Contrast de variàncies

Josep Gibergans Bàguena

P08/05057/02310

UOC
Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

Contrast de la variància

1. Introducció

En aquesta sessió estudiarem com hem de fer inferència estadística sobre la variància d'una població a partir de les dades d'una mostra.

Control de la variància

Considerem que una indústria fabrica cargols per a les rodes d'una marca de cotxes. Aquest cargols han de tenir un diàmetre de 2,5 cm. Imaginem que en el procés de fabricació s'ha introduït un canvi i volem tenir informació sobre la qualitat del procés.

Establir mètodes per a controlar la variabilitat d'un procés industrial és fonamental per a la qualitat d'aquest. Amb aquest objectiu, prenem una mostra de cargols i mesurem el diàmetre de cada cargol. Podem fer un contrast d'hipòtesi sobre la mitjana dels diàmetres per saber si aquesta ha variat després d'introduir els canvis a la fàbrica. És important veure que encara que la mitjana dels diàmetres estigui a prop de 2,5 cm, és possible que el procés no sigui satisfactori, en cas de tenir una variància molt alta. És possible que la mitjana es mantingui, compensant diàmetres molt grans (cargols que no podrem cargolar) amb diàmetres molt petits (que rodin dintre el forat). És evident que tots dos casos són terriblement negatius per a l'empresa. Així, doncs, a més de tenir controlada la mitjana, també és necessari un control sobre la variància. Com més petita sigui la variància, de més qualitat serà la producció.

A continuació aprendrem a fer contrastos d'hipòtesis i a buscar intervals de confiança per a la variància. Per a poder fer tot això, abans però, haurem d'introduir la distribució χ^2 i conèixer-ne les propietats més importants.

2. La distribució χ^2

Si Z_1, Z_2, ..., Z_n són variables aleatòries normals estàndard independents, aleshores la variable que s'obté en sumar els quadrats d'aquestes distribucions:

$$Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_n^2$$

es distribueix segons una **distribució χ^2 amb n graus de llibertat**, χ_n^2.

Notació

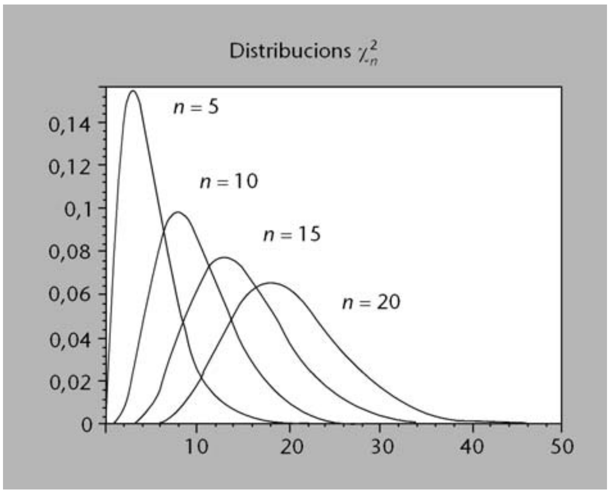
La distribució χ^2 també és coneix per la seva forma de ser llegida, és a dir, distribució khi quadrat.

χ^2 amb 1 grau de llibertat

En el cas que considerem només una variable normal estàndard, Z, tindrem que la variable Z^2 segueix una llei χ^2 amb 1 grau de llibertat.

Algunes característiques importants d'aquesta distribució són les següents:

1) Les distribucions χ_n^2 no són simètriques. Tenen asimetria cap a la dreta, que disminueix a mesura que n augmenta. Ho podem veure en la figura:



A l'hora de calcular probabilitats amb les distribucions χ_n^2, és molt important tenir present que aquestes no són simètriques.

2) Per a cada valor enter positiu del nombre de graus de llibertat (*n*) hi ha una distribució χ_n^2. Així, doncs, n'existeix un nombre infinit. Atès que no podem disposar d'infinites taules, només en tenim per a uns determinats graus de llibertat. A cada taula, tenim en la primera columna els graus de llibertat n i en la primera fila la probabilitat, α, que la variable χ^2 amb n graus de llibertat prengui un valor superior a un valor a. La intersecció d'aquestes fila i columna dóna aquest valor a, és a dir:

$$P(\chi_n^2 > a) = \alpha$$

Trobareu les taules de la distribució χ^2 a la web de l'assignatura.

Exemple d'utilització de les taules

1) Si volem trobar aquell valor a que fa que $P(\chi_7^2 > a) = 0{,}025$, cercarem en la taula, la fila corresponent a $n = 7$ graus de llibertat i la columna corresponent a $\alpha = 0{,}025$, i en la intersecció tenim que $a = 16{,}013$.

2) També podem fer servir aquestes taules per a trobar probabilitats acumulades. Si volem trobar aquell valor b tal que $P(\chi_{16}^2 \leq b) = 0{,}05$, haurem de tenir en compte que si b deixa a la seva esquerra una àrea igual a 0,05, a la seva dreta deixarà una àrea igual a $1 - 0{,}05 = 0{,}95$; per tant, hem de trobar el valor de b tal que $P(\chi_{16}^2 > b) = 0{,}95$. I mirant la taula, tenim que $b = 7{,}962$.

3) L'esperança d'una variable χ_n^2 és $E(\chi_n^2) = n$. Aquesta propietat es demostra fàcilment, ja que $\chi_n^2 = (Z_1^2 + \ldots + Z_n^2)$, aleshores:

$$E({\chi_n}^2) = E(Z_1^2 + \ldots + z_n^2) = E(Z_1^2) + \ldots + E(Z_n^2) = n\ E(Z_i^2)$$

Com que $Var(Z_i) = 1$ i, d'altra banda, $Var(Z_i) = E(Z_i^2) - (E(Z_i))^2$, tenim que $E(Z_i^2) = Var(Z_i) = 1$, ja que l'esperança d'una normal estàndard és zero, $E(Z_i) = 0$. Finalment, tenim que:

$$E({\chi_n}^2) = n\ E(Z_1^2) = n\ 1 = n$$

4) La variància d'una variable χ_n^2 és $\mathrm{Var}(\chi_n^2) = 2n$. Per a demostrar aquesta propietat, hem de tenir en compte que $\chi_n^2 = (Z_1^2 + \ldots + Z_n^2)$, i que les variables Z_i són independents; per tant, tenim que:

$$Var(\chi_n^2) = Var(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2) = Var(Z_1^2) + \ldots + Var(Z_n^2) = n\ Var(Z_i^2)$$

Aleshores: $Var(Z_i^2) = E(Z_i^4) - (E(Z_i^2))^2$.

D'una banda, abans hem vist que $E(Z_i^2) = 1$ i, de l'altra, podem demostrar, tot i que no ho farem, que $E(Z_i^4) = 3$, de manera que $Var(Z_i^2) = 3 - 1 = 2$; i finalment obtenim que:

$$Var(\chi_n^2) = n \cdot 2 = 2 \cdot n$$

3. El contrast de la variància

Suposem que tenim una mostra aleatòria de grandària n obtinguda d'una població normal de mitjana μ i variància σ^2 desconegudes. Volem contrastar la hipòtesi nul·la que la variància de la població és igual a un valor σ_0^2. Com en tots els contrastos d'hipòtesis, farem servir el procediment següent:

1) Establirem les hipòtesis nul·la i alternativa:

a) Hipòtesi nul·la: H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

b) Hipòtesi alternativa. La hipòtesi alternativa (H_1) pot ser bilateral (la variància de la població és diferent d'aquest valor σ_0^2) o unilateral (la variància de la població és més gran o més petita que σ_0^2):

- Bilateral: H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- Unilateral: H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$
- Unilateral: H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$

2) Calcularem l'estadístic de contrast. Considerem una mostra amb variància mostral s^2, extreta d'una població $N(\mu, \sigma^2)$.

Sota el supòsit de la hipòtesi nul·la certa (H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$), tenim que l'**estadístic de contrast**

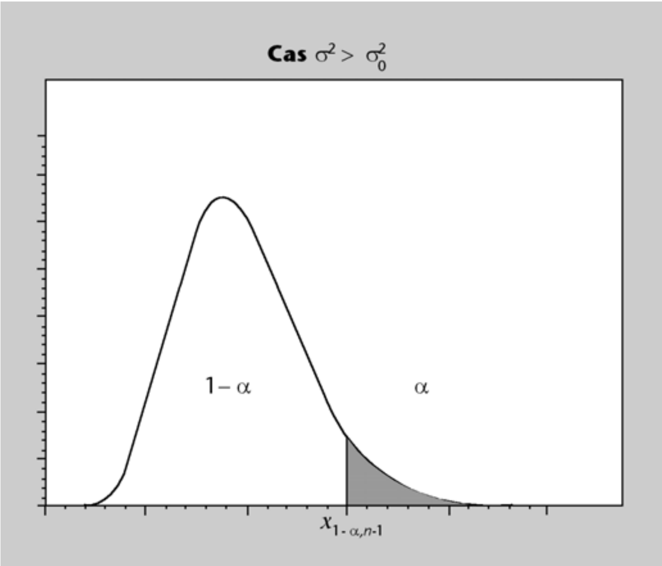
$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

on s^2 és la variància d'una mostra de grandària n, és una observació d'una variable χ_{n-1}^2.

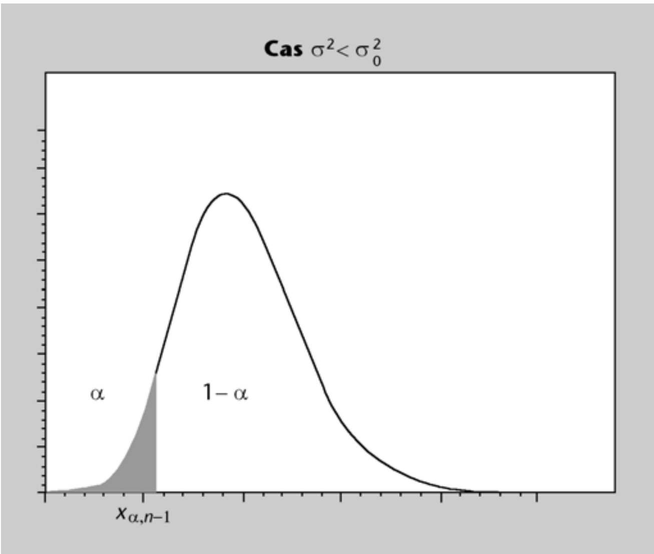
Aquest resultat no el demostrem perquè és molt lluny dels objectius d'aquest curs d'Estadística.

3) Fixat un nivell de significació α, determinem un criteri de decisió. Per a prendre una decisió, tindrem dos criteris: un a partir de l'estadístic de contrast i els valors crítics i l'altre a partir del *p*-valor. Donat un nivell de significació α i segons quina sigui la hipòtesi alternativa, tenim tres casos possibles:

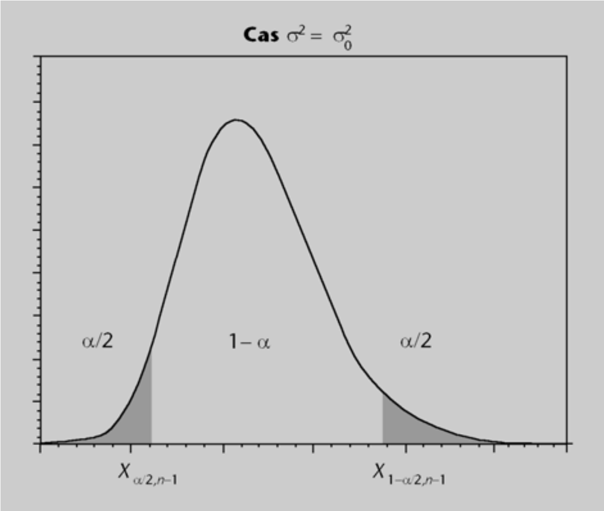
a) En cas que H_1 sigui $\sigma^2 > \sigma_0^2$, escrivim el valor crític com $x_{1-\alpha,n-1}$ i és aquell valor que fa que $P(\chi_{n-1}^2 > x_{1-\alpha,n-1}) = \alpha$. Gràficament:



b) En cas que H_1 sigui $\sigma^2 < \sigma_0^2$, escrivim el valor crític com a $x_{\alpha,\, n-1}$ i és aquell valor que fa que $P(\chi_{n-1}^2 < x_{\alpha,n-1}) = \alpha$. Gràficament:



c) En cas que H_1 sigui $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, aleshores tenim dos valors crítics (un per cada cua) que escriurem com $x_{\alpha/2,n-1}$ i $x_{1-\alpha/2,n-1}$ i que fan que: $P(\chi^2_{n-1} < x_{\alpha/2,n-1}) = \alpha/2$ i $P(\chi^2_{n-1} > x_{1-\alpha/2,n-1}) = \alpha/2$. Gràficament:



A partir del valor calculat de l'estadístic de contrast:

$$x = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

i a partir dels valors crítics corresponents a la hipòtesi alternativa i al nivell de significació α, **rebutjarem la hipòtesi nul·la** en favor de la hipòtesi alternativa si:

- En el cas H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$ es compleix que $x > x_{1-\alpha,n-1}$
- En el cas H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$ es compleix que $x < x_{\alpha,n-1}$
- En el cas H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ es compleix que $x < x_{\alpha/2,n-1}$ o $x > x_{1-\alpha/2,n-1}$

Rebuig o no-rebuig de la hipòtesi nul·la

Considerant els gràfics anteriors, si l'estadístic de contrast es troba en la regió ombrejada, aleshores rebutgem la hipòtesi nul·la. En cas contrari, no la rebutgem.

L'altre opció que tenim per a prendre una decisió és, com ja hem dit abans, per mitjà del *p*-valor.

Recordatori

El *p*-valor és la probabilitat que un resultat sigui "al menys tan extrem" com l'estadístic de contrast obtingut.

El *p*-valor depèn de la hipòtesi alternativa plantejada, de manera que si

$$x = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

és el valor de l'estadístic de contrast:

- En el cas H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$, aleshores $p = P(\chi^2_{n-1} > x)$
- En el cas H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$, aleshores $p = P(\chi^2_{n-1} < x)$
- En el cas H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ no és fàcil calcular el *p*-valor, atès que la distribució χ^2 no és simètrica. Aquest cas sempre l'estudiarem amb l'estadístic de contrast i els valors crítics.

Direm que aquest *p*-valor és significatiu i **rebutjarem la hipòtesi nul·la** si és més petit que el nivell significatiu α escollit.

Exemple de la variabilitat d'unes peces

La longitud de les peces fabricades en un procés industrial segueix una distribució $N(5; 0{,}0625)$. Es considera que la mida de les peces és massa variable i s'implanta una nova tècnica per a evitar-ho. Una mostra de dotze peces ha donat, després d'aquest canvi, les mides: 5,02, 4,87, 4,95, 4,88, 5,01, 4,93, 4,91, 5,09, 4,96, 4,89, 5,06, 4,85.

Amb un nivell de significació $\alpha = 0{,}05$, podem afirmar que hi ha hagut, efectivament, reducció en la variabilitat de la mida de les peces?

A partir de les observacions, calculem la variància mostral:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2 = 0{,}006106$$

1) Establim les hipòtesis nul·la, $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}0625$, i alternativa: $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 = 0{,}0625$.

La hipòtesi alternativa és unilateral, ja que el que ens demanen és si podem afirmar que la variabilitat de les peces s'ha reduït, és a dir, si ara la variància és més petita que la que es tenia abans.

2) Calculem l'estadístic de contrast:

$$x = \frac{(n-1)\ s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(12-1)\ 0{,}006106}{0{,}0625} = 1{,}07467$$

Sota la hipòtesi nul·la, és a dir, suposant que $\sigma_0^2 = 0{,}0625$ és una observació d'una variable aleatòria χ^2 amb 12 – 1 = 11 graus de llibertat.

3) Fixat un nivell de significació $\alpha = 0{,}05$, amb ajuda de l'ordinador, calcularem el *p*-valor i veurem si està o no per sota:

$$p = P(\chi^2 \leq 1{,}0767) = 0{,}00007257510$$

Tenim un p-valor molt més petit que 0,05 (és prou significatiu); per tant, rebutgem la hipòtesi nul·la i podem afirmar que la variabilitat s'ha reduït.

Si ho volem fer a partir de l'estadístic de contrast, hem de buscar en les taules el valor crític $x_{\alpha,n-1} = x_{0{,}05;11} = 4{,}5748$. Com que $1{,}07467 < 4{,}5748$, acceptem H_1; per tant, la variabilitat s'ha reduït.

4. Interval de confiança de la variància

Suposem que a partir d'una mostra de grandària n hem obtingut el valor de la variància s^2. Com podem construir un interval de confiança de la variància poblacional?

Sabem que si s^2 és la variància mostral d'una mostra aleatòria de grandària n presa d'una població normal de variància σ^2, l'estadístic:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

és una observació d'una variable aleatòria χ^2 amb $n - 1$ graus de llibertat.

D'altra banda, la probabilitat que una variable aleatòria χ^2 amb $n - 1$ graus de llibertat, χ^2_{n-1}, es trobi compresa entre els valors crítics $x_{\alpha/2,n-1}$ i $x_{1-\alpha/2,n-1}$ és:

$$P(x_{\alpha/2,n-1} < \chi^2_{n-1} < x_{1-\alpha/2,n-1}) = 1 - \alpha$$

Per tant, tenim una probabilitat de l'$(1 - \alpha)$ que l'estadístic $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ es trobi comprès entre els valors crítics $x_{\alpha/2,n-1}$ i $x_{1-\alpha/2,n-1}$, és a dir:

$$x_{\alpha/2,n-1} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < x_{1-\alpha/2,n-1}$$

Manipulant aquesta expressió: $\frac{x_{\alpha/2,n-1}}{(n-1)s^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{x_{1-\alpha/2,n-1}}{(n-1)s^2}$

i invertint les fraccions de la desigualtat anterior, finalment obtenim:

$$\frac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{x_{\alpha/2,n-1}}$$

Procediment

Donada la desigualtat,

$$a < \frac{1}{b} < c$$

es té que:

$$\frac{1}{a} > b > \frac{1}{c},$$

o el que és el mateix:

$$\frac{1}{c} < b < \frac{1}{a}$$

Per a determinar un **interval de confiança** per a la variància a partir d'una mostra de grandària n i variància mostral s^2:

1) Fixem el nivell de confiança, que escrivim com a $1 - \alpha$.

2) Trobem els valors de la distribució χ^2_{n-1} que tallen una probabilitat de $\alpha/2$ a les dues cues, és a dir, els punts crítics $x_{\alpha/2,n-1}$ i $x_{1-\alpha/2,n-1}$.

3) L'interval de confiança ve donat per: $\left[\frac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha/2,n-1}} ; \frac{(n-1)s^2}{x_{\alpha/2,n-1}}\right]$.

Exemple de la variabilitat d'unes peces (II)

Volem determinar un interval de confiança del 95% per a la variància de les peces de l'exemple anterior. La variància mostral és:

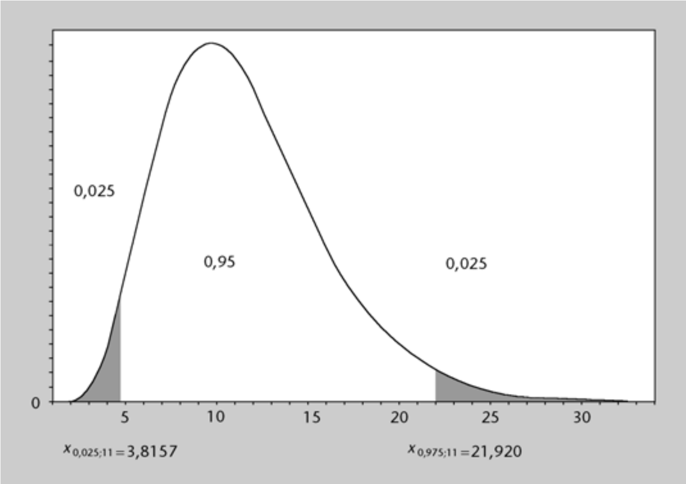
$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2 = 0{,}006106$$

A partir de les taules podem trobar els punts crítics $x_{\alpha/2,n-1} = x_{0,025;11}$ i $x_{1-\alpha/2,n-1} = x_{0,975;11}$ que tallen una probabilitat de $\alpha/2$ a les dues cues:

$$x_{0,025;11} = 3{,}8157 \text{ i } x_{0,975;11} = 21{,}920$$

L'interval de confiança ve donat per:

$$\left[\frac{(12-1)0{,}006106}{21{,}920};\frac{(12-1)0{,}006106}{3{,}8157}\right]$$



Finalment, obtenim: [0,003064; 0,01760].

Podem observar que l'interval de confiança per a la variància de la població ens mostra que aquesta serà major que 0,003064 i menor que 0,01760. Comparant amb el resultat del contrast d'hipòtesis de l'exemple anterior, observem que el valor 0,0625 no es troba dintre l'interval. Resultat coherent amb el del contrast, en què hem rebutjat la hipòtesi nul·la en favor de la hipòtesi alternativa de reducció de la variància.

5. Resum

En aquesta sessió hem après a fer inferència estadística sobre la variància d'una població normal. Abans, però, hem introduït la distribució χ^2 i estudiat les seves propietats més importants. Després, hem definit l'estadístic de contrast i hem vist la forma de fer un contrast d'hipòtesis i com podem trobar un interval de confiança per a la variància.

Exercicis

1. En un taller funcionen dues màquines A i B per a la producció d'unes determinades peces. L'experiència demostra que el pes mitjà de les peces fabricades per A és de 1.189 g, amb una desviació típica de 90 g. L'encarregat del taller creu que, si bé el pes mitjà de les peces fabricades per B és el mateix que el de les fabricades per A, la màquina B funciona amb una regularitat diferent. Per a confirmar-ho, trieu a l'atzar una mostra de 101 peces fabricades per la màquina B i obtingueu una desviació típica mostral de 80 g. Suposem que el pes de les peces de totes dues màquines està normalment distribuït.

a) Feu un contrast d'hipòtesi amb $\alpha = 0{,}1$ per provar si l'encarregat te raó.

b) Trobeu un interval de confiança del 95% per a la desviació típica.

2. El responsable de seguretat d'una indústria creu que el temps que triga un vigilant nou a completar la seva ronda té una desviació típica inferior a dos minuts. En una mostra aleatòria de grandària 12 de temps (en minuts), que és el que el vigilant va trigar a fer una ronda, es van obtenir els resultats següents: 20, 23, 18, 22, 18, 17, 20, 21, 21, 18, 21, 19. Suposarem que el temps d'una ronda es distribueix segons una llei normal.

a) Feu un contrast d'hipòtesi amb $\alpha = 0{,}05$ per determinar si el responsable de seguretat té raó.

b) Trobeu un interval de confiança del 90% per a la desviació típica.

Solucionari

1.

a) Per a fer el contrast d'hipòtesis, seguirem el procediment mostrat en aquesta sessió:

1. Establim les hipòtesis nul·la i alternativa:

- Hipòtesi nul·la: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 90^2$
- Hipòtesi alternativa: $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 = 90^2$, ja que segons l'enunciat l'encarregat únicament suposa que la màquina B funciona amb regularitat diferent.

2. Calculem l'estadístic de contrast:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(101-1)80^2}{90^2} = 79{,}012$$

3. Fixem el nivell de significació que ens indica l'enunciat del problema $\alpha = 0{,}1$. A continuació, busquem els valors crítics corresponents tenint en compte que la hipòtesi alternativa és bilateral, de manera que $\alpha/2 = 0{,}05$.

De les taules de la χ^2 tenim els valors crítics següents: $x_{0,95;100} = 124{,}342$ i $x_{0,05;100} = 77{,}929$. Com que l'estadístic de contrast 79,012 pertany a l'interval [77,929; 124,342], es conclou que no hi ha evidència suficient per a rebutjar H_0. I, per tant, les sospites de l'encarregat no estan justificades.

b) L'interval de confiança per a la desviació típica ve donat per l'expressió:

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha/2}}\,;\,\frac{(n-1)s^2}{x_{\alpha/2}}\right]$$

Ara tenim que $\alpha = 0{,}05$, per tant, $\alpha/2 = 0{,}025$ i $1 - \alpha/2 = 0{,}975$. De les taules podem treure els valors crítics corresponents: $x_{0,975;100} = 129{,}561$ i $x_{0,025;100} = 74{,}222$. Així, tenim l'interval de confiança per a la variància següent:

$$[\,4939{,}758;\ 8622{,}780\,]$$

I traient l'arrel quadrada obtenim l'interval de confiança per a la desviació típica:

$$[\,70{,}283;\ 92{,}859]$$

Podem observar que una desviació típica igual a 90 es troba dintre d'aquests intervals de confiança. Resultat que està d'acord amb l'obtingut en el contrast d'hipòtesi.

Notació

Hem d'anar molt amb compte amb la notació. Fixeu-vos que

$$x_{0,975;100} = 129{,}561$$

és el valor crític de la cua dreta, de manera que l'àrea que deixa a la seva dreta és 0,025. I és per aquesta probabilitat on el buscarem en les taules. El subíndex 0,975 no ens ha de despistar.

De la mateixa manera:

$$x_{0,025;100} = 74{,}222$$

és el valor crític de la cua esquerra, és a dir, el valor que deixa a la seva dreta una àrea igual a 0,975. I amb aquesta probabilitat el busquem en les taules.

2. El primer que fem és calcular la mitjana i la variància del temps que es triga a fer una ronda:

- Mitjana: $\bar{x} = \dfrac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = 19{,}83$
- Variància: $s^2 = \dfrac{1}{1-12}\sum_{i=1}^{12}(x_i - 19{,}83)^2 = 3{,}42$

a) Una vegada més, seguirem els passos següents per fer un contrast d'hipòtesis de la variància:

1. Establim les hipòtesis:

- Hipòtesi nul·la: $H_0 : \sigma^2 = \sigma^2 = 2^2$.
- Hipòtesi alternativa: $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 = 2^2$. En aquest cas, la hipòtesi alternativa és unilateral, ja que es vol contrastar si la variància és menor que un determinat valor.

2. Determinem un nivell de significació $\alpha = 0{,}05$ i calculem l'estadístic de contrast a partir de les dades de la mostra d'observacions:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(12-1)3{,}42}{2^2} = 9{,}40\,.$$

3. Amb l'ajuda de l'ordinador, calculem el *p*-valor corresponent a un $\alpha = 0{,}05$ per a una hipòtesi alternativa unilateral de cua esquerra, és a dir:

$$p = P(\chi_{11}^2 < 9{,}40) = 0{,}4150$$

Com que aquest valor és major que α, $0{,}4150 > 0{,}05$, no podem rebutjar la hipòtesi nul·la i concloem que la variància del vigilant no és significativament diferent de 4 s.

b) Ara trobarem un interval de confiança per a la variància del temps de ronda del vigilant. Ara tenim que $\alpha = 0{,}10$ i, per tant, $\alpha/2 = 0{,}05$ i $1 - \alpha/2 = 0{,}95$. De les taules tenim els valors crítics corresponents:

$$x_{0,05;11} = 4{,}575 \text{ i } x_{0,95;11} = 19{,}675$$

De manera que, substituint aquest valors en l'expressió corresponent a l'interval de confiança

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha/2}}\,;\,\frac{(n-1)s^2}{x_{\alpha/2}}\right] = \left[\frac{(12-1)3{,}42}{19{,}675}\,;\,\frac{(12-1)3{,}42}{4{,}575}\right]$$

tenim un interval de confiança del 95% igual a [1,91; 8,22]. Observem que 4 es troba dintre d'aquest interval, de manera que no tenim cap evidència per a pensar que la variància és diferent de 4.

Comparació de variàncies

1. Introducció

Aquesta sessió està dedicada a la comparació de les variàncies de dues poblacions normals, a partir de les dades obtingudes en dues mostres, una de cada població.

Comparació de la variabilitat dels errors de mesura de dos aparells

Suposem que volem comparar la precisió de dos aparells de mesura. La precisió d'un aparell de mesura ve determinat per la variabilitat dels seus errors: quan més petita sigui aquesta variabilitat més precís és. Per tant, haurem de comparar la variabilitat dels errors de mesura dels dos aparells, és a dir, haurem de comparar les seves variàncies.

Supòsit de variàncies iguals

Moltes vegades, quan fem un contrast d'hipòtesis sobre la diferència de mitjanes de dues poblacions, suposem que les variàncies d'aquestes poblacions són iguals. No hi ha cap motiu per què això sigui veritat. Hauríem de començar per provar si les variàncies són iguals.

Abans de començar amb el contrast d'igualtat de variàncies haurem d'introduir una nova variable aleatòria: la distribució *F* de Snedecor.

2. La distribució *F* de Snedecor

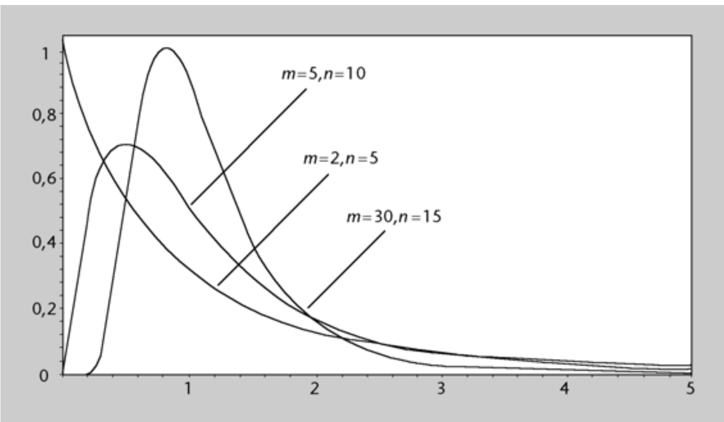
Si U i V són dues variables independents que segueixen distribucions χ^2 amb m i n graus de llibertat, respectivament, llavors la variable que s'obté en fer el quocient:

$$F_{m,n} = \frac{U/m}{V/n}$$

té una distribució *F* de Snedecor amb m graus de llibertat al numerador i n graus de llibertat al denominador, $F_{m,\,n}$.

A continuació, comentarem molt breument les principals característiques de la distribució *F*.

1) Les distribucions *F* no són simètriques. Totes presenten asimetria cap a la dreta que decreix a mesura que augmenten m i n.



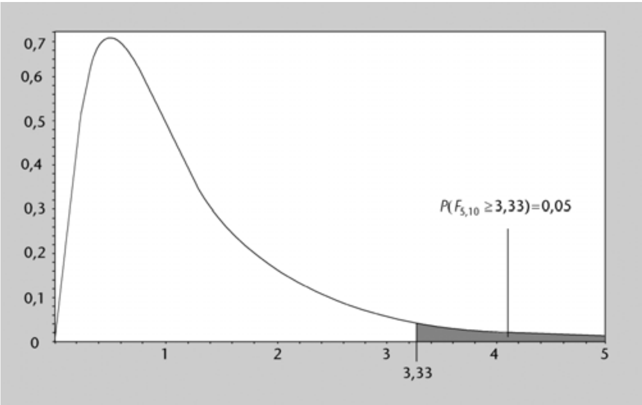
2) Per a cada parella de valors enters positius de m i n, hi ha una distribució F. Així, doncs, també en aquest cas tenim un nombre infinit de distribucions. Només es disposa de taules per a uns determinats valors dels graus de llibertat m i n.

Trobareu les taules de la distribució F a la web de l'assignatura.

Donada una probabilitat α, cada taula ens dóna el valor b, que fa que α sigui la probabilitat que la variable F amb m graus de llibertat al numerador i n graus de llibertat al denominador, sigui major que b. La primera fila indica els graus de llibertat del numerador (m) i la primera columna indica els graus de llibertat del denominador (n). El valor b el trobem en la intersecció d'aquesta fila i aquesta columna.

Exemple d'utilització de les taules

Volem saber el valor a que fa que $P(F_{5;10} \geq b) = 0,05$. En la taula corresponent a $\alpha = 0,05$, primer buscarem la columna de graus de llibertat del numerador $m = 5$ i després la fila de graus de llibertat del denominador $n = 10$.

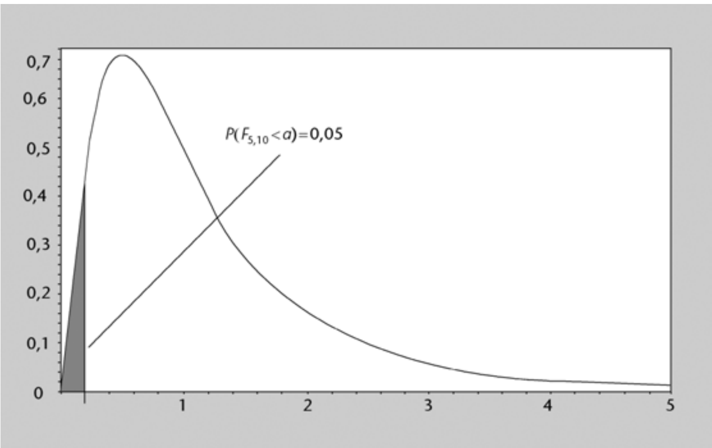


El valor b es troba en la intersecció d'aquestes files i columnes. Tenim que $b = 3,33$.

3) Propietat recíproca: Si U és una variable aleatòria $F_{m,n}$, aleshores $V = 1/U$ és una variable aleatòria $F_{n,m}$. Aquesta propietat és de gran utilitat per a trobar valors que determinin probabilitats en la cua esquerra de la distribució.

Exemple d' utilització de les taules mitjançant la propietat recíproca

Volem determinar el valor a que fa que $P(F_{5;10} < a) = 0,05$, és a dir, el valor que acumula una probabilitat de 0,05 i, per tant, que determina una àrea de 0,05 en la cua esquerra de la distribució.



Com ja s'ha comentat abans, no es disposa de totes les taules per a totes les probabilitats. En aquest exemple, ens faria falta la taula corresponent a α = 0,95. Aquesta taula no la tenim. El que farem serà utilitzar la propietat recíproca per a determinar aquesta probabilitat.

Volem trobar el valor de a que fa que $P(F_{5;10} < a) = 0{,}05$. Aplicant la propietat recíproca a aquesta expressió, tenim que:

$$P\left(\frac{1}{F_{10;5}} < a\right) = 0{,}05$$

Manipulant una mica la desigualtat de dintre el parèntesi, tenim que:

$$P\left(F_{10;5} \geq \frac{1}{a}\right) = 0{,}05$$

Si ara, per a simplificar una mica l'escriptura, anomenem $b = 1/a$, el nostre problema s'ha reduït a trobar el valor b que fa que $P(F_{10;5} \geq b) = 0{,}05$. I això ho farem de la manera que s'ha mostrat en l'apartat anterior. Buscarem en la taula de $\alpha = 0{,}05$ el valor intersecció de la fila corresponent a $m = 10$ graus de llibertat del numerador i $n = 5$ graus de llibertat del denominador. Tenim que $b = 4{,}74$ i, per tant:

$$a = \frac{1}{b} = \frac{1}{4{,}74} = 0{,}21$$

4) L'esperança d'una variable $F_{m,n}$ és:

$$E(F_{m,n}) = \frac{n}{n-2}, \quad \text{per a } n > 2$$

i la variància és:

$$Var(F_{m,n}) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \quad \text{per a } n > 4$$

Sobre l'esperança d'una variable *F*...

... cal remarcar que l'esperança d'un quocient no és necessàriament el quocient de les esperances: l'esperança de U és m, per tant, la de U/m és 1. De la mateixa manera, l'esperança de V/n és 1. El quocient és 1. En canvi, l'esperança del quocient és $n/(n - 2)$, que és major que 1.

3. Comparació de dues variàncies

Considerem que tenim dues mostres aleatòries de dues poblacions normals diferents: una mostra de grandària m obtinguda de la població 1, que segueix una llei normal de mitjana μ_1 i variància σ_1^2 desconegudes, i una altra mostra de grandària n obtinguda de la població 2, distribuïda segons una normal de mitjana μ_2 i variància σ_2^2 desconegudes.

Ara ens interessa contrastar la hipòtesi nul·la que assegura que les variàncies de totes dues poblacions són iguals, és a dir, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, que també podem expressar com a $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$. Una vegada més, farem servir la manera de procedir següent per a fer un contrast d'hipòtesis:

1) Establim les hipòtesis nul·la i alternativa:

a) Hipòtesi nul·la: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad (H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1)$

b) Hipòtesi alternativa. Pot ser bilateral (les variàncies de totes dues poblacions són distintes) o unilaterals (la variància d'una població és major que la de l'altra):

- Bilateral: $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $(H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1)$
- Unilateral: $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $(H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 > 1)$
- Unilateral: $H_1 : (\sigma_1^2 < \sigma_2^2)$ $(H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 1)$

2) Càlcul de l'estadístic de contrast. Sabem que, si considerem una mostra de grandària m d'una població 1, distribuïda segons una $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ amb variància mostral s_1^2, es té que:

$$\frac{(m-1)s_1^2}{\sigma_1^2}$$

és una observació d'una variable χ^2 amb $(m - 1)$ graus de llibertat.

Per a una mostra de grandària n i variància mostral s_2^2 d'una població normal $N(\mu_{2,} \sigma_2^2)$, es té que:

$$\frac{(n-1)s_2^2}{\sigma_2^2}$$

és una observació d'una variable χ^2 amb $(n - 1)$ graus de llibertat. El quocient de dues variables χ^2 dividides pel seus graus de llibertat, segueix una distribució F. D'aquesta manera:

$$\frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2}$$

és una observació d'una variable F amb $(m - 1)$ graus de llibertat al numerador i $(n - 1)$ graus de llibertat al denominador.

Sota el supòsit de la hipòtesi nul·la certa $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, tenim l'**estadístic de contrast**:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

on s_1^2 i s_2^2 són mostres aleatòries independents de grandàries mostrals m i n, respectivament.

Aquest estadístic de contrast és una observació d'una variable F de Snedecor amb $(m - 1)$ graus de llibertat al numerador i $(n - 1)$graus de llibertat al denominador.

Si $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, aleshores

$$\frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{s_1^2 \ \sigma_1^2}{s_2^2 \ \sigma_1^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

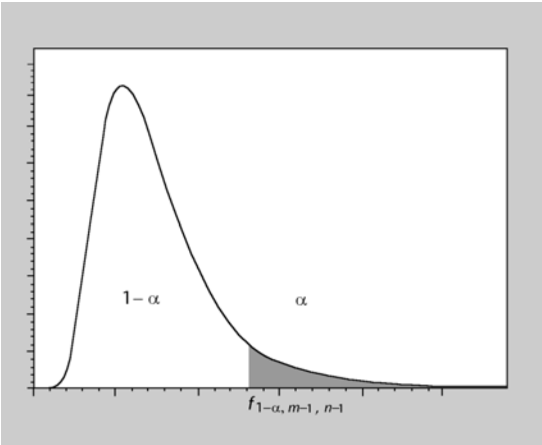
3) Fixat un nivell significatiu α, determinem un criteri de decisió. Com sempre que fem un contrast d'hipòtesis, a l'hora d'escollir un criteri de decisió tenim dues alternatives: a partir de l'estadístic de contrast i els valors crítics corresponents a un nivell de significació α o a partir del *p*-valor.

Donat un nivell de significació α i segons quina sigui la hipòtesi alternativa, tenim:

a) En cas que H_1 sigui $\sigma_2^1 / \sigma_2^2 > 1$, aleshores escrivim el valor crític com $f_{1\text{-}\alpha,m-1,n-1}$ i és aquell valor que fa que:

$$P(F_{m-1,n-1} > f_{1-\alpha,m-1,n-1}) = \alpha$$

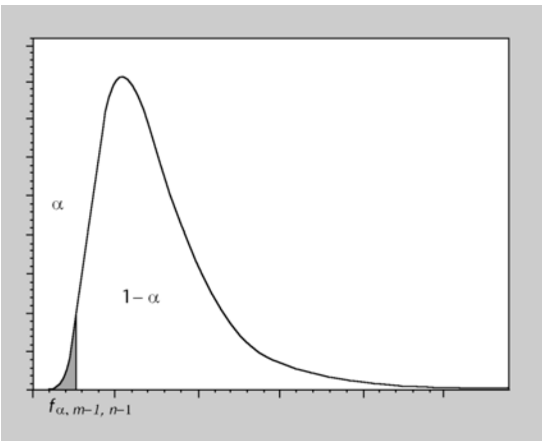
Gràficament:



b) En cas que H_1 sigui $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 1$, aleshores escrivim el valor crític com $f_{\alpha,m-1,n-1}$ i és aquell valor que fa que:

$$P(F_{m-1,n-1} < f_{\alpha,m-1,n-1}) = \alpha$$

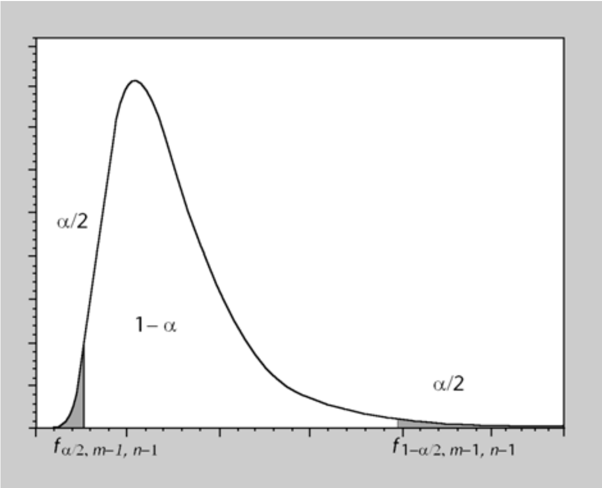
Gràficament:



c) En cas que H_1 sigui $\sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$, tenim dos valors crítics (un per cada cua) que escriurem com $f_{\alpha/2,m-1,n-1}$ i $f_{1-\alpha/2,m-1,n-1}$ i que fan que:

$$P(F_{m-1,n-1} < f_{\alpha/2,m-1,n-1}) = \alpha/2 \text{ i } P(F_{m-1,n-1} > f_{1-\alpha/2,m-1,n-1}) = \alpha/2$$

Gràficament:



A partir del valor calculat de l'estadístic de contrast:

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

i dels valors crítics corresponents a la hipòtesi alternativa i al nivell de significació α, **rebutjarem la hipòtesi nul·la** en favor de la hipòtesi alternativa si:

Rebuig i no-rebuig de la hipòtesi nul·la

Considerant els gràfics anteriors, si l'estadístic de contrast es troba en la regió ombrejada, aleshores rebutgem la hipòtesi nul·la. En cas contrari, no la rebutgem.

- En el cas $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ es compleix que $f > f_{1-\alpha,m-1,n-1}$
- En el cas $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ es compleix que $f < f_{\alpha,m-1,n-1}$
- En el cas $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ es compleix que $f < f_{\alpha/2,m-1,n-1}$ o $f > f_{1-\alpha/2,m-1,n-1}$

També ho podem fer a partir del p-valor. Una vegada calculat l'estadístic de contrast, calcularem el p-valor corresponent.

El p-valor depèn de la hipòtesi alternativa plantejada, de manera que:

En el cas $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ es compleix que $p = P(F_{m-1,n-1} > f)$

En el cas $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ es compleix que $p = P(F_{m-1,n-1} < f)$

En el cas $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ es compleix que $p = 2P(F_{m-1,n-1} > f)$

Si p és menor que el nivell de significació α, direm que el p-valor és significatiu i **rebutjarem la hipòtesi nul·la**.

Val la pena comentar per què en el cas bilateral $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ per a calcular el *p*-valor es multiplica per dos. En aquest cas, hem de tenir en compte que hem triat la població "1" arbitràriament i, per tant, hauríem pogut calcular l'estadístic de contrast com:

$$f_0 = \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

Notem que es tracta d'una observació d'una variable aleatòria que segueix una llei $F_{n-1,m-1}$.

Calcularem el *p*-valor tenint en compte aquestes dues possibilitats. Així:

$$p = P(F_{m-1,n-1} > f) + P(F_{n-1,m-1} > f_0)$$

Observem que, aplicant la propietat recíproca i el fet que $f_0 = 1/f$ podem escriure:

$$P(F_{n-1,m-1} > f_0) = P\left(\frac{1}{F_{m-1,n-1}} > \frac{1}{f}\right) = P(F_{m-1,n-1} > f)$$

Finalment, obtenim que el *p*-valor corresponent a una hipòtesi alternativa bilateral és $p = 2P(F_{m-1,n-1} > f)$.

És interessant observar que...

... per a la hipòtesi alternativa bilateral, el *p*-valor és dues vegades l'àrea de la cua de la dreta, tot i que la distribució *F* de Snedecor no és simètrica.

Exemple de comparació de dues variàncies

Es porta a terme un estudi per a comparar el temps que triguen dos ordinadors de marques diferents (A i B) a executar un programa. Experiències anteriors indiquen que les distribucions de temps són aproximadament normals. Una mostra aleatòria de temps per a onze ordinadors de la marca A i una altra per a catorze ordinadors de la marca B dóna els següents resultats per a les desviacions típiques mostrals:

Ordinadors de la marca A: $s_1 = 6{,}1$

Ordinadors de la marca B: $s_2 = 5{,}3$

A la vista d'aquests resultats, podem pensar que els temps d'execució dels ordinadors de la marca A presenten més variabilitat que els de la marca B?

Farem un contrast d'hipòtesis de la igualtat de variàncies amb un nivell de significació de 0,01.

1. Establim les hipòtesis nul·la i alternativa:

Hipòtesi nul·la: $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$

Hipòtesi alternativa: $H_1 : \sigma_A^2 > \sigma_B^2$

2. Fixem un nivell de significació $\alpha = 0{,}01$, com diu l'enunciat de l'exercici. A continuació, calculem l'estadístic de contrast a partir de les dades mostrals:

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{6{,}1^2}{5{,}3^2} = 1{,}32$$

3. Amb l'ajuda de l'ordinador, calculem el *p*-valor: $p = P(F_{10,13} > 1{,}32) = 0{,}31$. Com que 0,31 > 0,01, no tenim evidències per a rebutjar la hipòtesi nul·la. Concloem, doncs, que les variabilitats de temps d'execució dels ordinadors A i B no són significativament diferents.

També ho podem fer a partir del valor crític: mirant les taules per a $m - 1 = 10$ i $n - 1 = 13$ graus de llibertat al numerador i denominador, respectivament, i per a un nivell de significació $\alpha = 0{,}01$:

$$f_{0,99;10;13} = 4{,}10$$

Com que $1{,}32 < 4{,}10$, no rebutgem la hipòtesi nul·la.

Notació

La taula ens dóna sempre el valor crític de la cua dreta; per tant, si en la taula posa, per exemple, $\alpha = 0{,}01$ i busquem per a 10 graus de llibertat del numerador i 13 graus de llibertat del denominador, escrivim així el valor 4,10:

$$f_{0,99;10;13} = 4{,}10$$

4. Resum

Hem dedicat aquesta sessió a la comparació de dues variàncies en el cas de poblacions normals. Hem fet contrastos d'hipòtesis sobre la igualtat de dues variàncies. Abans, però, hem introduït la distribució *F* de Snedecor i hem estudiat les seves propietats més importants; en particular, la propietat recíproca de gran importància a l'hora de calcular probabilitats en la cua esquerra de la distribució. Després, hem definit l'estadístic de contrast corresponent i hem vist la manera de contrastar la igualtat de variàncies.

Exercicis

1. Els errors aleatoris de dos aparells de mesura segueixen les distribucions $N(0,\sigma_1^2)$ i $N(0,\sigma_2^2)$. Durant un període de temps determinat s'han detectat els errors següents:

Aparell 1	0,3	0,7	–1,1	2,0	1,7	– 0,8	– 0,5
Aparell 2	1,6	– 0,9	– 2,8	3,1	4,2	– 1,0	2,1

Es vol saber si el primer aparell és més precís que el segon. Feu un contrast d'hipòtesi amb un nivell de significació del 0,05.

2. Es vol comprovar l'efecte de la humitat en el deteriorament de dos materials magnètics diferents. Amb aquest objectiu, es van provar deu peces del material 1 sotmetent-lo a una forta humitat. De la mateixa manera, es van provar tretze peces del material 2. La mostra del material 1 va donar un deteriorament mitjà de 83 amb una variància mostral de 25, mentre que la mostra del material 2 va donar un valor mitjà de 83 amb una variància mostral de 16. Suposarem que les poblacions són normals. Podem concloure amb un nivell de significació $\alpha = 0{,}1$ que les variàncies poblacionals dels materials 1 i 2 són iguals?

Solucionari

1. És un problema de comparació de variàncies de dues poblacions, ja que la precisió d'un aparell ve donada per la magnitud de la seva desviació típica. Si les desviacions de les dues poblacions són iguals, aleshores tindran la mateixa precisió.

A partir de les dades de la taula, calculem les mitjanes i les variàncies mostrals que ens fan falta per a fer l'exercici.

- Mitjana de la mostra 1: $\bar{x}_1 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1i} = 0{,}32857$
- Variància de la mostra 1: $s_1^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_1 - x_{1i})^2 = 1{,}46905$
- Mitjana de la mostra 2: $\bar{x}_2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2i} = 0{,}900$
- Variància de la mostra 2: $s_2^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_2 - x_{2i})^2 = 6{,}36667$

A partir d'ara, seguirem el procediment establert per a fer un contrast d'igualtat de variàncies:

1. Expressem les hipòtesis:

- Hipòtesi nul·la: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
- Hipòtesi alternativa: $H_1 : (\sigma_1^2 < \sigma_2^2)$. Establim aquesta hipòtesi alternativa unilateral perquè volem saber si el primer aparell és més precís que el segon. Si és més precís, aleshores la seva variància serà més petita.

2. Seleccionem un nivell de significació $\alpha = 0{,}05$ i calculem l'estadístic de contrast:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{1{,}469}{6{,}367} = 0{,}231$$

3. Mirant les taules tenim que: $f_{0,95;6;6} = 4{,}28$. I aplicant la propietat recíproca tenim que:

$$f_{0,05;6;6} = \frac{1}{f_{0,95;6;6}} = \frac{1}{4{,}28} = 0{,}234$$

Com que $0{,}231 < 0{,}234$, rebutgem H_0 i acceptem que el primer aparell és més precís que el segon. També podem arribar a aquesta mateixa conclusió a partir del *p*-valor. Amb l'ajuda de l'ordinador, podem calcular el *p*-valor:

$$P(F_{6,6} < 0{,}231) = 0{,}0489$$

I com que $0{,}0489 < 0{,}05$, rebutgem la hipòtesi nul·la en favor de la hipòtesi alternativa.

2. Siguin σ_1^2 i σ_2^2 les variàncies poblacionals del deteriorament dels materials 1 i 2, respectivament. Farem un contrast d'hipòtesis sobre la igualtat de variàncies:

1. Establim les hipòtesis nul·la i alternativa:

- Hipòtesi nul·la: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
- Hipòtesi alternativa: $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

2. Calculem l'estadístic de contrast:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{25}{16} = 1{,}562$$

3. Fixat el nivell de significació $\alpha = 0{,}1$, buscarem el valor crític de la cua dreta de la de la distribució F amb $m = 10 - 1 = 9$ i $n = 13 - 1 = 12$ graus de llibertat al numerador i al denominador, respectivament, en la taula corresponent a $\alpha/2 = 0{,}05$:

$$f_{0,95;9;12} = 2{,}80$$

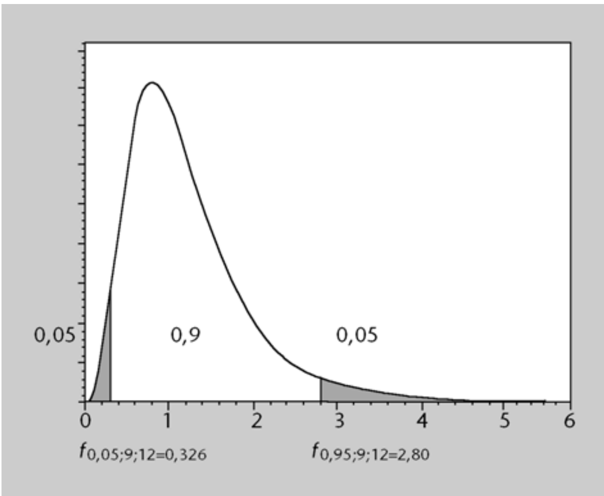
Per a calcular el valor crític corresponent a la cua esquerra de la distribució, fem servir la propietat recíproca:

$$f_{0,05;9;12} = \frac{1}{f_{0,95;12;9}} = \frac{1}{3{,}07} = 0{,}326$$

Per tant, rebutgem la hipòtesi nul·la quan l'estadístic de contrast sigui menor que 0,326 o major que 2,80. En aquest cas, tenim que l'estadístic de contrast es troba entre aquests dos valors:

$$0{,}326 < 1{,}562 < 2{,}8$$

Gràficament:



Per tant, no rebutgem la hipòtesi nul·la. I concloem que no tenim cap evidència suficient per a pensar que les variàncies siguin diferents.

A aquesta mateixa conclusió podem arribar calculant el p-valor amb l'ajuda de l'ordinador:

$$P = 2 \cdot P(F_{9,12} > 1{,}562) = 2 \cdot 0{,}2318 = 0{,}4636.$$

Com que $0{,}4636 > 0{,}1$ no rebutgem la hipòtesi nul·la.