P(X \le x) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

on Z és una distribució normal estàndard. També podem escriure:

$$P(X \le x) = \varnothing\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

on $\varnothing$ denota la funció de distribució d'una distribució normal estàndard.

Observació

Com que es tracta d'una llei contínua és el mateix $P(X \le x)$ que $P(X < x)$.

Per a la normal estàndard fins fa poc s'utilitzaven unes taules estadístiques, però actualment és molt més senzill i potent utilitzar eines informàtiques. De tota manera, per acabar la sessió calculem algunes probabilitats utilitzant les taules (podeu repetir els exemples amb el programari estadístic que utilitzeu). Fixeu-vos primer que en la taula que utilitzarem ens donen la cua superior de la distribució, és a dir, per cada a, ens donen:

Programari i fulls de càlcul

A part del programari estadístic els fulls de càlcul també ens permeten de calcular probabilitats, i no sols per les lleis normals.

$$P(Z \geq a)$$

i tenim:

$$P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \varnothing(a)$$

on recordem que $\varnothing$ és la funció de distribució d'una distribució normal estàndard.

Repasseu el càlcul de probabilitats de la sessió "Variables aleatòries contínues".

Fixeu-vos també que la funció de densitat de la distribució normal estàndard és simètrica. Això fa que tinguem les propietats següents:

Simplificació

Reduïm tots els càlculs a expressions del tipus $P(Z \geq a)$ que són els que surten a les taules.

Si Z és una variable aleatòria amb distribució normal estàndard i $x > 0$, aleshores $P(Z < -x) = P(Z > x)$ i $P(Z > -x) = P(Z < x)$.

Aquesta darrera propietat de simetria ens serà molt útil per a calcular probabilitats mitjançant les taules.

Consulteu les taules de la distribució normal.

Exemple del càlcul de probabilitats

Suposem que tenim una variable aleatòria X amb distribució normal de mitjana 6 i variància 4; calculem el següent:

a) probabilitat que X prengui valors més petits que 8:

$$P(X \leq 8) = P\left(\frac{X-6}{2} \leq \frac{8-6}{2}\right) = P\left(\frac{X-6}{2} \leq 1\right) = 1 - P\left(\frac{X-6}{2} \geq 1\right)$$

Mirant la taula, trobem pel punt 1,00 (la fila ens dóna les unitats i les dècimes –agafem 1,0– i la columna la centèsima –agafem 0,00) el valor 0,1587. Així:

$$P\left(\frac{X-6}{2} \geq 1\right) = 0{,}1587$$

i, per tant:

$$P(X \leq 8) = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$$

b) probabilitat que X prengui valors més grans que 3:

$$P(3 \leq X) = P\left(\frac{3-6}{2} \leq \frac{X-6}{2}\right) = P\left(-1{,}5 \leq \frac{X-6}{2}\right)$$

i per simetria de la normal:

$$P\left(-1{,}5 \leq \frac{X-6}{2}\right) = P\left(1{,}5 \geq \frac{X-6}{2}\right) = 1 - 0{,}0668$$

c) valor a tal que la probabilitat que X sigui més gran que a sigui 0,22:

$$0{,}22 = P(X \geq a) = P\left(\frac{x-6}{2} \geq \frac{a-6}{2}\right)$$

A la taula no trobem la probabilitat 0,22. Trobem la 0,2207 (correspon al punt 0,77) i la 0,2177 (correspon al punt 0,78). Agafarem aleshores el punt intermedi, és a dir, 0,775 (amb un ordinador trobaríem el valor exacte). Per tant:

$$\frac{a-6}{2} = 0{,}775$$

i tindrem $a = 7{,}55$.

4. Resum

Hem vist les distribucions contínues més habituals: la uniforme, l'exponencial i la normal. Hem fet un estudi a fons d'aquesta darrera i hem vist el procés d'estandardització i la reducció de qualsevol càlcul amb una llei normal a un càlcul amb una llei normal estàndard. Hem vist també com utilitzar les taules de la distribució normal.

Exercicis

1. Sabem que el temps que passa entre que obrim la nostra botiga d'ordinadors i l'arribada del primer client segueix una distribució exponencial de paràmetre 0,1 (en minuts). Si obrim a dos quarts de deu, calculeu:
a) la probabilitat que arribi després de tres quarts de deu.
b) la probabilitat que arribi exactament a les 9.42 h.
c) la probabilitat que no ens deixi ni els cinc minuts necessaris per a fumar una cigarreta.
d) l'hora que esperem que arribi.

2. L'any 1972 l'alçada dels homes en edat militar a l'Estat espanyol seguia una distribució normal amb mitjana 169 cm i desviació estàndard de 6 cm. Calculeu:
a) Si eren rebutjats els més baixos de 150 cm i els més alts de 200 cm, quina proporció d'homes tenien la sort de ser rebutjats?
b) Si un home en edat militar mesurava 175 cm i es trobava, per exemple en un bar, un altre home en edat militar, quina és la probabilitat que el primer fos més alt que el segon? I que fossin exactament iguals?
c) Calculeu el valor estandarditzat de la vostra alçada i la probabilitat que un home en edat militar de l'any 1972 fos més alt que vosaltres. Creieu que aquest resultat encara és cert?
d) Determineu un interval en què es trobin les alçades del 90% dels homes en edat militar.

Solucionari

1. Direm X a la variable que ens dóna el temps entre que obrim i l'arribada del primer client. Aleshores haurem de calcular:

a) Farem aquest apartat utilitzant la funció de densitat:

$$P(X > 15) = \int_{15}^{\infty} (0{,}1)\exp(-0{,}1x)dx = [-\exp(-0{,}1x)]_{15}^{\infty} = \exp(-1{,}5) = 0{,}2231$$

b) Com que es tracta d'una llei contínua la probabilitat que prengui un valor concret serà zero, és a dir:

$$P(X = 12) = 0$$

c) Farem aquest apartat utilitzant la funció de distribució:

$$P(X < 5) = P(X \le 5) = F(5) = 1 - \exp(-0{,}5) = 0{,}3935$$

d) L'esperança de la variable aleatòria X és $1/0{,}1 = 10$. Esperem, per tant, que el primer client arribi a les 9.40 h.

2. Aquest problema el farem utilitzant la taula de la distribució normal estàndard. De totes maneres, si després el repetiu usant un programari estadístic, trobareu uns resultats més precisos i més ràpidament.

Diem Y a la variable que ens dóna l'alçada d'un home en edat militar l'any 1972.

a) Hem de calcular:

$$P(Y < 150) + P(Y > 200)$$

Tenim:

$$P(Y < 150) = P\left(\frac{Y-169}{6} < \frac{150-169}{6}\right) = P\left(\frac{Y-169}{6} \geq 3{,}1667\right) = 0{,}0008 \text{ i}$$

$$P(Y > 200) = P\left(\frac{Y-169}{6} > \frac{200-169}{6}\right) = P\left(\frac{Y-169}{6} \geq 5{,}1667\right)$$

que mirant a la taula és negligible. Per tant, ens surt una probabilitat de 0,0008.

b) Ens demanen primer:

$$P(Y > 175) = P(Y < 175) = P\left(\frac{Y-169}{6} < \frac{175-169}{6}\right) = P\left(\frac{Y-169}{6} < 1\right) =$$

$$= P(Z < 1) = 1 - P(Z \geq 1) = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$$

i la probabilitat que mesurin exactament igual serà:

$$P(Y = 175) = 0$$

ja que la normal és una distribució contínua.

c) Suposem que un home fa 181 cm d'alt. El seu valor estandarditzat serà:

$$\frac{181-169}{6} = 2$$

i si mirem la taula de la normal tenim que només el 2,28% dels homes en edat militar eren més alts que el nostre home. Creiem que avui en dia això no és cert!

d) Hem d'agafar l'interval donat per la mitjana menys 1,645 desviacions estàndard i la mitjana més 1,645 desviacions estàndard, és a dir:

$$(169 - (1{,}645 \cdot 6);169 + (1{,}645 \cdot 6)) = (159{,}13;178{,}870)$$

Processos estocàstics

Acabarem aquest mòdul amb una darrera sessió dedicada a introduir, de manera bàsicament descriptiva, el concepte de procés estocàstic. Encara que la utilització de processos estocàstics depassa àmpliament l'objectiu d'aquest curs, a causa de la seva importància (per exemple, s'utilitzen processos estocàstics en el tractament d'imatges, el reconeixement de la veu o l'estudi de cues) és interessant que en conegueu algunes idees. Veureu, però, que el tractament d'aquesta sessió és una mica diferent de les altres, és força més curta i no hi trobareu exercicis per a fer.

1. Definicions

En certs experiments aleatoris el resultat que obtenim no és un valor numèric concret, sinó que és una funció que depèn del temps. Aquestes situacions no les podem modelar utilitzant variables aleatòries, haurem de fer servir els anomenats *processos estocàstics*.

Estocàstic o aleatori

Podem usar indistintament els termes *processos estocàstics* o *processos aleatoris*.

Exemples de situacions que no podem modelar amb una variable aleatòria

N'hi ha moltes. Vegem-ne alguns exemples: la temperatura al Tibidabo al llarg d'un dia (temperatura cada 15 minuts), el comportament del consum d'electricitat a Palau de Plegamans durant un dia (consum a cada moment) o els correus electrònics que ens arriben al llarg d'un dia.

Considerem, per exemple, el consum d'electricitat a la ciutat de Barcelona durant un dia. Suposem que a cada instant t ($t = 0$ indicarà el principi del dia) sabem que el consum d'electricitat segueix una distribució normal amb mitjana μ_t i variància σ_t^2 (lògicament el consum depèn de l'hora en què estem de manera que hem suposat que la mitjana i la variància depenen de t). Aquest consum és una variable aleatòria que denotarem per $X(t)$. És a dir, definim $X(t)$ com el consum d'electricitat de la ciutat de Barcelona a l'instant t.

Però el més probable és que a nosaltres no ens interessi especialment el consum en un instant concret, sinó que vulguem estudiar com es comporta el consum d'electricitat al llarg de tot el dia. Així, en realitat, ens interessa considerar la família de variables aleatòries:

Unitat de temps

Donarem el temps en segons: 24 hores = 86.400 segons.

$$\{X(t), 0 \leq t \leq 86400\}$$

Aquesta família de variables aleatòries és un procés estocàstic.

Un **procés estocàstic** és una família de variables aleatòries

$$\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$$

indexades pel temps.

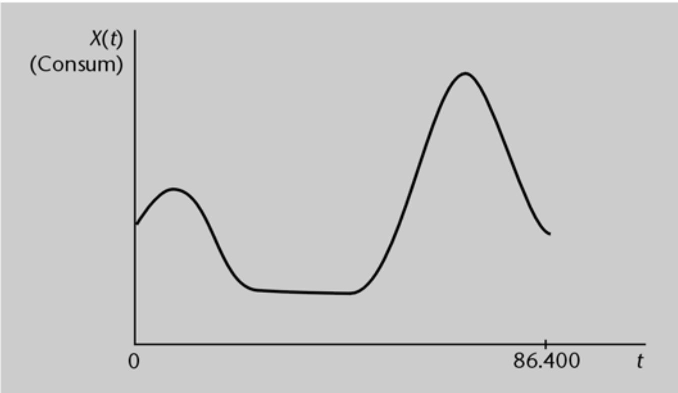
Observació

Per cada instant t fixat, $X(t)$ és una variable aleatòria.

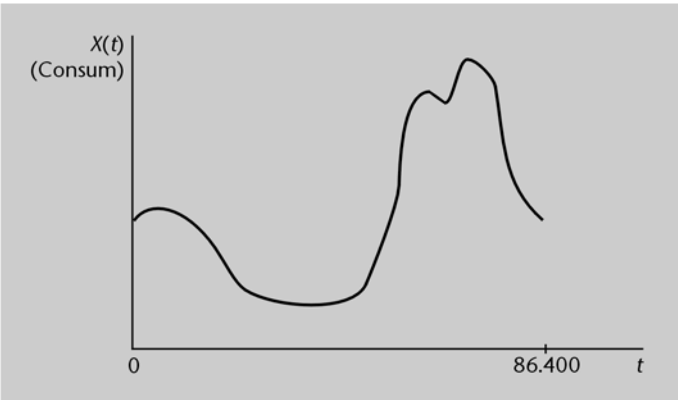
Com ja hem comentat, el resultat de la realització d'una variable aleatòria és un valor numèric. En canvi, el resultat de la realització d'un procés estocàstic és una funció que depèn del temps i que anomenarem *trajectòria*.

Una **trajectòria** és el resultat de la realització d'un procés estocàstic.

En el cas anterior, en què estudiàvem el consum d'electricitat a Barcelona, si agafem un dia determinat podem obtenir la trajectòria (realització) següent:



mentre que per un altre dia en podem obtenir una altra (realització) diferent, com per exemple:



Veurem dues classes de processos estocàstics: els **processos a temps discret** i els **processos a temps continu**.

En un procés a temps discret tenim una família de variables aleatòries indexada només sobre els naturals:

Notació

En els processos a temps discret utilitzem $X(n)$ en lloc de $X(t)$.

$$\{X(n),\ n \in N\}$$

En un procés a temps continu tenim una família de variables aleatòries indexada en un interval:

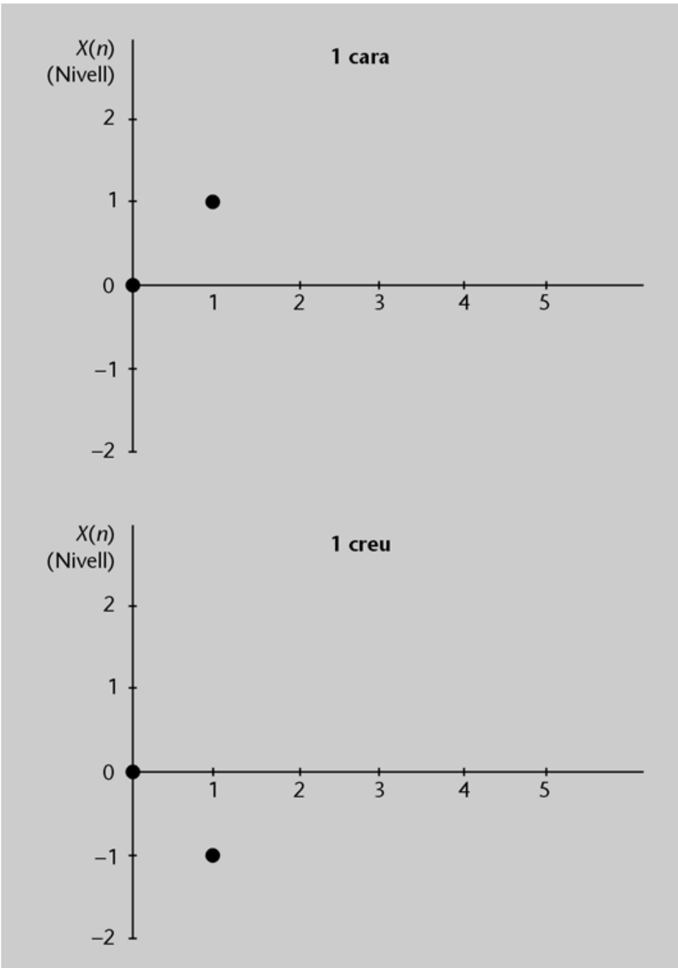
$$\{X(t),\ 0 \le t \le T\}$$

Principalment n'estudiarem un de cada tipus: el passeig aleatori (procés a temps discret) i el procés de Poisson (procés a temps continu). Per la seva importància, farem també una petita referència al procés de Wiener.

2. Processos aleatoris a temps discret: el passeig aleatori

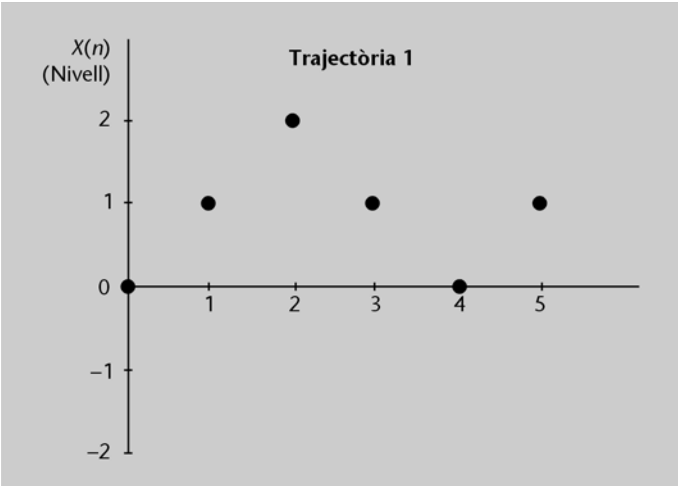
El passeig aleatori és un dels processos aleatoris més senzills. Explicarem com el podem construir.

Començarem (n = 0) a l'inici (punt (0,0). Aleshores, llancem una moneda i, si surt cara "C", pugem un nivell i, si surt creu "+", en baixem un. Diem X(1) a la variable aleatòria que ens dóna el número de nivell on anem a parar després del primer llançament. Així, tenim, en el primer pas, dues possibles trajectòries:

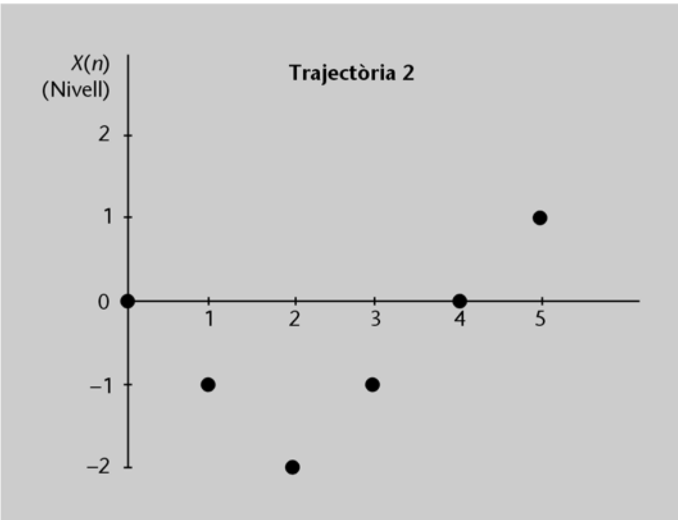


Podem repetir aquest procés indefinidament. A l'instant n llancem de nou una moneda i segons el resultat pugem (cara) o baixem (creu). Diem ara $X(n)$ a la variable que ens dóna el nivell on hem anat a parar a l'instant n.

Per exemple, si amb el resultat dels cinc primers llançaments és (C,C,+,+,C) tenim la trajectòria



i clarament $X(5)$ val 1 en aquesta trajectòria, mentre que si el resultat dels cinc llançaments és (+,+,C,C,C), arribem al mateix punt però amb una trajectòria diferent.



Aleshores, el procés $\{X(n),\ n \geq 0\}$ és un **passeig aleatori**.

Estudiarem algunes propietats del passeig aleatori. Diem $I(k)$ a la variable aleatòria que val 1 si ens surt una cara quan fem el k-èsim llançament de la moneda i que val –1 si ens surt una creu. Aleshores:

*** En anglès, el passeig aleatori s'anomena *random walk*.**

$$X(n) = \sum_{k=1}^{n} I(k)$$

Aquesta manera d'expressar cada $X(n)$ ens permet d'estudiar algunes de les seves propietats. Observeu, primer, que és molt fàcil comprovar:

$$E(I(k)) = P(I(k) = 1) - P(I(k) = -1) = 0$$

$$Var(I(k)) = 1^2 P(I(k) = 1) + (-1)^2 P(I(k) = -1) = 1$$

Aleshores, com que les $I(k)$ són variables aleatòries independents (el resultat d'un llançament de la moneda no afecta els altres llançaments), utilitzant les propietats de l'esperança i de la variància que hem estudiat, tenim:

$$E(X(n)) = E\left(\sum_{k=1}^{n} I(k)\right) = \sum_{k=1}^{n} E(I(k)) = 0$$

$$Var(X(n)) = Var\left(\sum_{k=1}^{n} I(k)\right) = \sum_{k=1}^{n} Var(I(k)) = n$$

És a dir, en qualsevol pas, l'esperança ens indica que hauríem d'estar al nivell zero, però amb una variància cada cop més gran.

3. Processos a temps continu

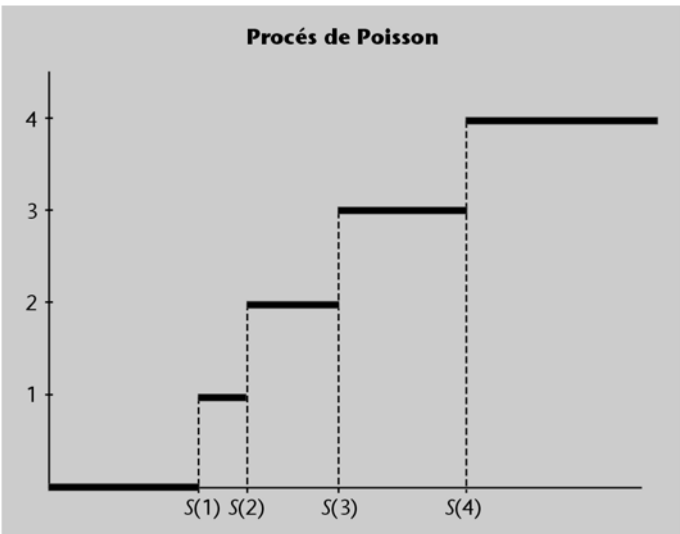
3.1. El procés de Poisson

El procés de Poisson s'utilitza bàsicament per a modelar els anomenats *processos de cues*. S'hi poden incloure molts processos: cotxes que arriben al peatge d'una autopista, clients que arriben a un banc, peticions que arriben a un servidor d'Internet, trucades que passen per una centraleta, etc.

Considerem, per exemple, el cas d'un servidor d'Internet. Volem estudiar les peticions que va rebent aquest servidor. Podem suposar que les peticions arriben d'una en una. Si diem $X(t)$ al nombre de peticions que ha rebut el servidor fins a l'instant t, trobem que una possible realització d'aquest procés serà del tipus:

Observació

No s'ha de confondre el procés de Poisson amb la distribució de Poisson.



on $S(1)$ indica l'instant en què arriba la primera petició, $S(2)$ indica l'instant en què arriba la segona i en general $S(i)$ indica l'instant en què arriba la *i*-èsima.

Procés de comptatge

El procés de Poisson és un procés de comptatge, ja que ens dediquem a comptar el nombre de vegades que succeeix un esdeveniment. El nom de procés de Poisson prové del fet que les lleis que apareixen són del tipus Poisson.

Aquest és un exemple d'un procés que es pot representar utilitzant el procés de Poisson. Té algunes característiques fonamentals:

- Per a cada instant t, $X(t)$ seguirà una distribució de Poisson de paràmetre λt, on λ és un paràmetre que depèn del procés.
- Les diferències entre els temps d'arribada segueixen una distribució exponencial de paràmetre λ, és a dir, $S(i + 1) - S(i)$ segueixen una exponencial de paràmetre λ.

Tenim, així, la propietat següent:

Si $\{X(t), t \geq 0\}$ segueix un procés de Poisson de paràmetre λ aleshores $X(t)$ segueix una distribució de Poisson de paràmetre λt.

Evidentment, la definició rigorosa del procés de Poisson és força més complicada i de l'estudi de les seves propietats se n'han fet llibres sencers. En tot cas, hem vist una petita introducció a algunes idees bàsiques.

Exemple de la centraleta

Les trucades que arriben a una centraleta segueixen un procés de Poisson de paràmetre 2 (donarem el temps en minuts). Podem calcular les probabilitats següents:

a) Probabilitat que en els 5 primers minuts arribin exactament 4 trucades.

La variable $X(5)$, que correspon al nombre de trucades que hem rebut fins al minut 5, sabem que seguirà una distribució de Poisson de paràmetre $2 \cdot 5 = 10$, per tant:

$$P(X(5) = 4) = \frac{(10)^4}{4!}\exp(-10) = 0{,}0189$$

b) Probabilitat que entre la primera i la segona trucada passin més de 3 minuts.

Si diem Y a la variable que ens dóna el temps que passa entre la primera i la segona trucada, per la definició del procés de Poisson, sabem que seguirà una distribució exponencial de paràmetre 2.

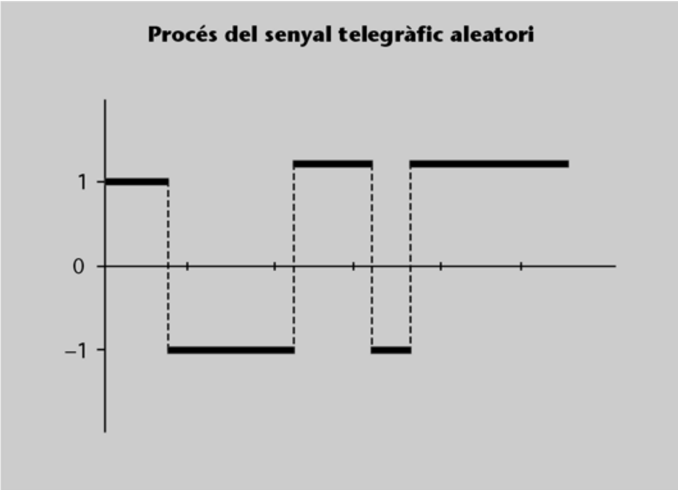
Així hem de calcular:

$$P(Y > 3) = \int_3^\infty 2\ \exp(-2x)dx = [-\exp(-2x)]_3^\infty = \exp(-6) = 0{,}0025$$

Hi ha un procés important que és una derivació del procés de Poisson. És l'anomenat *procés del senyal telegràfic aleatori*. Considerem un procés $X(t)$ que només pot prendre els valors 1 o –1 i que a l'inici val 1 o –1 amb probabilitat 0,5. El procés $X(t)$ canvia de polaritat (passa d'1 a –1 o a l'inrevés) en els punts de salt del procés de Poisson, de manera que obtindrem trajectòries del tipus següent:

Procés del senyal telegràfic

A partir del procés de Poisson podem construir fàcilment el procés del senyal telegràfic.

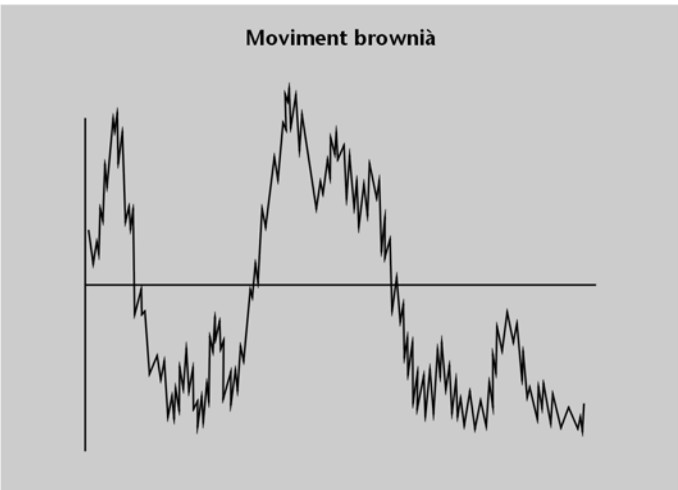


3.2. El procés de Wiener o moviment brownià

El procés de Wiener o moviment brownià és potser el procés que més s'ha estudiat. El 1827, el botànic Robert Brown va observar el moviment erràtic de grans de pol·len quan estaven en suspensió en un líquid (el seu moviment és molt ràpid i irregular). Ara sabem que aquest tipus de moviment està provocat per l'impacte de les molècules del fluid en el gra de pol·len. Com podeu imaginar, el moviment que es produeix és força caòtic, de manera que s'obtenen trajectòries molt irregulars, amb un aspecte com el següent:

Terminologia

Com podeu suposar, el nom de *moviment brownià* prové del Sr. Brown. El nom de Wiener és el del matemàtic que va fer la primera construcció rigorosa del procés.



Aquest tipus de procés s'utilitza també per a donar un model al moviment d'una molècula dins un gas, moviment provocat i modificat contínuament a causa de l'impacte de la molècula amb les altres molècules del gas.

Finances

Darrerament han aparegut aplicacions del moviment brownià a les finances, especialment a la borsa per a modelar els preus de les accions.

Entre moltes altres característiques, en té una que el fa molt útil: les lleis que apareixen són distribucions normals.

Si $\{X(t), t \geq 0\}$ segueix un procés de Wiener, aleshores $X(t)$ segueix una distribució normal amb mitjana 0 i variància t^2.

Com ja hem dit per al procés de Poisson, la definició rigorosa de l'estudi de les seves propietats no és l'objecte d'aquesta sessió.

4. Resum

Hem presentat el concepte de procés estocàstic per a estudiar situacions en què no podem utilitzar una única variable aleatòria. Hem presentat alguns dels processos més habituals: el passeig aleatori, el procés de Poisson i el procés de Wiener.