Introducció a les mesures i el càlcul d'errors

Antoni Pérez Navarro

P08/19018/00543

Índex

Introducció

Al llarg dels nostres estudis, o bé en la nostra vida professional, és habitual que apareguin números "exactes": ens diuen que una determinada longitud és de 5,07 cm; o que una resistència és de 3 Ω. Però fins a quin punt són correctes aquests valors? I aquesta pregunta no és vàlida només per als problemes acadèmics, sinó també per a tots aquells elements reals que podem adquirir: si tenim una resistència de 3 Ω, realment té aquest valor? Fins a quin punt puc estar-ne segur?

Totes aquestes preguntes estan relacionades amb problemes deguts a la mesura. Des del principi de la humanitat s'han buscat mecanismes per prendre mesures de maneres més fiables i objectives. Potser el primer instrument de mesura que va haver-hi van ser les nostres mans, però aquest instrument de seguida va mostrar la seva ineficàcia en tant que depenia de la mida de la mà de la persona que mesurava. D'aquest primer pas fins als sofisticats instruments de mesura d'avui dia hi ha un llarg recorregut, però l'essència del problema segueix sent la mateixa: obtenir mesures fiables.

En aquest mòdul donarem unes pinzellades del que implica aquest procés de mesura. Començarem amb l'apartat 1, en el qual veureu un element bàsic de qualsevol mesura: les unitats en les quals mesurem. Tot seguit, a l'apartat 2 veurem els fonaments dels instruments de mesura i us mostrarem un seguit de conceptes que segur que heu sentit, encara que no sempre ben aplicats: precisió, exactitud, sensibilitat, etc. Un cop vistos els instruments de mesura, a l'apartat 3 passarem a la mesura en si. Aquí veureu com s'han de donar les xifres (i descobrireu que no són tan "exactes" com esteu acostumats a veure), com saber quin és l'error que teniu en les vostres mesures i la manera com es propaga aquest error quan feu càlculs amb aquestes mesures.

Al llarg de tot el mòdul veureu que, de vegades, al costat d'un concepte n'apareixerà la traducció anglesa entre parèntesi. Això és perquè habitualment es fa servir el terme anglès per referir-s'hi.

Objectius

Els objectius d'aquest mòdul són:

1. Conèixer les unitats bàsiques del sistema internacional de mesures i els múltiples i submúltiples del sistema mètric decimal.

2. Prendre consciència que hi ha altres sistemes de mesures i no tots es comporten com el mètric decimal.

3. Aprendre els conceptes bàsics relacionats amb les mesures.

4. Saber triar un instrument de mesura a partir de les seves especificacions.

5. Assumir l'error que es produeix en tot procés de mesura.

6. Saber obtenir l'error en tot procés de mesura.

7. Aprendre a calcular la propagació de l'error en fer càlculs amb mesures que tenen un cert error.

1. Unitats

En una activitat tan quotidiana com la compra, sabem que no n'hi ha prou amb anar a la fruiteria i demanar 5, a seques. 5 què?, ens preguntaran, ja que podrien ser 5 taronges o 5 plàtans. Podríem dir llavors, "de cireres, dóname'n 5", i tornarien a preguntar-nos, 5 què?, perquè podrien ser 5 quilograms, 5 grams o 5 cireres. És a dir, no n'hi ha prou amb dir un número, és important saber sempre a què correspon aquest número, en quines unitats es mesura.

Les ciències i les enginyeries no són una excepció a aquesta regla i per aquest motiu totes les magnituds (intensitat, resistència, voltatge, etc.) es mesuren en unes unitats determinades.

En el subapartat 1.1. d'aquest apartat recollirem quines són les unitats en el sistema internacional (S.I.) de les magnituds relacionades amb la física i les enginyeries, i en el subapartat 1.2. una forma molt habitual de representar-les. A continuació, en el subapartat 1.3. veureu que es pot treballar amb múltiples i submúltiples de les unitats que us haurem presentat i així podrem treballar amb xifres "més còmodes". Finalment, en el subapartat 1.4. us mostrarem altres unitats que no pertanyen al S.I.

1.1. El sistema internacional d'unitats

El primer punt que heu de tenir present és que quan fem una mesura en unes unitats determinades, aquestes formen part d'un grup més ampli que anomenem sistema d'unitats. Així, si heu vist alguna pel·lícula ambientada en algun país anglosaxó, o heu estat en algun d'ells, us haureu adonat que mesuren les distàncies en milles, no en quilòmetres, com nosaltres. La milla i el quilòmetre formen part de diferents sistemes d'unitats, la primera unitat està en el sistema anglosaxó i la segona en el sistema internacional (S.I.). Nosaltres treballarem amb el sistema internacional.

En el sistema internacional, les unitats bàsiques són les que us indiquem a la taula 1. En la primera columna podeu veure la magnitud, en la segona el nom de la unitat i en la tercera el símbol que s'utilitza per a la unitat.

Taula 1. Unitats en el sistema internacional (S.I.)

Magnitud	Unitat Bàsica	Símbol
Longitud	Metre	m
Massa	kilogram	kg
Temps	Segon	s
Corrent elèctric	Ampere	A
Temperatura	Grau Kelvin	K
Intensitat lumínica	Candela	cd

Ampere/Coulomb

En alguns entorns es pren com a unitat fonamental la càrrega elèctrica (el coulomb) en comptes de l'Ampere. Tanmateix, en enginyeria s'agafa sempre l'Ampere i és per això que hem triat aquesta opció.

Les unitats de la taula 1 són el que en diem **unitats bàsiques**. Per unitats bàsiques entenem aquelles a partir de les quals es poden obtenir les unitats de la resta de magnituds, que són les que anomenem **unitats derivades**. Per a això s'utilitzen les fórmules que relacionen les unes amb unes altres, com la llei d'Ohm, per exemple. A la taula 2 podeu veure algunes unitats derivades. En la primera columna teniu la magnitud a la qual corresponen, en la segona el nom de la unitat, en la tercera el seu símbol, i en la quarta la fórmula que mostra la relació amb les unitats bàsiques, o amb les unitats derivades en cas que s'obtinguin d'una unitat derivada.

La llei d'Ohm

La llei d'Ohm diu que el voltatge (V) és igual al producte d'intensitat (I) per resistència (R): $V = I \cdot R$.

Taula 2. Unitats derivades en el S.I.

Magnitud	Unitat	Símbol	Fórmula
Freqüència	Hertz	Hz	1/s
Força	Newton	N	kg·m/s
Energia/Treball	*Joule*	J	N·m
Potència	Watt	W	J/s
Càrrega elèctrica	Coulomb	C	A·s
Potencial elèctric	Volt	V	J/C
Resistència elèctrica	Ohm	Ω	V/A
Conductància elèctrica	Siemens	S	A/V
Capacitància elèctrica	Farad	F	C/V
Flux magnètic	Weber	Wb	V·s
Inductància	Henry	H	Wb/A

Unitats en majúscula

Les unitats dedicades a persones s'escriuen en majúscula: N (Newton), W (Watt), etc.

Weber

El Weber rep el seu nom del científic alemany Wilheilm Weber. Per tant, la "W" de Weber es pronuncia com la de "Wagner".

1.2. La notació científica

Ara ja hem vist les unitats que podem fer servir en el S.I. Fixeu-vos però que, per exemple, una taula pot mesurar 2 m, la distància entre dos pobles pot ser de 5.000 m i la longitud d'una formiga pot ser 0,005 m. Com podeu veure, si mesurem coses molt grans ens veurem obligats a utilitzar números molt llargs d'escriure; i en el cas de mesurar coses molt petites, hauríem de posar molts zeros després de la coma, el que pot conduir a errors i és farragós d'escriure. Seria molt còmode poder disposar d'un sistema de representació més compacte. Aquest sistema existeix i es coneix com **notació científica**.

La notació científica consisteix a escriure els números en potències de 10, com els que podeu veure a la taula 3. Així, els números que teniu al paràgraf anterior, escrits en notació científica seran: $5.000 = 5{\cdot}10^3$ i $0{,}005 = 5{\cdot}10^{-3}$, que és una notació molt més compacta. Val a a dir que la potència 10^0 no s'utilitza perquè el seu valor és 1.

Taula 3. Escriptura en potències de 10 d'alguns valors numèrics

Valor	Potència de 10
0,000001	$1 \cdot 10^{-6}$
0,00001	$1 \cdot 10^{-5}$
0,0001	$1 \cdot 10^{-4}$
0,001	$1 \cdot 10^{-3}$
0,01	$1 \cdot 10^{-2}$
0,1	$1 \cdot 10^{-1}$
1	1
10	$1 \cdot 10$
100	$1 \cdot 10^{2}$
1.000	$1 \cdot 10^{3}$
10.000	$1 \cdot 10^{4}$
100.000	$1 \cdot 10^{5}$
1.000.000	$1 \cdot 10^{6}$

1.3. Múltiples i submúltiples

Cadascuna de les unitats que heu vist en el subapartat 1.1., tant les bàsiques (taula 1) com les derivades (taula 2) tenen el que es diuen múltiples i submúltiples. Per què són útils aquests múltiples i submúltiples? perquè així podem adaptar les unitats als nombres amb els quals estem treballant.

De fet, això ja ho fem en la nostra vida quotidiana, quan diem per exemple que dos municipis disten vint quilòmetres (20 km) i no vint mil metres (20.000 m). En aquest cas utilitzem el múltiple kilo, que equival a 1.000 m. A la taula 4 podeu veure un llistat dels múltiples i submúltiples. En la primera columna s'indica el nom, en la segona el símbol, i en la tercera la potència de 10 de la unitat a què correspon (és a dir, 1 km són 10^3 m).

Taula 4. Múltiples i submúltiples

Prefix	Símbol	Potència
femto	f	$1 \cdot 10^{-15}$
pico	p	$1 \cdot 10^{-12}$
nano	n	$1 \cdot 10^{-9}$
micro	μ	$1 \cdot 10^{-6}$
mili	m	$1 \cdot 10^{-3}$
centi	c	$1 \cdot 10^{-2}$
deci	d	$1 \cdot 10^{-1}$
deca	da/D	$1 \cdot 10^{1}$
hecto	h	$1 \cdot 10^{2}$
kilo	k	$1 \cdot 10^{3}$
Mega	M	$1 \cdot 10^{6}$
Giga	G	$1 \cdot 10^{9}$
Tera	T	$1 \cdot 10^{12}$

El símbol μ correspon a la lletra grega *mu*.

Val a dir que no és casualitat que tots els múltiples i submúltiples siguin potències de 10. De fet, tots ells formen part del que s'anomena **sistema mètric decimal**, que té precisament aquesta característica.

Cal tenir en compte que en el cas d'unitats elevades a alguna potència, aquests factors de conversió també s'eleven a la potència. Així, per exemple, en el cas de metres quadrats (m^2) s'elevarien al quadrat les potències indicades en la taula 4, i en el cas de (m^3) s'elevarien al cub. A la taula 5 podeu veure l'equivalència entre 1 m^2 i alguns dels seus múltiples i submúltiples i a la taula 6 teniu el mateix, però en aquest cas amb el m^3.

Taula 5. Equivalència d'alguns múltiples i submúltiples del m amb 1 m^2

Unitat	1 m^2 =
mm^2	$1{\cdot}10^{-6}$
cm^2	$1{\cdot}10^{-4}$
dm^2	$1{\cdot}10^{-2}$
dam^2	$1{\cdot}10^{2}$
hm^2	$1{\cdot}10^{4}$
km^2	$1{\cdot}10^{6}$

Taula 6. Equivalència d'alguns múltiples i submúltiples del m amb 1 m^3

Unitat	1 m^3 =
mm^3	$1{\cdot}10^{-9}$
cm^3	$1{\cdot}10^{-6}$
dm^3	$1{\cdot}10^{-3}$
dam^3	$1{\cdot}10^{3}$
hm^3	$1{\cdot}10^{6}$
km^3	$1{\cdot}10^{9}$

1.4. Altres sistemes d'unitats

No voldríem acabar aquesta introducció a les unitats sense comentar que hi ha altres sistemes d'unitats que no pertanyen al sistema internacional. I també cal dir que hi ha relacions de múltiples i submúltiples que no estan dins el sistema mètric decimal i, per tant, no es relacionen amb potències de 10.

Com a exemple de sistema que no pertany al S.I. està el sistema CGS, que pren el seu nom de "centímetre, gram, segon". En aquest sistema la unitat de longitud bàsica és el centímetre, la de massa el gram i la de temps el segon. Això fa que totes les magnituds derivades també siguin diferents. Entre elles destaca la de camp magnètic, el gauss (G), que equival a 10^4 T i que es fa servir molt habitualment. El sistema CGS seria un cas de sistema que no pertany al S.I., però en canvi sí que pertany al sistema mètric decimal.

Un exemple de sistema que no pertany al sistema mètric decimal (i per tant, tampoc no per tany al S.I.) és el sistema anglosaxó. En aquest teniu, per exemple, que una milla són 5.280 peus.

Però a part d'aquests sistemes teniu algunes transformacions d'unitats més exòtiques (però molt habituals) com són les transformacions de temperatura. Hi ha bàsicament tres escales de temperatura: el grau centígrad, el grau fahrenheit (que fan servir els països anglosaxons) i el grau Kelvin:

- El **grau Fahrenheit**, representat com a ^{o}f, fixa el 0^{o}f i el 100^{o}f, respectivament, en els punts de congelació i ebullició del clorur amònic en aigua. Això vol dir que l'aigua es congela a 32^{o}f i bull a 212^{o}f. Per tant, la diferència de temperatura entre els punts de congelació i ebullició de l'aigua és de 180^{o}f.

- El **grau Celsius**, representat com a ^{o}C, fixa el 0^{o}C i el 100^{o}C, respectivament, en els punts de congelació i ebullició de l'aigua. Fixeu-vos que la diferència de temperatura entre els punts de congelació i ebullició de l'aigua és de 100°C, per la qual cosa, la variació d'un °C i la d'un °f seran diferents.

- El **grau Kelvin**, representat com a K (sense cap cercle al davant), té el seu 0 en el 0 absolut de temperatura i, per tant, la temperatura en K sempre és positiva. La variació d'un °C coincideix amb la variació d'un K. És a dir, dos recipients que tinguin una diferència de temperatura de 10K tindran també una diferència de temperatura de 10°C.

La conversió entre K i °C és immediata, ja que un grau té la mateixa mida en ambdós sistemes:

$$\text{Temperatura (Kelvin)} = \text{Temperatura (Celsius)} + 273 \Leftrightarrow K = {}^{o}C + 273 \qquad (1)$$

Així, un cos a 25°C estarà a 298K.

Ara bé, la conversió entre °C i °f ja no és tan senzilla, ja que ambdós graus tenen mides diferents.

$$\text{Temperatura (Celsius)} = \frac{\text{Temperatura (Fahrenheit) - 32}}{1{,}8} \Leftrightarrow {}^{o}C = \frac{{}^{o}f - 32}{1{,}8} \qquad (2)$$

D'on, un cos a 25°f estarà a -3,9°C, o bé, a partir de l'equació 1, a 269,1K.

2. La mesura i els instruments

Quan fem una mesura sempre tenim, almenys, dos elements: allò que volem mesurar i l'instrument de mesura. L'instrument de mesura pot ser una cosa tan senzilla com la nostra mà, amb la qual podem "mesurar" longituds; o tan complexa com un localitzador GPS que ens permet "mesurar" la nostra posició. En aquest apartat ens centrarem en els instruments de mesura i, en particular, en aquells aspectes que els caracteritzen i que són comuns a tots ells.

Els conceptes que tractarem són, concretament:

- temps de relaxació,
- calibratge,
- escala,
- precisió i exactitud,
- polarització,
- linealitat,
- sensibilitat a la mesura,
- deriva i
- resolució.

Aquesta informació no és només important a nivell conceptual, sinó que sovint apareix en els manuals tècnics de molts instruments i és fonamental tenir-la clara a l'hora de llegir un catàleg i triar un instrument o un altre. Tanmateix, abans hi ha un concepte que hem de definir: la mesura.

2.1. La mesura

El primer punt que hem de saber és què és mesurar. Mesurar és, bàsicament, comparar: comparar una quantitat desconeguda amb una quantitat coneguda que prenem com a patró. Així, per exemple, si mesurem una distància, l'estem comparant amb el patró de distàncies, que seria el metre (m) (o un dels seus submúltiples).

Fixeu-vos, doncs, que per poder fer una mesurar necessitem un patró per fer-la. Aquest patró és el que anomenem unitat de la mesura.

Hem de tenir present també que una cosa és quin és el valor real d'allò que mesurem (valor real), i una altra el valor que mesurem (valor mesurat):

- **Valor real**: una magnitud valdrà un cert valor, independentment que nosaltres la mesurem. Aquest valor és el que es coneix com a valor real.

- **Valor mesurat**: quan mesurem una magnitud, obtenim un cert valor que és el valor mesurat. Aquest valor és el que obtenim amb l'instrument de mesura i en diem **lectura**.

Per entendre el concepte de valor real i valor mesurat posarem com a exemple un cas extrem: imagineu que aneu en un vehicle a 50 km/h, aquest seria el valor real de la velocitat. Ara bé, resulta que el velocímetre indica una lectura de 65 km/h, aquest seria el valor mesurat. Fixeu-vos que no coincideixen. Vol dir això que el velocímetre està espatllat? Potser sí o potser no, com descobrirem en aquest mòdul.

L'objectiu és tenir instruments que donessin sempre el valor real, tanmateix, això resulta poc menys que impossible. De fet, en aquest mòdul veureu diverses maneres en què un instrument pot donar un valor mesurat que estarà lluny del valor real. Veureu també però, maneres de saber com de lluny està aquest valor mesurat del valor real.

Noteu que una de les implicacions que té aquesta distinció entre valor real i valor mesurat és, per exemple, que el fet d'obtenir una lectura 0, no vol pas dir que el valor real sigui 0. Així, per exemple, si anem amb un comptador Geiger a mesurar traces de radiactivitat i obtenim un 0, això és l'únic que podem assegurar: que hem mesurat 0, i no pas que no hi hagi radioactivitat.

2.2. Temps de relaxació

Un punt molt important que heu de tenir present a l'hora de fer la mesura és el de **temps de relaxació** o **temps d'establiment de la mesura**. Aquest és el temps que triga l'instrument a donar el valor mesurat.

Per entendre el concepte penseu en un circuit amb un condensador. En connectar una font d'alimentació d'alterna, el condensador presenta una resposta lliure i una resposta forçada. La resposta lliure desapareix al cap d'un temps que caracteritzem per un temps τ. Per tant, aquesta resposta lliure només afecta els primers instants d'estar en marxa el circuit, i després només hi ha la resposta forçada, que és la que normalment ens interessa de veritat. Així, si volguéssim fer una mesura sobre el circuit, hauríem d'esperar a que s'estabilitzés o, dit d'una altra manera, a que desparegués la resposta lliure. De fet, si féssim una mesura abans, veuríem els valors oscil·lar i no és fins que desapareix la resposta lliure que tenim una lectura fiable.

Aquest exemple del condensador s'aplica a molts sistemes, per la qual cosa sempre cal deixar que el sistema que volem mesurar s'"estabilitzi". És a dir, hem d'esperar un temps prudencial per tal de deixar que desaparegui qualsevol fluctuació del sistema.

2.3. Calibratge (*Calibration*)

Un instrument de mesura serveix per obtenir la lectura de la magnitud que volem mesurar, però com podem saber que la lectura que ens dóna correspon a allò que estem mesurant? És a dir, com podem saber fins a quin punt s'assemblarà el valor mesurat al valor real? Per exemple, si tenim un regle, podem estar segurs que el que allà s'indica que és 1 cm és realment 1 cm? Si no fos així, el regle no serviria per prendre mides i només obtindríem valors falsejats.

Perquè això no passi el primer que cal fer és **calibrar l'instrument de mesura**, és a dir, assegurar que els valors de lectura es corresponen amb la quantitat que es vol mesurar. Aquest calibratge es fa en unes condicions molt concretes de pressió, temperatura, entorn, etc. i només es pot assegurar que el valor correspon exactament a l'indicat quan es donen aquestes condicions. És el que se'n diu el **comportament nominal**.

En el procés de calibratge també s'obté l'escala (vegeu el subapartat 2.4.), l'exactitud de l'aparell (vegeu el subapartat 2.5.), el seu comportament (vegeu el subapartat 2.7.) i la seva sensibilitat (vegeu els subapartats 2.8. i 2.9.). Tot seguit veurem què volen dir aquests termes.

2.4. Escala (*Scale*)

L'escala o interval d'un instrument indica quins són els valors mínim i màxim que pot mesurar l'instrument. Així per exemple, un regle d'1 m que té separacions d'1 mm té una escala que va des d'1 mm fins a 1 m.

Fixeu-vos que l'escala ens està donant el rang de valors que podem mesurar, el que es coneix com a **rang de mesura**. El nom escala ve del fet que, per exemple en un regle, hi ha diverses marques igualment espaïades que donen el patró de mesura a diversos nivells (milímetres, centímetres, etc.).

El valor màxim que podem mesurar és el que en diem **fons d'escala**. Podeu recordar aquest nom pensant que si tenim un aparell que indica la mesura amb una agulla, si mesurem el valor màxim, l'agulla arribarà fins al fons de l'escala.

2.5. Exactitud (*Accuracy*) i Precisió (*Precision*)

Hi ha dos conceptes que sovint es fan servir malament i es confonen: l'exactitud i la precisió. Els explicarem per separat i, a continuació, en farem una comparació.

2.5.1. Exactitud (*Accuracy*)

El terme **exactitud** quantifica la correctesa d'una mesura. Una mesura amb una exactitud elevada tindrà un error molt petit; i a la inversa, una mesura amb una exactitud molt baixa tindrà un error molt gran.

Tot i que aquesta definició pot semblar òbvia, sovint el terme *exactitud* es fa servir malament o, millor dit, s'"abusa del llenguatge". Així, no és estrany llegir que un determinat instrument té una exactitud de l'1%, quan en realitat aquest valor seria, en sentit estricte, la *inexactitud*.

És fonamental tenir en compte l'exactitud a l'hora de triar un instrument de mesura. Us mostrarem amb un exemple què volem dir: imagineu que teniu un regle de 100 cm que presenta una exactitud d'1 cm. Llavors és d'esperar que l'error de qualsevol mesura serà d'1 cm. Així, si feu servir el regle per mesurar una longitud de 80 cm, l'error serà d'1 cm; però si el feu servir per mesurar una longitud de 2 cm, l'error també serà d'1 cm! Veiem doncs que aquest regle no ens serviria per mesurar longituds tan curtes.

L'exactitud s'indica sovint com a **tolerància**. La tolerància és l'error màxim que s'espera en algun valor. Així, per exemple, si tenim un munt de condensadors de 100 μF i una tolerància de $\pm$2% sobre fons d'escala (vegeu el subapartat 2.4.), si agafem un condensador a l'atzar, el que podem dir és que el valor real de la capacitat estarà entre 98 i 102 μF.

2.5.2. Precisió (*Precision*)

El terme **precisió** descriu la variabilitat que mostra un instrument en repetir la mateixa mesura diverses vegades sota les mateixes condicions de mesura. És a dir, si mesurem una magnitud diverses vegades amb un instrument molt precís, obtindrem una baixa dispersió en les lectures.

Els termes **repetibilitat** i **reproductibilitat** estan relacionats amb el terme precisió. De fet, el grau de repetibilitat i reproductibilitat d'un instrument són una manera de donar-ne la precisió. La **repetibilitat** indica com de properes són les diverses lectures quan es mesura la mateixa magnitud en un període breu de temps, en les mateixes condicions i amb el mateix instrument; per contra, la **reproductibilitat** indica com de properes són les diverses lectures, però quan varien les condicions de mesura (el mètode, l'instrument, etc). Fixeu-vos, doncs, que la repetibilitat i la reproductibilitat fan referència a les condicions de mesura, a diferència de la precisió que feia referència a l'instrument.

2.5.3. Exactitud vs Precisió

Sovint es confonen l'exactitud i la precisió: noteu que el primer terme fa referència a com de bona és una lectura que dóna un instrument, i el segon fa referència a quina és la dispersió de l'instrument en repetir una mesura.

Per entendre aquests dos termes posarem un exemple. Imagineu que la temperatura real (valor real de la temperatura, vegeu el subapartat 2.1.) és 33,5º i la mesurem amb tres termòmetres diferents. Teniu els resultats obtinguts a la taula 7. En el cas del termòmetre 1, fixeu-vos que les temperatures obtingudes estan molt disperses i amb valors que no s'assemblen al valor real. Aquest termòmetre és, per tant, poc precís i poc exacte. En el cas del termòmetre 2, totes les mesures estan al voltant d'un mateix valor, és per tant molt precís. Tanmateix, estan al voltant d'un valor que no és el real, per la qual cosa és poc exacte. El tercer termòmetre també és molt precís, però en aquest cas les mesures estan al voltant del valor real (33,5ºC), per la qual cosa també és molt exacte.

Taula 7. Comparació de les temperatures obtingudes amb tres termòmetres diferents, suposant que el valor real és de 33,5º

Termòmetre	M1	M2	M3	M4	M5	Característica
1	25ºC	41ºC	27ºC	26ºC	38ºC	Poc precís i poc exacte
2	25ºC	25,1ºC	25,2ºC	24,9ºC	24,8ºC	Precís però poc exacte
3	33,4ºC	33,5ºC	33,6ºC	33,5ºC	33,4ºC	Precís i exacte

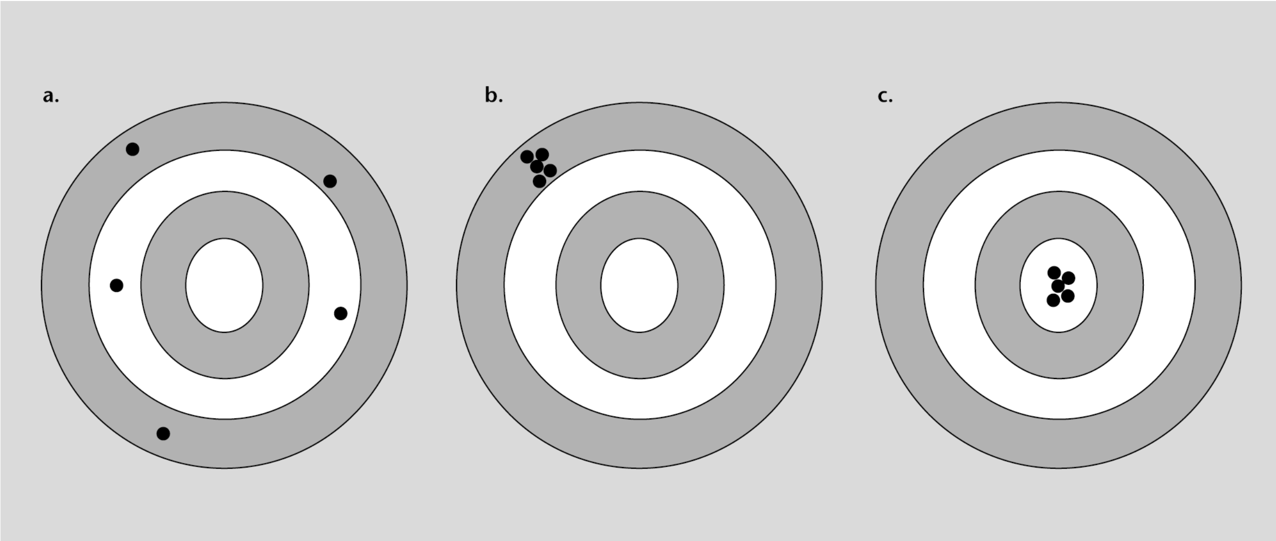
Les mesures estan indicades amb M1...M5. El termòmetre 1 no és ni precís ni exacte; el termòmetre 2 és precís, però no és exacte; i el termòmetre 3 és precís i exacte.

A la figura 1 hem representat simbòlicament en una diana els valors de la taula 7. El valor exacte és el centre de la diana (33,5°C). A la figura 1a teniu les lectures obtingudes amb el termòmetre 1. A la figura 1b podeu veure les lectures obtingudes amb el termòmetre 2, molt precís però poc exacte. I a la figura 1c teniu les lectures obtingudes amb el termòmetre 3, que és un aparell molt exacte i molt precís.

Figura 1

Resultats obtinguts amb diversos tipus d'aparells:
a. Amb un aparell de baixa precisió i exactitud;
b. Amb un aparell d'alta precisió i baixa exactitud; i
c. Amb un aparell d'alta precisió i alta exactitud.

Figura 1. Resultats segons el tipus d'aparells



2.6. Polarització (*Offset*)

La polarització indica un error constant que hi ha al llarg de tota l'escala de l'instrument.

Correcció de la bàscula de bany

En el cas particular de la bàscula de bany, n'hi ha prou a córrer la roda fins al 0 per corregir la polarització.

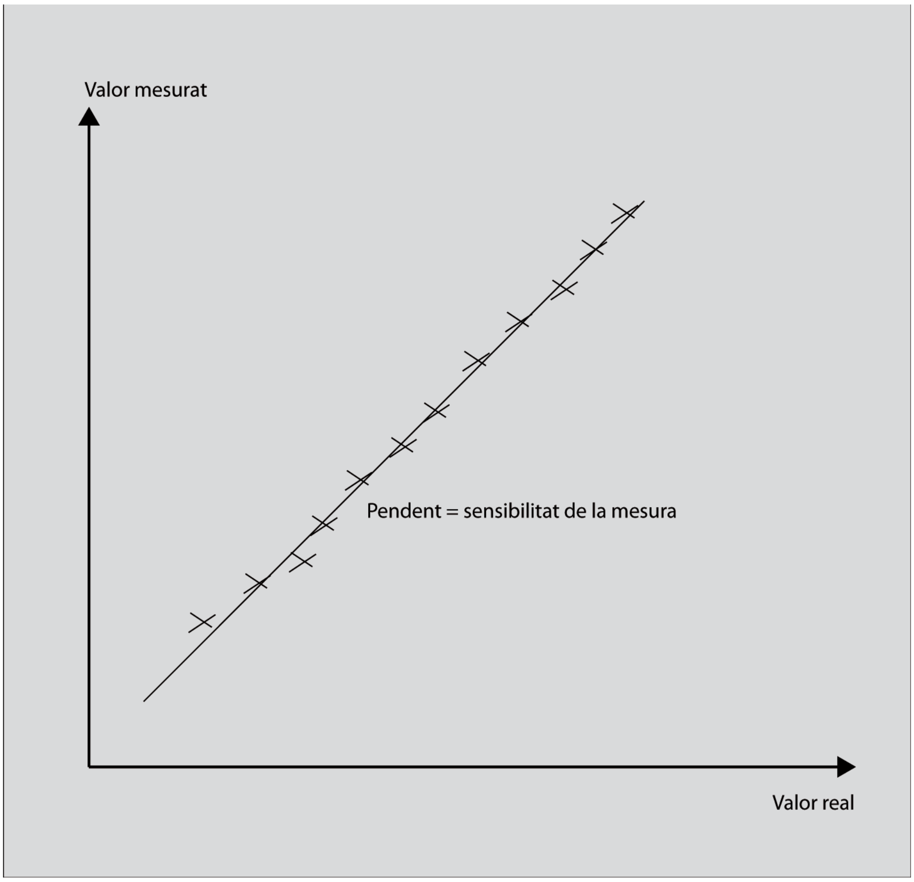
Bàscula de bany

Un exemple d'això serien les típiques bàscules del bany: abans de pesar-nos de vegades veiem que hi ha una lectura d'1 kg, sense que hi hagi ningú a sobre. Això voldrà dir que si es pesa una persona de 65 kg, en realitat llegirà 66 kg, degut a aquesta polarització.

2.7. Linealitat (*Linearity*)

La linealitat és una característica que sovint es demana a un instrument de mesura. Un instrument de mesura és lineal si la lectura és directament proporcional a la quantitat mesurada. Es diu lineal perquè si representem la lectura en funció d'aquesta quantitat s'obté una línia, com podeu veure a la figura 2.

Figura 2. Representació de la lectura de sortida en funció de la quantitat mesurada en un instrument lineal



Font: Morris, A.S. "Principios de mediciones e instrumentación" (2002) Pearson Educación de México, México.

La linealitat és tan important que sovint els instruments parlen d'*span* (camp de mesura), que correspon al rang de mesura en el qual l'instrument té un comportament lineal. !

Tanmateix, encara que sigui una característica desitjable, no tots els instruments presenten un comportament lineal. Quan això passa, la no-linealitat, o **error de linealitat**, s'indica com un percentatge de la lectura sobre fons d'escala (vegeu el subapartat 2.4.). És a dir, s'indica el punt de desviació màxima (o busquem el punt de desviacío màxima).

Per veure què és l'error de linealitat, imagineu que teniu un voltímetre amb un fons d'escala de 100 V. Ara suposeu que la màxima desvació de la linealitat es dóna a 50 V i és d'1 V (a 50 V mesurarem 51 V). El que fem aleshores per calcular l'error de linealitat és obtenir el percentatge sobre el fons d'escala (100 V), i per tant l'error de linealitat del nostre exemple és de

$$\frac{51 - 50}{100} \times 100\% = 1\%.$$

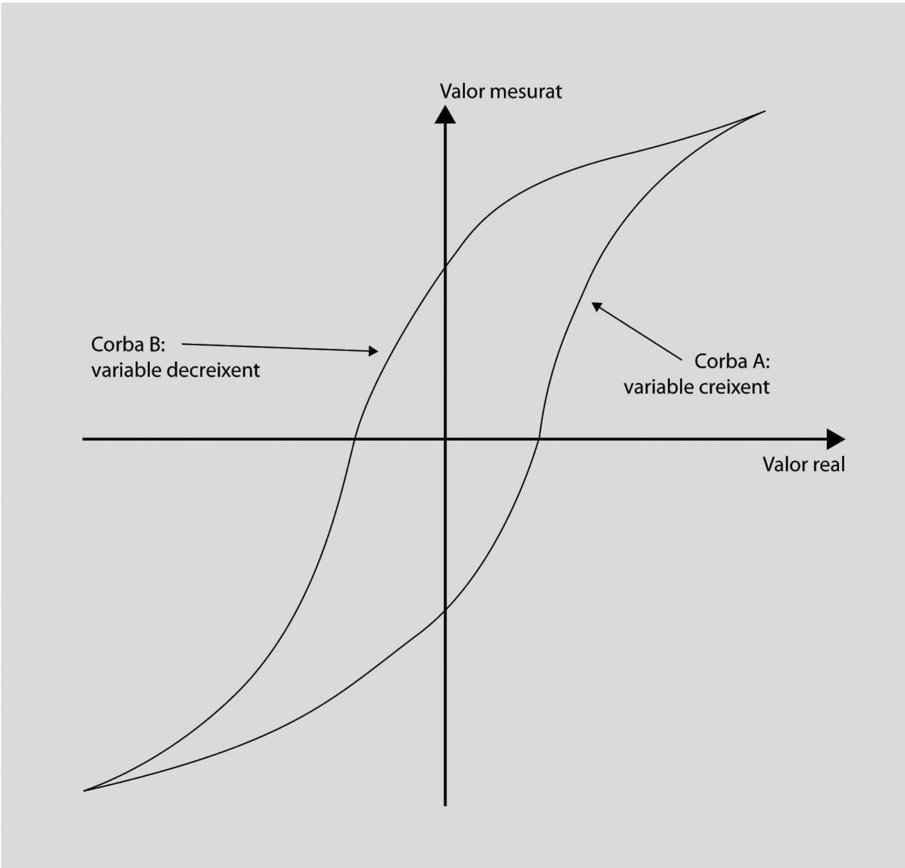
Fixeu-vos que l'error de linealitat (la no-linealitat) està donant una mesura de quant val l'error en el pitjor dels casos.

Un tipus de no-linealitat molt comú i que, de fet, és un comportament amb nom propi, és la **histèresi**. A la figura 3 teniu un exemple típic de comportament amb histèresi. Fixeu-vos que quan la variable creix, la lectura ve donada per la corba A; en canvi, quan decreix, la lectura ve donada per la corba B.

Histèresi

La paraula *histèresi* significa memòria, i es fa servir perquè el comportament dels elements que tenen histèresi depèn del que hagin fet abans, per tant tenen "memòria" del que han fet.

Figura 3. Representació de la lectura de sortida en funció de la quantitat mesurada en un instrument amb histèresi



Font: Morris, A.S. "Principios de mediciones e instrumentación" (2002) Pearson Educación de México, México.

Per entendre la histèrersi, suposeu que el velocítmetre d'un cotxe tingués histèresi. Això voldria dir que quan indica que anem a 50 km/h, en realitat estem anant a una velocitat diferent quan accelerem que quan frenem.

I ara ens preguntem: com s'indicaria l'error de linealitat en el cas d'un instrument amb histèresi? Imagineu un altre cop el velocímetre del paràgraf anterior. Suposeu que el velocímetre va de 0 a 200 km/h. A 110 km/h és quan tenim la desviació màxima i marca (per algun dels dos cicles d'histèresi) 114 km/h. Llavors l'error de linealitat és de

$$\frac{(114 - 110) \times 100}{200}\% = 2\%.$$

Fixeu-vos un cop més que l'error de linealitat només es calcula en el pitjor cas, en el punt en el qual la desviació és màxima.

2.8. Sensibilitat de la mesura (*Sensibility*)

La sensibilitat de la mesura indica quant canvia la lectura de l'instrument quan la quantitat que mesurem varia un cert valor.

És el pendent de la recta de la figura 2. Fixeu-vos que si el pendent és molt gran (elevada sensibilitat), una petita variació en la quantitat a mesurar provoca un canvi molt gran en l'escala; en canvi, si el pendent és molt petit (baixa sensibilitat), la mateixa variació en la quantitat a mesurar fa que la lectura canviï molt poc.

Val a dir que a l'hora de fer una mesura ens interessen sensibilitats molt altes. Imagineu, per exemple, que tenim dos amperímetres. En un d'ells l'agulla gira només 1^{o} quan la intensitat creix 1 A. En l'altre (més sensible), en canvi, l'agulla gira 10^{o} quan la intensitat creix 1 A. Fixeu-vos que serà molt més fàcil detectar el moviment de l'agulla en aquest segon cas, és a dir, amb un instrument més sensible.

2.9. Derives (*Drift*)

Com ja hem comentat al subapartat 2.3., el calibratge dels instruments es fa en unes determinades condicions. Això vol dir que fora d'aquestes condicions no podem estar segurs que el comportament de l'instrument sigui el que s'indica i la lectura es desvia del valor nominal. Aquestes desviacions se'n diuen **derives**.

De derives n'hi ha de dos tipus:

- **Deriva del 0**: vol dir que el valor del 0 no és el nominal. Seria el cas de la bàscula de bany que hem comentat al subapartat 2.6. Recordeu que el fet que una lectura sigui 0 no implica necessàriament que el valor real sigui 0 (vegeu el subapartat 2.1.).
- **Deriva de la sensibilitat**: vol dir que la característica lineal de l'instrument no és la nominal, amb la qual cosa varia la seva sensibilitat (vegeu el subapartat 2.8.).

A la figura 4 teniu un exemple d'aquest comportament. En ella podeu veure, amb línia discontínua, el comportament nominal d'un instrument; i amb línia sòlida a) la deriva del 0; b) la deriva de la sensibilitat; i c) les dues derives combinades.

Figura 4

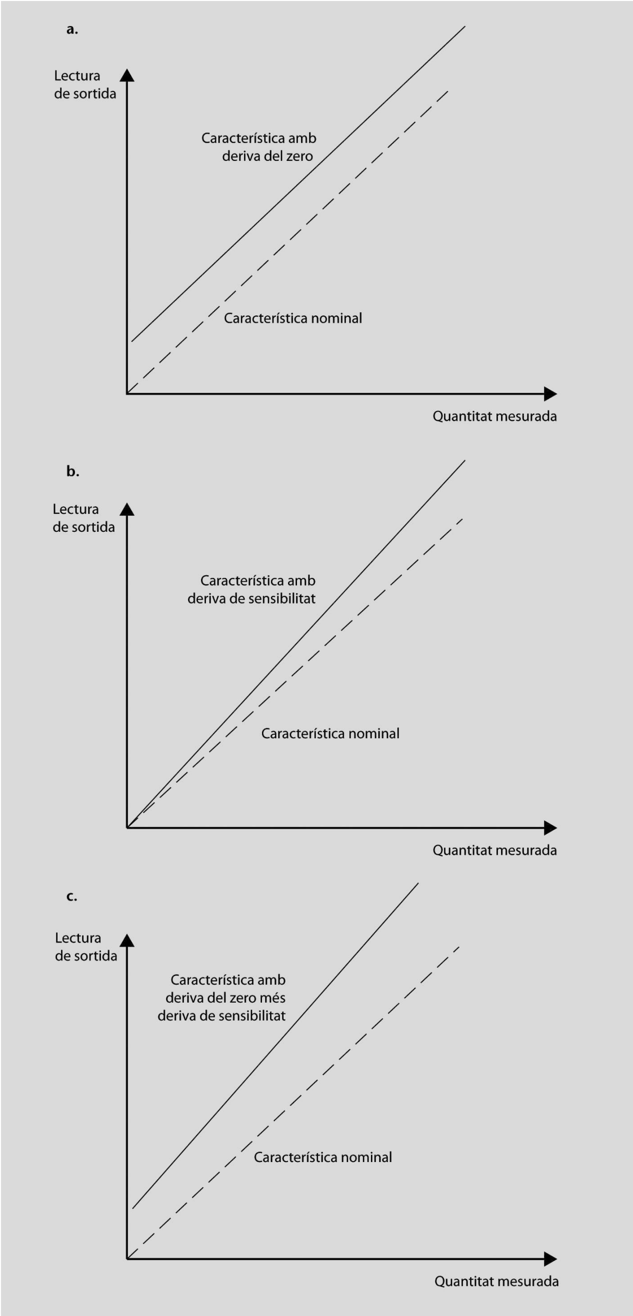


Figura 4

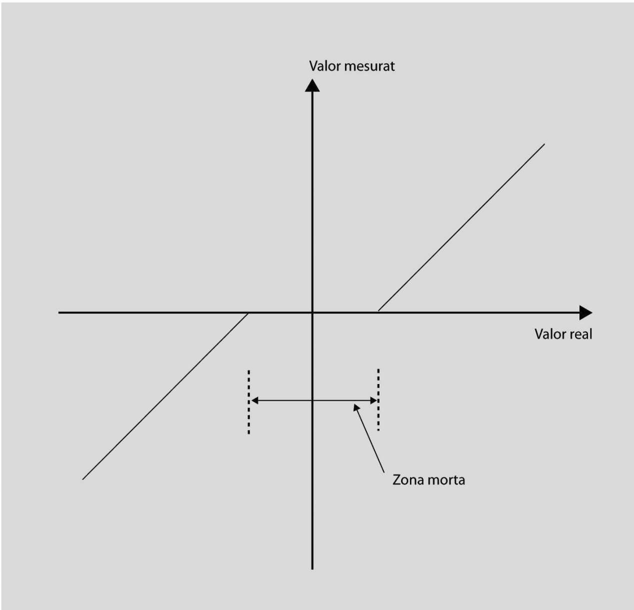
Línia discontínua: comportament nominal; línia sòlida comportament en variar les condicions.
a. Deriva del zero;
b. deriva de sensibilitat; i
c. deriva del zero més deriva de la sensibilitat.

2.10. Llindar (*Threshold*) i Zona morta (*Dead zone*)

Alguns instruments es comporten de manera que no presenten resposta fins que la mesura no ha assolit un cert valor. Un exemple seria el velocímetre d'un cotxe, que no es mou fins que no es superen els 15 km/h. Aquest valor és el que es coneix com a **llindar**. Alguns fabricants indiquen el llindar en valor absolut i d'altres l'indiquen com un percentatge del valor a escala màxima.

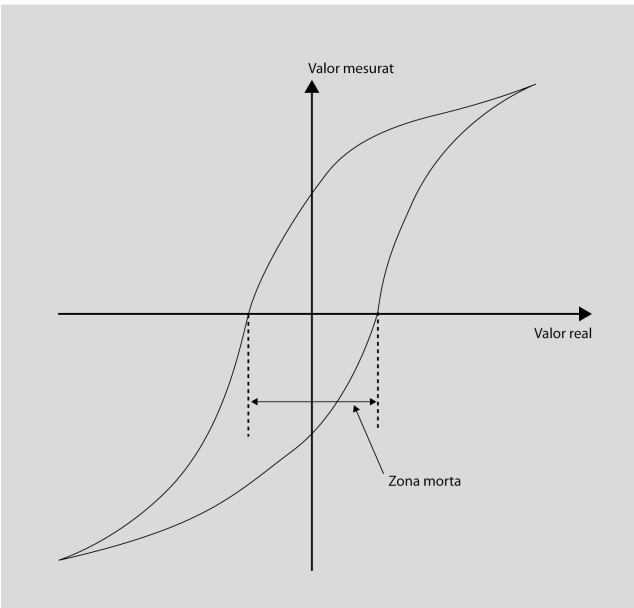
Relacionat amb el llindar està la **zona morta** o **zona de sensibilitat nul·la**. Aquesta és una zona en la qual encara que hi hagi canvis en els valors d'entrada, no hi ha canvis en els valors de sortida. A la figura 5 teniu representada la reposta d'un instrument amb zona morta. Fixeu-vos que quan el valor real està dins la zona morta, la lectura de sortida és zero (encara que el valor real no ho sigui.)

Figura 5. Característica d'un instrument amb zona morta



Val a dir que qualsevol instrument que presenta histèresi presenta també zona morta. A la figura 6 podeu veure a quina zona de la corba d'histèresi correspon aquesta zona.

Figura 6. Zona morta d'un instrument amb histèresi



2.11. Resolució (*Resolution*)

La resolució és la variació mínima que s'ha de produir en la quantitat a mesurar per a que doni una lectura.

Així, per exemple, un tèster amb una resolució de 0,1 Ω no variarà la lectura si la resistència que està mesurant varia en 0,01 Ω. Com en el cas del llindar, la resolució es pot donar en valor absolut o com un percentatge del valor a escala màxima.

3. Errors en la mesura

Hem vist a l'apartat anterior què caracteritza un instrument de mesura, però no hem entrat a fons en la mesura en si: la lectura que obtenim correspon al valor real? Hi ha errors? Com podem minimitzar aquests errors? I quin és l'error en el valor d'una magnitud obtinguda a partir d'altres magnituds amb errors?

Aquestes són algunes de les preguntes que respondrem en aquest apartat. Començarem explicant quins tipus d'errors hi ha i com els hem de presentar. A continuació, en el subapartat 3.3. veureu com podem avaluar l'error que tenim en les nostres mesures i com es propaga aquest error als càlculs que fem amb elles.

3.1. Tipus d'errors

El primer que hem de tenir clar a l'hora de fer mesures és que el fet de mesurar pertorba allò que volem mesurar. Perquè veieu un exemple, penseu en quan mesureu la pressió dels pneumàtics del cotxe: una part de l'aire del pneumàtic passa al manòmetre i aquest aire no tornarà al pneumàtic, per tant en prendre la pressió hem variat la quantitat d'aire al pneumàtic i, per tant, la pressió que volíem mesurar. Tot i així, hi ha casos en els quals aquesta pertorbació de la mesura és, a efectes pràctics, irrellevant: penseu en quan mesureu una longitud amb un regle.

Així, doncs, heu de tenir present que sempre que feu una mesura, hi haurà un cert error.

Segons quin sigui el seu origen, trobem dos tipus d'errors: !

- **Errors sistemàtics**: són errors que es poden produir a la sortida de molts instruments. Poden ser deguts a factors inherents a la seva fabricació que fan que l'instrument estigui fora d'especificacions o, dit d'una altra manera, fora de tolerància (fixeu-vos que seria, com si diguéssim, un defecte de fàbrica). També poden ser deguts a multitud de causes: desgast de l'instrument, pertorbacions ambientals, pertorbacions del sistema quan es fa la mesura, etc. El resultat és que totes les lectures tenen una certa desviació del valor real. Un exemple d'error sistemàtic seria el cas del termòmetre 2 de la taula 7, que és molt precís però en el qual totes les lectures presenten desviacions semblants.

Atès que els errors sistemàtics es produeixen en totes les mesures i per unes causes determinades, habitualment es poden trobar maneres d'evitar-los: recalibrar l'instrument, dissenyar els instruments de manera que tinguin en compte les pertorbacions ambientals, etc.

Especificacions

Els fabricants no garanteixen les lectures dels instruments fora d'especificacions.

- **Errors aleatoris**: els errors aleatoris són resultat de condicions impredictibles i aleatòries. De fet, com que són aleatoris, es poden produir en qualsevol direcció, tant per sobre com per sota del valor real, amb la qual cosa els podrem reduir repetint la mesura diverses vegades. Per tant aquests errors estan subjectes a les lleis de la probabilitat i el que ens estaran dient és que tindrem una certa probabilitat que el valor real estigui dins un cert marge de valors.

Atès que els errors sistemàtics depenen dels instruments i les condicions de mesura, cada cas necessitaria un tractament especial. És per això que en aquest mòdul ens centrarem només en el tractament dels errors aleatoris, que és el mateix per a qualsevol procés de mesura.

Abans de seguir amb els errors aleatoris però, mostrarem al subapartat següent com s'han de presentar els errors.

3.2. Presentació de l'error

Com hem comentat al subapartat anterior, qualsevol mesura ve afectada per un cert error, per la qual cosa el resultat d'una mesura no pot ser mai un cert valor v i prou, sinó que cal donar el valor acompanyat d'una *indicació* d'aquest error. Aquesta indicació s'acostuma a donar de la forma:

$$\text{Valor de la mesura} = \text{Valor} \pm \text{Error} \tag{3}$$

Fixeu-vos que l'error es dóna amb un $\pm$. Això vol dir que l'error es pot produir tant per excés com per defecte. Aquest *Error* es pot donar de dues maneres: mitjançant l'error absolut o l'error relatiu.

3.2.1. Error absolut

Quan donem l' error absolut el que indiquem és la cota de l'error. Així, si diem que una mesura és de 5 ± 1 cm, estem donant l'error absolut, i això voldrà dir que el valor real és molt probable que estigui entre 4 i 6 cm. Fixeu-vos en aquest "és molt probable". Més endavant, al subapartat 3.3.1. entendreu ben bé què volem dir amb això.

D'altra banda, val a dir que indiquem l'error absolut d'una determinada lectura v amb la lletra Δ (pronunciat Delta) seguida del nom de la variable; o bé amb la lletra σ amb el subíndex corresponent al nom de la variable. Per tant, l'error de v es representa com Δv o bé σ_v (llegit "sigma de v"). Així, doncs, si la magnitud que mesurem és V, el resultat obtingut seria:

Δ correspon a la lletra grega Delta.

σ correspon a la lletra grega sigma minúscula.

$$V = v \pm \Delta v = v \pm \sigma_v \tag{4}$$

En aquests materials farem servir la notació σ_v, però no oblideu que la notació Δv és igualment vàlida i aquesta apareix en molts llibres.

Així, doncs, si el valor real d'una mesura és V i el valor que mesurem és v, podem definir l'error absolut d'aquesta mesura com:

$$\sigma_v = |v - V| \tag{5}$$

És a dir, com el valor absolut de la diferència entre la mesura i el valor real.

També heu de tenir present que quan doneu un valor mesurat, heu de fer servir tants decimals com sigui convenient:

1) El valor V de la magnitud ha de tenir només les xifres que calgui per a què la seva última xifra significativa sigui del mateix ordre decimal que l'última de l'error absolut. Aquesta xifra es diu xifra d'acotament del valor. Aquesta norma ens diu que no té sentit dir que un valor és de 6,853 si el nostre error és de 1,200, ja que no podem apreciar el 53, per tant el valor que hauríem de donar és: $6{,}8 \pm 1{,}2$.

2) L'error absolut es dóna sempre, per conveni, amb una única xifra significativa. Es poden fer servir dues només si:

- La primera xifra significativa és un 1.
- La primera xifra significativa és un 2, però no arriba a 5 la segona.

En la resta de casos es dóna una única xifra significativa. Aquesta s'augmenta en una unitat si la segona xifra significativa és 5 o superior (i es deixa igual en cas contrari).

D'aquestes dues normes la més important és la primera. La segona ja és més fina i, de fet, no es segueix en molts entorns d'enginyeria.

A la taula 8 teniu diversos exemples de com presentar una magnitud de manera correcta i incorrecta. Els casos b), d) i e) violen la norma 1) ja que l'última xifra significativa del valor mesurat no és del mateix ordre decimal que l'última de l'error. En els casos a), c), d) i e) ha calgut corregir també els valors per adaptar-los a la norma 2): en els casos a) i c) s'han deixat dues xifres significatives a l'error perquè la primera xifra és 1; a la resta s'ha deixat una única xifra significativa de l'error. Fixeu-vos com, en aquests casos, un cop corregit l'error, s'han corregit els valors mesurats per tal de complir amb la norma 1.

Representació dels errors

Sovint veureu que no es segueixen les normes de representació de valors i errors. Encara que són una normativa, certs col·lectius tenen altres usos i costums als quals cal adaptar-se.

Taula 8

	Valors incorrectes	Valors correctes
a)	3,418 ± 0,123	3,42 ± 0,12
b)	6,3 ± 0,09	6,30 ± 0,09
c)	46.288 ± 1.551	46.300 ± 1.600
d)	428,351 ± 0,27	428,4 ± 0,3
e)	0,01683 ± 0,0058	0,017 ± 0,006

Font: Baró, M.D.; Bordas, S; Ibáñez, J.A.; Llebot, J.E.; Suriñach, S. "Experiencias de Termodinámica" (1985) Ed. Los autores, Dept. de Termología, UAB. Barcelona

3.2.2. Error relatiu

En comptes de l'error absolut podem donar l'error relatiu. En aquest cas el que indiquem és la relació de l'error respecte la mesura. Si el multipliquem per 100, estarem donant l'error relatiu en percentatge. Així per exemple, si el *Valor* és 5 cm i l'error absolut és 1 cm, l'error relatiu serà 1/5. I si el volem donar en tant per cent seria: 1/5 · 100 = 20%. És a dir, l'error relatiu, ϵ_r, d'una determinada magnitud v ve donat pel quocient entre l'error absolut, σ_v, i el valor de la magnitud:

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_v}{v} \tag{6}$$

Si el volem donar en tant per cent, només hem de multiplicar l'equació 6 per 100:

$$\text{Error relatiu (\%)} = \frac{\sigma_v}{v} \cdot 100 \tag{7}$$

Val a dir que aquest error també és ±, és a dir, també pot ser tant per excés com per defecte.

3.3. Obtenció de l'error

Fins ara hem parlat molt dels tipus d'errors i com els presentem. Però, com sabem quin és l'error que cometem? Quant val l'error absolut de què hem parlat al subapartat 3.2.? Aquestes són algunes de les preguntes que respondrem en aquest subapartat.

La manera d'obtenir l'error absolut dependrà del tipus de mesura que puguem fer:

- **Mesures directes**: les mesures són directes quan l'instrument ens permet obtenir una lectura que correspon a la magnitud que volem mesurar. Per exemple, si volem mesurar una distància i fem servir un regle, amb ell estem mesurant directament la distància, que és la magnitud que volem mesurar. En aquest cas l'error absolut dependrà de si només podem fer una mesura o de si podem fer un número n de mesures.

- **Mesures indirectes**: les mesures són indirectes quan les magnituds que mesurem no són les que volem obtenir, sinó altres magnituds relacionades amb ella per una fórmula. Per exemple, si volem mesurar la velocitat mitjana d'un objecte i, en lloc de la velocitat mesurem la distància i el temps i després la calculem amb la fórmula *espai* = *velocitat*/*temps*, estem fent una mesura indirecta. En aquest cas l'error de la magnitud s'obté a partir dels errors de les magnituds que em mesurat de forma directa: en el nostre exemple serien l'espai i el temps.

Tot seguit veurem com calcular l'error en cada cas.

3.3.1. Error en les mesures directes

Per minimitzar l'error aleatori de què hem parlat al subapartat 3.1. l'ideal és poder fer un número de mesures el més elevat possible. Tanmateix, en alguns casos això no és possible, com per exemple quan la mesura destrueix allò que volem mesurar. Així, doncs, l'error en el cas de les mesures directes dependrà de si només podem fer una mesura o en podem fer un cert número de mesures n.

Càlcul de la tensió d'una peça

En alguns processos, com per exemple, el càlcul de la tensió d'una peça, la mesura implica la destrucció de la peça. Aquest procediment es fa servir en cadenes de producció en les quals es parteix de la base que totes les peces seran iguals (o molt semblants) i per calcular la tensió se n'agafa una mostra. En aquest cas però, podríem fer diverses mesures, però prenent peces diferents.

Una única mesura

Quan només podem fer una mesura d'una magnitud V, la lectura, v, serà el valor que hem mesurat i tindrà un error que vindrà donat per la resolució de l'aparell (vegeu el subapartat 2.11.), $\sigma_{v,res}$:

$$V = v \pm \sigma_{v,res} \quad (8)$$

Així, per exemple, si mesurem una distància de 5 cm amb un regle que té una resolucio d’1 mm (0,1 cm), el resultat serà:

$$\text{Longitud} = 5{,}0 \pm 0{,}1 \text{ cm} \tag{9}$$

Fixeu-vos en la manera com hem escrit els valors (vegeu el subapartat 3.2.1.).

***n* mesures**

L’ideal en prendre una mesura és poder-la repetir com més vegades millor. D’aquesta manera podem compensar l’efecte dels errors aleatoris que hem vist al subapartat 3.1. Per calcular l’error i el valor de la mesura en aquest cas hem de fer servir les lleis de la probabilitat i l’estadística. Les dades que volem obtenir són, essencialment: quin valor hem d’agafar com a representant de la mesura i quin n’és l’error. Ho veurem tot seguit.

Valor de la mesura

Imagineu ara que volem mesurar una magnitud V i que repetim la mesura n vegades. Per a cada mesura, i, obtindrem un valor diferent, v_i. Ens preguntem aleshores: quin d’aquests valors agafarem com a “representant” de la mesura?

Quan fem n mesures del valor d’una magnitud V, amb una lectura v_i per a cada mesura, diem que tenim n mostres. El valor que prenem per a la mesura (el representant) és, aleshores, la mitjana aritmètica:

L’equació 10 es llegeix: la mitjana de v és igual al sumatori des de 1 fins a n de v sub i.

$$< v >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i \tag{10}$$

Imaginem per exemple que volem mesurar el temps t que triga una bola a caure per una rampa i repetim la mesura 9 vegades. Per a cada mesura i obtindrem el valor t_i que teniu a la taula 9.

Decimals

Fixeu-vos que donem amb dues xifres decimals els valors dels temps a la taula 9. Això vol dir que el cronòmetre que fem servir té una resolució de 0,01 s.

Taula 9. Exemple de valors obtinguts en la repetició d’una mesura 9 vegades

Mesura	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
Temps (s)	1,99	2,01	1,98	2,02	2,00	2,01	2,00	1,99	2,00

Llavors, per obtenir el valor que hem de prendre per al temps, substituïm a l’equació 10:

Vegeu el subapartat 3.2.1. per recordar com s’han de representar les dades que es mesuren.

$$< t >= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} t_i = \frac{t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8+t_9}{9} =$$

$$= \frac{1{,}99+2{,}01+1{,}98+2{,}02+2{,}00+2{,}01+2{,}00+1{,}99+2{,}00}{9} = 2{,}00 \text{ s} \tag{11}$$

Ja tenim, doncs, el valor de la mesura. Quin és però el seu error?

Error de la mesura

Si hem fet n mesures d'una certa magnitud V, de manera que cada mesura és v_i, l'error σ_v ens vindrà donat per la fórmula:

Recordeu que la notació Δ_v és equivalent a la notació σ_v. Vegeu el subapartat 3.2.1.

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(v_i - < v >)^2}{n(n-1)}} \tag{12}$$

L'equació 12 es llegeix: l'error σ de v és igual a l'arrel quadrada del sumatori des de 1 fins a n de la diferència v sub i amb la mitjana de v (al quadrat), dividit per n per n - 1.

on $< v >$ és la mitjana que hem obtingut amb l'equació 10.

Així, doncs, seguint amb l'exemple de la mesura de temps que teniu a 9, l'error ens vindrà donat per:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{9}(t_1 - < t >)^2}{9(9-1)}} =$$

$$= \left[\frac{(t_1 - < t >)^2 + (t_2 - < t >)^2 + (t_3 - < t >)^2 + (t_4 - < t >)^2 +}{}\right.$$

$$\left.\frac{+(t_5 - < t >)^2 + (t_6 - < t >)^2 + (t_7 - < t >)^2 + (t_8 - < t >)^2 + (t_9 - < t >)^2}{9(8)}\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{(1{,}99 - 2{,}00)^2 + (2{,}01 - 2{,}00)^2 + (1{,}98 - 2{,}00)^2 + (2{,}02 - 2{,}00)^2}{}\right.$$

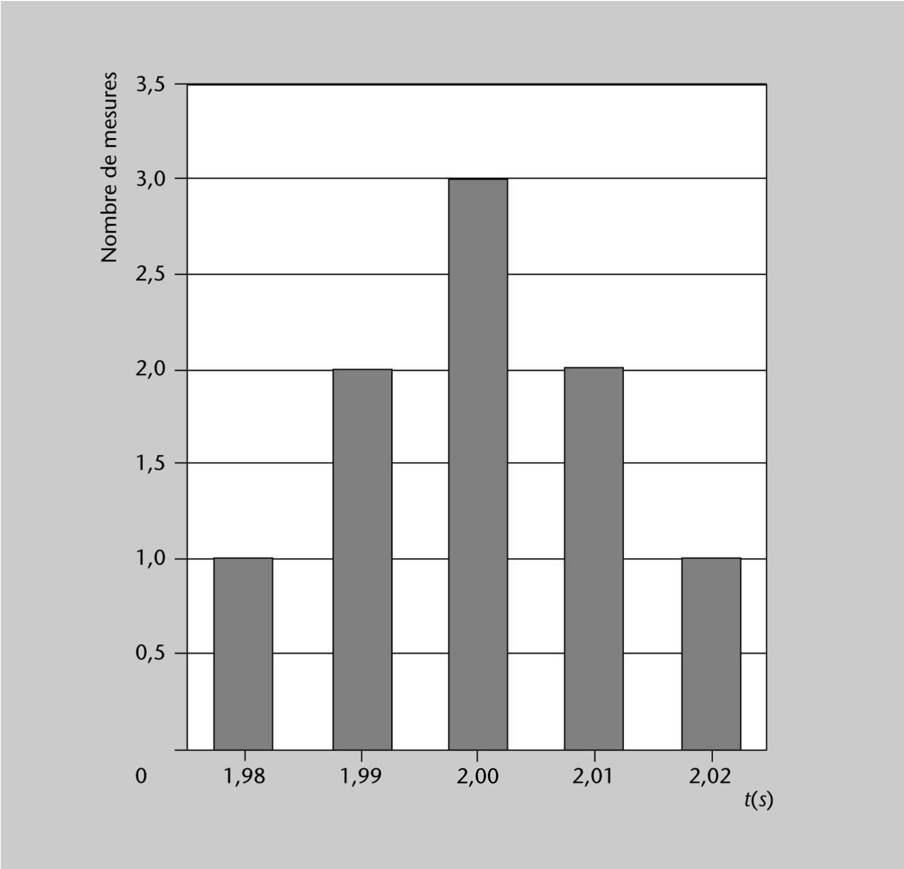
$$\left.\frac{+(2{,}00 - 2{,}00)^2 + (2{,}01 - 2{,}00)^2 + (2{,}00 - 2{,}00)^2 + (1{,}99 - 2{,}00)^2 + (2{,}00 - 2{,}00)^2}{9 \cdot 8}\right]^{1/2} =$$

$$= 0{,}004 \text{ s} \tag{13}$$

I ja tenim el valor de l'error. Hi ha però una cosa que no hem tingut en compte: cada mesura que hem fet tindrà un error que vindrà donat per la resolució de l'instrument, com hem vist al subapartat 3.3.1. Hem de tenir en compte aquest error? En sentit estricte l'hauríem de tenir en compte, i hi ha maneres de considerar-lo. Tanmateix, quan fem diverses mesures, es tendeix a treballar amb els resultats estadístics que hem vist en aquest apartat.

Encara que ja tenim el valor que prenem per a la mesura (equació 10) i el valor de l'error (equació 12), és important entendre què volen dir aquesta mitjana i aquest error que hem obtingut. Per fer-ho, començarem representant l'histograma de les mesures de la taula 9. El teniu a la figura 7.

Figura 7. Histograma de les mesures de la taula 9



Histograma

L'histograma d'un conjunt de dades consisteix a posar a les abscisses cadascun dels valors obtinguts i a l'ordenada amb quina freqüència es dóna aquell valor, és a dir, quantes vegades apareix cada mostra.

Fixeu-vos en la distribució dels resultats: és simètrica i centrada en el valor mig. De fet, hauríeu de fer sempre prou mesures per a que l'histograma final tingués aquesta forma.

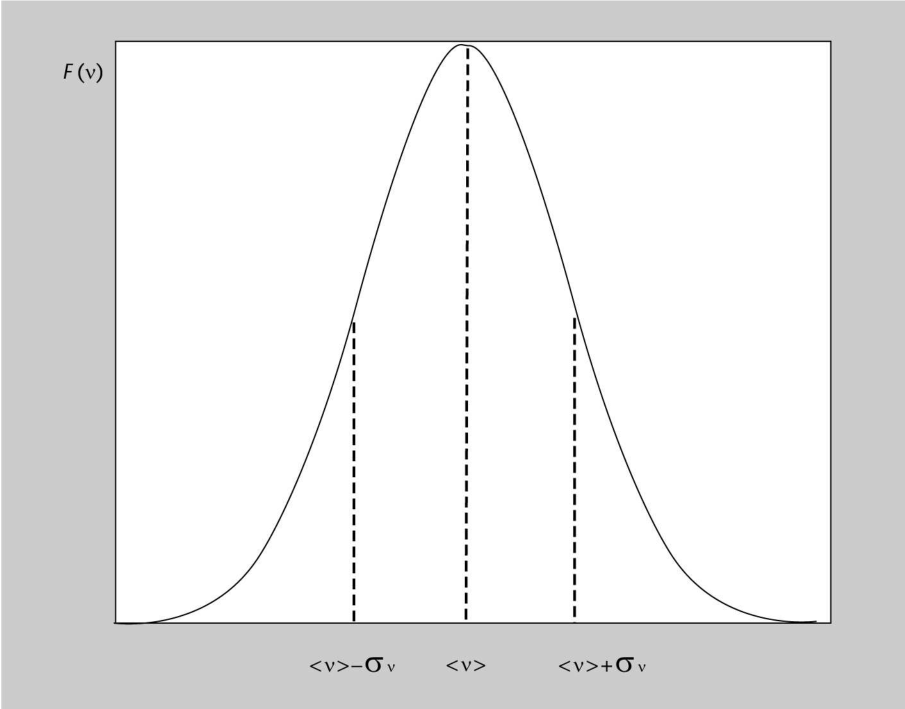
I què passaria si féssim moltes mesures més? Com es distribuirien aleshores els resultats? Ho podeu veure a la figura 8. En aquesta figura hem representat amb quina freqüència es dóna cada resultat quan es fan un conjunt infinit de mesures. És el que es coneix com a campana de Gauss o distribució Gaussiana.

L'equació d'aquesta corba, que anomenarem $F(v)$ perquè correspon a la freqüència amb què es dóna cada mesura, és:

$$F(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v}} e^{-\frac{(v-<v>)^2}{2\sigma_v^2}} \qquad (14)$$

Veiem que és una corba gaussiana centrada a la mitjana $< v >$, i veiem també quin és el significat de la σ_v que hem obtingut a l'equació 12: representa l'amplada de la gaussina. I què vol dir això? doncs vol dir que el 68% de les mesures que fem estaran entre $< v > - \sigma_v$ i $< v > + \sigma_v$. O dit d'una altra manera, tenim una probabilitat del 68% que el valor real de la magnitud que mesurem estigui entre $< v > - \sigma_v$ i $< v > + \sigma_v$. O bé també podem dir que, si

Figura 8. Distribució d'un número infinit de resultats amb forma gaussiana



fem una nova mesura, té una probabilitat del 68% d'estar entre $< \nu >$ - σ_ν i $< \nu >$ + σ_ν. És per això que al subapartat 3.2.1. hem dit que el valor tenia una certa probabilitat d'estar en l'interval.

A la taula 10 teniu la probabilitat que una determinada mesura caigui dins un interval donat. Fixeu-vos que, si en comptes de σ agafem 2σ, la probabilitat que una mesura caigui en l'interval que va de $< \nu >$ - $2\sigma_\nu$ a $< \nu >$ + $2\sigma_\nu$ és més gran, en concret serà del 94,4%; i si agafem 3σ, la probabilitat que una mesura caigui en l'interval que va de $< \nu >$ - $3\sigma_\nu$ a $< \nu >$ + $3\sigma_\nu$ és del 99,7%.

Taula 10. Probabilitat que una mesura caigui dins determinats intervals d'error

Límit de l'error	Percentatge de punts dins dels límits	Percentatge de punts fora dels límits
$\pm\sigma$	68,0%	32,0%
$\pm 2\sigma$	95,4%	4,6%
$\pm 3\sigma$	99,7%	0,3%

És important adonar-se d'aquest sentit estadístic de la mesura de l'error quan fem diverses mesures: dir que l'error és el que hem donat amb l'expressió 12 només assegura que el 68% de les mesures caigui en l'interval $< \nu > \pm \sigma_\nu$. Si estem treballant amb processos molt crítics, possiblement ens interessarà donar com a valor de l'error $\pm 2\sigma_\nu$, ja que així assegurem una fiabilitat del 95,4%; o, fins i tot, ens pot interessar donar $\pm 3\sigma_\nu$, que ens assegura que la fiabilitat és del 99,7%.

Per posar un exemple: imagineu que per a un satèl·lit artificial cal un tipus de peça que mesuri 10 mm amb una tolerància del 0,01%. Ara imagineu que vosaltres subministreu aquestes peces i dieu que mesuren 10 ± 0,01 mm. Si aquest 0,01 correspon a σ, voldrà dir que només el 68% de les peces que subministreu estarà dins aquest rang (o dit amb unes altres paraules, la probabilitat que una peça estigui dins la tolerància, que és de 0,01, és del 68%). En canvi, si heu fet unes mesures molt acurades i aquest 0,01 correspon a 3σ voldrà dir que el 99,7% de les peces que subministreu estaran dintre de la tolerància.

Projectes espacials

Els projectes per aplicacions espacials són molt exigents perquè si s'espatlla alguna cosa a l'espai, o no es pot arreglar o, si es pot, és molt car. Per tant, cal treballar amb marges d'error que permetin assegurar que tots els (o el màxim de) valors cauen dins el rang.

3.3.2. Error en les mesures indirectes

Fins aquí hem vist com calcular l'error en el cas de les mesures directes. Què passa, però, en el cas de les mesures indirectes? Imagineu per exemple el cas que fèiem servir en l'exemple del càlcul de la velocitat mitjana: mesuràvem l'espai i el temps i obteníem el resultat operant aquestes dues magnituds. Com operem els errors? Això és el que se'n diu la **propagació d'errors**.

Per començar partirem del cas en què la magnitud que volem mesurar d'una forma indirecta, z, és una funció, f, que depèn d'un conjunt de n variables, x_i: $f(x_1,...,x_n)$:

$$z = f(x_1,...,x_n) \tag{15}$$

Fixeu-vos, per tant, que en realitat l'equació 15 només està indicant que calculem z a partir d'unes altres variables.

En el nostre exemple de càlcul de la velocitat, la velocitat v juga el paper de z, x_1 seria l'espai e i x_2 seria el temps t:

$$v = f(x_1,x_2) = f(e,t) = \frac{e}{t} \tag{16}$$

Així, per exemple, imaginem que tenim els següents valors per l'espai i el temps:

$$e = 5{,}30 \pm 0{,}05 \text{ m} \tag{17}$$

$$t = 2{,}20 \pm 0{,}01 \text{ s} \tag{18}$$

Llavors per obtenir el valor de la velocitat només hem de substituir els valors esperats d'e i t a l'equació 16:

$$v = \frac{e}{t} = \frac{5{,}30}{2{,}20} = 2{,}41 \text{ m/s} \tag{19}$$

Fixeu-vos que per obtenir el valor de v no hem fet servir els errors de 17 i 18. Quin serà aleshores l'error en v, σ_v?

L'error per a una magnitud z que s'obté amb $z = f(x_1,...,x_n)$, σ_z, vindrà donat per l'expressió:

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2 \quad (20)$$

Derivada parcial

La notació $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ correspon a la notació de derivades parcials i l'únic que vol dir és que derivem la funció f respecte la variable x_1 i considerem la resta de variables com si fossin constants. Per exemple, la derivada de la funció $f(x,y) = x \cdot y$ respecte x és $\frac{\partial f}{\partial x} = y$; i la derivada respecte y és $\frac{\partial f}{\partial y} = x$.

Cal que noteu també que en l'equació 20 hi ha un quadrat a la banda de σ_z, per tant, l'error serà:

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2} \quad (21)$$

És important que tingueu present que l'expressió 21 correspon a σ de la taula 10. Per tant, aplica el que hem comentat anteriorment sobre la probabilitat que un valor estigui dins l'interval $z \pm \sigma_z$.

En cas que la notació de f us emboliqui, podeu pensar el càlcul d'una altra manera: fixeu-vos que, en realitat $f(x_1,...,x_n)$ és z, per la qual cosa, a efectes pràctics, el que heu de derivar és z i, per tant, podeu escriure:

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + ... + \left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2} \quad (22)$$

Per exemple, en el cas de la velocitat que teniu a l'equació 16, l'error serà:

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial e}\right)^2 \sigma_e^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 \sigma_e^2 + \left(\frac{-e}{t^2}\right)^2 \sigma_t^2} \quad (23)$$

I ja tenim l'expressió per calcular l'error en la velocitat. Noteu que en l'expressió 23 no tan sols apareixen els errors de l'espai (σ_e) i el temps (σ_t), sinó que també apareixen els valors de l'espai i el temps.

Si substituïm els valors de 17 i 18 a l'expressió 23 obtenim l'error en el càlcul de la velocitat:

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 \sigma_e^2 + \left(\frac{-e}{t^2}\right)^2 \sigma_t^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2{,}20}\right)^2 0{,}05^2 + \left(\frac{-5{,}30}{2{,}20^2}\right)^2 0{,}01^2} = 0{,}03 \text{ m/s} \quad (24)$$

I ja tenim, per tant, el valor complet de la velocitat del nostre exemple (equacions 19 i 24):

$$v = 2{,}41 \pm 0{,}03 \text{ m/s} \quad (25)$$

Tot seguit, a la taula 11 us mostrarem alguns exemples comuns de càlculs d'errors per diversos tipus d'expressions z: el cas en què sigui una suma, una resta, un producte o un quocient de dues magnituds a i b.

Taula 11. Expressions de l'error de z per a diversos tipus de funcions

Expressió de z	**Error de** z
$z = a + b$	$\sigma_z = \sqrt{(\sigma_a)^2 + (\sigma_b)^2}$
$z = a - b$	$\sigma_z = \sqrt{(\sigma_a)^2 + (\sigma_b)^2}$
$z = a \cdot b$	$\sigma_z = \sqrt{b^2(\sigma_a)^2 + a^2(\sigma_b)^2}$
$z = \frac{a}{b}$	$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2 (\sigma_a)^2 + \left(\frac{-a}{b^2}\right) (\sigma_b)^2}$

Resum

En aquests mòdul hem tractat els temes relacionats amb la mesura: les unitats, la mesura en si, la instrumentació i el càlcul d’errors.

Hem vist quines són les unitats del sistema internacional (S.I.) d’unitats i el sistema mètric decimal, amb tots els seus múltiplies i submúltiples. A més hem fet notar que hi ha altres sistemes diferents del S.I., com el CGS, que és un sistema mètric decimal; o l’anglosaxó, que no ho és. A més, hem vist els sistemes de mesura de temperatura i les conversions entre ells: graus fahrenheit, Celsius i Kelvin.

A continuació hem entrat de ple en la mesura i els instruments. Hem començat distingint el valor real del valor mesurat i hem vist a continuació què són la mesura en si, i altres conceptes relacionats amb el procés de mesura: el temps de relaxació, el calibratge (*calibration*), l’exactitud (*accuracy*), la precisió (*precision*), l’escala (*scale*), la polarització (*offset*), la linealitat (*linearity*), la sensibilitat de la mesura (*sensibility*), les derives (*drift*), el llindar (*threshold*), la zona morta (*dead zone*) i la resolució (*resolution*).

Finalment, hem vist com conèixer i mesurar l’error que es comet en fer una mesura. Hem vist que hi havia errors relatius i absoluts i com s’havien de presentar. També hem tractat el càlcul de l’error per tal d’acotar-lo i hem vist que podem donar un valor mesurat i una certa probabilitat que el valor real estigui dins un cert marge.

Bibliografia

Baró, M.D.; Bordas, S; Ibáñez, J.A.; Llebot, J.E.; Suriñach, S. (1985). *Experiencias de Termodinámica*. Ed. Los autores, dept. De Termología, UAB. Barcelona.

Diversos autors. *Introducció al tractament de dades*. Apunts del Laboratori d'Estàtica i Dinàmica. Secció de Física Aplicada del Vallès (ETSEIT). Departament de Física i Enginyeria Nuclear.

Morris, A.S. (2002). *Principios de mediciones e instrumentación*. Pearson Educación de México, México.