

# Multiplexación por división en frecuencias ortogonales (OFDM)

Margarita Cabrera  
Francesc Tarrés

PID\_00185035



# Índice

<b>Introducción</b> .....	5
<b>Objetivos</b> .....	7
<b>1. OFDM frente a portadora única</b> .....	9
1.1. Ocupación tiempo-frecuencia .....	9
1.1.1. Transmisión mediante portadora única o SC .....	10
1.1.2. Transmisión mediante OFDM .....	11
1.2. Modulador QAM de portadora única (QAM-SC) .....	12
1.3. Modulador QAM-OFDM .....	13
<b>2. Ortogonalización de portadoras</b> .....	16
2.1. Condición de ortogonalidad .....	16
2.2. Modulación mediante el algoritmo IFFT .....	18
<b>3. Canal de comunicaciones en OFDM</b> .....	20
3.1. Efectos del canal de comunicaciones en OFDM .....	21
3.2. Ecuación .....	27
<b>4. Probabilidad de error en condiciones ideales</b> .....	29
<b>5. Estrategias adicionales en OFDM</b> .....	33
5.1. Frecuencias piloto .....	33
5.2. <i>Interleaving</i> y diversidad de canal .....	34
<b>6. Espectro de OFDM</b> .....	38
6.1. Efectos producidos en el espectro al introducir prefijo cíclico .....	38
6.2. Supresión de portadoras .....	39
6.3. Conformación de pulso .....	42
6.4. Máscaras espectrales .....	42
<b>7. Estándares basados en OFDM</b> .....	44
7.1. Sistema DAB .....	44
7.2. Sistema DVB-T .....	45
7.3. Sistema Wifi IEEE 802.11a, g y Wimax 802.16 .....	46
<b>Resumen</b> .....	48
<b>Actividades</b> .....	51
<b>Bibliografía</b> .....	53
<b>Anexos</b> .....	54



## Introducción

La **multiplexación por división ortogonal de frecuencia**, en inglés *orthogonal frequency division multiplexing* (OFDM), es un tipo de modulación que se ha diseñado para ser utilizada en condiciones muy severas de canal de comunicaciones. Por lo que respecta a su selectividad en frecuencia, es decir, en situaciones en las que dentro del ancho de banda ocupado por la señal transmitida, la función de transferencia del canal no presenta módulo constante y fase lineal. Mediante una modulación convencional, de tipo QAM, un canal selectivo en frecuencia provocaría una distorsión tan acusada sobre la señal modulada, que no permitiría su demodulación sin una ecualización realmente complicada. Mediante la modulación OFDM, lo que se persigue es enviar una determinada información, facilitada a través de una secuencia de bits, a una velocidad de transmisión dada, por un canal selectivo en frecuencias, pero sin necesidad de utilizar un ecualizador complicado en el receptor.

Para lograr el objetivo descrito, una modulación OFDM se forma como la suma de  $N$  modulaciones lineales típicamente de tipo QAM utilizando  $N$  frecuencias portadoras diferentes.  $N$  es un número entero relativamente alto ( $N = 64, 1.024, \dots$ ). Así, la secuencia original de símbolos a transmitir se reparte entre las modulaciones de tipo QAM, dispuestas en todo el ancho de banda asignado a este tipo de modulación. El espectro, o ancho de banda total disponible para este tipo de modulación, se subdivide en varios intervalos contiguos para asignar un intervalo a cada una de las modulaciones QAM.

Cada una de las modulaciones QAM en frecuencias ocupa un ancho de banda  $N$  veces inferior al que ocuparía una única modulación QAM transmitiendo la secuencia original de símbolos. De este modo, se consigue combatir de manera eficiente los efectos de canales selectivos en frecuencias, principal objetivo de la modulación, siempre y cuando se cumplan determinadas condiciones en cuanto a la duración de la respuesta impulsional del canal.

La modulación OFDM siempre se utiliza, tras procesar la secuencia de bits por un codificador de canal, con el objetivo de corregir los errores producidos en la transmisión, en cuyo caso esta modulación se denomina COFDM, del inglés *Coded OFDM*.

La modulación OFDM se utiliza en diferentes estándares de comunicación inalámbrica, de entre los que destacan:

- Las redes locales inalámbricas de tipo Wifi: (802.11 a, g), o redes de mayor cobertura como las de tipo WIMAX (802.16).
- El sistema de radio difusión digital DAB.
- El sistema de televisión digital DVB.

### OFDM

A pesar de que estrictamente la OFDM es una multiplexación en frecuencia (y así lo denota la  $M$  de la sigla), haciendo un abuso del lenguaje se habla corrientemente de *modulación OFDM*, puesto que la OFDM se utilizará como técnica para modular una señal digital.

### Nota

A pesar de que, sin pérdida de generalidad, en el módulo se habla de que la señal en cada una de las portadoras corresponde a una QAM, podría corresponder a cualquier modulación lineal, incluyendo las M-PSK.

El modo de funcionamiento de los estándares anteriores está basado en la división de un territorio en varias áreas o zonas de cobertura. Dentro de cada área se tiene un punto de acceso o una estación base que proporciona señal a todos los puntos de la zona correspondiente. En el caso de redes Wifi y Wi-max, además, se proporciona y se recibe señal, es decir, el enlace es bidireccional.

Una de las grandes ventajas que la modulación OFDM ha proporcionado frente a esquemas clásicos se obtiene al posibilitar que áreas de cobertura vecinas (DAB y DVB) emitan la misma señal en la misma banda de frecuencias. Lo que recibe el nombre de redes de frecuencia simple (SFN). Esta característica es debida a que en la modulación OFDM se pueden recibir diferentes señales retardadas unas respecto a las otras sin que se generen interferencias destructivas. Por ejemplo, si un receptor de televisión digital recibe la misma emisora y en el mismo ancho de banda desde dos repetidores de televisión diferentes, existirá un retardo entre ambas señales, efecto que se corrige perfectamente en OFDM; mientras que para emisoras de televisión analógicas, dicho efecto es inaceptable, ya que, en el mejor de los casos, produciría un fenómeno de doble imagen sobre la pantalla. Esta característica permite, por lo tanto, reutilizar mejor la banda frecuencial, a la vez que abre nuevas posibilidades a las normas de regularización territorial. Por ejemplo, Antena 3, Tele5 o TVE emiten en digital a la misma frecuencia en todo el territorio español.



Es recomendable, antes de iniciar el estudio de este módulo, repasar la temática de modulaciones de tipo QAM, estudiadas en el módulo 6 "Comunicaciones digitales paso banda" de la asignatura *Sistemas de comunicación I*.

## Objetivos

Los objetivos que debe alcanzar el estudiante con este módulo didáctico son los siguientes:

1. Interpretar la modulación OFDM como una alternativa frente a la modulación de portadora única.
2. Identificar los algoritmos IFFT y FFT como modulador y demodulador prácticos, respectivamente, de esquemas OFDM.
3. Comprender la finalidad del prefijo *cíclico* y del tiempo de guarda como estrategias para combatir la ISI y mantener la ortogonalidad entre las diferentes frecuencias utilizadas.
4. Identificar las ventajas y los inconvenientes de la modulación OFDM frente a esquemas de portadora única.
5. Conocer las técnicas habituales utilizadas para que el espectro obtenido en la modulación OFDM se adapte a una determinada máscara o plantilla espectral.
6. Conocer los estándares de comunicaciones de radio basados en OFDM y sus parámetros particulares.



## 1. OFDM frente a portadora única

La modulación OFDM representa una alternativa frente a la modulación clásica de tipo QAM (*quadrature amplitude modulation*), también denominada, en este contexto, de portadora única o SC (*single carrier*). Para entender mejor este concepto, podemos considerar la transmisión de una secuencia de bits según unas indicaciones de partida en cuanto a velocidad de transmisión y ancho de banda disponible.

El objetivo de cualquier modulación de tipo OFDM consiste en transmitir una secuencia de bits  $b[n]$  a una determinada velocidad de  $r_b$  bits/s, utilizando un canal disponible de ancho de banda  $B_c$  Hz.

Tanto para utilizar la estrategia OFDM como para utilizar la estrategia SC, la primera etapa a realizar a partir de la secuencia de bits consiste en la denominada *codificación de símbolo*, en la que se ha de obtener una secuencia de símbolos complejos,  $a[n]$ , de tipo QAM producidos a una velocidad de transmisión, llamada *velocidad de símbolo*,  $r$ .

El codificador de símbolo se esquematiza en la figura 1.

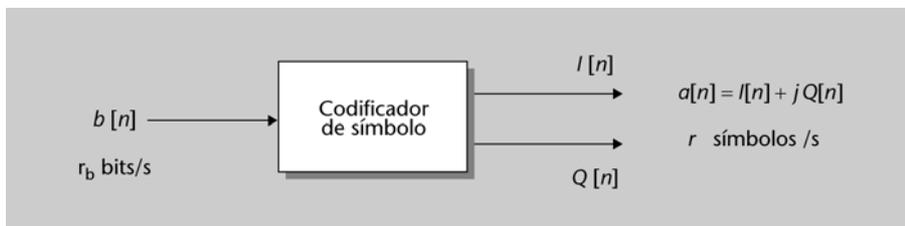


Figura 1. Codificador de símbolo QAM.

La secuencia de símbolos obtenida es, en general, compleja; y sus características más relevantes son:

- Secuencia de símbolos a transmitir:  $a[n] = I[n] + jQ[n]$ .
- Símbolos pertenecientes a un alfabeto de tamaño:  $M = 2^b$ .
- Velocidad de transmisión de la secuencia:  $r = \frac{r_b}{b}$  símbolos/s.

### 1.1. Ocupación tiempo-frecuencia

Recordemos el planteamiento propuesto hasta aquí. Se dispone de la secuencia de bits a transmitir codificada mediante una codificación genérica, tal como se plantea en la figura 1, y se dispone de un ancho de banda total de  $B_c$  Hz. Consideraremos, por un lado, la utilización de una modulación SC y, por

#### Es recomendable revisar...

... en este punto los tipos de formato de modulaciones QAM más típicos, como por ejemplo QPSK, 16QAM, 64QAM e incluso BPSK. Asimismo, es conveniente recordar cómo es el espacio de señal de todas las combinaciones  $(I[n], Q[n])$  en los formatos indicados.

otro, la utilización de una modulación OFDM. Sin embargo, antes de entrar en las definiciones matemáticas de uno y otro tipo de modulación, daremos en este subapartado una idea comparativa e intuitiva de cada uno de ellos.

### 1.1.1. Transmisión mediante portadora única o SC

Para transmitir un símbolo aislado de la secuencia  $a[n]$  mediante la estrategia de portadora única o SC, se elige un pulso rectangular que se inicia en el instante de tiempo  $nT$  y finaliza en el instante de tiempo  $(n+1)T$ , donde  $T$  es el *tiempo de símbolo* y corresponde al inverso de la velocidad de símbolo, esto es:

$$T = \frac{1}{r} . \quad (1)$$

En frecuencia, la modulación se centra alrededor de la frecuencia portadora  $f_c$  ocupando aproximadamente un ancho de banda de  $r$  Hz alrededor de esta frecuencia. Además, suponemos que el ancho de banda requerido coincide con el ancho de banda disponible, esto es:

$$r = B_c . \quad (2)$$

Por tanto, para la transmisión de un símbolo aislado se tienen las siguientes ocupaciones:

- La ocupación temporal de la transmisión del símbolo  $a[n]$ , que se produce para valores de tiempo,  $t$ , tales que  $nT \leq t \leq (n+1)T$  .
- La ocupación frecuencial de la transmisión del símbolo  $a[n]$ , que se produce para valores de frecuencia,  $f$ , tales que:  $f_c - \frac{r}{2} \leq f \leq f_c + \frac{r}{2}$  .

Considerando la secuencia de símbolos entera, ésta se puede representar mediante un diagrama de ocupación tiempo-frecuencia, tal como el de la figura 2, donde cada rectángulo, ya sea blanco o gris, representa la ocupación de un símbolo dado.

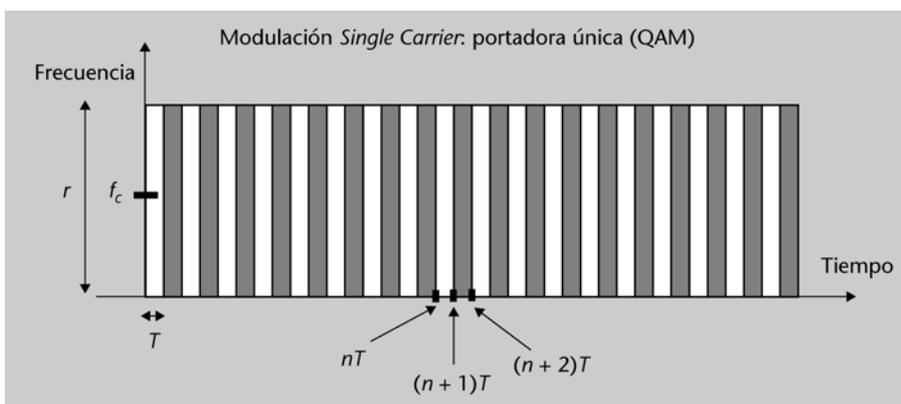


Figura 2. Ocupación tiempo-frecuencia de la modulación QAM de portadora única o SC. Los símbolos se suceden en el tiempo y ocupan siempre el mismo ancho de banda alrededor de la frecuencia portadora  $f_c$ .

### 1.1.2. Transmisión mediante OFDM

Ahora podemos plantear una estrategia alternativa a la de portadora única o SC. Mediante la modulación OFDM, cada símbolo se transmite ocupando un tiempo mayor y un ancho de banda menor respecto a la modulación SC:

- El conjunto total de símbolos de la secuencia original se divide en tramos de  $N$  símbolos cada uno.
- El ancho de banda disponible también se divide en  $N$  tramos.
- Cada grupo de  $N$  símbolos se transmite simultáneamente en el tiempo, ocupando cada uno de ellos un ancho de banda diferente.

Llamando respectivamente  $T_p$  y  $r_p$  a la ocupación temporal y a la ocupación frecuencial de cada símbolo, se tienen las siguientes relaciones con la velocidad original  $r$ .

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{r}{N} \\ T_p &= N \cdot T \end{aligned} \tag{3}$$

Para esta estrategia, la secuencia entera de símbolos también se puede representar mediante un diagrama de ocupación tiempo-frecuencia, similar al de la figura 2, donde cada rectángulo, ya sea blanco o gris, representa la ocupación de un símbolo dado.



Figura 3. Ocupación tiempo-frecuencia de la modulación OFDM. Cada grupo de  $N$  símbolos se sucede en el tiempo y ocupa un tramo frecuencial distinto al de los otros grupos.

Para finalizar esta presentación comparativa entre ambas estrategias, en la figura 4 se representa la ocupación espectral para la modulación OFDM comparada con la modulación de portadora única o SC. Cada una de las portadoras en el dominio frecuencial se representa mediante una función “sinc”, ya que se asume que los pulsos temporales son rectangulares, situación habitual en OFDM. En la figura,  $r$  representa la velocidad de símbolo.

#### La notación elegida...

... para  $T_p$  y  $r_p$ , es debida a que cada grupo de  $N$  símbolos se transmite en paralelo, es decir, simultáneamente.

#### La modulación OFDM...

... también se denomina *multi-carrier* o *multiportadora*, dado que, para cada símbolo de la transmisión en paralelo, se utiliza una frecuencia portadora diferente.

#### La transformada de Fourier...

... del pulso rectangular de duración  $T$ ,  $\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ , es la función sinc:  $T \text{sinc}(\pi f T)$ .

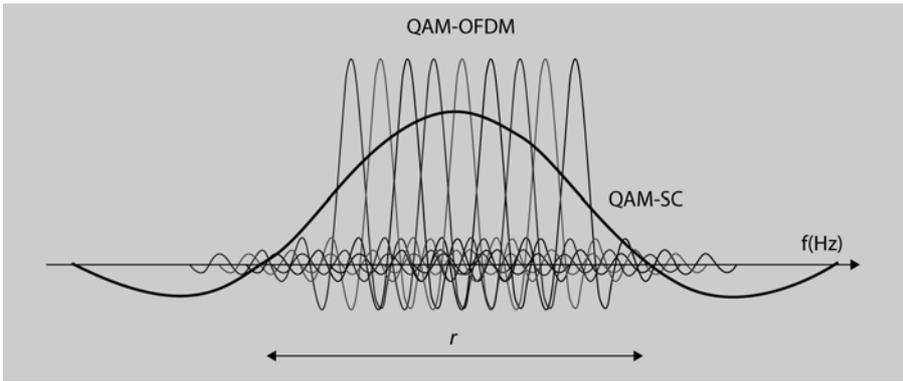


Figura 4. Ocupación frecuencial de la modulación OFDM comparada con la ocupación frecuencial de la modulación de portadora única. Las funciones de tipo "sinc" estrechas representan las diferentes portadoras de la modulación OFDM. En la práctica, cada una de ellas es modulada por un símbolo complejo distinto. La función "sinc" (en trazo más grueso) representa el espectro aproximado que se obtendría si se transmitiera a igual velocidad de símbolo pero en QAM-SC.

En el caso de la modulación de portadora única, los símbolos se transmiten en serie, es decir, se transmiten uno tras otro en el tiempo y cada uno de ellos ocupa un ancho de banda que, en el mejor de los casos, se puede reducir a  $r$  Hz. En el caso de modulaciones OFDM, el conjunto total de símbolos se divide en grupos de  $N$  símbolos. Cada grupo de  $N$  símbolos se transmite en paralelo, ocupando cada uno de ellos una frecuencia portadora diferente. Para la transmisión de un símbolo en particular se dispone de un tiempo  $N$  veces mayor que en el caso SC, mientras que el ancho de banda disponible para cada uno de los símbolos queda dividido por  $N$ .

### 1.2. Modulador QAM de portadora única (QAM-SC)

En este apartado revisaremos algunos conceptos de la modulación QAM convencional o SC. Para ello vamos a ver, por un lado, el diagrama de bloques del modulador y, por otro, la expresión temporal de la señal modulada.

El esquema de un modulador QAM para la transmisión de una secuencia de símbolos complejos  $a[n] = I[n] + jQ[n]$ , ocupando un ancho de banda alrededor de la frecuencia portadora  $f_c$ , se muestra en la figura 5

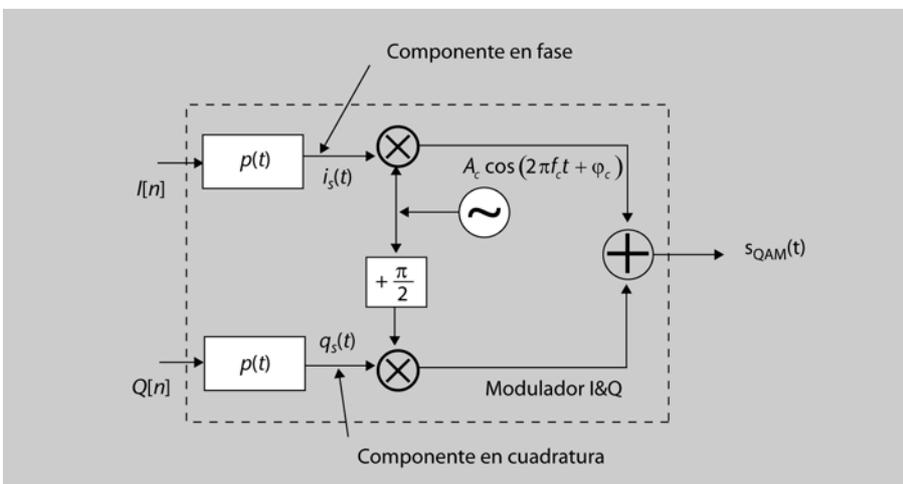


Figura 5. Modulador QAM de portadora única.

En la figura 5 la modulación QAM resultante se puede expresar en función de la componente en fase y de la componente en cuadratura como:

$$s(t)_{QAM} = i_s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_c) - q_s(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \phi_c). \quad (4)$$

De la expresión (4) se deduce que la señal equivalente paso bajo compleja, con pulso base rectangular de energía igual a la unidad, es igual a:

$$b_s(t) = i_s(t) + jq_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p(t - nT) \quad (5)$$

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

**La notación compleja...**

... utilizada en este apartado nos resultará útil posteriormente para comprender mejor la característica de ortogonalidad de la modulación OFDM.

En la figura 6 se muestra la representación compleja del modulador QAM de la figura 5, que a partir de este punto, y en lo que queda de módulo, se representará según el diagrama mostrado. Además, se esquematiza la ocupación espectral de la señal paso bajo  $b_s(t)$  alrededor de la frecuencia cero y de la señal paso banda  $s_{QAM}(t)$  alrededor de la frecuencia portadora.

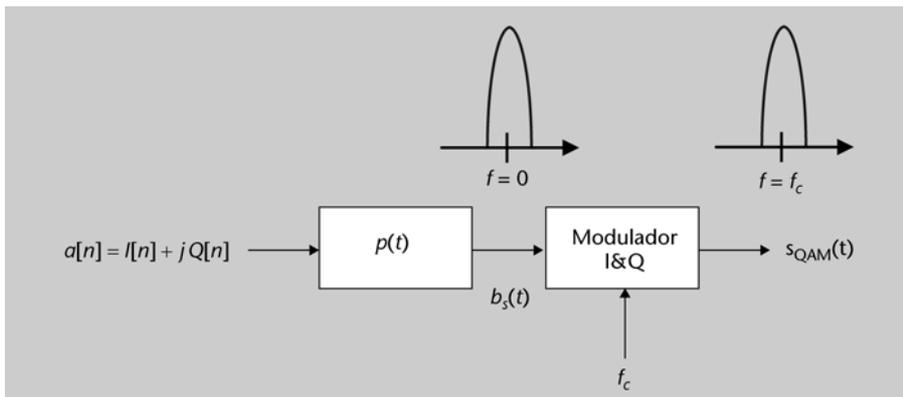


Figura 6. Representación simplificada del modulador QAM de portadora única.

### 1.3. Modulador QAM-OFDM

El esquema simplificado de un modulador QAM-OFDM para la transmisión de una secuencia de símbolos  $a[n]$ , ocupando un ancho de banda alrededor de la frecuencia portadora  $f_c$ , se muestra en la figura 7. Lo más destacable frente a la modulación QAM-SC es la introducción del convertidor de serie a paralelo (S/P) mediante el cual se posibilita que cada grupo de  $N$  símbolos de la secuencia de entrada se transmita por  $N$  modulaciones QAM en paralelo.

La señal OFDM resultante equivale a la suma de  $N$  modulaciones QAM. Este efecto se puede representar mediante la siguiente expresión:

$$s_{OFDM}(t) = \sum_{k=1}^N s_{QAM-k}(t). \quad (6)$$

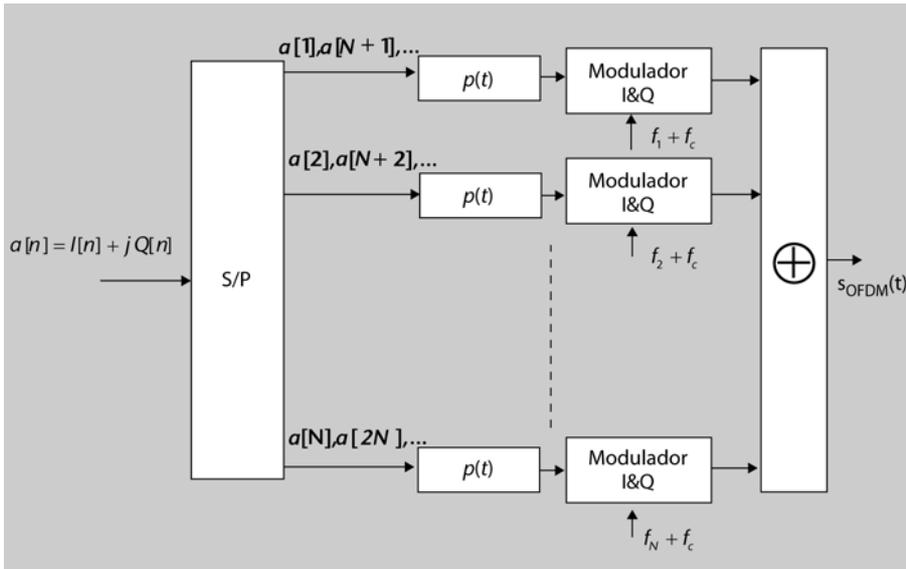


Figura 7. Modulador QAM-OFDM.

El equivalente paso bajo complejo de la modulación OFDM respecto a la frecuencia portadora  $f_c$  es igual a la suma de equivalentes paso bajo de las  $N$  modulaciones QAM:

$$b_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N a[nN + k] e^{j2\pi f_k t} p(t - nNT_s)$$

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{NT_s}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T_p}{2}}{NT_s}\right) = \frac{1}{\sqrt{T_p}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T_p}{2}}{T_p}\right) \quad (7)$$

$$T_p = NT_s$$

**Al comparar la expresión...**

... de la modulación OFDM en (7) con la dada para la modulación SC en (5), podemos ver que el pulso rectangular utilizado en OFDM es de duración  $N$  veces mayor que la del pulso utilizado en SC. En el periodo de  $T_p = NT_s$  se transmiten  $N$  símbolos QAM diferenciados entre sí por la frecuencia  $f_k \cdot (T = T_s)$ .

En realidad, el modulador mostrado en la figura 7 no se corresponde a un sistema realista, ya que, desde un punto de vista tecnológico, es más eficiente construir inicialmente la señal equivalente paso bajo compleja y, posteriormente, realizar el traslado a la frecuencia portadora de transmisión del equivalente paso bajo mediante un modulador I&Q. El esquema resultante se muestra en la figura 8 y es, por tanto, equivalente al que se muestra en la figura 7.

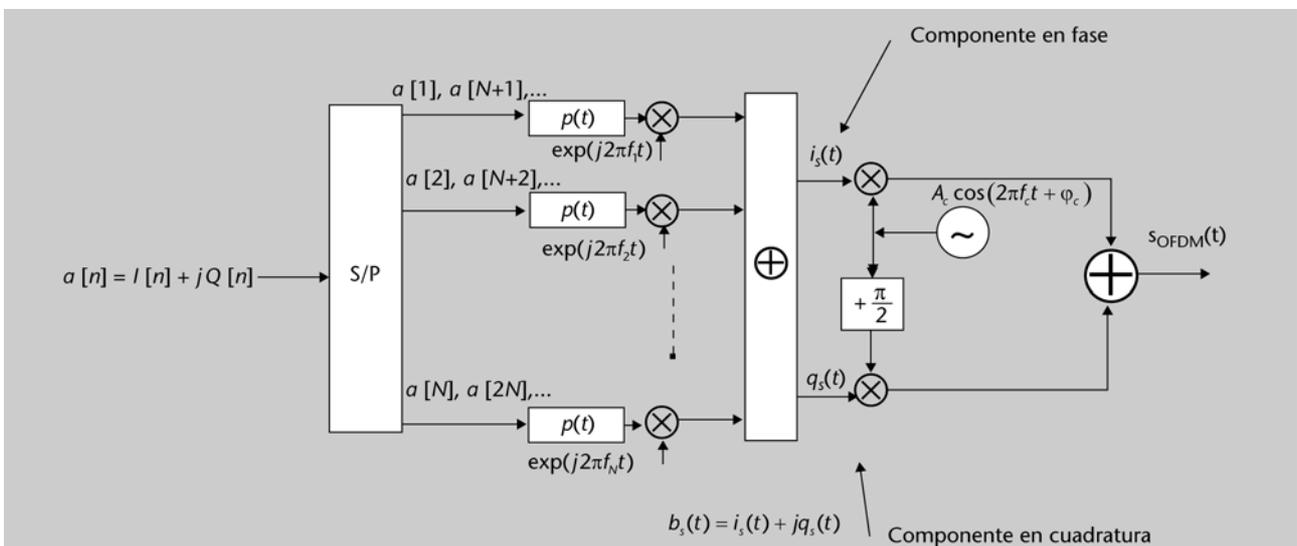


Figura 8. Modulador QAM-OFDM en dos etapas: construcción de la señal equivalente paso bajo compleja y traslado a la frecuencia portadora.

La forma temporal obtenida para una modulación OFDM se obtiene como la suma de las formas temporales correspondientes a las diferentes modulaciones QAM que la componen. Para ilustrar el efecto producido sobre las señales temporales, en la figura 9 se representan los equivalentes paso bajo para un caso de modulación BPSK (*Binary-PSK*). Consideraremos este caso sencillo debido a que los símbolos de una modulación BPSK son reales:

$$a[k] = \pm 1 .$$

El equivalente paso bajo de la modulación de portadora simple es real y, por tanto, sencillo de dibujar. En cuanto al equivalente paso bajo de la modulación OFDM, debido a las exponenciales complejas de la expresión (7), queda, en general, complejo. En la gráfica correspondiente de la figura 9 se representa de forma aislada cada uno de los términos que contribuyen a un único símbolo OFDM en su equivalente paso bajo. De hecho, para la modulación OFDM se representa únicamente lo que equivale a la parte imaginaria (seno). La parte real sería análoga pero con señales que se inician con un máximo (coseno).

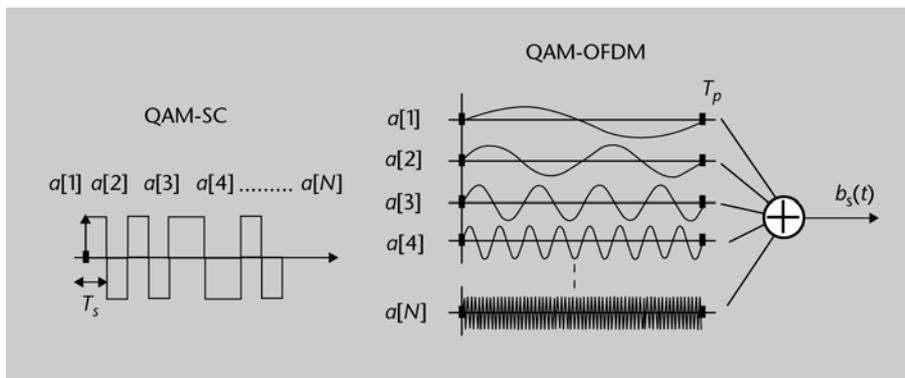


Figura 9. Equivalente paso bajo para las modulaciones QAM-SC y QAM-OFDM, y símbolos BPSK.

## 2. Ortogonalización de portadoras

Tal como se ha definido la señal equivalente paso bajo en OFDM en la expresión (7), las funciones que transportan los símbolos de las diferentes portadoras corresponden a las exponenciales complejas de frecuencia  $f_k$ . Estas funciones deben ser ortogonales entre sí para que en el receptor se puedan separar los símbolos que corresponden a cada una de las portadoras sin interferirse entre ellas. A esta propiedad se le denomina condición de ortogonalidad y da nombre a la modulación OFDM.

### 2.1. Condición de ortogonalidad

Para detectar los símbolos de la portadora  $k$ , correspondientes a la secuencia compleja  $a[k]$  se debe diseñar el filtro adaptado a la exponencial correspondiente. Si se recibe la señal OFDM descrita en la expresión (7) y se realiza la *down conversion* mediante un demodulador I&Q, se obtiene la señal equivalente paso bajo de la señal recibida. A continuación, se analiza la forma de la señal paso bajo sin tener en cuenta la presencia de la señal de ruido y considerando únicamente los símbolos QAM transportados en símbolo OFDM  $n$ -ésimo.

Equivalente paso bajo recibido en ausencia de ruido:

$$b_r(t) = b_s(t) = \sum_{k'=1}^N a[nN + k'] e^{j2\pi f_{k'} t} \frac{1}{\sqrt{T_p}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T_p}{2} - nT_p}{T_p}\right) \quad (8)$$

$$nT_p \leq t \leq (n+1)T_p$$

donde, sin pérdida de generalidad y únicamente a efectos de análisis, podemos considerar que la señal anterior corresponde al primer símbolo ( $n = 0$ ).

$$b_r(t) = \sum_{k'=1}^N a[k'] e^{j2\pi f_{k'} t} \frac{1}{\sqrt{T_p}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T_p}{2}}{T_p}\right). \quad (9)$$

La señal anterior se procesa mediante el correspondiente filtro adaptado y se muestrea a razón de una muestra por símbolo OFDM, dando lugar a la siguiente función:

$$y_k(T_p) = \frac{1}{\sqrt{T_p}} \int_0^{T_p} b_r(t) e^{-j2\pi f_k t} dt = \sum_{k'=1}^N a[k'] \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} e^{j2\pi(f_{k'} - f_k)t} dt. \quad (10)$$

dado que interesa obtener:

$$y_k(T_p) = a[k],$$

se debe cumplir la siguiente relación para las diferentes frecuencias:

$$\frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} e^{j2\pi(f_{k'} - f_k)t} dt = \delta[k' - k] = \begin{cases} 1 & k' = k \\ 0 & k' \neq k \end{cases} \quad (11)$$

La relación (11) se denomina relación de ortogonalidad. Un modo de obtener la condición de ortogonalidad consiste en elegir las diferentes frecuencias  $f_k$  de tal modo que cada una de ellas tenga un número entero de periodos en la  $T_p$  (duración del símbolo OFDM).

Para que la exponencial correspondiente a la frecuencia  $f_1$  tenga un periodo entero en el tiempo de símbolo, se elige:

$$f_1 = \frac{1}{T_p} \Rightarrow e^{j2\pi f_1 t} = e^{j2\pi \frac{1}{T_p} t} = \cos\left(2\pi \frac{1}{T_p} t\right) + j\text{sen}\left(2\pi \frac{1}{T_p} t\right). \quad (12)$$

Para que la exponencial correspondiente a la frecuencia  $f_2$  tenga dos periodos enteros en el tiempo de símbolo, se elige:

$$f_2 = \frac{2}{T_p} \Rightarrow e^{j2\pi f_2 t} = e^{j2\pi \frac{2}{T_p} t} = \cos\left(2\pi \frac{2}{T_p} t\right) + j\text{sen}\left(2\pi \frac{2}{T_p} t\right). \quad (13)$$

Y así sucesivamente. Es decir, se eligen funciones con valores de frecuencia:

$$f_k = \frac{k}{T_p}; k = -\frac{N}{2} : \dots : +\frac{N}{2} - 1. \quad (14)$$

La separación frecuencial entre dos frecuencias portadoras consecutivas resulta igual a:

$$\Delta f = \frac{1}{T_p}. \quad (15)$$

Tanto las operaciones necesarias para construir la señal de la expresión (7), como el procesado correspondiente a los  $N$  filtros adaptados para procesar las señales de (11), son operaciones basadas en la transformada de Fourier y, en la práctica, se implementan sobre las señales discretizadas o muestreadas. Si se tuvieran que muestrear directamente sobre las señales analógicas o continuas en el tiempo, se requerirían  $N$  osciladores en el transmisor y  $N$  filtros adaptados analógicos en el receptor, lo que tecnológicamente es inviable debido a los valores habitualmente altos de  $N$  con que se opera. El modo más eficiente de realizar ambas transformaciones de Fourier consiste en la utilización del algoritmo IFFT en el transmisor y el algoritmo FFT en el receptor. Los algoritmos IFFT y FFT garantizan la ortogonalidad de las portadoras en

#### Frecuencias positivas y negativas

En la expresión (14) se definen frecuencias positivas y frecuencias negativas. Es importante recordar que las exponenciales complejas de frecuencia negativa presentan contenido espectral a la correspondiente frecuencia negativa. De este modo las portadoras en el equivalente paso bajo se distribuyen entre frecuencias negativas y frecuencias positivas y, en consecuencia, la señal OFDM de paso de banda se halla centrada alrededor de  $f_c$ .

recepción a la vez que minimizan el número de operaciones a realizar sobre los datos. La restricción que se impone es que el número de portadoras transmitidas en paralelo ( $N$ ) debe ser una potencia de 2. Habitualmente se trabaja con valores de  $N$  comprendidos entre 64 y 8.182.

### 2.2. Modulación mediante el algoritmo IFFT

El algoritmo IFFT se implementa para obtener las  $N$  muestras correspondientes a un símbolo OFDM:

$$b_s[n] = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}-1} a[k] e^{j2\pi f_k n} = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}-1} a[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$0 \leq n \leq N$$

$$T_m = \frac{T_p}{N} = T_s$$
(16)

La última línea de la expresión anterior indica el tiempo de muestreo al que se deberá realizar la conversión digital/analógica (D/A) en el modulador y la conversión analógico/digital (A/D) en el demodulador. En definitiva, una versión más realista del esquema modulador de la figura 7 se presenta en la figura 10, que es tal como se implementa en la práctica un modulador OFDM.

En apartados posteriores se complementa el esquema con más operaciones utilizadas en los sistemas basados en OFDM.

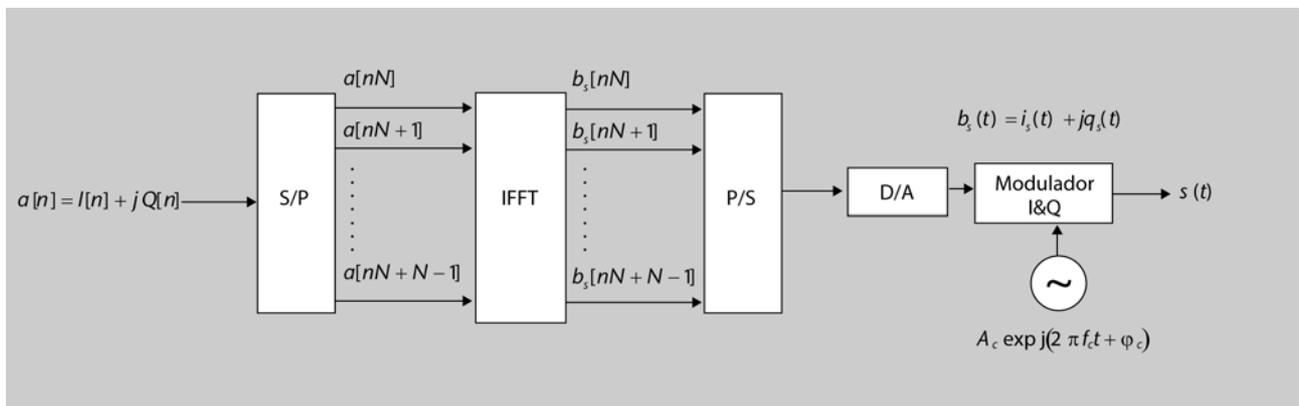


Figura 10. Modulador QAM-OFDM basado en el algoritmo IFFT. S/P es un bloque conversor de datos serie a paralelo y P/S es un bloque conversor de datos paralelo a serie.

De hecho, la modulación OFDM basada en el algoritmo IFFT y la demodulación OFDM basada en el algoritmo FFT es una necesidad práctica y de implementación que se utiliza en todos los transmisores y receptores de OFDM. A nivel de análisis del sistema, es preferible utilizar la nomenclatura dada en (7) ya que facilita en muchos aspectos el análisis de las señales a través de las diferentes etapas del sistema, y también es preferible utilizar la nomenclatura de señal continua entre el convertor D/A del transmisor y el convertor A/D del receptor, dada en la expresión (7), mediante la que se reproduce de manera exacta la forma de las señales.

El algoritmo IFFT es útil para enviar cada símbolo QAM  $a[n]$ , a transmitir, a la frecuencia que debe ocupar en el equivalente paso bajo. IFFT significa *operación inversa a la FFT* y, por tanto, mediante la IFFT se realiza una transformación del dominio frecuencial al dominio temporal. Dicho de otra forma, la señal de salida del bloque IFFT es la señal temporal que se debe transmitir (en su versión de equivalente paso bajo y discretizada), para que el espectro de dicha señal coincida con la trama de  $N$  símbolos QAM que se envía en cada símbolo OFDM.

### 3. Canal de comunicaciones en OFDM

Las principales ventajas obtenidas mediante la modulación OFDM, comparado con la modulación SC-QAM, se obtienen debido a los efectos que los canales de propagación producen sobre las señales transmitidas. En los entornos en los que se utilizan este tipo de aplicaciones, los canales de comunicaciones se caracterizan por su respuesta impulsional, de una determinada duración temporal y de propiedades variantes en el tiempo. A efectos de análisis, la señal transmitida se convoluciona con la respuesta impulsional que modela el canal:

$$s(t) * h_c(t) . \quad (17)$$

Cuando el canal de comunicaciones es ideal, su respuesta impulsional se puede modelar como:

$$h_c(t) = \alpha \delta(t - t_d) . \quad (18)$$

No se distorsiona la señal transmitida a través del canal de comunicaciones y, por tanto, no cambia la forma de la señal recibida respecto a la transmitida. Este modelo es válido en comunicaciones inalámbricas siempre que se tenga un único rayo de señal directo entre el transmisor y el receptor y no se produzcan rebotes o ecos entre ambos. La señal recibida,  $r(t)$ , se expresa en este caso como:

$$r(t) = \alpha s(t - t_d) . \quad (19)$$

En el caso de las modulaciones digitales, sobre un canal ideal no se produce ISI o interferencias entre símbolos consecutivos.

Sin embargo, en aplicaciones típicas de OFDM se presentan en general dos efectos no deseados que caracterizan la respuesta impulsional de un canal no ideal:

- La duración de la respuesta impulsional.
- El carácter variante de la respuesta impulsional.

El primero de los efectos, la duración de la respuesta impulsional,  $T_{nr}$ , se produce debido a los diferentes ecos o retardos respecto al haz o camino principal entre el transmisor y el receptor. La señal transmitida experimenta distintos rebotes sobre los obstáculos físicos que rodean tanto el transmisor como el receptor y, en lugar de recibir una única replica de la señal como en (19) se recibe un conjunto de réplicas tal como se muestra en la figura 11. Este fenómeno está parametrizado por la dispersión del retardo o *delay spread*, que mide de media la duración temporal de la respuesta al impulso del canal. El segundo

de los efectos no deseados del canal es su variabilidad, que está parametrizada por el tiempo de coherencia, que intuitivamente mide el tiempo transcurrido para que la variación temporal del canal y los efectos que provoca sobre la señal transmitida sean apreciables.

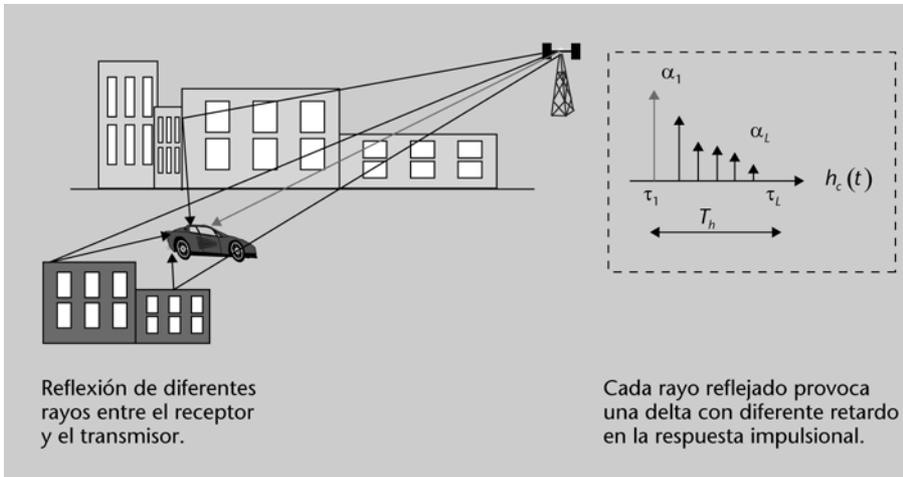


Figura 11. Modelado de la respuesta impulsional del canal como un conjunto de deltas de diferentes niveles de atenuación y retardos.

### Ejemplo 1. Efectos del *delay spread* sobre la portadora simple y sobre una señal OFDM

Supongamos que se transmiten símbolos correspondientes a una modulación QAM-SC soportada mediante pulsos rectangulares de duración temporal igual al tiempo de símbolo. La velocidad de transmisión es de  $r = 1$  Msímbolos/s y el tiempo de símbolo es por tanto  $T_s = 1 \mu\text{s}$ . El canal de comunicaciones presenta un retardo temporal de  $\tau_m$  de  $2 \mu\text{s}$ , por lo que, en promedio, cada uno de los diferentes símbolos QAM que llegan al receptor ocupa una duración de  $3 \mu\text{s}$ , provocando un nivel de ISI importante que degrada enormemente la probabilidad de error de símbolo. Hay que recordar que al convolucionar un pulso de duración  $T_s = 1 \mu\text{s}$  con una respuesta impulsional de duración  $2 \mu\text{s}$ , el pulso resultante tiene una duración igual a la suma de ambas duraciones, en este caso,  $3 \mu\text{s}$ .

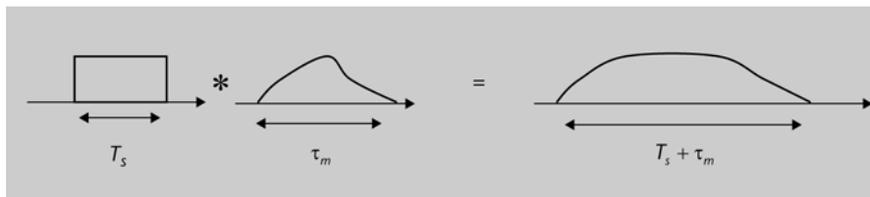


Figura 12. Tiempo de símbolo y retardo temporal para la transmisión de símbolos correspondientes a una modulación QAM-SC.

En estas condiciones se hace imprescindible la utilización de un ecualizador temporal para una decodificación de símbolos con baja probabilidad de error.

Para el caso de modulaciones OFDM, a pesar de que esta observación se formalizará más adelante, ya podemos intuir que, teniendo en cuenta que el tiempo de símbolo OFDM es  $N$  veces mayor, el efecto de la dispersión del retardo del canal se verá mitigado y, por lo tanto, la tarea de ecualización será mucho más sencilla de realizar.

## 3.1. Efectos del canal de comunicaciones en OFDM

Una de las principales características de OFDM consiste en la introducción de un tiempo de guarda entre símbolo y símbolo OFDM, durante el que se transmite una repetición parcial del siguiente símbolo OFDM. Mediante esta estrategia se combate el efecto de ISI, que podría provocar un canal selectivo en

frecuencias, a la vez que se preserva la ortogonalidad entre las diferentes portadoras. Para conseguir este efecto, el último tramo de duración dada (por ejemplo  $T_G$ ) de la forma de onda obtenida en el modulador a la salida del conversor paralelo a serie (P/S) de la figura 10 se extiende cíclicamente y se transmite al inicio del símbolo. Al tramo repetido se le denomina prefijo cíclico. La duración temporal del símbolo OFDM se reparte entre la transmisión del prefijo cíclico y la transmisión del símbolo OFDM propiamente dicho:

$$T_{OFDM} = T_G + T_p \tag{20}$$

Tal como se representa en la figura 13, un tramo de duración  $T_G$  del final de cada uno de los símbolos se replica al principio del correspondiente símbolo. El efecto repercute en la relación entre la velocidad de transmisión de los símbolos QAM y el ancho de banda requerido para la modulación resultante:

$$r = \frac{N}{T_s} = \frac{N}{T_{OFDM}} = \frac{N}{T_G + T_p} < \frac{N}{T_p} = B_s \tag{21}$$

**La introducción del prefijo cíclico...**

... en el tiempo de guarda incrementa ligeramente el ancho de banda de la modulación OFDM para una velocidad de transmisión dada.

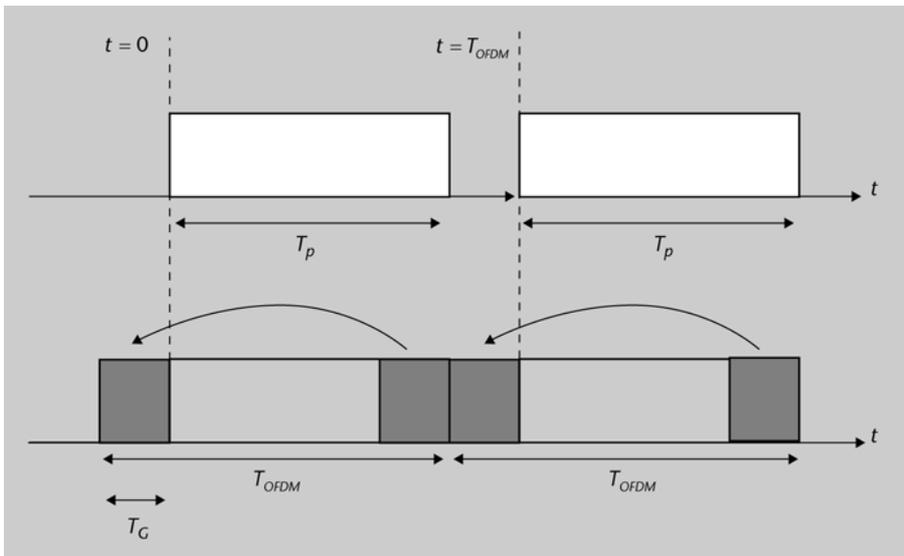


Figura 13. Introducción del intervalo de guarda.

Debido a que la introducción del prefijo cíclico se realiza sobre la versión digital de la señal, para completar el esquema mostrado en la figura 10, se debe incluir un bloque cuya función sea la inserción del prefijo cíclico o repetición de las últimas muestras obtenidas en cada ejecución del algoritmo IFFT.

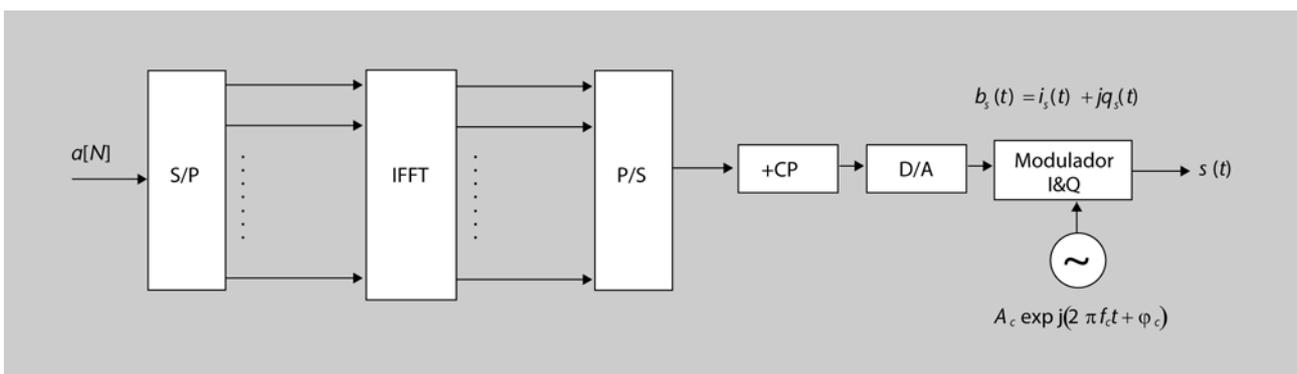


Figura 14. Modulador de QAM-OFDM, basado en el algoritmo IFFT, incluyendo la inserción del prefijo cíclico (CP).

### Ejemplo 2. Aumento del ancho de banda en OFDM

Siguiendo el ejemplo 2 de modulación QAM-SC de velocidad de transmisión  $r = 1$  Msímbolos/s y tiempo de símbolo  $T_s = 1 \mu\text{s}$ , se calculan en el presente ejemplo los correspondientes parámetros al transmitir la misma secuencia mediante una modulación OFDM, en la que se supone que la extensión del prefijo cíclico se corresponde a un 25% del símbolo útil:  $T_G = \frac{T_p}{4} = \frac{T_{OFDM}}{5}$  y que se utiliza un algoritmo IFFT de  $N = 64$  portadoras.

Con los datos dados se calculan los siguientes parámetros:

- Tiempo adjudicado al símbolo OFDM:

$$T_{OFDM} = NT_s = 64 \mu\text{s} \cdot$$

- Tiempo de guarda:

$$T_G = \frac{T_{OFDM}}{5} = 12,8 \mu\text{s} \cdot$$

- Tiempo adjudicado a la transmisión de  $N = 64$  símbolos en paralelo:

$$T_p = T_{OFDM} - T_G = 51,2 \mu\text{s} \cdot$$

- Ancho de banda resultante para la modulación OFDM:

$$B_s = \frac{N}{T_p} = \frac{64}{51,2} 10^6 = 1,25 \text{ MHz} \cdot$$

- Frecuencia de muestreo de las señales paso bajo tanto en transmisión como en recepción:

$$f_m = \frac{1}{T_m} = B_s = 1,25 \text{ MHz} \cdot$$

La introducción del tiempo de guarda con la transmisión del prefijo cíclico evita la interferencia intersimbólica (ISI) y la interferencia entre portadoras (ICI), siempre que se cumpla la condición de que la duración del tiempo de guarda sea mayor o igual que la duración de la respuesta impulsional del canal. Debido al carácter aleatorio de los canales de comunicaciones, esta condición en el diseño de un sistema basado en OFDM se ajusta con el parámetro de *delay spread* del canal en cuestión:

$$\tau_m < T_G \cdot \quad (22)$$

Para expresar formalmente la forma de onda correspondiente al equivalente paso bajo que incluya el prefijo cíclico, la expresión (7) se modifica dando lugar a:

$$\begin{aligned} b_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N a[nN + k] e^{j2\pi f_k t} p(t - nT_{OFDM}) \\ p(t) &= \Pi\left(\frac{t + T_G - \frac{T_{OFDM}}{2}}{T_{OFDM}}\right) \\ T_{OFDM} &= NT_s \end{aligned} \quad (23)$$

En la expresión (23) podemos destacar que los símbolos OFDM se extienden a lo largo de un tiempo  $T_{OFDM}$  s. Por ejemplo, el símbolo OFDM correspondiente a la transmisión de los valores  $a[k]$   $k = 1, \dots, N$  se transmite en el intervalo de tiempo  $-T_G \leq t \leq T_p = T_{OFDM} - T_G$ . El símbolo OFDM correspondiente a la

transmisión de los valores  $a[N + k]$   $k = 1, \dots, N$  se transmite en el intervalo de tiempo  $T_{OFDM} - T_G \leq t \leq 2T_{OFDM} - T_G$  y, en general, el símbolo OFDM correspondiente a la transmisión de los valores  $a[nN + k]$   $k = 1, \dots, N$  se transmite en el intervalo de tiempo  $nT_{OFDM} - T_G \leq t \leq (n + 1)T_{OFDM} - T_G$ . En la parte de recepción, cada uno de los símbolos recibidos se escucha únicamente durante  $T_s = T_{OFDM} - T_G$  segundos. De forma intuitiva, puede decirse que se desecha o se desaprovecha un intervalo de  $T_G$  segundos de cada símbolo transmitido con el objeto de eliminar los transitorios que el canal de comunicaciones ha provocado en un símbolo OFDM debido a la interferencia del símbolo OFDM anterior (hay que recordar que la respuesta impulsional es de duración aproximada al *delay spread*, y siempre inferior al tiempo de guarda  $T_G$ , ha provocado sobre los símbolos).

Si se cumple la condición dada en (22) en el dominio de la frecuencia, donde tenemos los símbolos QAM, se evita tanto la ISI como la ICI; sin embargo, cada uno de los símbolos complejos  $a[nN + k]$  transmitidos queda afectado por la función de transferencia del canal evaluada justamente a la frecuencia a la que se transmite el correspondiente símbolo:  $H_c(f_c + f_k)$ . Esta propiedad se representa de forma gráfica en la figura 15.

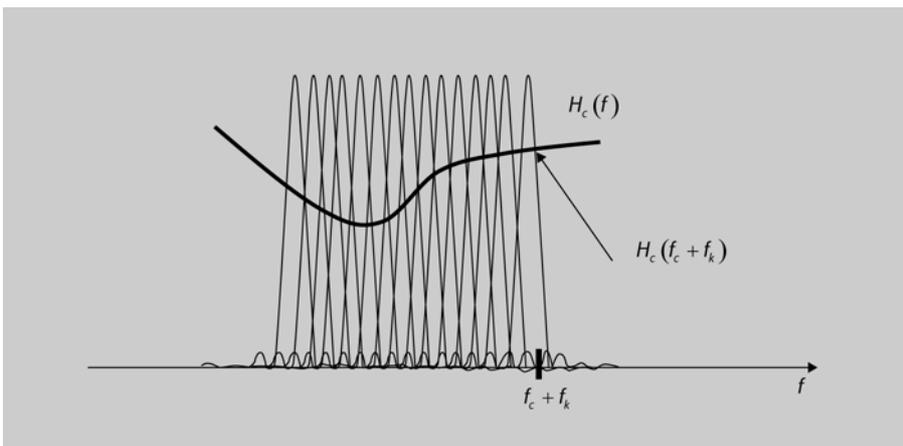


Figura 15. Efectos de la función de transferencia del canal sobre las portadoras transmitidas en OFDM.

La demostración rigurosa de la propiedad anterior requiere un análisis detallado de las señales transmitidas que vamos a exponer a continuación.

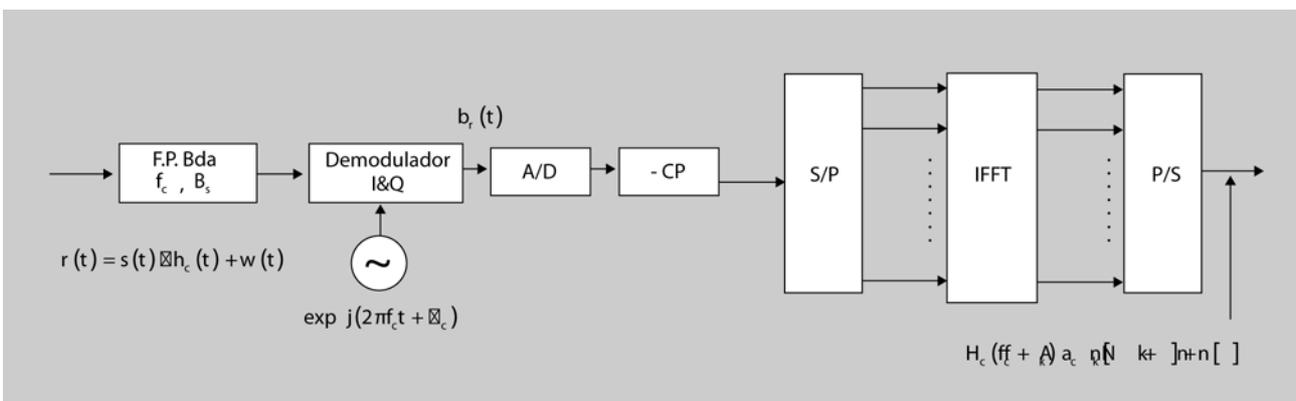


Figura 16. Diagrama de bloques funcional de un demodulador OFDM.

Para facilitar el análisis del procesado de la señal a través del esquema demodulador mostrado en la figura 16, se simplifican los bloques posteriores al demodulador I&Q, según el esquema mostrado en la figura 17. Es decir, las  $N$  salidas obtenidas mediante el algoritmo FFT, también se pueden obtener mediante un banco de  $N$  ramas, consistente cada una de ellas en un multiplicador por una función exponencial compleja y un integrador.

Se inicia en este punto la demostración de la expresión resultante a la salida del diagrama representado en la figura 17. Esta demostración se incluye para el estudiante que quiera profundizar con detalle la comprensión de las señales OFDM, sin embargo, su lectura se puede obviar en un primer estudio del módulo.

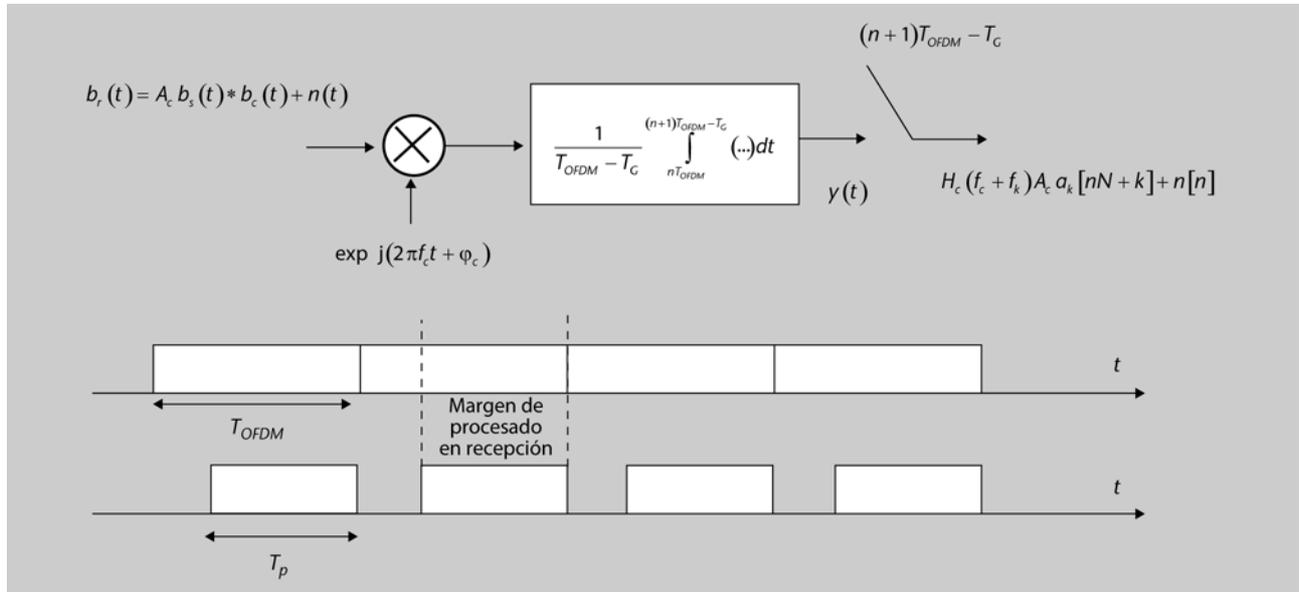


Figura 17. Diagrama de bloques funcional equivalente para el procesado paso bajo de los símbolos transportados sobre la frecuencia portadora  $f_c$ . El producto por la exponencial compleja de frecuencia  $-f_c$  junto con el integrador y posterior muestreo es equivalente a la salida  $k$  del bloque FFT. Representación de la secuencia de pulsos OFDM transmitidos y pulsos procesados en recepción.

En toda la demostración se analiza la señal útil en ausencia de ruido. Esto es equivalente a tener una señal de ruido nula,  $n(t) = 0$ , en la señal de entrada al demodulador.

Sobre la señal de entrada, la función  $b_c(t)$  representa el equivalente paso bajo de la respuesta impulsional del canal respecto a la frecuencia portadora de la modulación  $f_c$  y es, en general, compleja. Su transformada de Fourier coincide con la función de transferencia del canal de comunicaciones.

$$TF [b_c(f)] \Big|_{f=f_k} = B_c(f_k) = H_c(f_c + f_k) \cdot \tag{24}$$

Para simplificar la demostración, consideremos a continuación la señal de salida del integrador para el símbolo correspondiente a  $n = 0$ . Esta simplificación se puede realizar sin pérdida de generalidad. En la expresión (23) se tienen símbolos OFDM que van de  $n = -\infty$  a  $n = +\infty$ . Sin embargo, en el tiempo de integración correspondiente a  $0 \leq t \leq T_p = T_{OFDM} - T_G$ , en recepción se tiene únicamente la presencia del símbolo OFDM de la expresión correspondiente a  $n = 0$ . Se puede ver que si el símbolo anterior, correspondiente a  $n = -1$  se convoluciona con un canal de respuesta impulsional comprendida en el margen temporal de integración  $0 \leq t \leq T_G$ , el símbolo resultante para  $n = -1$ , ya no se halla presente en el margen de tiempos de integración  $0 \leq t \leq T_p = T_{OFDM} - T_G$ . El símbolo correspondiente a  $n = +1$  se inicia en

$t = T_p = T_{OFDM} - T_G$ , por lo que tampoco se halla presente en el margen temporal de integración  $0 \leq t \leq T_p = T_{OFDM} - T_G$ .

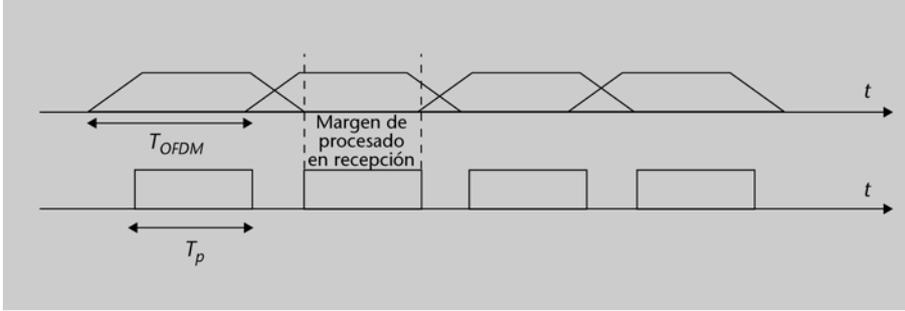


Figura 18. Representación de la secuencia de pulsos OFDM transmitidos y pulsos procesados en recepción en presencia de un canal de duración temporal menor o igual al tiempo de guarda.

### Convolución de dos funciones

Es importante recordar que al convolucionar dos funciones de respuesta impulsional de duración temporal finita, la función resultante es también de duración temporal finita y coincidente con la suma de duraciones de las dos funciones que se convolucionan. En el caso aquí tratado, si la respuesta impulsional del canal es, en el peor de los casos, de duración  $T_G$  y se convoluciona con cada uno de los símbolos de duración  $T_{OFDM}$ , el símbolo resultante a la salida del canal es de duración temporal  $T_{OFDM} + T_G$ . Los símbolos resultantes se solapan entre sí en márgenes de tiempo igual a  $T_G$ , pero entre símbolo y símbolo recibido se tiene un margen de tiempo de duración  $T_{OFDM} - T_G = T_p$ , sin solapamiento entre símbolos consecutivos. Este margen de tiempo es precisamente el que se procesa mediante el integrador de la figura 17, tal como se muestra de forma esquematizada en la figura 18 y se denominan *margen de procesado en recepción*.

Incorporando la simplificación dada al analizar la señal resultante para  $n = 0$ , se tiene que el equivalente paso bajo complejo presente a la entrada del esquema de la figura 17 se puede expresar como:

$$b_r(t) = A_c \sum_{k=1}^N a[k] e^{j2\pi f_k t} \Pi\left(\frac{t + T_G - \frac{T_{OFDM}}{2}}{T_{OFDM}}\right) * b_c(t) = A_c \sum_{k=1}^N a[k] \int_0^{T_G} e^{j2\pi f_k(t-\lambda)} b_c(\lambda) d\lambda \quad (25)$$

$$0 \leq t \leq T_{OFDM} - T_G = T_p$$

Los límites de integración se imponen por la condición asumida para la duración del equivalente paso bajo del canal  $b_c(t)$ . El margen temporal de validez de la expresión (25) se facilita en la segunda línea de la expresión y se obtiene al incluir el prefijo cíclico. A partir de (25) se obtiene la expresión (26), que supone la expresión básica para demostrar posteriormente la ausencia de ICI entre las diferentes frecuencias portadoras.

$$b_r(t) = A_c \sum_{k=1}^N a[k] e^{j2\pi f_k t} B_c(f_k) = A_c \sum_{k=1}^N a[k] e^{j2\pi f_k t} H_c(f_c + f_k) \quad (26)$$

$$0 \leq t \leq T_{OFDM} - T_G = T_p$$

El equivalente paso bajo (35) a través del esquema demodulador representado en la figura 17, y con la condición de ortogonalidad analizada en la expresión (11) da lugar, a la salida del integrador, al correspondiente símbolo complejo transmitido por la portadora de frecuencia  $f_k$ .

$$y_k(T_p) = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} b_r(t) e^{-j2\pi f_k t} dt =$$

$$A_c \sum_{k'=1}^N a[k'] H_c(f_c + f_{k'}) \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} e^{j2\pi(f_{k'} - f_k)t} dt = A_c a[k] H_c(f_c + f_k) \quad (27)$$

La inclusión del prefijo cíclico en OFDM, de duración mayor o igual a la de la respuesta impulsional del canal, evita la ISI temporal entre símbolos OFDM y, además, preserva la ortogonalidad entre las diferentes frecuencias portadoras evitando también la ICI. En las condiciones dadas, el único efecto relevante sobre los símbolos consiste en que cada uno de éstos queda multiplicado por el valor de la función de transferencia del canal, precisamente a la frecuencia portadora a la que ha sido transmitido. Si en ningún sitio del prefijo cíclico se introdujera un tiempo de guarda basado en un silencio entre símbolos OFDM, se evitaría la ISI temporal entre símbolos OFDM, pero no la ICI entre portadoras.

### 3.2. Ecuación

La ecuación entendida como la compensación del efecto del canal la modulación OFDM es sencilla debido a la ausencia de ISI y de ICI. Se hace en el dominio de la frecuencia, es decir, una vez que la señal ha sido procesada mediante el algoritmo FFT y es paso previo a la detección de símbolos. Consiste en que cada una de las salidas de las diferentes portadoras se divide por la muestra de la función de transferencia del canal por la que ha sido afectada. Se retoma en este punto el análisis del procesado de las señales considerando la presencia de ruido. La operación de ecuación es directamente una división que se hace para toda la secuencia de símbolos OFDM, es decir, para todo valor de la variable  $n$  y para cada una de las frecuencias portadoras, es decir, para todo valor de la variable  $k$ .

$$z[nN + k] = \frac{y_k(nT_{OFDM} + T_p)}{H_c(f_c + f_k)} = A_c a[nN + k] + n_k[n]$$

$$-\infty \leq n \leq +\infty; \quad 1 \leq k \leq N \quad (28)$$

Todas las señales que intervienen en (28) son complejas, de parte real y parte imaginaria en general no nulas. La muestra de ruido queda afectada en esta operación por la función de transferencia del canal correspondiente, por lo que, para las diferentes portadoras, las componentes de ruido modeladas como variables aleatorias gaussianas de media nula presentan diferentes varianzas o dispersiones debido a la ecuación, que consiste en una división o normalización distinta para cada frecuencia portadora.

#### Nota

Observad que, a pesar de que se habla de *ecuación*, técnicamente es un proceso de compensación de un escalar complejo en cada portadora, y por lo tanto, es mucho más sencillo el proceso de ecuación en el caso de una portadora única (SC), entendido como la compensación de la ISI, que técnicamente es mucho más complejo de realizar.

A partir de este punto, se procede a la detección aislada de cada uno de los símbolos de las diferentes portadoras. Como ya hemos comentado en la introducción, aunque en todo momento se está hablando de *modulaciones QAM*, en las portadoras pueden introducirse símbolos correspondientes a cualquier modulación lineal, incluyendo la M-PSK.

## 4. Probabilidad de error en condiciones ideales

En este apartado se aborda el cálculo de la probabilidad de error para modulaciones OFDM en condiciones ideales. Esto significa que se asumen las siguientes características para el sistema:

- La respuesta impulsional del canal es invariante con el tiempo.
- El canal es selectivo en frecuencias, pero la función de transferencia en el ancho de banda de transmisión de la señal se conoce perfectamente en el receptor, por lo que es factible realizar una ecualización ideal.
- No se producen errores de sincronismo de frecuencia ni de fase de la señal portadora ni tampoco error en el tiempo de muestreo de la señal.
- La amplificación de la señal, cuando se requiere, se realiza siempre mediante amplificadores lineales, por lo que no se produce distorsión debido a posibles no linealidades.

La ecualización ideal se describe en el apartado 3.2. "Ecualización".

En las condiciones dadas, y como una primera aproximación al análisis de la probabilidad de error para modulaciones OFDM, se calcula la probabilidad por separado para cada una de las portadoras utilizadas. Asumiendo que en cada una de las frecuencias portadoras se transmite una modulación paso banda digital de tipo QAM, la expresión de la probabilidad de error respecto al cociente de energías  $\frac{E_b}{N_0}$  coincide con la obtenida para modulaciones QAM\* pero con dos aspectos diferenciados para OFDM:

\* Analizadas en la asignatura de *Sistemas de comunicaciones I*.

1) Debido a que la señal en una portadora está multiplicada por la función de transferencia del canal en aquella portadora, un factor de la probabilidad de error afecta con ponderaciones distintas a las diferentes portadoras que intervienen en la modulación.

2) La transmisión de señal durante el prefijo cíclico entre símbolo y símbolo OFDM disminuye la eficiencia de la modulación. Debido a la transformación del prefijo cíclico, el transmisor transmite símbolos de duración  $T_{OFDM} = T_G + T_p$ , mientras que el receptor procesa únicamente cada símbolo recibido durante  $T_p$  s. La porción de señal transmitida en el tiempo de guarda y no aprovechada en recepción, repercute en que se debe enviar más energía media transmitida por bit para conservar la probabilidad de error respecto a un enlace convencional.

Se supone a continuación que los símbolos complejos  $\alpha[nN + k]$  corresponden a una modulación de tipo QPSK.

$$\alpha[nN + k] = \pm \frac{A}{2} + j\left(\pm \frac{A}{2}\right). \quad (29)$$

En una transmisión de tipo QAM-SC también basada en QPSK la probabilidad de error presenta la siguiente expresión:

$$P_{b(\text{QPSK-SC})} = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right). \quad (30)$$

Al transmitir símbolos de tipo QPSK, la expresión obtenida para la probabilidad de error de los bits transmitidos sobre la portadora  $k$ -ésima, a partir de la señal detectada (28), es igual a:

$$P_{b(\text{QPSK-OFDM})} = Q\left(\sqrt{\frac{T_p}{T_p+T_G} |H_c(f_c + f_k)|^2 2\frac{E_b}{N_0}}\right). \quad (31)$$

Para simplificar la notación a partir de este punto se introduce la siguiente nomenclatura para la función de transferencia del canal y para la probabilidad de error de los bits transmitidos sobre la portadora de frecuencia  $f_k$ :

- Amplificación producida por el canal sobre la portadora  $k$ :  $\gamma_k = |H_c(f_c + f_k)|$
- Probabilidad de error sobre la portadora  $k$ :  $P_{bk} = Q\left(\sqrt{\frac{T_p}{T_p+T_G} \gamma_k^2 2\frac{E_b}{N_0}}\right). \quad (32)$

Como conclusión relevante, podemos destacar que el factor dependiente del canal de comunicaciones y diferenciado para cada portadora es una variable aleatoria  $\gamma_k = |H_c(f_c + f_k)|$ . Esta variable aleatoria se modela para las aplicaciones típicas de OFDM como una variable aleatoria de tipo Rayleigh, lo que significa que en el factor complejo  $H_c(f_c + f_k)$ , tanto la parte real como la parte imaginaria son variables aleatorias gaussianas de media nula. Ambas presentan idéntica varianza o dispersión, y son estadísticamente independientes entre sí. Si alguna de las dos variables gaussianas presentara media estadística no nula, la distribución obtenida para el valor absoluto  $\gamma_k$  resultaría de tipo Rice. Esta propiedad es debida a que todas las amplitudes de los rayos producidos en la respuesta impulsional, según se modela en la expresión siguiente, son también variables aleatorias gaussianas.

$$h_c(t) = \sum_{l=0}^L \alpha_l \delta(t - \tau_l) \quad \Rightarrow \quad r(t) = \sum_{l=0}^L \alpha_l s(t - \tau_l). \quad (33)$$

Análogamente, para modulaciones OFDM cuyas constelaciones de símbolo son de tipo QAM cuadradas de  $M$  símbolos o de tipo circular PSK de  $M$  símbolos, las probabilidades de error corresponden a variantes de las presentadas en la asignatura *Sistemas de comunicaciones I*, con portadora simple:

$$BER_{MQAM} = P_{bk} = \frac{4(\sqrt{M}-1)}{b\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{T_p}{T_p+T_G} \gamma_k^2 \frac{3b}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right). \quad (34)$$

$$BER_{PSK} = P_{bk} \approx \frac{2}{b} Q\left(\sqrt{\frac{T_p}{T_p+T_G} \gamma_k^2 2b \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \frac{E_b}{N_0}}\right). \quad (35)$$

Ver el anexo al final del módulo sobre las funciones de densidad de probabilidad de tipo Rice y Rayleigh.

En definitiva, la expresión de la probabilidad de error para una modulación OFDM en las condiciones dadas al principio de este apartado coincide con la expresión que se obtendría al utilizar la misma modulación con portadora simple, introduciendo los dos factores provocados por la utilización del prefijo cíclico y por la función de transferencia del canal.

La influencia del primero de los dos factores mencionados,  $\frac{T_p}{T_p+T_G}$ , se analiza en el siguiente ejemplo como pérdida de energía media transmitida por bit. La influencia del segundo de los dos factores es un problema mayor en OFDM y se comenta al final del presente apartado.

### Ejemplo 3. Degradación de la probabilidad de error provocada por la introducción del prefijo cíclico

Siguiendo el ejemplo 2 de modulación QAM-OFDM de velocidad de transmisión  $r = 1$  Msímbolos/s y de prefijo cíclico igual a un 25% del símbolo útil:  $T_G = \frac{T_p}{4} = \frac{T_{OFDM}}{5}$ , el correspondiente factor que interviene en la probabilidad de error es igual a:

$$\frac{T_p}{T_p+T_G} = \frac{4}{5} \quad (36)$$

$$10 \log_{10} \left( \frac{T_p}{T_p+T_G} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{4}{5} \right) = -0,97 \text{ dB}$$

Por tanto, para que no aumente la probabilidad de error en la transmisión de la secuencia de símbolos dada al ser transmitida en OFDM respecto a su transmisión en portadora simple, se requiere, en OFDM, aumentar la energía media por bit en 0,97 dB, lo que equivale a un 25% más de potencia en la señal transmitida.

El otro factor que interviene en la probabilidad de error es una variable aleatoria ( $\gamma_k$ ). De hecho afecta de tal modo, que la probabilidad de error resultante es también una variable aleatoria, pues depende del valor de la función de transferencia del canal a una frecuencia dada y para un tiempo dado.

En la práctica se realiza un análisis de la probabilidad de error en promedio integrando, por ejemplo, la expresión obtenida para QPSK en (32) con la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $\gamma_k$ . En este análisis, dado que la función de densidad de probabilidad de la variable es de tipo Rice o de tipo Rayleigh, pero no depende de la portadora  $k$ , se puede prescindir del subíndice que indica la frecuencia.

$$P_b = E[P_{bk}] = \int_0^{+\infty} f_\gamma(\gamma) Q \left( \sqrt{\frac{T_p}{T_p+T_G} \gamma^2 2 \frac{E_b}{N_0}} \right) d\gamma. \quad (37)$$

La resolución exacta de la integral anterior requiere del uso de métodos numéricos, por lo que en la práctica se recurre a tablas o a programas de simulación numérica para su evaluación exacta.

Adicionalmente, para la integral anterior se aplica la siguiente cota superior llamada *cota de Chernoff*, válida para todo valor de  $x^*$ .

\* Tal como se demuestra en el anexo de este módulo.

$$Q(\sqrt{2x}) \leq \frac{1}{2} e^{-x^2} \Rightarrow P_{b(L=1)} \leq \frac{1}{2} e^{-\gamma^2 \frac{T_p}{T_p+T_G} \frac{E_b}{N_0}}, \quad (38)$$

y como  $\gamma$  es una variable aleatoria de tipo Rayleigh, utilizando la función de densidad de probabilidad del anexo, se puede calcular el promedio de la cota superior para la probabilidad de error dada en (37). Suponiendo que  $\gamma$  es una variable aleatoria de tipo Rayleigh de parámetro igual a 1, es fácil comprobar que, en promedio, la cota superior en (37) resulta:

$$\begin{aligned}
 P_{b(L=1)} &\leq E \left[ \frac{1}{2} e^{-\gamma^2 \frac{T_p}{T_p + T_G} \frac{E_b}{N_0}} \right] = \int_0^{+\infty} f_\gamma(\gamma) \frac{1}{2} e^{-\gamma^2 \frac{T_p}{T_p + T_G} \frac{E_b}{N_0}} d\gamma = \\
 &= \int_0^{+\infty} \gamma \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma^2\right) \frac{1}{2} e^{-\gamma^2 \frac{T_p}{T_p + T_G} \frac{E_b}{N_0}} d\gamma = \frac{1}{1 + \frac{T_p}{T_p + T_G} \frac{E_b}{N_0}}
 \end{aligned} \tag{39}$$

En resumen:

- 1) En OFDM debido al carácter aleatorio de la respuesta impulsional de los canales de comunicaciones y, por tanto, de la función de transferencia, la probabilidad de error resulta ser una variable aleatoria.
- 2) Se estudia la media estadística de una cota superior para la probabilidad de error, es decir, la cota superior promediada para la probabilidad de error.
- 3) La probabilidad de error promedio no depende de la frecuencia portadora en cuestión a la que se transmite cada uno de los símbolos.

Otra importante conclusión que se desprende del análisis realizado en este apartado es que, para canales con desvanecimientos selectivos en frecuencia, algunos bits se detectarán con peores condiciones (más probabilidades de error) que otros. En comunicaciones, cuando se produce este fenómeno se utilizan estrategias para evitar pérdidas significativas de bits. Ya se ha estudiado en módulos anteriores la codificación de canal, que representa la mejor de las estrategias para este efecto.

## 5. Estrategias adicionales en OFDM

Para una perfecta demodulación de las señales OFDM, según se ha analizado en el apartado 4, en el receptor se requiere conocer la función de transferencia del canal de comunicaciones. En un entorno realista (canal con desvanecimientos selectivos en frecuencia), la función de transferencia del canal varía con el tiempo a una velocidad que depende del tiempo de coherencia del canal de comunicaciones. La estructura de la señal OFDM es bidimensional, ya que se reparten símbolos en tiempo y en frecuencia según se muestra en la figura 3. Aprovechando la estructura bidimensional de la señal OFDM, se transmiten lo que se denominan los símbolos piloto repartidos en frecuencia y en tiempo para que, a partir de estos símbolos, se pueda realizar en recepción una estimación de la función de transferencia del canal.

### 5.1. Frecuencias piloto

A continuación presentaremos el concepto de símbolo piloto y el objetivo de su transmisión.

Se denomina símbolo piloto a un conjunto de símbolos que se estandarizan para transmitirse a unas determinadas frecuencias portadoras y con una determinada periodicidad temporal. Los símbolos piloto se eligen en general a partir de una constelación relativamente sencilla, de pocos niveles, como por ejemplo BPSK o QPSK. Los símbolos piloto, que obviamente son conocidos en recepción, se utilizan para estimar la función de transferencia del canal y también para facilitar el sincronismo de la frecuencia portadora de las señales OFDM. De algún modo equivale a la dedicación de frecuencias portadoras a la transmisión de información, necesaria para una correcta demodulación, que restan velocidad a la transmisión de los símbolos generados por la fuente de información.

La función de transferencia del canal se puede medir a las frecuencias y tiempos para los que se transmite un símbolo piloto. La medida de la función de transferencia del canal consiste en una normalización o comparación de la muestra recibida respecto al símbolo esperado. Si para un tiempo dado ( $nT_{OFDM}$ ) y para una portadora dada ( $f_k$ ) se transmite un símbolo piloto, por ejemplo  $\alpha = +1$ , la correspondiente muestra en el demodulador es igual a:

$$y_k(nT_{OFDM} + T_p) = \alpha H_c(f_c + f_k) A_c + n_k(nT_{OFDM} + T_p), \quad (40)$$

donde el último sumando representa el término de ruido.

La medida de la función de transferencia se realiza a partir del siguiente cociente o normalización:

$$\widehat{H}_c(f_c + f_k) = \frac{y_k(nT_{OFDM} + T_p)}{\alpha}. \quad (41)$$

Debido a la presencia de la muestra de ruido,  $n_k(nT_{OFDM} + T_p)$ , la medida anterior es una estimación y no coincide de forma exacta con la función de transferencia. Sin embargo, en general resulta una estimación suficiente para la correcta demodulación de los símbolos.

Eligiendo la parrilla de frecuencias piloto suficientemente densa en frecuencias se podrá extrapolar la respuesta del canal de las frecuencias que no transportan símbolos piloto a partir de las frecuencias que sí que los transportan. En tiempo, los símbolos piloto deben aparecer de forma suficientemente densa como para seguir las fluctuaciones de variación temporal del canal. Por el teorema del muestreo se recomienda como mínimo que se produzcan dos símbolos piloto dentro del tiempo de coherencia.

Al utilizar símbolos piloto sin transporte de bits generados por la fuente de información, se pierde eficiencia o capacidad de transmisión debido a que disminuye la velocidad de transmisión de símbolos útiles respecto al ancho de banda.

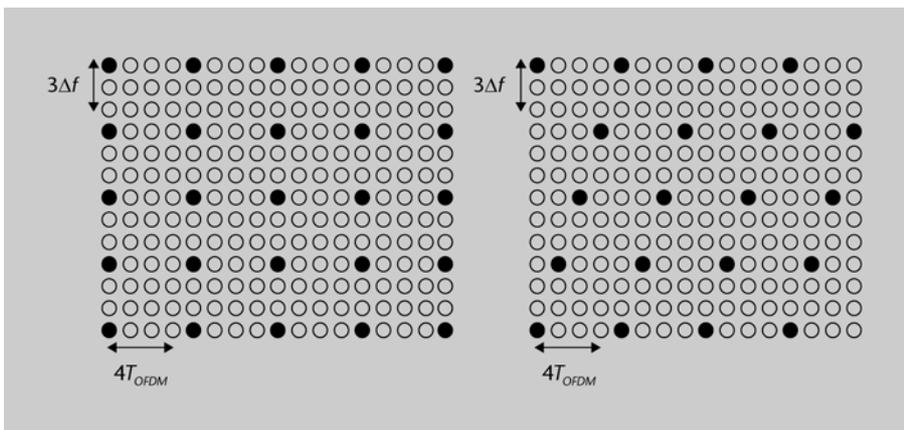


Figura 19. Ejemplos de parrilla de símbolos piloto para OFDM. Los puntos negros corresponden a la transmisión de los símbolos piloto. La función de transferencia del canal se muestrea en una cuarta parte de las frecuencias transmitidas con periodicidad igual a cada cuatro símbolos temporales OFDM. En la estrategia mostrada en la figura de la derecha, los tiempos de muestreo no coinciden entre las diferentes frecuencias muestreadas. Esta es una estrategia que se utiliza en el estándar DVB-T.

## 5.2. Interleaving y diversidad de canal

La codificación de canal en OFDM supone una estrategia muy adecuada para introducir diversidad en la transmisión, al igual que en otro tipo de aplicaciones. En OFDM se realiza la codificación de canal tanto para posibilitar la diversidad temporal, como la diversidad frecuencial.

Se produce diversidad en la transmisión cuando, para un determinado símbolo o para un determinado bit, se transmiten y/o reciben diferentes repeticiones o réplicas desde el transmisor al receptor. La diversidad se puede producir mediante diferentes estrategias: diversidad temporal, diversidad frecuencial, varias antenas en transmisión y/o en recepción. Cuando se produce diversidad, interesa que las diferentes réplicas que recibe el receptor de un determinado símbolo se encuentren afectadas por desvanecimientos estadísticamente independientes entre sí, con el objetivo de evitar que todas las réplicas sufran un desvanecimiento profundo simultáneamente.

Para que la ganancia por diversidad en OFDM sea efectiva, se introduce, como paso previo a la codificación de símbolos QAM, una etapa de codificación de canal y, por consiguiente, una etapa de decodificación de canal como paso posterior a la decodificación de símbolos QAM. De hecho, esta técnica resulta la más sencilla y básica en un esquema de modulación basado en OFDM. Como puede verse en el último apartado dedicado en parte al sistema de radiodifusión de vídeo digital, en el estándar DVB se utilizan dos sistemas de codificación de canal, uno de ellos se aplica directamente sobre la secuencia de bits y el otro, sobre la secuencia de símbolos.

En cualquier caso, tras la etapa de codificación de canal, todos los bits procedentes de una misma palabra código (códigos de bloque) o muy próximos entre sí (códigos convolucionales) se separan físicamente, es decir, se transmiten en tiempos y/o frecuencias separadas entre sí. De esta manera, se pretende independizar al máximo la probabilidad de que más de uno de los bits originariamente próximos sufra una gran atenuación o desvanecimiento profundo durante la transmisión. Si la separación es temporal, interesa que dos bits procedentes de la misma palabra código se hallen separados durante la transmisión, al menos por un tiempo mayor al tiempo de coherencia del canal. Si la separación es frecuencial, interesa que dos bits procedentes de la misma palabra código se hallen separados al menos por un ancho mayor al ancho de banda de coherencia del canal, que definido como el inverso de la dispersión del retardo (*delay spread*), mide intuitivamente la máxima distancia entre dos frecuencias que presentan atenuaciones idénticas. La separación de los bits en OFDM se realiza siempre de forma sistemática, mediante técnicas denominadas de entrelazado o *interleaving IL*. Al realizar IL en el modulador, se requiere desentrelazar, es decir, realizar la operación de desentrelazado (DeIL) en el demodulador como paso previo al decodificador de canal.

Las técnicas de IL, tal como se presenta en el módulo de codificación de canal, se pueden realizar mediante dos estrategias diferenciadas: IL de bloque e IL convolucional. A continuación, veamos dos ejemplos de estándares con sus correspondientes entrelazadores.

**Ejemplo 4. IL de bloque**

En el estándar 802.11a, g de WLAN, entre el codificador de canal convolucional y el mapeado de los símbolos QAM se realiza un IL de bloque de  $K = 12$  filas y  $B = 16$  columnas ( $N = 192$ ). En la figura 20 se muestra un diagrama de bloques simplificado del modulador con la inclusión del bloque de IL.

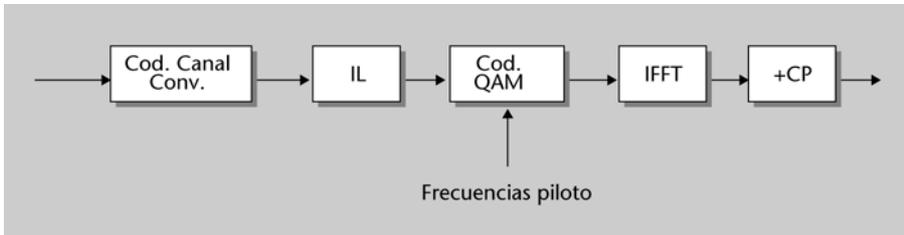


Figura 20. Modulador OFDM con inclusión de IL (Wifi 802.11 a, g).

Para la operación de IL la secuencia de bits de salida del codificador de canal se procesa en tramas de 192 bits cada una. A partir de cada trama se forma la matriz de entrelazado y, posteriormente, se realiza la lectura de los bits.

$$(b[0] \ b[1] \ \dots \ b[191]) \Rightarrow \begin{pmatrix} b[0] & b[1] & \dots & b[15] \\ b[16] & b[17] & \dots & b[31] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b[176] & b[177] & \dots & b[191] \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b[0] \\ b[16] \\ \vdots \\ b[1] \\ b[17] \\ \vdots \\ b[179] \\ b[191] \end{pmatrix} \quad (42)$$

En el demodulador, la operación de desentrelazado (DeIL) es análoga a la descrita en IL, pero la matriz de desentrelazado ha de ser de 16 filas y 12 columnas.

Mediante esta estrategia se asegura que los bits adyacentes son mapeados a símbolos que corresponden a frecuencias portadoras no adyacentes. De hecho, la separación física que resulta a nivel de portadoras depende del tipo de modulación. Si, por ejemplo, la modulación es 16QAM, los bits consecutivos se transmiten separados por 4 portadoras.

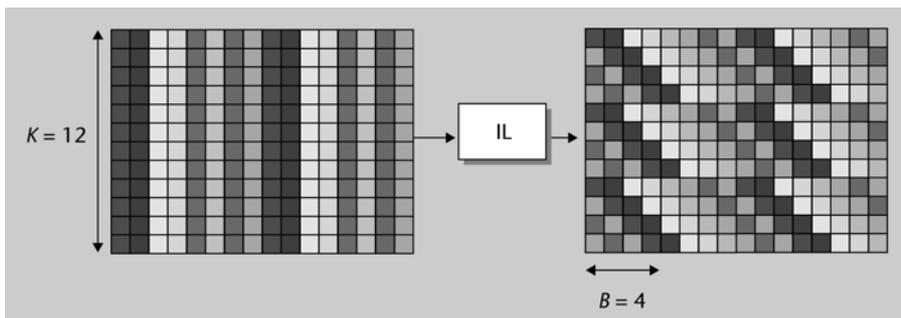


Figura 21. Acción de un IL convolucional. Se diferencian las tramas de  $K = 12$  utilizando un color distinto para cada una de las tramas. A la salida del bloque de entrelazado se leen los bits según se dispone en la figura de la derecha leyéndose por columnas.

**Ejemplo 5. IL convolucional**

El estándar DVB basado en OFDM se presenta de forma detallada en el último apartado, donde se puede ver que lleva dos codificadores de canal. En el modulador, el primero de los codificadores de canal es un codificador de canal de bloque y procesa los bits agrupados en bytes, es decir, en grupos de 8 en 8 bits. El IL que se utiliza a la salida de este primer codificador convolucional opera directamente sobre los bytes. Sigue una estructura como la representada en la figura 21 con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} B &= 12 \text{ bytes} = 96 \text{ bits} \\ N &= 204 \text{ bytes} = 1.632 \text{ bits} \end{aligned} \quad (43)$$

En este ejemplo,  $N = 204$  bytes coincide con la longitud de la palabra código del codificador de bloque utilizado.

Gracias a la técnica de IL, todos los bits procedentes de una misma palabra código del codificador de canal se transmiten por portadoras que resultan estadísticamente independientes entre sí, situación en la que se obtiene la máxima ganancia por diversidad.

Al utilizar un código de canal de bloque para aprovechar al máximo la ganancia por diversidad, se requiere que el número de frecuencias portadoras estadísticamente independientes por las que se transmiten los bits de una misma palabra código sea como mínimo igual a la distancia de Hamming. Esta propiedad es más difícil de establecer al utilizar códigos convolucionales, sin embargo, intuitivamente es de esperar que el número de portadoras independientes a utilizar supere significativamente la distancia libre del código. Si se cumplen las condiciones anteriores, puede afirmarse que en canales con desvanecimientos selectivos en frecuencia, con modulaciones OFDM, es posible conseguir una probabilidad de error independiente de los desvanecimientos que presenta el canal. Como contrapartida, debe aumentarse la energía media transmitida por bit según dos factores dados:

1) Uno de ellos corresponde a la relación entre el tiempo de símbolo útil y el tiempo de símbolo aumentado con el tiempo de guarda:  $\frac{T_p}{T_p+T_G}$ .

2) El segundo factor es inherente a la codificación de canal. Tomando como ejemplo un codificador de bloque de distancia de Hamming  $d_H$  y tasa de codificación  $R_c$ , el factor debido a la codificación de canal equivale a  $d_H R_c$ .

## 6. Espectro de OFDM

En este apartado se describe un aspecto importante de la implementación OFDM, que se encuentra relacionado con la ocupación espectral de la señal, tanto en la banda asignada a su transmisión como en las llamadas radiaciones fuera de banda.

### 6.1. Efectos producidos en el espectro al introducir prefijo cíclico

Idealmente, según la descripción realizada de las señales OFDM, alrededor de cada una de las  $N$  frecuencias portadoras se transmite una modulación QAM, cuyos pulsos base son pulsos rectangulares de duración igual al tiempo de símbolo OFDM. En el dominio de la frecuencia, cada una de las modulaciones QAM, correspondientes a una frecuencia portadora, da lugar a una función de tipo “sinc”. Sea  $TF$  la transformada de Fourier de una señal temporal:

$$TF\left(\Pi\left(\frac{t}{T_{OFDM}}\right)\right) = \frac{\text{sinc}(\pi f T_{OFDM})}{\pi f} = T_{OFDM} \text{sinc}(f T_{OFDM}). \quad (44)$$

En la densidad espectral de la señal modulada total, la modulación QAM que se transmite a la frecuencia portadora  $f_c + f_k$  contribuye al espectro total mediante un factor que es proporcional a:

$$\text{sinc}^2\left((f - (f_c + f_k))T_{OFDM}\right). \quad (45)$$

Las diferentes frecuencias portadoras están separadas entre sí  $\Delta f = \frac{1}{T_p} = \frac{1}{T_{OFDM} - T_G}$ . El hecho de haber introducido el tiempo de guarda repercute en que las diferentes funciones de tipo “sinc” sobre la señal transmitida no presentan los lóbulos laterales sintonizados en frecuencia. Al aumentar el tiempo de símbolo OFDM ( $T_{OFDM}$ ) respecto al tiempo útil de transmisión de símbolo ( $T_p$ ), las correspondientes funciones “sinc” en el dominio de la frecuencia mantienen la separación frecuencial  $\Delta f$ , mientras que disminuyen el ancho tanto del lóbulo principal, como el de los lóbulos laterales. En la figura 22 se muestra esquemáticamente el efecto que se produce sobre el espectro de la señal modulada con la inclusión del tiempo de guarda.

Sobre el espectro resultante de la modulación OFDM, cuando se calcula para todas las componentes espectrales moduladas por símbolos QAM, la introducción del tiempo de guarda provoca dos efectos:

- Aparición de un rizado en la banda de ocupación de la señal OFDM.
- Disminución del nivel de los lóbulos laterales.

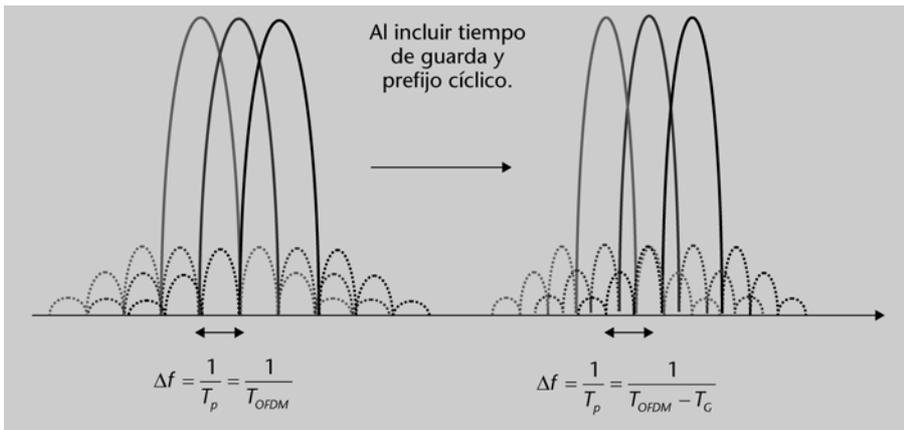


Figura 22. En la gráfica de la izquierda se muestran las funciones "sinc" correspondientes a tres frecuencias portadoras consecutivas en el caso en que no se utiliza tiempo de guarda ( $T_p = T_{OFDM}$ ). En este caso, los lóbulos laterales de las diferentes funciones se encuentran sintonizados entre sí, es decir, tienen los ceros frecuenciales coincidentes. En la gráfica de la derecha se muestran las funciones "sinc" correspondientes a tres frecuencias portadoras consecutivas en el caso en que sí se utiliza tiempo de guarda ( $T_p < T_{OFDM}$ ). En este caso, los lóbulos laterales de las diferentes "sinc" no se encuentran sintonizados entre sí, es decir, no tienen los ceros frecuenciales coincidentes.

Como conclusión, en el efecto anteriormente descrito se tiene que la introducción del prefijo cíclico en el tiempo de guarda entre cada dos símbolos consecutivos OFDM, siendo ésta una característica introducida como estrategia para combatir la ISI que puede provocar un canal de respuesta impulsional no ideal, genera una propiedad muy favorable en el dominio de la frecuencia: la disminución del nivel de los lóbulos laterales respecto al principal.

## 6.2. Supresión de portadoras

A continuación se comentan dos estrategias más, que han sido específicamente diseñadas en OFDM con el objetivo tanto de moderar las radiaciones fuera de banda, como de mejorar el espectro dentro de la banda asignada:

- No transmisión de señal a la frecuencia central.
- No transmisión de señal a las frecuencias laterales.

En el apartado 2.2 se ha presentado la implementación práctica del modulador basada en el algoritmo IFFT. Consecuentemente, el demodulador se implementa basado en el algoritmo FFT. En el diseño de OFDM se tiene un ancho de banda asignado a cada modulación al que se denomina en este apartado ancho de banda de la modulación OFDM,  $B_s$ .

En la expresión (21) se muestra cómo el ancho de banda coincide con  $N$  veces el inverso del tiempo  $T_p$ , asignado a la parte útil de la transmisión de un símbolo OFDM. Es importante recordar que  $T_p = T_{OFDM} - T_G$ . De hecho, el ancho de banda se divide en  $N$  porciones de ancho  $B_p$  asignadas, cada una de ellas, a una portadora:

$$B_s = \frac{N}{T_p} = NB_p. \quad (46)$$

$N$  es una potencia de 2, propiedad que resulta forzada por la utilización de los algoritmos IFFT y FFT. En la práctica, las  $N$  frecuencias asignadas a la señal equivalente paso bajo se eligen según los siguientes valores:

$$f_k = -\frac{M}{T_p}, -\frac{M-1}{T_p}, \dots, -\frac{1}{T_p}, +\frac{1}{T_p}, \dots, +\frac{M-1}{T_p}, +\frac{M}{T_p}, \quad (47)$$

o equivalentemente:

$$f_k = -MB_p, -(M-1)B_p, \dots, -B_p, +B_p, \dots, +(M-1)B_p, +MB_p, \quad (48)$$

donde  $M$  es un entero tal que  $M < \frac{N}{2}$ . Por ejemplo, en el estándar Wifi 802.11a, g se utilizan los algoritmos IFFT y FFT de  $N = 64$  portadoras. Las frecuencias asignadas a la transmisión de señal sobre el equivalente paso bajo son  $M = 26$  por cada banda, lo que significa que en el espectro se ocupan únicamente  $2M = 52$  de las 64 posibles. Además, en la transmisión de datos se dedican cuatro de las anteriores portadoras como frecuencias piloto, por lo que únicamente 48 frecuencias transportan datos. En la figura 23 se muestra la ocupación total para este estándar.

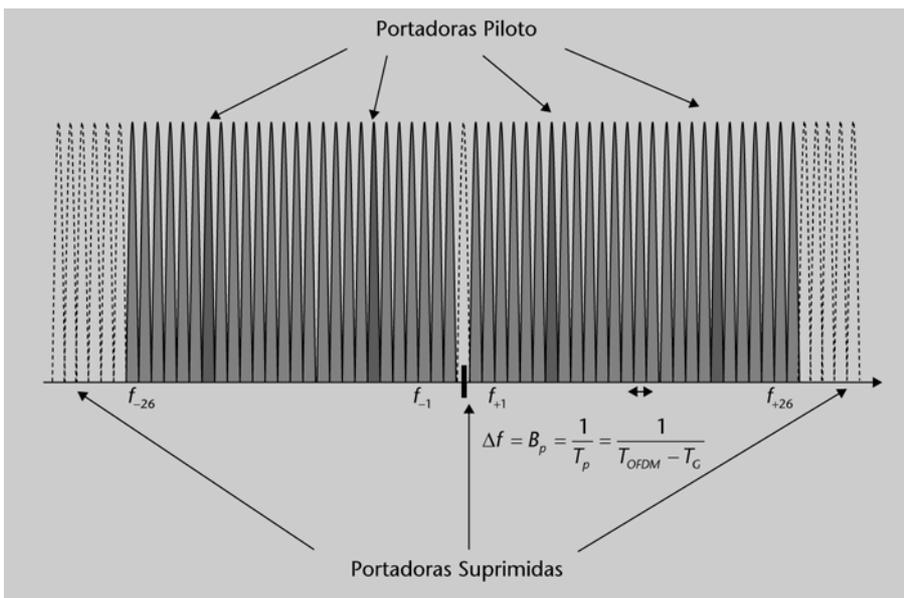


Figura 23. Ejemplo de adjudicación de frecuencias piloto y frecuencias suprimidas en el estándar Wifi 802.11a, g.

Operativamente, para conseguir la adjudicación anterior, dentro del diagrama de bloques funcional correspondiente, representado en la figura 20, las tramas de datos que se presentan a la entrada del bloque IFFT deben contener 48 símbolos de datos y 4 símbolos piloto, que se colocan según las posiciones indicadas en la figura 23. El resto de posiciones ( $12 = 64 - 52$ ), que corresponden a las portadoras suprimidas, se fuerzan a contener valores iguales a cero a la entrada del bloque IFFT.

Las ventajas obtenidas mediante las portadoras suprimidas son:

- Con la eliminación de las portadoras de los extremos se consigue un ancho espectral más reducido, cuya principal ventaja es favorecer que las radiaciones fuera de banda se hallen relativamente acotadas.

- Con la eliminación de las portadoras de los extremos, también se consigue el efecto de sobremuestreo sobre las señales digitales que mejora el efecto de *aliasing* o solapamiento frecuencial inherente a toda conversión D/A y a toda conversión A/D.
- Con la eliminación de la frecuencia central, la componente continua de todas las señales paso bajo es siempre nula, propiedad que resulta muy conveniente siempre que sea probable encontrarse con problemas de componente continua en los equipos.

### Ejemplo 8. Velocidad de Transmisión de datos en Wifi 802.11a, g.

Para el estándar considerado, se utilizan datos que pueden estar modulados en BPSK, en QPSK, en 16QAM o en 64QAM. El tiempo total del símbolo OFDM es de  $4 \mu\text{s}$  y un 20% del mismo se dedica al tiempo de guarda para la transmisión del CP. Considerando las 12 portadoras suprimidas y las cuatro frecuencias piloto de la figura 24, podemos calcular la velocidad de bit real o útil para cada una de las cuatro modulaciones consideradas. Para ello, como es sabido, es una estrategia que requiere una disminución de la velocidad de bit útil.

De los  $N = 64$  símbolos que potencialmente podrían ser transmitidos en el tiempo dedicado al símbolo OFDM, se transmiten únicamente  $K = 52$  símbolos no nulos. Cuatro de los anteriores corresponden a símbolos piloto y no transportan datos, por lo que únicamente resultan  $K' = 48$  símbolos complejos correspondientes a datos. Considerando por tanto que, en el tiempo total dedicado a la transmisión de cada símbolo OFDM, se transportan únicamente  $K' = 48$  símbolos, la velocidad de símbolo resultante es:

$$r = \frac{K'}{T_{\text{OFDM}}} = \frac{48}{4\mu\text{s}} = 12 \text{ Msímbolos/s.}$$

Con modulación BPSK la velocidad binaria resulta:

$$r_b = r = 12 \text{ Mbits/s.}$$

Con modulación QPSK la velocidad binaria resulta:

$$r_b = 2r = 24 \text{ Mbits/s.}$$

Con modulación 16QAM la velocidad binaria resulta:

$$r_b = 4r = 48 \text{ Mbits/s.}$$

Con modulación 64QAM la velocidad binaria resulta:

$$r_b = 8r = 96 \text{ Mbits/s.}$$

El efecto provocado sobre el espectro total OFDM es el promedio de todas las funciones de tipo “sinc” no suprimidas en el dominio de la frecuencia. Cada una de las funciones soporta la modulación adjudicada de tipo QAM. Un ejemplo de espectro obtenido por simulación para el estándar comentado se muestra en la figura 24.

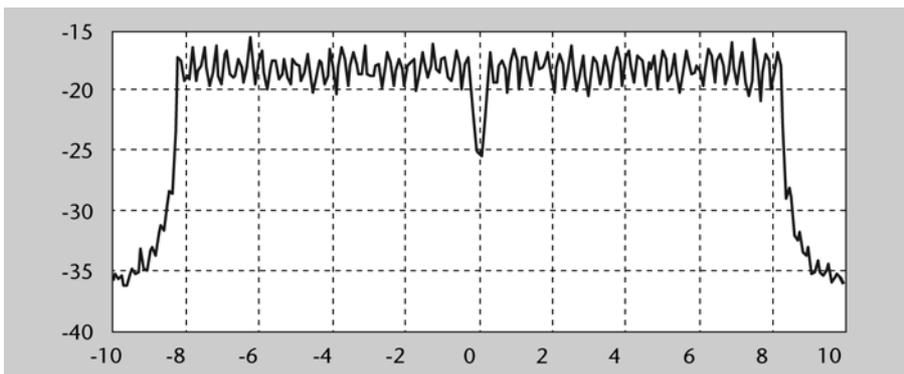


Figura 24. Espectro (dB) obtenido por simulación para una señal OFDM según el estándar Wifi 802.11a, g respecto a la frecuencia (MHz).

### 6.3. Conformación de pulso

Como técnica adicional para mantener el espectro acotado se utiliza la denominada conformación de pulsos, que consiste en solapar temporalmente los símbolos OFDM consecutivos durante un porcentaje del tiempo de guarda al que se denomina en este apartado  $T_\delta$ .

Se ha visto que con el tiempo de guarda cada uno de los símbolos OFDM se extiende cíclicamente hasta ocupar el tiempo total asignado. Mediante la conformación de pulso, la extensión cíclica del símbolo se produce por ambos extremos: inicio (CP) y fin del símbolo, y en ambos extremos se suaviza sensiblemente el pulso durante un tiempo igual  $T_\delta$ .

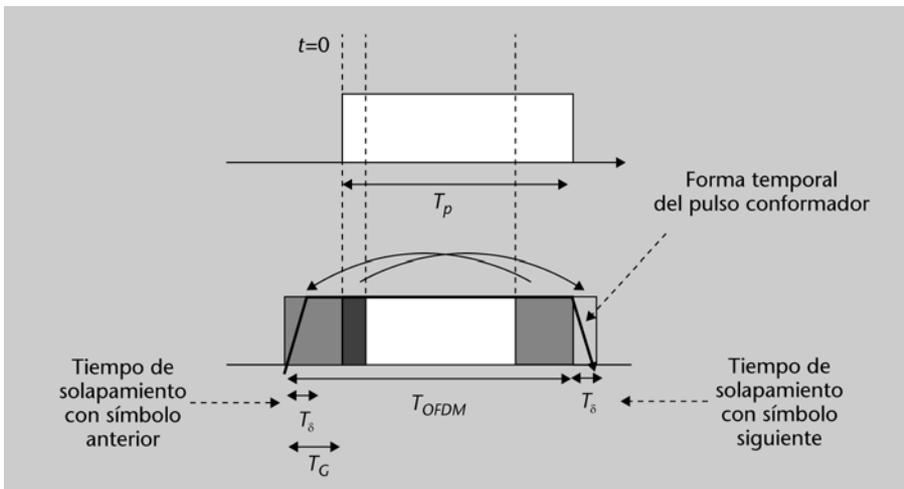


Figura 25. Extensión de símbolo OFDM para la inclusión del prefijo cíclico y del tiempo de solapamiento entre símbolos mediante la inclusión del pulso conformador.

El tiempo de solapamiento  $T_\delta$  siempre se elige como un porcentaje del tiempo de guarda y los valores típicos para este porcentaje son:

$$\delta = \frac{T_\delta}{T_G} = 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}. \quad (49)$$

La ventaja obtenida radica en la mejora significativa de las radiaciones fuera de banda con el incremento del porcentaje. Como contrapartida, cuanto mayor es el porcentaje peores son las condiciones respecto al *delay spreads*,  $\tau_m$ , del canal tratadas en el apartado 3, ya que la nueva condición resulta ser:

$$\tau_m < T_G - T_\delta. \quad (50)$$

Por tanto, se tiene un margen menor para la duración de la respuesta impulsional del canal.

### 6.4. Máscaras espectrales

Por razones prácticas y cuestiones diversas relacionadas con la planificación de red, todos los estándares basados en OFDM definen lo que se llama la más-

cara espectral de transmisión, que no puede ser excedida por los espectros de las respectivas modulaciones OFDM transmitidas. La máscara espectral representa la máxima potencia que se puede radiar fuera de la banda asignada a una determinada frecuencia a la que se centra el espectro de la señal OFDM. En la figura 26 se muestra la máscara de transmisión para el estándar Wifi 802.11a, g. Se observa que, para las frecuencias con una separación frecuencial mayor a 11 MHz respecto a la frecuencia central, la atenuación debe ser al menos de 20 dB respecto al máximo, mientras que para las frecuencias con una separación mayor a 30 MHz respecto a la frecuencia central, la atenuación debe ser al menos de 40 dB respecto al máximo. El cumplimiento de estos requerimientos debe ser garantizados por el fabricante de los dispositivos *wireless* que transmiten bajo este estándar.

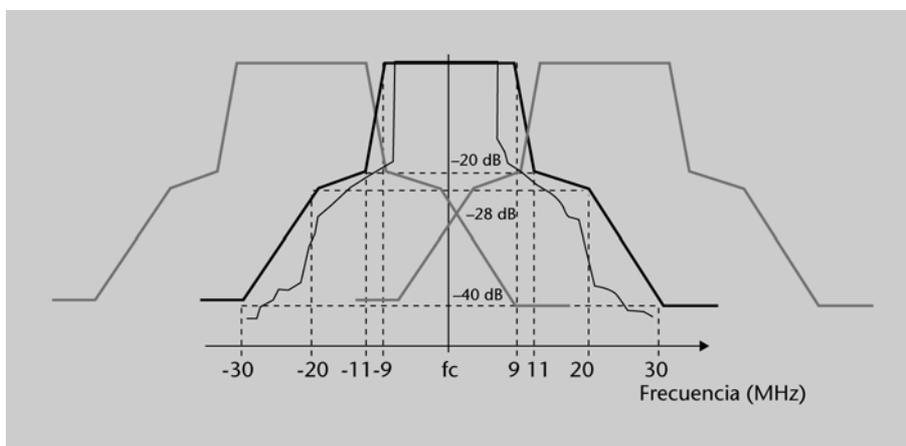


Figura 26. Máscara de transmisión para el estándar Wifi 802.11a, g obtenida de la figura 120 del documento IEEE Std 802.11a-1999. En trazo negro se muestra la máscara que deben cumplir las señales emitidas en canales adyacentes.

En las máscaras espectrales de estándares dedicados a DVB y DAB se presentan características más restrictivas, ya que se tienen márgenes del orden de 70 dB entre la banda de paso y las bandas laterales, en lugar de 40 dB como en el caso presentado en la figura 26.

## 7. Estándares basados en OFDM

En este apartado se presentan los parámetros referentes a la modulación OFDM para algunos casos particulares de las aplicaciones habituales que utilizan este tipo de modulación.

### 7.1. Sistema DAB

El estándar europeo de radiodifusión de audio digital (tradicionalmente llamado *radio comercial*) se ha diseñado para que tenga cierta flexibilidad en función del entorno en el que se vaya a utilizar. La flexibilidad consiste en que presenta cuatro modos de operación que se diferencian entre sí especialmente en la duración del tiempo de símbolo y del tiempo de guarda del símbolo. Por ejemplo, para grandes áreas de cobertura terrestre en las que se prevé que haya ecos de gran retardo, interesa que el tiempo de guarda sea grande (modo I), mientras que en el modo III, que constituye el caso de menor tiempo de guarda, se utiliza para transmisiones vía satélite.

Los cuatro modos comparten el ancho de banda asignado que queda especificado por la frecuencia de muestreo de las señales paso bajo y se diferencian entre sí en el número de puntos de la FFT ( $N$ ) que, a su vez, genera diferencias en la duración del símbolo OFDM y del tiempo de guarda entre otros parámetros.

La frecuencia de muestreo se fija, para todos los modos de transmisión, en 2.048 kHz. Esta característica es muy conveniente, ya que el cambiar de modos permite, en general, utilizar la misma estructura *hardware* entre los diferentes sistemas receptores y transmisores y únicamente se debe cambiar el *software* para implementar un caso u otro. Los modos que trabajan con mayores tamaños de FFT necesitarán normalmente tarjetas de memoria de mayor capacidad.

La siguiente tabla muestra los parámetros más relevantes para cada uno de los cuatro modos.

Modo	$N$ (Puntos FFT)	$K$ (Número de portadora no suprimidas)	$\frac{1}{T_p} = \frac{f_s}{N}$ (Ancho entre dos portadoras consecutivas)	$T_p$ Tiempo útil de símbolo en ms)	$T_G = \frac{1}{4}T_p$ (Tiempo de guarda en ms)	$T_{OFDM} = T_p + T_G$ (Tiempo de símbolo OFDM en ms)
I	2.048	1.536	1 KHz	1	0,25	1,25
IV	1.024	768	2 KHz	0,5	0,125	0,625
II	512	384	4 KHz	0,25	0,0625	0,3125
III	256	192	8 KHz	0,125	0,0313	0,1563

Tabla 1. Tabla de parámetros OFDM para DAB.

## 7.2. Sistema DVB-T

El estándar de difusión de televisión digital terrestre presenta aún mayor flexibilidad que el sistema de audio, ya que dispone de dos modos de transmisión en función del tamaño de la FFT y, además, para cada uno de los dos modos se puede elegir entre uno de los tres anchos de banda disponibles (6 MHz, 7 MHz, 8 MHz) con diferentes opciones para el tiempo de guarda ( $T_G = \frac{1}{4} T_p, \frac{1}{8} T_p, \frac{1}{16} T_p, \frac{1}{32} T_p$ ), lo que genera un amplio abanico de posibilidades. La velocidad de bit máxima alcanzable, considerando únicamente datos de información, es de 26,13 Mbits/s (28,4 Mbits/s tras la codificación de canal).

Los dos modos considerados en el estándar se denominan *modo 2k* y *modo 8k*.

En el modo 2k el tamaño de la FFT es de 2.048 y se trabaja con 1.704 portadoras no nulas. La duración de los símbolos OFDM es del orden de 300  $\mu$ s y es el de utilización más crítica en áreas de gran cobertura, por ser el que presenta condiciones más restrictivas para la duración de la respuesta impulsional del canal. Asimismo, resulta más conveniente si se tienen restricciones de eficiencia computacional, ya que el tamaño de la FFT del modo 2k es menor que el del modo 8K. De hecho, se empezó a utilizar para difusión de televisión digital en Inglaterra, y éste es hoy en día el único país europeo en el que se halla estandarizada.

En el modo 8k el tamaño de la FFT es de 8.192 y se trabaja con 6.816 portadoras no nulas. La duración de los símbolos OFDM es del orden de 1,1 ms y es el de utilización más generalizada. La tecnología actual permite diseñar receptores de TDT con capacidad de realizar FFTs de 8.192 puntos en el orden de tiempo de 1,1 ms.

Se ha estandarizado además el modo 4k, que ha sido diseñado exclusivamente para terminales *handheld* como agendas electrónicas, teléfonos móviles, PDA, etc. En el modo 4k, el tamaño de la FFT es de 4.096 y se trabaja con 3.408 portadoras no nulas. La duración de los símbolos OFDM es del orden de 550  $\mu$ s.

La siguiente tabla muestra los parámetros más relevantes para cada uno de los dos modos estandarizados en difusión terrestre, considerando un ancho de banda fijo y el máximo tiempo de guarda posible.

- Frecuencia de muestreo:

$$f_m = \frac{64}{7} \text{ MHz.} \quad (51)$$

- Ancho de banda:  $B_s = 8 \text{ MHz}$ .
- Tiempo de guarda:  $T_G = \frac{1}{4} T_p$ .

Modo	N (Puntos FFT)	K (Número de portadora no suprimidas)	$\frac{1}{T_p} = \frac{f_m}{N}$ (Ancho entre dos portadoras consecutivas)	$T_p$ (Tiempo útil de símbolo en ms)	$T_G = \frac{1}{4} T_p$ (Tiempo de guarda en ms)	$T_{OFDM} = T_p + T_G$ (Tiempo de símbolo OFDM en ms)
2k	2.048	1.704	4,4643 kHz	0,224	0,056	0,28
8k	8.192	6.816	1,1161 kHz	0,896	0,224	1,12

Tabla 2. Tabla de parámetros OFDM para DVB.

### 7.3. Sistema Wifi IEEE 802.11a, g y Wimax 802.16

Es importante clarificar cada uno de los conceptos que aparecen en el título ya que, si bien usualmente se utilizan de forma indistinta, existe una sutil diferencia entre **Wifi** y protocolo IEEE 802.11, y entre Wimax y 802.16.

IEEE 802.11 a, g son dos protocolos establecidos por un grupo del IEEE de comunicaciones inalámbricas de corto alcance. Definen el uso de los dos niveles más bajos de la arquitectura OSI (capas física y de enlace de datos), especificando sus normas de funcionamiento en una red de tipo área local WLAN, es decir, en entornos reducidos, ya sea a nivel doméstico o interior de un edificio en general. No se recomienda su utilización para alcances mayores a 100 m, aunque esta característica siempre depende de la máxima velocidad de transmisión a la que se utilice el sistema, que puede ir entre 6 Mbits/s y 54 Mbits/s.

**Wifi** es el estándar de WLAN que se basa en el protocolo del IEEE 802.11a, g. Puede decirse que el protocolo es más amplio que el estándar ya que en el estándar se fijan casos particulares de todos los ofrecidos por el protocolo. Mediante el estándar se regulan las normas de uso y de comercialización de los diferentes productos basados en esta tecnología.

Análogamente, Wimax es un estándar para comunicaciones entre redes inalámbricas de área local basado en el protocolo 802.16, y como ventaja respecto a Wifi, permite mayores áreas de cobertura y mayores velocidades de bit o anchos de banda.

Los estándares 802.11b (el b no está basado en OFDM) y 802.11g utilizan bandas de 2,4 GHz que no necesitan de permisos para su uso. Estos sistemas pueden sufrir interferencias por parte de hornos microondas, teléfonos inalámbricos y otros equipos que utilicen la misma banda de 2,4 GHz.

El estándar 802.11a está basado en OFDM igual que el g. Entre ambas modalidades (a y g) la única diferencia, aunque importante, es la frecuencia portadora central a la que transmiten, que en el caso del estándar a es aproximadamente de 5,4 GHz y en el caso del estándar g es aproximadamente de 2,3 GHz.

El estándar 802.16 supone una generación más avanzada de redes inalámbricas que los estándares 802.11. aunque comprende un gran rango de frecuencias de emisión como, por ejemplo, la banda que va de 10 a 66 GHz, la versión estandarizada por Wimax propone utilizar bandas de ocupación a 2,4 y a 3,4 GHz aproximadamente. Los mayores tamaños de FFT que contempla son de 2.048 y 4.096 puntos, mediante una estrategia denominada de OFDMA (*OFDM Access*), que significa que las diferentes portadoras del algoritmo FFT se reparten, por ejemplo, entre los dos enlaces establecidos entre un punto de ac-

ceso y un terminal o bien entre diferentes usuarios. Esta propiedad se denomina *escalabilidad*.

<b>Protocolo</b>	<b>N (Puntos FFT)</b>	<b>K (Número de portadoras no suprimidas)</b>	$\frac{1}{T_p} = \frac{f_m}{N}$ <b>(Ancho entre dos portadoras consecutivas)</b>	$T_p$ <b>(Tiempo útil de símbolo en ms)</b>	$T_G = \frac{1}{4}T_p$ <b>Tiempo de guarda en ms.</b>	$T_{OFDM} = T_p + T_G$ <b>(Tiempo de símbolo OFDM en ms)</b>
<b>WiFi 802.11 a,g</b>	64	52	312,5 kHz	0,0032	$T_G = \frac{1}{4}T_p = 0,0008$	0,004
<b>Wimax 802.16</b>	2.048	192	10,94 kHz	0,0914	$T_G = \frac{1}{8}T_p = 0,0114$	0,1029

Tabla 3. Tabla de parámetros OFDM para WLAN: Wifi y Wimax.

## Resumen

Este módulo está dedicado al estudio de las modulaciones OFDM o de multiportadora, que se presentan como una alternativa a las modulaciones de portadora simple.

Inicialmente se realiza un análisis detallado de la forma de las señales OFDM, mediante una interpretación como un conjunto de  $N$  modulaciones lineales transmitidas en paralelo (sin pérdida de generalidad, se ha fijado como habitual la modulación QAM). Se enfatiza especialmente la distribución tiempo-frecuencia, ya que la transmisión de un símbolo originariamente codificado a partir de una constelación de tipo QAM, al ser transmitido mediante OFDM, se expande en tiempo y se comprime en frecuencia. El tiempo queda aproximadamente multiplicado por  $N$  y el ancho de banda que ocupa cada símbolo queda dividido por  $N$  al compararse con una modulación de portadora simple tradicional.

La implementación práctica de la modulación OFDM se basa en el algoritmo IFFT para hacerla computacionalmente eficiente. Análogamente, la demodulación OFDM se basa en el algoritmo FFT.

Para entender las ventajas que supone la modulación multiportadora frente a las modulaciones de portadora simple, es necesario entender la naturaleza de los canales de comunicaciones, en los que usualmente se producen muchos ecos o rebotes de la señal entre el transmisor y el receptor y suele haber una velocidad relativa entre ambos. El fenómeno físico de los rebotes se modela a partir de la respuesta impulsional del canal y se caracteriza mediante el parámetro de *delay spread* o esparcimiento temporal.

En la modulación OFDM se incluye el denominado prefijo cíclico en el tiempo de guarda entre cada dos símbolos, como la estrategia que evita la ISI entre símbolos consecutivos y, además, conserva la ortogonalidad entre las diferentes frecuencias utilizadas para la transmisión. Siempre que el máximo retardo provocado por ecos sea inferior al tiempo de guarda, con esta estrategia la equalización de la función de transferencia del canal consiste en una simple normalización o división de cada una de las muestras detectadas por la propia función de transferencia o, en caso de ser desconocida, por una estimación de la misma.

El hecho de permitir retardos o ecos sobre la señal recibida posibilita en difusión de televisión digital y de radio digital, que se pueda cubrir un gran territorio mediante redes de frecuencia simple, descritas brevemente en la introducción de este módulo.

Se introducen los denominados símbolos piloto, cuyos valores previamente acordados y estandarizados no transportan bits de datos provenientes de la fuente de información, sino que transportan símbolos conocidos en recepción y que se utilizan en recepción para funcionalidades típicas de sincronismo y de demodulación. Destaca la funcionalidad de utilizar los símbolos piloto para que en recepción se pueda estimar la función de transferencia del canal que se utiliza en la ecualización, por lo que la parrilla de colocación de frecuencias piloto debe ser diseñada atendiendo a la variabilidad temporal del canal.

Un aspecto menos tratado en este módulo (por haberse tratado en módulos anteriores), pero muy importante en OFDM, es el hecho de que se realiza una codificación de canal sobre los bits (COFDM) y una dispersión de los mismos, tanto en tiempo como en frecuencia, mediante técnicas de entrelazado para mejorar la probabilidad de error.

Una característica muy importante en OFDM es el espectro resultante de la modulación. Dado que el espectro es un “recurso limitado” y a repartir, los estándares son estrictos al definir la máscara espectral a la que se debe ceñir cada una de las señales transmitidas. Para cumplir dicha máscara se utilizan estrategias adicionales, como supresión de portadoras y conformación de pulsos temporales.

Obviamente, tanto la inclusión del prefijo cíclico como la inclusión de frecuencias piloto en las estrategias de codificación de canal y la supresión de algunas frecuencias portadoras, o bien restan velocidad de transmisión al sistema o bien disminuyen la calidad del mismo, ya que suponen una pérdida de energía invertida por bit. Éste es un aspecto importante a tener en cuenta a la hora de evaluar cualquier sistema de transmisión.



## Actividades

La resolución de los siguientes ejercicios se propone como complemento al estudio del módulo. Recomendamos que se realicen mediante una estrategia sistemática. En general, es conveniente resolver los desarrollos planteados de forma general, trabajando con las variables y parámetros de forma genérica, y sustituir sus valores numéricos concretos al final de los apartados. De esta forma se facilita la propia corrección y seguimiento del ejercicio y se obtiene una visión más amplia que la del caso particular que se esté analizando.

### 1. Cálculo de parámetros de variación temporal de canal

En un sistema OFDM para radiodifusión DAB en el modo IV, un vehículo a una velocidad de 120 km/h recibe señal a una frecuencia portadora de 1,5 GHz.

- Hallad los parámetros de variación temporal del canal resultante.
- ¿Cuántos símbolos OFDM se pueden transmitir entre cada dos estimaciones de la función de transferencia del canal?
- Repetid los dos apartados anteriores para una velocidad de 48 km/h.

Véase tabla 1 del apartado 7.1 de este módulo.

### 2. Cálculo de velocidad de bit

En un sistema OFDM para difusión de televisión en el modo 8k se utiliza el siguiente plan de frecuencias piloto para posibilitar la estimación del canal:

- En todos los símbolos OFDM se dedican 177 portadoras piloto de forma continua y permanente.
- Adicionalmente, se dedica una frecuencia piloto por cada 12 portadoras (todos los símbolos QAM transmitidos en orden  $n$ , siendo  $n$  múltiplo de 12) cuya posición en frecuencia cambia de símbolo a símbolo.
- Un porcentaje dado de los símbolos es coincidente con los pilotos transmitidos de forma continua.

Teniendo lo anterior en cuenta:

- Calculad la velocidad de símbolo útil de la transmisión.
- Si demodula en 16 QAM y los bits provienen de una codificación de canal de razón de codificación  $\frac{1}{2}$ , hallad la velocidad de bit resultante.
- Si demodula en 64 QAM y los bits provienen de una codificación de canal de razón de codificación  $\frac{3}{4}$ , hallad la velocidad de bit resultante.

Véase tabla 2 del apartado 7.2 de este módulo.

### 3. Evaluación de la probabilidad de error

En un sistema de comunicaciones se debe transmitir una secuencia de bits a una velocidad de bit de 1 Mbit/s y se puede disponer de un cociente de energías en recepción igual a  $\frac{E_b}{N_0}$ . Se opta por el modo Wifi con los parámetros de OFDM correspondientes.

- Para modulación QPSK:
  - Realizad una estimación de la probabilidad de error, sin considerar codificación de canal y en un canal ideal AWGN.
  - Realizad una estimación de la probabilidad de error, sin considerar codificación de canal y en un canal de tipo Rayleigh.
- Para modulación 16QAM:
  - Realizad una estimación de la probabilidad de error, sin considerar codificación de canal y en un canal ideal AWGN.
  - Realizad una estimación de la probabilidad de error, sin considerar codificación de canal y en un canal de tipo Rayleigh.

#### 4. Evaluación de ancho de banda en DVB

En las condiciones dadas para la tabla de parámetros OFDM correspondiente al estándar de DVB:

- a) Verificad el valor dado para el ancho de banda de 8 MHz en el modo de transmisión de 8k.
- b) Para el mismo modo 8k, si se cambia la frecuencia de muestreo a  $f_m = \frac{48}{7} \text{ MHz}$  manteniendo los valores de  $N$  y  $K$ , comprobad que el nuevo ancho de banda es de 6 MHz y calculad los valores obtenidos para los tiempos de símbolo útil, tiempo de símbolo OFDM y tiempo de guarda.

Véase tabla 2 del apartado 7.2 de este módulo.

#### 5. Retardos en Wifi

En diferentes entornos en los que operan redes de tipo Wifi basadas en el protocolo IEEE 802.11a se han medido los siguientes valores de máximo retardo o esparcimiento temporal:

- 30 ns en un banco.
- 100 ns en un edificio de oficinas.
- 200 ns en un centro comercial.

- a) Determinad si son valores permitidos en las condiciones dadas en la tabla de parámetro para WLAN (Wifi).
- b) Repetid los cálculos anteriores si, manteniendo la frecuencia de muestreo, se doblara el número de puntos de la FFT.
- c) Repetid los cálculos anteriores si, manteniendo la frecuencia de muestreo, se dividiera por dos el número de puntos de la FFT.

Véase tabla 3 del apartado 7.3 de este módulo.

#### 6. Propuesta de sesiones prácticas

En esta actividad se propone la realización de diferentes simulaciones a ejecutar con la ayuda total o parcial de las *applets* programadas.

- a) Simular efectos (mejoras) obtenidos en el espectro OFDM por el hecho de solapar los símbolos OFDM consecutivos entre sí.
- b) Simular efectos (mejoras) obtenidos en el espectro OFDM por el hecho de utilizar diferentes opciones para el tiempo de guarda.
- c) Simular efectos de sistemas no lineales sobre modulaciones de tipo OFDM y sobre modulaciones de portadora simple.

## Bibliografía

**Schulze, H.; Luders, C.** (2005). *Theory and applications of OFDM and CDMA. Wideband Wireless Communications*. Chichester (GB): Wiley.

**ETSI Standard: EN 300 744 V1.5.1** (2004-11). *Digital Video Broadcasting (DVB); Framing structure, channel coding and modulation for digital terrestrial television*. Texto descargado de la web de ETSI.

**IEEE Std 802.11a. Part 11.** *Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical layer (PHY) specifications*.

## Anexos

### 1. Distribución de Rayleigh

Sean  $x, y$  dos variables aleatorias gaussianas. Ambas son de media nula y de varianza  $\sigma^2$  y estadísticamente independientes entre sí.

La variable aleatoria  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  presenta una distribución de tipo Rayleigh de parámetro  $\sigma^2$  y su función de densidad de probabilidad es igual a:

$$f_z(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\sigma^2}\right)$$

### 2. Distribución de Rice

Sean  $x, y$  dos variables aleatorias gaussianas. Ambas son de varianza  $\sigma^2$  y estadísticamente independientes entre sí. La media de la variable  $x$  es igual a  $m$  y la media de la variable  $y$  es nula.

La variable aleatoria  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  presenta una distribución de tipo Rice de parámetros  $m, \sigma^2$  y su función de densidad de probabilidad es igual a:

$$f_z(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2 + m^2}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{mz}{\sigma^2}\right)$$

con  $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(x \cos \theta) d\theta$  igual a la función de Bessel modificada de primera clase y orden 0.

### 3. Límite superior de la función área de la gaussiana

La figura 27 se incluye para verificar una cota superior de la función área de la gaussiana, que se utiliza frecuentemente para realizar aproximaciones de la probabilidad de error, especialmente en análisis de ganancias por diversidad.

Sea la función área de la función gaussiana:

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$$

Esta función se halla acotada superiormente:

$$Q(\sqrt{2}x) = Q(1.4142x) \leq \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

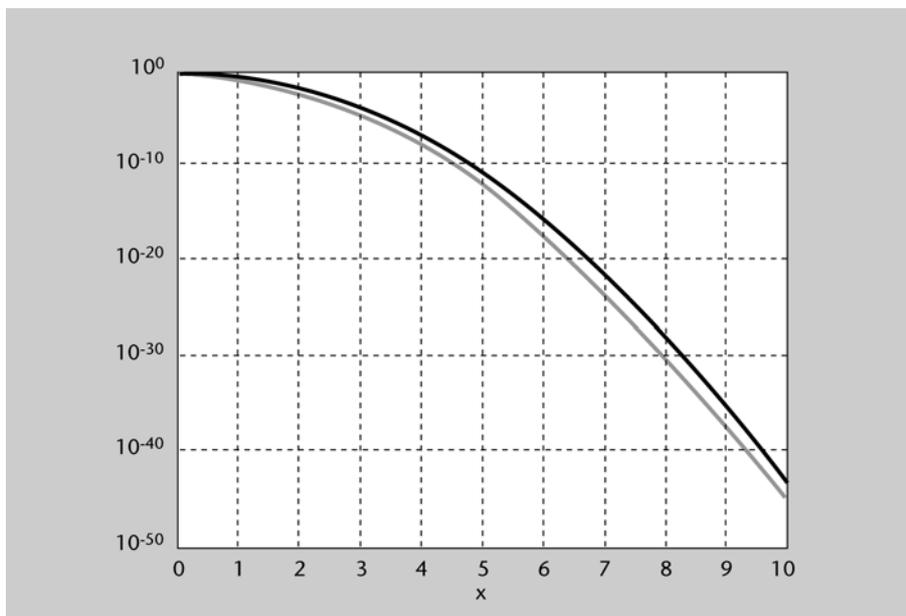


Figura 27. En gris se representa la función  $Q(\sqrt{2}x)$  y en negro su cota superior para valores  $0 \leq x \leq 10$ .