Exercicis d'autoavaluació de vectors i aplicacions lineals

PID_00255401

Raquel Ferreras
Jordi Sales

Universitat Oberta de Catalunya

Raquel Ferreras

Professora dels Estudis d'Economia i Empresa de la Universitat Oberta de Catalunya. Llicenciada en Administració i Direcció d'Empreses per la Universitat de Barcelona. Doctora en Educació i TIC (*e-learning*) per la Universitat Oberta de Catalunya.

Jordi Sales

Professor de la Facultat de Turisme i Direcció Hotelera Sant Ignasi de la Universitat Ramon Llull. Llicenciat i doctor en Economia per la Universitat de Barcelona. Consultor dels Estudis d'Economia i Empresa de la UOC.

Índex

Introducció 5

Objectius 6

1. Enunciats de les preguntes curtes 7
- 1.1. Combinació lineal 7
- 1.2. Dependència i independència lineal. Generadors i base 7
- 1.3. Coordenades en una base 8
- 1.4. Aplicacions lineals 8

2. Solucions a les preguntes curtes 10
- 2.1. Combinació lineal 10
- 2.2. Dependència i independència lineal. Generadors i bases 12
- 2.3. Coordenades en una base 13
- 2.4. Aplicacions lineals 16

Introducció

En aquest mòdul continuem l'estudi de l'àlgebra, i el seu objectiu principal és treballar amb vectors, repassar els conceptes de dependència i d’independència lineal, de generadors i base, així com introduir el concepte d'aplicació lineal. Presentarem un conjunt de preguntes curtes amb les corresponents solucions. Es recomana intentar fer els exercicis i posteriorment revisar les solucions proposades.

Objectius

Els objectius que hauríeu d'assolir una cop fets els exercicis que proposem són:

1. Combinacions lineals de vectors i conjunts de vectors linealment dependents i linealment independents.

2. Sistema de generadors i base i coordenades d'un vector en diferents bases.

3. Matriu associada a una aplicació lineal i expressió analítica.

1. Enunciats de les preguntes curtes

1.1. Combinació lineal

1) Poseu el vector $(-4,2,2)$ com a combinació lineal dels vectors $(-2,3,1)$, $(0,4,-1)$ i $(2,1,-3)$.

2) Donat m un nombre real qualsevol, considerem els vectors $v_1=(m,-m)$, $v_2=(1,-1)$ i $v_3=(2,3)$. Expresseu el vector com a combinació lineal dels vectors v_2 i v_3.

3)

a) Expresseu el vector $(3,-5,5)$ com a combinació lineal dels vectors $(1,-4,5)$, $(1,1,0)$ i $(-4,-1,0)$.

b) Quant ha de valer el paràmetre a per tal que el vector $(2,-3)$ no es pugui expressar com a combinació lineal dels vectors $(3,-1)$ i $(-3,a)$?

1.2. Dependència i independència lineal. Generadors i base

1) Quant ha de valer el paràmetre a per tal que els vectors $(a,2,2)$, $(3,a,-3)$ i $(-3,4,3)$ siguin linealment dependents?

2) Els vectors $(3,2,-1)$, $(k,-2,4)$ i $(-1,k,-1)$ són vectors de R^3. Per a quins valors del paràmetre k els 3 vectors anteriors són linealment independents?

3) Donat el conjunt de vectors $\{(1,0,1),(0,1,k),(1,1,-k)\}$, trobeu, si n'hi ha, els valors que ha de prendre k perquè aquests vectors siguin linealment independents, linealment dependents, generadors o base.

4)

a) Formen base de R^3, els vectors $(3,-2,1)$, $(-1,3,0)$, $(2,2,-3)$ i $(4,-1,2)$? Justifiqueu la resposta.

b) Formen base de R^3, els vectors $(3,-2,1)$, $(-1,3,0)$ i $(4,-1,2)$? Justifiqueu la resposta.

c) Formen base de R^3, els vectors $(3,-2,1)$, $(-1,2,0)$ i $(4,4,3)$? Justifiqueu la resposta.

1.3. Coordenades en una base

1) Les coordenades del vector $\vec{v} \in R^3$ en la base canònica són $(1,2,3)$. Quines són les seves coordenades en la base $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$?

2)

a) Les coordenades del vector $v \in R^3$ en la base $B = \{(-2,3,1), (0,4,-1), (2,1,-3)\}$ són $(2,-5,4)$. Quines són les coordenades del vector v en la base canònica?

b) Les coordenades del vector $w \in R^3$ en la base canònica són $(-4,-6,6)$. Quines són les coordenades del vector w en la base $B = \{(-2,3,1), (0,4,-1), (2,1,-3)\}$?

3)

a) Les coordenades del vector $v \in R^2$ en la base canònica són $(8,-7)$. Quines són les coordenades del vector v en la base $B = \{(-2,3), (2,2)\}$?

b) Les coordenades del vector $w \in R^2$ en la base $B = \{(3,1), (a, b)\}$ són $(-5,2)$, i les coordenades d'aquest mateix vector $w \in R^2$ en la base canònica són $(-7,1)$. Quins són els valors dels paràmetres a i b que formen els components del segon vector de la base B?

4) Les coordenades del vector $v \in R^3$ respecte a la base $B = \{(a, -1,2), (-3, b, -1), (-1,2, c)\}$ són. Quant han de valer els paràmetres a, b i c per tal que les coordenades del vector $v \in R^3$ respecte a la base canònica siguin $(5,-2,3)$?

1.4. Aplicacions lineals

1) Donada l'aplicació lineal $f(x, y) = (x+2y, -3x-6y, -x+y)$, es demana:

a) Calculeu la matriu associada en la base canònica de R^2.

b) Si anomenem A a aquesta matriu, determineu els vectors (x, y) per als quals es verifica que $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2)

a) L'aplicació lineal f té per matriu associada en la base canònica la matriu $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Quina és l'expressió de l'aplicació lineal f?

b) Trobeu els vectors que compleixen $f(x, y, z) = (0,0)$.

3)

a) Calculeu l'expressió de l'aplicació lineal f que té per matriu associada en la base canònica la matriu $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

b) Trobeu els vectors (x, y) que compleixen $f(x, y) = (6, -9)$.

4) Una aplicació lineal té per matriu associada la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Sabem que el vector $(6, -2)$ és un vector propi de la matriu anterior. Quin és el valor propi associat al vector propi anterior?

2. Solucions a les preguntes curtes

2.1. Combinació lineal

1) Per a posar el vector $(-4,2,2)$ com a combinació lineal dels vectors $(-2,3,1)$, $(0,4,-1)$ i $(2,1,-3)$ cal trobar els valors x, y i z que compleixen

$$x(-2,3,1)+y(0,4,-1)+z(2,1,-3)=(-4,2,2). \qquad 2.1$$

Operant l'expressió anterior, obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{array}{l} -2x+2z=-4, \\ 3x+4y+z=2, \\ x-y-3z=2. \end{array} \qquad 2.2$$

Resolent el sistema d'equacions anterior obtenim la solució $x=3$, $y=-2$ i $z=1$.

2) Per escriure el vector com a combinació lineal dels altres dos, n'hi ha prou amb determinar dos nombres reals, x i y, tals que es compleixi la igualtat $xv_2+yv_3=v_1$. És a dir:

$$x(1,-1)+y(2,3)=(m,-m). \qquad 2.3$$

Aquesta igualtat es pot escriure com el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x+2y=m \\ -x+3y=-m \end{cases}. \qquad 2.4$$

Aquest sistema té solució única ja que és un sistema compatible i determinat. Per comprovar-ho n'hi ha prou amb observar que la matriu de coeficients del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ té rang 2 ja que el seu determinant és diferent de zero, en concret 5.

Usant el mètode de Gauss, obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -1 & 3 & -m \end{pmatrix} \underset{F_2+F_1}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}. \qquad 2.5$$

Deduïm directament que $y=0$ i $x=m$.

3)

a) Si busquem posar el vector $(3,-5,5)$ com a combinació lineal dels vectors $(1,-4,5)$, $(1,1,0)$ i $(-4,-1,0)$, hem de trobar els valors x, y i z que fan que es compleixi

$$x(1,-4,5)+y(1,1,0)+z(-4,-1,0)=(3,-5,5). \qquad 2.6$$

De la igualtat anterior, obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} &x+y-4z=3,\\ &-4x+y-z=-5, \\ &5x=5. \end{aligned} \qquad 2.7$$

Si resolem el sistema d'equacions anterior obtenim la solució $x=1$, $y=-2$ i $z=-1$.

b) De manera anàloga al que s'ha fet a l'apartat a), si volem que el vector $(2,-3)$ **no** es pugui posar com a combinació lineal dels vectors $(3,-1)$ i $(-3,\ a)$, cal que **no** hi hagi valors de x i y que facin que es compleixi

$$x(3,-1)+y(-3,\ a)=(2,-3).$$

És a dir, cal que el sistema d'equacions següent **no** tingui solució (cal que sigui incompatible):

$$\begin{aligned} &3x-3y=2,\\ &-x+ay=-3. \end{aligned} \qquad 2.8$$

El determinant de la matriu del sistema anterior és

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & a \end{vmatrix}=3a-3 \qquad 2.9$$

i s'anul·la quan $a=1$. Quan $a=1$ el rang de la matriu del sistema és 1 i quan $a\neq 1$ el rang de la matriu del sistema és 2.

Per tant, si $a\neq 1$, el sistema és compatible determinat.

Quan $a=1$, el rang de la matriu ampliada és 2 ja que:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-9+2=-7\neq 0. \qquad 2.10$$

Per tant, si $a=1$, el sistema és incompatible i el vector $(2,-3)$ **no** es pot expressar com a combinació lineal dels vectors $(3,-1)$ i $(-3,\ a)$.

2.2. Dependència i independència lineal. Generadors i bases

1) Calculem el determinant de la matriu que conté els tres vectors en columna:

$$\begin{vmatrix} a & 3 & -3 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3a^2 + 18a + 24. \qquad 2.11$$

El determinant anterior és zero quan es compleixi $3a^2 + 18a + 24 = 0$, i això passa quan $a = -2$ o quan $a = -4$.

Per tant, quan $a = -2$ o quan $a = -4$, els vectors $(a,2,2)$, $(3,a,-3)$ i $(-3,4,3)$ són linealment dependents.

Nota

Una de les maneres de comprovar si tres vectors són linealment dependents és calcular el determinant de la matriu que conté els tres vectors en columna i veure si aquest determinat és zero o diferent de zero. Si el determinant és zero, els vectors són linealment dependents. Si el determinant és diferent de zero, els vectors són linealment independents.

2) Calculem el determinant de la matriu que conté els tres vectors en columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & k & -1 \\ 2 & -2 & k \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -k^2 - 10k. \qquad 2.12$$

El determinant anterior és zero quan es compleixi $-k^2 - 10k = 0$, i això passa quan $k = 0$ o quan $k = -10$.

Per tant, quan $k \neq 0$ i $k \neq -10$, els vectors $(3,2,-1)$, $(k,-2,4)$ i $(-1,k,-1)$ són linealment independents.

3) Per resoldre aquesta pregunta començarem per estudiar el rang de la matriu A formada pels tres vectors. Observem a més que són vectors de R^3, espai que té per dimensió 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & -k \end{pmatrix}. \qquad 2.13$$

El determinant de la matriu A és

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & -k \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-k) + 0\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot k\cdot 1 - (1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot k\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot(-k)) = \qquad 2.14$$
$$-k - 1 - k = -2k - 1.$$

Per tant,

- Si $k \neq -\frac{1}{2}$, la matriu A té rang 3, i els tres vectors són linealment independents. Donat que són tres vectors linealment independents de R^3, espai que té per dimensió 3, són base de R^3. En aquest cas, també són generadors de R^3, ja que tota base és generadora de l'espai al qual pertany.

Nota

A R^3, un conjunt de generadors necessita n vectors amb $n \geq 3$, dels quals 3 vectors han de ser linealment independents.

- Si $k = -\frac{1}{2}$, la matriu A té rang 2, i els tres vectors són linealment dependents. En aquest cas no són base, ja que una base de R^3 ha de tenir tres vectors linealment independents. Tampoc són generadors, ja que tot conjunt de generadors ha de tenir com a mínim el mateix nombre de vectors linealment independents que la dimensió de l'espai al qual pertany.

4)

a) Els vectors $(3,-2,1), (-1,3,0), (2,2,-3)$ i $(4,-1,2)$ **no** formen base de R^3 perquè hi ha quatre vectors.

Nota

Per ser base de R^3 cal que hi hagi exactament tres vectors i que siguin linealment independents.

b) Els vectors $(3,-2,1)$, $(-1,3,0)$ i $(4,-1,2)$ formen base de R^3 perquè hi ha exactament tres vectors i aquests són linealment independents. Comprovem aquesta última afirmació calculant el determinant dels tres vectors posats en columna i veient que és diferent de 0.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 18+1-12-4 = 3 \neq 0. \qquad 2.15$$

c) Els vectors $(3,-2,1), (-1,2,0)$ i $(4,4,3)$ **no** formen base de R^3 perquè hi ha tres vectors però aquests **no** són linealment independents. Comprovem aquesta última afirmació calculant el determinant dels tres vectors posats en columna i veient que és igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 18-4-8-6 = 0. \qquad 2.16$$

2.3. Coordenades en una base

1) Siguin (a, b, c) les coordenades del vector $\vec{v} \in R^3$ en la base B. Escrivim el vector $\vec{v}$ utilitzant les dues bases, és a dir:

$$a\,(1,0,0)+b\,(1,1,0)+c\,(1,1,1) = \vec{v} = 1\,(1,0,0)+2\,(0,1,0)+3\,(0,0,1). \qquad 2.17$$

Fent operacions,

$$(a+b+c, b+c, c) = (1,2,3). \qquad 2.18$$

Aquesta igualtat es tradueix en el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ \quad b+c=2 \\ \qquad c=3 \end{cases} . \qquad 2.19$$

Aquest sistema té per solució $c=3$, $b=-1$ i $a=-1$. Així, el vector $\vec{v}$ s'escriu com $(-1,-1,3)$ en la base B.

2)

a) Si les coordenades del vector $v \in R^3$ en la base $B=\{(-2,3,1),(0,4,-1),(2,1,-3)\}$ són $(2,-5,4)$ i volem trobar les coordenades d'aquest vector en la base canònica, vol dir que hem de trobar els valors x, y i z que compleixen

$$x\,(1,0,0)+y\,(0,1,0)+z\,(0,0,1)=v=2\,(-2,3,1)-5\,(0,4,-1)+4\,(2,1,-3). \qquad 2.20$$

Operant l'expressió anterior, obtenim:

$$\begin{array}{l} x=2\cdot(-2)-5\cdot 0+4\cdot 2=4, \\ y=2\cdot 3-5\cdot 4+4\cdot 1=-10, \\ z=2\cdot 1-5\cdot(-1)+4\cdot(-3)=-5. \end{array} \qquad 2.21$$

Per tant, les coordenades del vector v en la base canònica són $(4,-10,-5)$.

b) Si les coordenades del vector $w \in R^3$ en la base canònica són $(-4,-6,6)$ i volem trobar les coordenades d'aquest vector en la base $B=\{(-2,3,1),(0,4,-1),(2,1,-3)\}$, vol dir que hem de trobar els valors x, y i z que compleixen

$$x\,(-2,3,1)+y\,(0,4,-1)+z\,(2,1,-3)=w=-4\,(1,0,0)-6\,(0,1,0)+6\,(0,0,1). \qquad 2.22$$

Operant l'expressió anterior, obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{array}{l} -2x+2z=-4, \\ 3x+4y+z=-6, \\ x-y-3z=6. \end{array} \qquad 2.23$$

Resolem el sistema d'equacions anterior aplicant Gauss i posant la tercera equació en primer lloc:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 6 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2=2f_1+f_2 \\ f_3=-3f_1+f_3}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 7 & 10 & -24 \end{pmatrix} \underset{f_3=7f_2+2f_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{pmatrix} \qquad 2.24$$

Obtenim la solució $x=1$, $y=-2$ i $z=-1$. Per tant, les coordenades del vector w en la base B són $(1,-2,-1)$.

3)

a) La base canònica de R^2 està formada pels vectors $(1,0)$ i $(0,1)$. Si les coordenades del vector $v \in R^2$ en la base canònica són $(8,-7)$ i volem trobar les coordenades d'aquest vector v en la base $B=\{(-2,3),(2,2)\}$, cal trobar els valors x i y que compleixen la següent igualtat:

$$x\,(-2,3)+y\,(2,2)=8\,(1,0)-7\,(0,1). \qquad 2.25$$

De la igualtat anterior, obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} -2x+2y&=8,\\ 3x+2y&=-7. \end{aligned} \qquad 2.26$$

Si resolem el sistema d'equacions anterior obtenim la solució $x=-3$ i $y=1$. Per tant, les coordenades del vector v en la base $B=\{(-2,3),(2,2)\}$ són $(-3,1)$.

b) Com que les coordenades del vector $w \in R^2$ en la base $B=\{(3,1),(a,b)\}$ són $(-5,2)$ i les coordenades d'aquest mateix vector $w \in R^2$ en la base canònica són $(-7,1)$, sabem que es compleix la següent igualtat:

$$-5\,(3,1)+2\,(a,b)=-7\,(1,0)+1\,(0,1). \qquad 2.27$$

De la igualtat anterior, obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} -15+2a&=-7,\\ -5+2b&=1. \end{aligned} \qquad 2.28$$

Les equacions anteriors es poden resoldre per separat i obtenim les solucions $a=4$ i $b=3$. Per tant, el segon vector de la base B és el vector $(4,3)$.

4) Com que les coordenades del vector $v \in R^3$ en la base $B=\{(a,-1,2),(-3,b,-1),(-1,2,c)\}$ són $(2,-2,-1)$ i les coordenades d'aquest mateix vector $v \in R^3$ en la base canònica són $(5,-2,3)$, sabem que es compleix la següent igualtat:

$$2\,(a,-1,2)-2\,(-3,b,-1)-(-1,2,c)=5\,(1,0,0)-2\,(0,1,0)+3\,(0,0,1). \qquad 2.29$$

De la igualtat anterior, obtenim les següents equacions i les seves solucions:

$$\begin{aligned} &2a+6+1=5 \rightarrow a=-1, \\ &-2-2b-2=-2 \rightarrow b=-1, \\ &4+2-c=3 \rightarrow c=3. \end{aligned} \qquad 2.30$$

2.4. Aplicacions lineals

1) Per a conèixer l'expressió matricial de l'aplicació lineal donada en aquesta base, hem de calcular la imatge dels vectors de la base canònica en l'aplicació lineal $f(x, y)=(x+2y, -3x-6y, -x+y)$. En concret:

$$\begin{aligned} &f(1,0)=(1,-3,-1), \\ &f(0,1)=(2,-6,1). \end{aligned} \qquad 2.31$$

Nota

La base canònica de R^2 és la formada pels vectors $\{(1,0),(0,1)\}$

La matriu associada a la base canònica té per columnes les imatges dels vectors de la base canònica. Així, podem escriure la matriu d'aquesta manera:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad 2.32$$

Podem comprovar el resultat fent l'operació següent:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2y \\ -3x-6y \\ -x+y \end{pmatrix}. \qquad 2.33$$

Això prova que $f(x, y)=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

b) Per trobar els vectors (x, y) tals que $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, hem de resoldre el sistema d'equacions homogeni següent:

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ -3x-6y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}. \qquad 2.34$$

Nota

Els sistemes homogenis són sempre com a mínim compatibles ja que la solució trivial $x=y=0$ és sempre una solució possible. Així, un sistema homogeni només pot ser compatible determinat (solució única) o compatible indeterminat (infinites solucions).

Per resoldre el sistema farem servir el mètode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{3F_1+F_2}{\overset{}{\underset{F_1+F_3}{\Longleftrightarrow}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad 2.35$$

Per tant, el sistema és compatible determinat amb solució $x=0$ i $y=0$.

2)

a) Com que la matriu $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ té dues files i tres columnes, l'espai de sortida és R^3 (nombre de columnes) i l'espai d'arribada és R^2 (nombre de files). Per trobar l'expressió de l'aplicació lineal f cal aplicar la matriu $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ al vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2z \\ -3x+5y+z \end{pmatrix}. \qquad 2.36$$

Per tant, $f(x, y, z) = (-x+2z, -3x+5y+z)$.

b) Per trobar els vectors que verifiquin $f(x, y, z) = (0,0)$ cal que es compleixi

$$\begin{aligned} -x+2z &= 0, \\ -3x+5y+z &= 0. \end{aligned} \qquad 2.37$$

Resolem el sistema d'equacions anterior mitjançant Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 = -3f_1 + f_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}. \qquad 2.38$$

Podem comprovar que es tracta d'un sistema compatible indeterminat ja que el rang de la matriu del sistema coincideix amb el rang de la matriu ampliada, que és 2, mentre que el número d'incògnites és 3.

Si considerem la segona equació trobem que $5y - 5z = 0 \Rightarrow 5y = 5z \Rightarrow y = z$.

Si considerem la primera equació trobem que $-x+2z = 0 \Rightarrow x = 2z$.

Per tant, els vectors que compleixen $f(x, y, z) = (0,0)$ són tots els de la forma $(2z, z, z)$, on z pot prendre qualsevol valor real.

3)

a) Per trobar l'expressió de l'aplicació lineal f que té per matriu associada en la base canònica la matriu $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, cal aplicar la matriu anterior al vector (x, y).

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4y \\ -3x+6y \end{pmatrix}. \qquad 2.39$$

Per tant, l'expressió de l'aplicació lineal f ve donada per $f(x, y) = (2x-4y, -3x+6y)$.

b) Per trobar els vectors (x, y) que compleixen $f(x, y) = (6, -9)$, cal resoldre el següent sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 6, \\ -3x + 6y &= -9. \end{aligned} \qquad 2.40$$

El sistema d'equacions anterior és compatible indeterminat i, si el resolem, les seves solucions són de la forma $x = 3 + 2y$, on y pot prendre qualsevol valor real. Per tant, els vectors (x, y) que compleixen $f(x, y) = (6, -9)$ són tots els de la forma $(3 + 2y, y)$ on y pot prendre qualsevol valor real.

4) Si el vector $(6, -2)$ és un vector propi de la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, llavors s'ha de complir

$$A\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad 2.41$$

on λ serà el valor propi associat al vector propi $(6, -2)$.

Fent operacions, obtenim:

$$A\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = -3. \qquad 2.42$$

Per tant, $\lambda = -3$ serà el valor propi associat al vector propi $(6, -2)$.