Exercicis d'autoavaluació de nombres i funcions d'una variable

PID_00255402

Raquel Ferreras
Jordi Sales

Universitat Oberta de Catalunya

Raquel Ferreras

Professora dels Estudis d'Economia i Empresa de la Universitat Oberta de Catalunya. Llicenciada en Administració i Direcció d'Empreses per la Universitat de Barcelona. Doctora en Educació i TIC (*e-learning*) per la Universitat Oberta de Catalunya.

Jordi Sales

Professor de la Facultat de Turisme i Direcció Hotelera Sant Ignasi de la Universitat Ramon Llull. Llicenciat i doctor en Economia per la Universitat de Barcelona. Consultor dels Estudis d'Economia i Empresa de la UOC.

Índex

Introducció

En aquest mòdul iniciem els temes de càlcul. Començarem treballant amb el concepte de sèrie numèrica per tal de saber amb quin tipus de sèrie ens trobem. També introduirem les funcions, analitzarem quins són els seu dominis i construirem la funció composta. Per últim, resoldrem equacions exponencials, logarítmiques i polinòmiques. Aquest treball el presentarem mitjançant un conjunt de preguntes curtes amb les corresponents solucions. Es recomana intentar fer els exercicis i posteriorment revisar les solucions proposades.

Objectius

Els objectius que hauríeu d'assolir una vegada fets els exercicis que proposem són:

1. Sèries numèriques i criteris per a la convergència d'una sèrie.

2. Càlcul de la funció composta i del domini d'una funció.

3. Posició relativa de dues rectes.

4. Resolució d'equacions exponencials i logarítmiques.

1. Enunciats de les preguntes curtes

1.1. Sèries

1) Considereu la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{2k+1}{k+5}\right)^n$, on $k>0$. Determineu per a quins valors de k la sèrie és convergent. Calculeu el seu valor (la suma de la sèrie) en el cas particular en què $k=2$.

2) Determineu per a quins valors de r la sèrie $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k)^t}$, amb $k>0$, és convergent. Calculeu el seu valor (suma de la sèrie) en el cas particular en què $k=3$.

3) Considereu la suma infinita

$$S=\frac{1}{(2k+1)^1}+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2k+1)^3}+\frac{1}{(2k+1)^4}+\frac{1}{(2k+1)^5}+\cdots \qquad 3.1$$

on k és un nombre real tal que $k>0$.

a) Comproveu que es pot reescriure com una sèrie, identificant el tipus de sèrie a què correspon.

b) Trobeu els valors de k que fan que la sèrie sigui convergent.

c) Calculeu el seu valor (suma) quan $k=\frac{1}{2}$.

1.2. Composició i domini

1) Donades les funcions $f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)=x^2+x-3$ i $h(x)=e^x$,

a) Calculeu la composició $f\circ g$. Determineu el seu domini.

b) Calculeu la composició $h\circ g$. Determineu el seu domini.

2) Donades les funcions $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=x^2$ i $h(x)=\frac{1}{x-4}$,

a) Calculeu la composició $f\circ g$. Determineu el seu domini.

b) Calculeu la composició $h\circ g$. Determineu el seu domini.

c) Calculeu la composició $f \circ h$. Determineu el seu domini.

3) Donades les funcions $f(x) = \sqrt{x+1}$ i $g(x) = x^2 - 2$, trobeu el domini de la funció $g(x)$ i de la funció $(f \circ g)(x)$.

1.3. Rectes

1) Trobeu el valor d'a i b amb $b \neq 0$ sabent que les rectes $ax + 4y = 8$ i $2x + by = 4$ són perpendiculars i que la primera passa pel punt $(x, y) = (1, 1)$. Quina equació en forma implícita té la recta que és paral·lela a la segona recta i que passa també pel punt (1,1)?

2) Donades les rectes d'equacions $y = -x + 1$ i $y = x - 1$,

a) Trobeu la recta perpendicular a $y = -x + 1$ que passa pel punt $(-1, 0)$.

b) Trobeu la recta paral·lela a $y = -x + 1$ que passa pel punt $(0, -1)$.

3) Determineu els valors d'a i b en l'equació de les rectes $r_1 : x + ay = 4$ i $r_2 : bx + 8y = 8$ perquè siguin:

a) Paral·leles i que la recta r_1 passi pel punt $(x, y) = (0, 2)$;

b) Perpendiculars i que la recta r_2 passi pel punt $(x, y) = (1, 2)$.

4) En un mercat en competència perfecta, la funció de demanda ve donada per l'expressió $q = 100 - 2p$, i la funció d'oferta ve donada per l'expressió $q = \frac{p}{2}$, on q és la quantitat i p el preu.

a) Obteniu la funció inversa de demanda i la funció inversa d'oferta.

b) Trobeu el preu i la quantitat d'equilibri del mercat.

c) Estudieu la posició relativa de les dues rectes representades i justifiqueu si són perpendiculars o no.

1.4. Equacions exponencials i logarítmiques. Funció inversa

1) Resoleu les següents equacions exponencials:

a) $9^x \cdot 3^{2x} = 81$

b) $3^{x+2} + 3^{x-2} = 82$

c) $3^{x+1} - 3^{x-2} = 234$

2) Resoleu les següents equacions logarítmiques:

a) $\ln(x) - 4\ln(5) = 0$

b) $\log(1 - x^2) - \log(1 + x) - 2\log(2x - 1) = 0$

c) $\ln(x + 1) - \ln(x - 1) = 2 \cdot \ln(\sqrt{2})$

3) Resoleu les següents equacions polinòmiques:

a) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $3x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 9x - 6 = 0$

4) Donades les funcions $f(x) = 5^x$ i $g(x) = \log(x)$, resoleu les següents equacions:

a) $f(x + 2) = 650 - f(2)$.

b) $g(x + 1) + g(x - 1) = f(0)g(2x^2 - 5)$.

5) Donada la funció $f(x) = \frac{1 + 2x}{1 - 2x}$, calculeu la funció inversa $f^{-1}(x)$ on estigui definida. Trobeu el domini de $f(x)$ i $f^{-1}(x)$. Comproveu que $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$.

2. Solucions a les preguntes curtes

2.1. Sèries

1) Es tracta d'una sèrie geomètrica. La raó és $r=\frac{2k+1}{k+5}$, i per tant la sèrie serà convergent si $r=\frac{2k+1}{k+5}<1 \Rightarrow 2k+1<k+5 \Rightarrow k<4$. La suma de la sèrie es correspon a la suma d'infinits termes d'una progressió geomètrica on el primer terme és $a_1=2\cdot\left(\frac{2\cdot 2+1}{2+5}\right)^1=\frac{10}{7}$ i la raó $r=\frac{2\cdot 2+1}{2+5}=\frac{5}{7}$. Així, $S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{10}{7}}{1-\frac{5}{7}}=5$.

2) Notem que és una sèrie geomètrica (suma d'infinits termes d'una progressió geomètrica) que té per raó $r=\frac{1}{(1+k)}$. Perquè sigui convergent s'ha de complir $\frac{1}{(1+k)}<1$, i per tant $k>0$. Per a $k=3$ tenim que $r=\frac{1}{(1+k)}=\frac{1}{4}$, $S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$.

3)

a) Podem reescriure la suma com:

$$S=\frac{1}{(2k+1)^1}+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2k+1)^3}+\frac{1}{(2k+1)^4}+\frac{1}{(2k+1)^5}+\cdots= \left(\frac{1}{2k+1}\right)^1+\left(\frac{1}{2k+1}\right)^2+\left(\frac{1}{2k+1}\right)^3+\left(\frac{1}{2k+1}\right)^4+\left(\frac{1}{2k+1}\right)^5+\cdots \qquad 3.2$$

Fixeu-vos que tots els termes de la suma estan relacionats entre si. De fet, cada terme de la suma és igual a l'anterior multiplicat per $\left(\frac{1}{2k+1}\right)$. Per tant, els diferents termes de la suma corresponen als termes d'una progressió geomètrica definida com $a_n=a_1r^{n-1}$ amb $n\geq 1$ on $a_1=\frac{1}{2k+1}$ i $r=\frac{1}{2k+1}$, de manera que $a_n=\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2k+1}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2k+1}\right)^n$.

Així, la suma infinita és en realitat la suma dels termes d'una progressió geomètrica, de manera que es pot reescriure com la sèrie geomètrica $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\right)^n$.

b) Sabem que una sèrie geomètrica és convergent si la raó de la progressió geomètrica és més petita que 1, i que aleshores la suma (valor de la sèrie) és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$. En el nostre cas, la raó és $r = \frac{1}{2k+1}$. Per tant, la sèrie serà convergent si i només si $r = \frac{1}{2k+1} <$. Com que $k > 0$, demanar que $\frac{1}{2k+1} < 1$ és equivalent a $1 < 2k+1 \Leftrightarrow 0 < 2k \Leftrightarrow 0 < k$. Per tant, la sèrie és convergent si i només si $k > 0$. Dit d'una altra manera, la sèrie serà convergent per a qualsevol valor de k positiu.

c) Si $k = \frac{1}{2}$, segons hem vist a l'apartat anterior, la sèrie és convergent perquè $k = \frac{1}{2}$ és un nombre positiu. Per tant, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$. Si $k = \frac{1}{2}$, tenim que $a_1 = \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}$ i que $r = \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}$. Així, la suma de la sèrie és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

2.2. Composició de funcions

1)

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+x-3) = \sqrt{(x^2+x-3)+1} = \sqrt{x^2+x-2}$. Com que l'arrel quadrada només està definida per a valors positius o zero del seu argument, necessitem que $x^2+x-2 \geq 0$. Notem que $x^2+x-2=0 \Rightarrow (x-1)(x+2)=0 \Rightarrow x=1$ o $x=-2$. Notem que per a valors entre $x=-2$ i $x=1$ la funció quadràtica pren valors negatius (per exemple, per a $x=0$, tenim que $0^2+0-2<0$). Així, la funció quadràtica prendrà valors positius per a $x \geq 1$ o per a $x \leq -2$. El domini serà, doncs, $Dom(f \circ g) = \{x \in R | x \leq -2 \text{ o } x \geq 1\}$.

b) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2+x-3) = e^{x^2+x-3}$. Com que tant la funció exponencial com els polinomis estan definits per a qualsevol valor real, el domini és $Dom(h \circ g) = R$.

2)

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2-1}$. Perquè l'arrel estigui definida, l'argument ha de ser positiu $x^2-1 \geq 0$; per tant, $x \geq 1$ o $x \leq -1$. El domini serà doncs $Dom(f \circ g) = \{x \in R | x \geq 1 \text{ o } x \leq -1\}$.

b) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(x^2)=\frac{1}{x^2-4}$. Perquè la fracció estigui definida, el denominador ha de ser no nul $x^2-4\neq 0$; per tant, $x\neq 2$ i $x\neq -2$. El domini serà $Dom(h\circ g)=\{x\in R|x\neq 2 \text{ i } x\neq -2\}$.

c) $(f\circ h)(x)=f(h(x))=f(1/x-4)=\sqrt{1/x-4-1}=\sqrt{\frac{5-x}{x-4}}$. Perquè l'arrel estigui definida, l'argument ha de ser positiu $\frac{5-x}{x-4}\geq 0$; per tant, $x\neq 4$ (el denominador no es pot anular) i numerador i denominador han de tenir el mateix signe. Perquè els dos siguin positius, $x\leq 5$ i $x>4$ (recordem que $x\neq 4$); perquè els dos siguin negatius $x\geq 5$ i $x<4$, però això és impossible. Concloem, doncs, que el domini ve donat per $Dom(f\circ h)=\{x\in R|4<x\leq 5\}$.

3) El domini de la funció $g(x)=x^2-2$ és el conjunt de tots els números reals, ja que és un polinomi.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-2)=\sqrt{(x^2-2)+1}=\sqrt{x^2-1}$. El domini d'aquesta funció, que és una arrel quadrada, el composen tots els números reals que fan que el que hi ha dins l'arrel sigui positiu o zero, és a dir,

$Dom(f\circ g)=\{x\in R/\, x^2-1\geq 0\}$. Es tracta, doncs, d'estudiar quan és que $x^2-1\geq 0$ o, el que és el mateix, quan $x^2\geq 1$. Els valors de x que compleixen la desigualtat anterior són les $x\leq -1$ i les $x\geq 1$. El domini és, doncs, $Dom(f\circ g)=\{x\in R/\, x^2-1\geq 0\}=\{x\in R/\, x\leq -1 \text{ o } x\geq 1\}=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$.

2.3. Rectes

1) L'expressió explícita de les rectes és $y=\frac{8-ax}{4}=2-\frac{a}{4}x$ i $y=\frac{4-2x}{b}=\frac{4}{b}-\frac{2}{b}x$. Sabem que en multiplicar el pendent de dues rectes perpendiculars el resultat és -1. Així,

$$\left(-\frac{a}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{b}\right)=-1\Rightarrow 2a=-4b\Rightarrow a=-2b. \qquad 3.3$$

Per altra banda, com que la primera recta passa pel punt (1,1), substituint x i y a l'expressió de la primera recta tenim que $1=\frac{8-a\cdot 1}{4}\Rightarrow a=4$ i, per tant, $b=\frac{a}{-2}=\frac{4}{-2}=-2$. Així, les equacions de les rectes que busquem són $y=2-\frac{a}{4}x=2-x$ i $y=\frac{4}{b}-\frac{2}{b}x=-2+x$.

Una recta paral·lela a la segona recta té el mateix pendent i, per tant, té l'expressió $y=x+n$. Substituint x=1 i y=1, tenim que $1=1+n\Rightarrow n=0$. La recta és doncs $y=x$ o, en la seva forma implícita, $-x+y=0$.

2)

a) La recta $y=-x+1$ té per pendent $m=-1$. Qualsevol recta perpendicular a ella té per pendent $m'=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{-1}=1$. La recta buscada en la seva forma explícita tindrà per equació $y=m'x+b$, on $m'=1$. Com que ha de passar per $(-1,0)$, sabem que $0=m'\cdot(-1)+b=-1+b\Rightarrow b=1$. Per tant, la recta que satisfà les condicions demanades és $y=x+1$.

b) La recta $y=-x+1$ té per pendent $m=-1$. Qualsevol recta paral·lela a $y=-x+1$ té per pendent $m'=m=-1$. La recta buscada en la seva forma explícita tindrà per equació $y=m'x+b$, on $m'=-1$. Com que ha de passar per $(0,-1)$, sabem que $-1=m'\cdot 0+b\Rightarrow b=-1$. Per tant, la recta que satisfà les condicions demanades és $y=-x-1$.

3) L'equació en forma explícita de les dues rectes és $r_1: y=-\frac{1}{a}x+\frac{4}{a}$ i $r_2: y=-\frac{b}{8}x+1$.

a) Com que la recta r1 passa pel punt (0,2) tenim que $r_1: 2=-\frac{1}{a}0+\frac{4}{a}\Rightarrow a=2\Rightarrow r_1: y=-\frac{1}{2}x+2$. Com que les dues rectes són paral·leles, tenen el mateix pendent $-\frac{b}{8}=-\frac{1}{2}\Rightarrow b=4$, i, per tant, $r_2: y=-\frac{1}{2}x+1$.

b) Com que la recta r2 passa pel punt (1,2) tenim que $r_2: 2=-\frac{b}{8}1+1\Rightarrow b=-8\Rightarrow r_2: y=x+1$. Com que les dues rectes són perpendiculars, la multiplicació de pendents és -1. Així, $\left(-\frac{1}{a}\cdot 1\right)=-1\Rightarrow a=1$ i $r_1: y=-x+4$.

4)

a) Per trobar la funció inversa de demanda hem d'aïllar la p de la funció de demanda:

$$q=100-2p\Leftrightarrow p=\frac{100-q}{2}. \qquad 3.4$$

Per trobar la funció inversa d'oferta hem d'aïllar la p de la funció d'oferta:

$$q=\frac{p}{2}\Leftrightarrow p=2q. \qquad 3.5$$

b) L'equilibri es troba en aquell preu en què la quantitat demandada i l'ofertada són iguals, i, per tant, quan $100-2p=\frac{p}{2}\Leftrightarrow 200-4p=p\Leftrightarrow p=\frac{200}{5}=40$. La quantitat d'equilibri serà $q=100-2\cdot 40=\frac{40}{2}=20$.

c) Les dues rectes són secants perquè es tallen en un únic punt. A més a més, el pendent de la funció inversa de demanda $p=\frac{100-q}{2}$ és $m=\frac{-1}{2}$, i el pendent de la funció inversa d'oferta $p=2q$ és $m'=2$. Per tant, i com que $m\cdot m'=-1$, podem afirmar que les dues rectes són perpendiculars.

2.4. Equacions exponencials i logarítmiques. Funció inversa

1)

a) Per resoldre-ho expressem tots els factors de l'equació com a potències de 3. Així, tenim $(3^2)^x\cdot 3^{2x}=3^4$. Aplicant les propietats de les potències podem simplificar l'expressió com $3^{2x}\cdot 3^{2x}=3^4$, d'on $3^{2x+2x}=3^4$. Finalment, l'expressió queda $3^{4x}=3^4$. Com que les bases de les potències són iguals, els exponents hauran de coincidir. Per tant, $4x=4\Leftrightarrow x=1$.

b) $$\begin{array}{l}3^{x+2}+3^{x-2}=82\Rightarrow 3^x\cdot 3^2+3^x\cdot 3^{-2}=82\Rightarrow 3^x\cdot(3^2+3^{-2})=82\Rightarrow\\ 3^x\cdot(9+\frac{1}{9})=82\Rightarrow 3^x\cdot(\frac{82}{9})=82\Rightarrow 3^x=9\Rightarrow 3^x=3^2\Rightarrow x=2\end{array}.$$

c) $3^{x+1}-3^{x-2}=234\Rightarrow 3^x\cdot 3-3^x\cdot 3^{-2}=234\Rightarrow 3^x\cdot(3-\frac{1}{3^2})=234\Rightarrow 3^x=\frac{234}{26/9}=81\Rightarrow x=4$

2)

a) Aplicant això a l'equació a resoldre, podem obtenir una expressió equivalent $\ln(x)-\ln(5^4)=0$. Passant un dels termes a l'altra banda de la igualtat, aquesta quedarà com $\ln(x)=\ln(5^4)$. Si els dos números tenen el mateix logaritme, hauran de coincidir i, per tant, $x=5^4=625$.

Nota

$b\cdot\log a=\log a^b$.

b) $$\begin{array}{l}\log(1-x^2)-\log(1+x)-2\log(2x-1)=0\Rightarrow\log(\frac{1-x2}{1+x})=\log(2x-1)^2\Rightarrow\log(\frac{(1-x)(1+x)}{1+x})=\log(2x-1)^2\Rightarrow\\ \Rightarrow\log(1-x)=\log(2x-1)^2\Rightarrow\\ 1-x=(2x-1)2\Rightarrow 1-x=4x2-4x+1\Rightarrow 4x2-3x=0\Rightarrow x\cdot(4x-3)=0.\end{array}$$

Les solucions són $x=0$ i $x=\frac{3}{4}$, encara que només és vàlida $x=\frac{3}{4}$, ja que per a x=0 tindríem que $\log(2x-1)=\log(-1)$, cosa que és impossible.

c) $\ln(x+1)-\ln(x-1)=2\cdot\ln(\sqrt{2})\Rightarrow\ln(\frac{x+1}{x-1})=\ln(\sqrt{2})^2=\ln(2)\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}=2\Rightarrow x=3.$

3)

a) Descomponem el polinomi aplicant Ruffini:

Així $x^3-3x^2-6x+8=(x-1)(x+2)(x-4)$ i, per tant, les solucions són $x=1$, $x=-2$ i $x=4$.

b) Si apliquem Ruffini

Les solucions són, doncs, $x=1$, $x=-1$ i $x=-2$.

4)

a) Fent servir la definició de la funció $f(x)$, podem reescriure l'equació calculant $f(x+2)$ i $f(2)$. És immediat que $f(x+2)=5^{x+2}$ i que $f(2)=5^2=25$. Per tant, podem reescriure $f(x+2)=650-f(2)$ com $5^{x+2}=650-25 \Leftrightarrow 5^{x+2}=625$. Tenint en compte que $625=5^4$, l'equació a resoldre és $5^{x+2}=5^4$. Per tant, $x+2=4 \Rightarrow x=2$.

Nota

$a^m=a^n \Rightarrow m=n.$

b) En primer lloc fixem-nos que $f(0)=5^0=1$. Tenint en compte això i fent servir la definició de la funció $g(x)$, podem reescriure l'equació com $\log(x+1)+\log(x-1)=\log(2x^2-5)$.

Nota

$\log a+\log b=\log(ab).$

Per tant, $\log(x+1)+\log(x-1)=\log((x+1)(x-1))=\log(x^2-1)$. Així, l'equació a resoldre queda com $\log(x^2-1)=\log(2x^2-5)$.

Nota

$\log(a)=\log(b) \Rightarrow a=b$

Per tant, $x^2-1=2x^2-5 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$. La solució $x=-2$ no és vàlida perquè no pertany al domini de $\log(x+1)$ ni al domini de $\log(x-1)$.

5) Donada la funció $f(x)=\frac{1+2x}{1-2x}$, calcularem la seva inversa. Si anomenem $y=f(x)$, es tracta d'aïllar la x com una funció de la y. De l'expressió $y=\frac{1+2x}{1-2x}$, i fent les operacions següents,

$$\begin{array}{l} y=\frac{1+2x}{1-2x} \Rightarrow y(1-2x)=1+2x \Rightarrow y-2xy=1+2x \Rightarrow \\ y-1=2xy+2x \Rightarrow y-1=2x(y+1) \Rightarrow x=\frac{y-1}{2(y+1)} \end{array} . \qquad 3.6$$

trobem que la inversa és $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2(x+1)}$.

Comprovarem que hem fet els càlculs correctament calculant la composició $(f \circ f^{-1})(x)$. Si l'expressió de la inversa és correcta tindrem que $(f \circ f^{-1})(x)=x$.

$$(f \circ f^{-1})(x)=f\left(\frac{x-1}{2(x+1)}\right)=\frac{1+2\frac{x-1}{2(x+1)}}{1-2\frac{x-1}{2(x+1)}}=\frac{1+\frac{x-1}{(x+1)}}{1-\frac{x-1}{(x+1)}}=\frac{\frac{2x}{x+1}}{\frac{2}{x+1}}=x. \qquad 3.7$$

Per calcular els dominis de les dues funcions observem que ambdues són fraccions algebraiques i que, per tant, estan definides per a tots els nombres reals llevat d'aquells que anul·len el denominador. Així, $Dom(f) = R \setminus \left\{x = \frac{1}{2}\right\} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ i $Dom(f^{-1}) = R \setminus \{x = -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.