

Grafs i complexitat

Joaquim Borges

Robert Clarisó

Ramon Masià

Jaume Pujol

Josep Rifà

Joan Vancells

Mercè Villanueva

PID.00174666

Material docent de la UOC


Joaquim Borges Ayats

Llicenciat en Informàtica (1988) i doctor enginyer en Informàtica (1998) per la Universitat Autònoma de Barcelona. Professor de la Universitat Autònoma de Barcelona des del 1988. Des del 2000 és catedràtic d'escola universitària de l'àrea de Ciències de la Computació i Intel·ligència Artificial. És especialista en teoria de la informació, teoria de codis, teoria de grafs i combinatòria.


Robert Clarisó Viladrosa

Enginyer informàtic (2000) i doctor en Llenguatges i Sistemes Informàtics (2005) per la Universitat Politècnica de Catalunya. Professor dels Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació de la Universitat Oberta de Catalunya des del 2005. És especialista en mètodes formals, teoria d'autòmats i compiladors.


Ramon Masià Fornos

Llicenciat en Ciències Matemàtiques (1990) i en Filologia Clàssica (1998) per la Universitat de Barcelona. Professor dels Estudis d'Informàtica, Multimèdia i Telecomunicació de la Universitat Oberta de Catalunya. Ha compaginat l'activitat docent i d'innovació amb la recerca sobre història de les matemàtiques gregues. Actualment, està preparant l'edició de l'obra d'Arquimedes *Sobre l'esfera i el cilindre* per a la sèrie Filosofia grega i llatina de la col·lecció Bernat Metge de la Fundació Bernat Metge.


Jaume Pujol Capdevila

Llicenciat en Ciències Matemàtiques (1978) i en Informàtica (1989) i doctor en Informàtica (1995) per la Universitat Autònoma de Barcelona. Professor de la Universitat Autònoma de Barcelona des del 1988. Des del 1997 és catedràtic d'escola universitària de l'àrea de Ciències de la Computació i Intel·ligència Artificial. És especialista en teoria de la informació, teoria de codis, compressió i classificació de la informació i teoria de grafs.


Josep Rifà Coma

Llicenciat en Ciències Matemàtiques (1973) per la Universitat de Barcelona i doctor en Informàtica (1987) per la Universitat Autònoma de Barcelona. Professor de la Universitat Autònoma de Barcelona des del 1987. Des del 1992 és catedràtic d'universitat de l'àrea de Ciències de la Computació i Intel·ligència Artificial. És especialista en teoria de la informació, teoria de codis i criptografia. Actualment, és director del Departament d'Enginyeria de la Informació i de les Comunicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona.


Joan Vancells Flotats

Llicenciat en Informàtica (1987) per la Universitat Politècnica de Catalunya. Professor de la Universitat de Vic des del 1989. És especialista en programació i teoria d'autòmats i llenguatges formals. Autor del llibre *Programació: Introducció a l'algorísmica* (Editorial EUMO, 1992).


Mercè Villanueva Gay

Llicenciada en Ciències Matemàtiques (1994) i doctora en Informàtica (2001) per la Universitat Autònoma de Barcelona. Professora de la Universitat Autònoma de Barcelona des del 1994. Des del 2002 és titular d'universitat de l'àrea de Ciències de la Computació i Intel·ligència Artificial. És especialista en combinatòria, àlgebra, teoria de codis i teoria de grafs.

Primera edició: setembre de 2011

© Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona

Disseny: Manel Andreu

Material realitzat per Eurecamedia, SL

Dipòsit legal: B-27.718-2011

Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu copiar-los, distribuir-los i transmetre'ls públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), no en feu un ús comercial i no en feu obra derivada. La llicència completa es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.ca>.

Introducció

En aquesta assignatura, ens introduïrem en el camp de la matemàtica discreta. Aquesta disciplina cobreix una sèrie de temes que tenen en comú el fet de no utilitzar el concepte matemàtic del *continu* en les proposicions, en els arguments i, sobretot, en les aplicacions. Sense escriure tots aquests temes, els que ens interessa destacar per la seva utilització en l'enginyeria informàtica són els següents: combinatòria, teoria de conjunts, lògica, teoria de grups, teoria d'autòmats, aritmètica modular, àlgebres de boole, funcions de commutació, funcions generadores, relacions de recurrència, teoria de grafs, xarxes, optimització, complexitat computacional, estructures de dades, anàlisi d'algorismes, teoria de cossos finits, teoria de codis, teoria de dissenys, criptografia, geometria computacional, etc.

La majoria dels temes enumerats són importants en la formació d'un enginyer o enginyera en Informàtica i, així, trobarem assignatures del currículum que els cobreixen. Principalment, serveixen per a fonamentar molts dels processos directament implicats en l'enginyeria informàtica, tant pel que fa al programari com al maquinari. En aquesta assignatura ens centrarem en els conceptes relatius a la teoria de grafs i la complexitat computacional. Hem intentat enfocar els conceptes que us presentem des del punt de vista de les seves aplicacions en el camp de l'enginyeria informàtica i, de fet, no és casual aquesta interrelació, ja que l'origen i el desenvolupament de la matemàtica discreta han anat sempre lligats a l'evolució de la informàtica.

Com veureu en la taula de continguts, l'assignatura té set mòduls. El primer tracta d'alguns conceptes previs sobre funcions i complexitat computacional. Els quatre següents constitueixen una introducció a la teoria de grafs. Els dos darrers se centren en la complexitat computacional i, més concretament, en els problemes intrac-tables.

Cada mòdul està estructurat d'una manera semblant:

- Exposició dels conceptes tractats amb exemples que els il·lustren.
- Proposta d'exercicis i el solucionari corresponent.
- Exercicis finals d'autoavaluació del mòdul.
- Solucionari dels exercicis d'autoavaluació.

Hem procurat que tots els mòduls siguin autocontinguts, de manera que puguin ser estudiats independentment. Quan ha estat necessari, s'han inclòs les referències bibliogràfiques al final de cada mòdul, a més de les referències generals de l'assignatura que trobareu al final d'aquesta introducció.

Objectius

Globalment, els objectius bàsics que s'han d'assolir són els següents:

- 1) Entendre el concepte de *funció* i saber distingir els tres tipus de funcions: injectives, exhaustives i bijectives.
- 2) Reconèixer els conjunts finits, infinits i numerables i també saber comptar el nombre de funcions entre dos conjunts finits.
- 3) Entendre el concepte d'*algorisme* per a resoldre un problema i saber-ne calcular la complexitat.
- 4) Entendre el concepte de *graf* i ser capaç de modelar certes situacions amb grafs.
- 5) Identificar els grafs més habituals i descriure'n les característiques fonamentals.
- 6) Saber aplicar els algorismes d'exploració d'un graf.
- 7) Entendre la noció de *connectivitat* i aplicar-la correctament.
- 8) Saber calcular les distàncies mínimes dins un graf amb l'ajut dels algorismes adients.
- 9) Saber caracteritzar els arbres i, específicament, els arbres amb arrel.
- 10) Saber aplicar els algorismes de determinació d'un arbre generador minimal.
- 11) Identificar els grafs eulerians i hamiltonians i caracteritzar-los.
- 12) Entendre el problema del viatjant de comerç (TSP). Conèixer i saber aplicar l'algorisme de resolució aproximada d'aquest problema.
- 13) Entendre els conceptes de *tractabilitat* i *intractabilitat*.
- 14) Conèixer les diferents classes de complexitat i saber classificar els problemes en cadascuna d'aquestes.
- 15) Entendre el concepte de *reducció* entre problemes i saber demostrar quan un problema és NP-complet.
- 16) Reconèixer problemes intractables que apareixen d'una manera habitual en informàtica i en enginyeria.
- 17) Entendre i saber aplicar les tècniques bàsiques de reducció polinòmica dels problemes NP-complets.

Continguts

Mòdul didàctic 1

Conceptes previs: funcions i algorismes

1. Funcions
2. Algorismes

Mòdul didàctic 2

Fonaments de grafos

1. Caracterització d'un graf
2. Estructura i manipulació de grafos

Mòdul didàctic 3

Recorreguts i connectivitat

1. Recorreguts
2. Algorismes d'exploració de grafos
3. Connectivitat
4. Distàncies en un graf

Mòdul didàctic 4

Arbres

1. Conceptes bàsics
2. Arbres generadors
3. Arbres amb arrel

Mòdul didàctic 5

Grafos eulerians i grafos hamiltonians

1. Grafos eulerians
2. Grafos hamiltonians

Mòdul didàctic 6

Complexitat computacional

1. Concepte de *problema*
2. Mesures de complexitat
3. Reduccions i completesa

Mòdul didàctic 7

Problemes intractables

1. Problemes intractables sobre grafes
2. Altres problemes intractables

Bibliografia

Balakrishnan, V. K. (1991). *Introductory Discrete mathematics*. Nova Jersey: Prentice-Hall Int. Ed.

Basart, J. M.; Rifà, J.; Villanueva, M. (1997). *Fonaments de Matemàtica Discreta*. Materials, núm. 36. Bellaterra: Ed. Servei de Publicacions UAB.

Biggs, N. L. (1994). *Matemática Discreta*. (1a. edició, traducció d'M. Noy). Barcelona: Ediciones Vicens Vives.

Comellas, F.; Fàbrega, J.; Sánchez, A.; Serra, O. (1996). *Matemàtica discreta*. Barcelona: Edicions UPC.

Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Stein, C. (2001). *Introduction to Algorithms*. Cambridge: MIT Press.

Garcia, C. (2002). *Matemática Discreta*. Materiales Didácticos 66. Palma de Mallorca: UIB.

Garey, M. R.; Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Nova York: W. H. Freeman and Company.

Gimbert, J.; Moreno, R.; Ribó, J. M.; Valls, M. (1998). *Apropament a la teoria de grafes i als seus algorismes*. Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida.

Grimaldi, R. P. (1989). *Matemáticas discreta y combinatoria*. Mèxic: Addison-Wesley Iberoamericana.

Masià, R.; Pujol, J.; Rifà, J.; Villanueva, M. (2007). *Matemàtica Discreta*. Barcelona: Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya.

Papadimitriou, C. H. (1994). *Computational Complexity*. Reading (Massachusetts): Addison-Wesley.

Serna, M. J.; Álvarez, C.; Cases, R.; Lozano, A. (2004). *Els límits de la computació. Indecidibilitat i NP-completesa*. Barcelona: Edicions UPC.

Skiena, S. S. (1998). *The Algorithm Design Manual*. Berlín: Springer-Verlag.