

# Multiplexació per divisió en freqüències ortogonals (OFDM)

Margarita Cabrera  
Francesc Tarrés

PID\_00185017



# Índex

<b>Introducció</b> .....	5
<b>Objectius</b> .....	7
<b>1. OFDM enfront de portadora única</b> .....	9
1.1. Ocupació temps-freqüència .....	9
1.1.1. Transmissió mitjançant portadora única o SC .....	10
1.1.2. Transmissió mitjançant OFDM .....	11
1.2. Modulador QAM de portadora única (QAM-SC) .....	12
1.3. Modulador QAM-OFDM .....	13
<b>2. Ortogonalització de portadores</b> .....	16
2.1. Condició d'ortogonalitat .....	16
2.2. Modulació mitjançant l'algoritme IFFT .....	18
<b>3. Canal de comunicacions en OFDM</b> .....	19
3.1. Efectes del canal de comunicacions en OFDM .....	20
3.2. Equalització .....	26
<b>4. Probabilitat d'error en condicions ideals</b> .....	27
<b>5. Estratègies addicionals en OFDM</b> .....	31
5.1. Freqüències pilot .....	31
5.2. <i>Interleaving</i> i diversitat de canal .....	32
<b>6. Espectre d'OFDM</b> .....	36
6.1. Efectes produïts en l'espectre en introduir prefix cíclic .....	36
6.2. Supressió de portadores .....	37
6.3. Conformació de pols .....	40
6.4. Màscars espectrals .....	41
<b>7. Estàndards basats en OFDM</b> .....	42
7.1. Sistema DAB .....	42
7.2. Sistema DVB-T .....	43
7.3. Sistema Wi-Fi IEEE 802.11a,g i Wimax 802.16 .....	44
<b>Resum</b> .....	46
<b>Activitats</b> .....	49
<b>Bibliografia</b> .....	50
<b>Annexos</b> .....	51



## Introducció

La **multiplexació per divisió ortogonal de freqüència**, en anglès *orthogonal frequency division multiplexing* (OFDM), és un tipus de modulació que s'ha dissenyat per a ser utilitzada en condicions molt severes de canal de comunicacions. Pel que fa a la seva selectivitat en freqüència, és a dir, en situacions en les quals, dins de l'amplada de banda ocupada pel senyal transmès, la funció de transferència del canal no presenta mòdul constant i fase lineal. Mitjançant una modulació convencional, de tipus QAM, un canal selectiu en freqüència provocaria una distorsió tan acusada en el senyal modulad, que no en permetria la desmodulació sense una equalització realment complicada. Amb la modulació OFDM, s'intenta enviar una informació determinada, obtinguda mitjançant una seqüència de bits, a una velocitat de transmissió donada per un canal selectiu en freqüències, però sense necessitat d'utilitzar un equalitzador complicat en el receptor.

Per a assolir aquest objectiu, una modulació OFDM es forma com la suma de  $N$  modulacions lineals (típicament de tipus QAM) i utilitza  $N$  freqüències portadores diferents.  $N$  és un nombre enter relativament alt ( $N = 64, 1.024...$ ). Així, la seqüència original de símbols a transmetre es reparteix entre les modulacions de tipus QAM, disposades en tota l'amplada de banda assignada a aquest tipus de modulació. L'espectre, o amplada de banda total disponible per a aquest tipus de modulació, se subdivideix en diversos intervals contigus per a assignar un interval a cada una de les modulacions QAM.

Cada modulació QAM en freqüències ocupa una amplada de banda  $N$  vegades inferior al que ocuparia una única modulació QAM transmetent la seqüència original de símbols. D'aquesta manera, s'aconsegueix combatre de manera eficient els efectes de canals selectius en freqüències, principal objectiu de la modulació, sempre que es compleixin determinades condicions quant a la durada de la resposta impulsional del canal.

La modulació OFDM sempre s'utilitza, després de processar la seqüència de bits per un codificador de canal, amb l'objectiu de corregir els errors produïts en la transmissió, en el cas de la qual aquesta modulació s'anomena COFDM, de l'anglès *coded OFDM*.

La modulació OFDM s'utilitza en diferents estàndards de comunicació sense fil, entre els quals destaquen els següents:

- Les xarxes locals sense fil de tipus Wi-Fi: (802.11 a,g), o xarxes de més cobertura com les de tipus WIMAX (802.16)
- El sistema de radio difusió digital DAB
- El sistema de televisió digital DVB.

### OFDM


Tot i que estrictament OFDM es tracta d'una multiplexació en freqüència (i així ho denota la  $M$  de l'acrònim), fent un abús del llenguatge es parla de manera corrent de *modulació OFDM*, ja que OFDM s'utilitzarà com a tècnica per a modular un senyal digital.

### Nota

Tot i que, sense pèrdua de generalitat, en el mòdul es parla que el senyal en cadascuna de les portadores correspon a una QAM, podria correspondre a qualsevol modulació lineal incloent-hi les M-PSK.

El funcionament dels estàndards anteriors es basa en la divisió d'un territori en diverses àrees o zones de cobertura. Dins de cada àrea hi ha un punt d'accés o una estació base que proporciona senyal a tots els punts de la zona corresponent. En el cas de xarxes Wi-Fi i WIMAX, a més, es proporciona i es rep senyal, és a dir, l'enllaç és bidireccional.

Un dels grans avantatges de la modulació OFDM davant esquemes clàssics és que aquesta permet que àrees de cobertura veïnes (DAB i DVB) emetin el mateix senyal en la mateixa banda de freqüències. Això rep el nom de *xarxes de freqüència simple* (SFN). Aquesta característica és deguda al fet que en la modulació OFDM es poden rebre diferents senyals retardats uns respecte als altres sense que es generin interferències destructives. Per exemple, si un receptor de televisió digital rep la mateixa emissora i en la mateixa amplada de banda des de dos repetidors de televisió diferents, hi haurà un retard entre tots dos senyals, però aquest efecte es corregeix perfectament en OFDM; en canvi, per a emissores de televisió analògiques aquest efecte és inacceptable, ja que en el millor dels casos produiria un fenomen de doble imatge sobre la pantalla. Per tant, aquesta característica permet reutilitzar millor la banda freqüencial, alhora que obre noves possibilitats a les normes de regularització territorial. Per exemple, Antena 3, Tele5 o TVE emeten en digital en la mateixa freqüència a tot el territori espanyol.



Abans d'iniciar l'estudi d'aquest mòdul és recomanable repassar les de tipus QAM, estudiades en el mòdul 6, "Comunicacions digitals de pas de banda", de l'assignatura *Sistemes de comunicacions I*.

## Objectius

Els objectius que ha d'assolir l'estudiant amb aquest mòdul didàctic són els següents:

1. Interpretar la modulació OFDM com una alternativa davant la modulació de portadora única.
2. Identificar els algoritmes IFFT i FFT, respectivament, com a modulador i desmodulador pràctics d'esquemes OFDM.
3. Comprendre la finalitat del prefix *cíclic* i del temps de guarda com a estratègies per a combatre l'ISI i mantenir l'ortogonalitat entre les diferents freqüències utilitzades.
4. Identificar els avantatges i els inconvenients de la modulació OFDM enfront d'esquemes de portadora única.
5. Conèixer les tècniques habituals utilitzades perquè l'espectre obtingut en la modulació OFDM s'adapti a una màscara o plantilla espectral determinada.
6. Conèixer els estàndards de comunicacions de ràdio basats en OFDM i els seus paràmetres particulars.





## 1. OFDM enfront de portadora única

La modulació OFDM representa una alternativa enfront de la modulació clàssica de tipus QAM (*quadrature amplitude modulation*), també anomenada, en aquest context, de portadora única o SC (*single carrier*). Per entendre millor aquest concepte, podem considerar la transmissió d'una seqüència de bits segons unes indicacions de partida quant a velocitat de transmissió i amplada de banda disponible.

L'objectiu de qualsevol modulació de tipus OFDM consisteix a transmetre una seqüència de bits  $b[n]$  a una velocitat determinada de  $r_b$  bits/segon utilitzant un canal disponible d'amplada de banda  $B_c$  Hz.

Tant per a utilitzar l'estratègia OFDM com per a utilitzar l'estratègia SC, la primera etapa a realitzar a partir de la seqüència de bits consisteix en l'anomenada *codificació de símbol*, en la qual s'ha d'obtenir una seqüència de símbols complexos,  $a[n]$ , de tipus QAM produïts a una velocitat de transmissió, anomenada *velocitat de símbol*,  $r$ .

El codificador de símbol s'esquematitza a la figura 1.

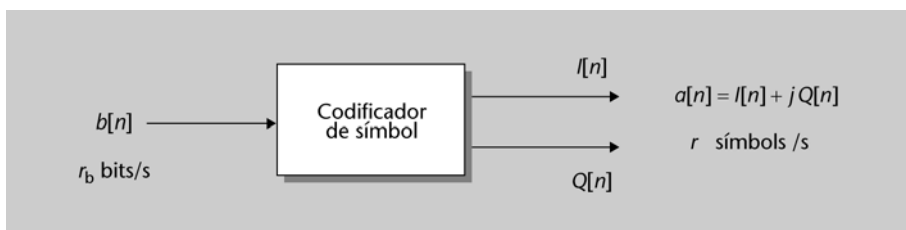


Figura 1. Codificador de símbol QAM

La seqüència de símbols que s'obté és, en general, complexa; i les seves característiques més rellevants són les següents:

- Seqüència de símbols a transmetre:  $a[n] = I[n] + jQ[n]$ .
- Símbols pertanyents a un alfabet de mida  $M = 2^b$ .
- Velocitat de transmissió de la seqüència:  $r = \frac{r_b}{b}$  símbols/s.

### 1.1. Ocupació temps-freqüència

Recordem el plantejament proposat fins aquí. Es disposa de la seqüència de bits a transmetre codificada mitjançant una codificació genèrica, tal com es planteja a la figura 1, i es disposa d'una amplada de banda total de  $B_c$  Hz. Con-

#### És recomanable revisar...

... en aquest punt els tipus de format de modulacions QAM més típics, com per exemple QPSK, 16QAM, 64QAM i, fins i tot, BPSK. D'altra banda, és convenient recordar com és l'espai de senyal de totes les combinacions  $(I[n], Q[n])$  en els formats indicats.

siderarem la utilització d'una modulació SC i, d'una altra banda, la utilització d'una modulació OFDM. Tanmateix, abans d'entrar en les definicions matemàtiques d'un i altre tipus de modulació, en aquest subapartat donarem una idea comparativa i intuïtiva de cada un.

### 1.1.1. Transmissió mitjançant portadora única o SC

Per transmetre un símbol aïllat de la seqüència  $a[n]$  mitjançant l'estratègia de portadora única o SC, s'escull un pols rectangular que s'inicia en l'instant de temps  $nT$  i finalitza en l'instant de temps  $(n+1)T$ , en què  $T$  és el *temps de símbol* i correspon a l'invers de la velocitat de símbol, és a dir:

$$T = \frac{1}{r}. \quad (1)$$

En freqüència, la modulació se centra al voltant de la freqüència portadora  $f_c$  i ocupa aproximadament una amplada de banda de  $r$  Hz al voltant d'aquesta freqüència. A més, suposem que l'amplada de banda requerida coincideix amb l'amplada de banda disponible, és a dir:

$$r = B_c. \quad (2)$$

Per tant, per a la transmissió d'un símbol aïllat es tenen les ocupacions següents:

- L'ocupació temporal de la transmissió del símbol  $a[n]$ , que es produeix per a valors de temps,  $t$ , de manera que  $nT \leq t \leq (n+1)T$ .
- L'ocupació freqüencial de la transmissió del símbol  $a[n]$ , que es produeix per a valors de freqüència,  $f$ , de manera que  $f_c - \frac{r}{2} \leq f \leq f_c + \frac{r}{2}$ .

Considerant la seqüència de símbols sencera, aquesta es pot representar mitjançant un diagrama d'ocupació temps-freqüència, com el de la figura 2, en que cada rectangle, blanc o gris, representa l'ocupació d'un símbol determinat.

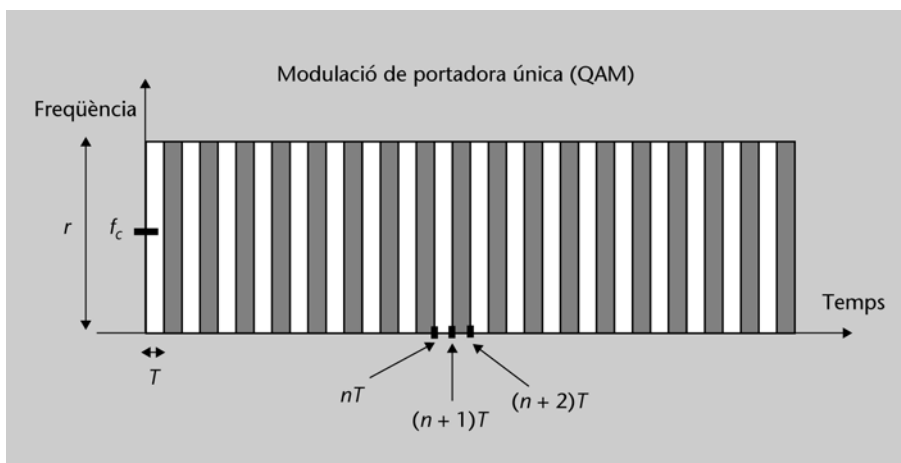


Figura 2. Ocupació temps-freqüència de la modulació QAM de portadora única o SC. Els símbols se succeeixen en el temps i ocupen sempre la mateixa amplada de banda al voltant de la freqüència portadora  $f_c$ .

### 1.1.2. Transmissió mitjançant OFDM

Ara podem plantejar una estratègia alternativa a la de portadora única o SC. Mitjançant la modulació OFDM, cada símbol es transmet ocupant un temps major i una amplada de banda menor respecte a la modulació SC:

- El conjunt total de símbols de la seqüència original es divideix en trams de  $N$  símbols cada un.
- L'amplada de banda disponible també es divideix en  $N$  trams.
- Cada grup de  $N$  símbols es transmet simultàniament en el temps, i cada un ocupa una amplada de banda diferent.

Anomenant respectivament  $T_p$  i  $r_p$  a l'ocupació temporal i a l'ocupació freqüencial de cada símbol, es tenen les relacions següents amb la velocitat original  $r$ .

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{r}{N} \\ T_p &= N \cdot T \end{aligned} \quad (3)$$

Per a aquesta estratègia, la seqüència de símbols sencera també es pot representar mitjançant un diagrama d'ocupació temps-freqüència, similar al de la figura 2, en què cada rectangle, blanc o gris, representa l'ocupació d'un símbol determinat.

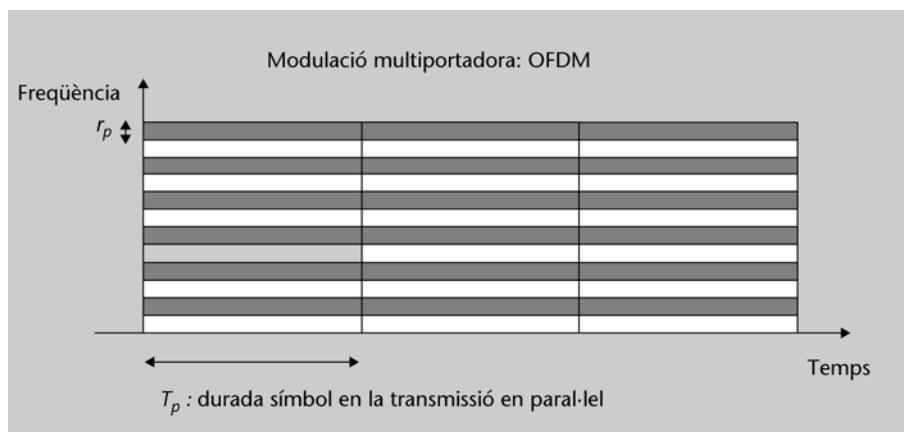


Figura 3. Ocupació temps-freqüència de la modulació OFDM. Cada grup de  $N$  símbols se succeeix en el temps i ocupa un tram freqüencial diferent dels altres grups.

Per acabar aquesta presentació comparativa entre totes dues estratègies, a la figura 4 es representa l'ocupació espectral per a la modulació OFDM comparada amb la modulació de portadora única o SC. Cada portadora en el domini freqüencial es representa mitjançant una funció sinc, ja que s'assumeix que els polsos temporals són rectangulars, la qual cosa és habitual en OFDM. A la figura,  $r$  representa la velocitat de símbol.

#### La notació escollida...

... per a  $T_p$  y  $r_p$  és deguda al fet que cada grup de  $N$  símbols es transmet en paral·lel, és a dir, simultàniament.

#### La modulació OFDM...

... també s'anomena *multicarrier* o *multiportadora*, ja que, per a cada símbol de la transmissió en paral·lel, s'utilitza una freqüència portadora diferent.

#### La transformada de Fourier...

... del pols rectangular de durada  $T$ ,  $\Pi(\frac{t}{T})$ , del pols rectangular de durada  $T$ ,  $T\text{sinc}(fT)$ .

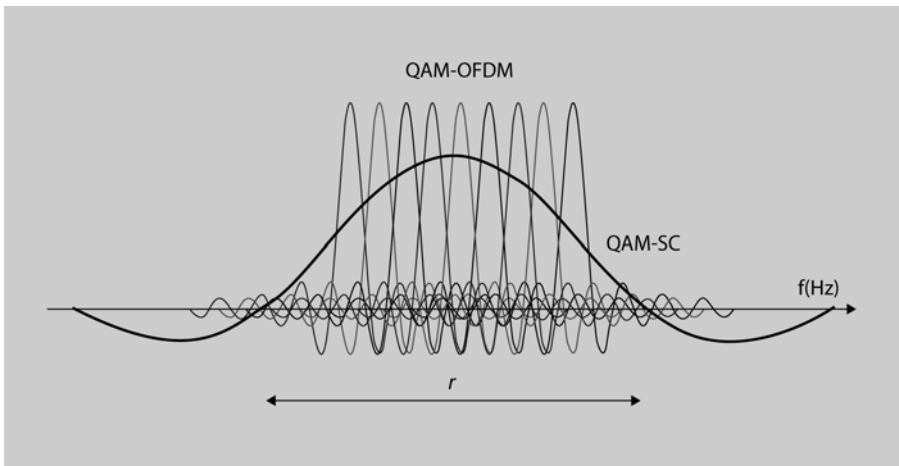


Figura 4. Ocupació freqüencial de la modulació OFDM comparada amb l'ocupació freqüencial de la modulació de portadora única. Les funcions de tipus *sinc* estretes representen les diferents portadores de la modulació OFDM. A la pràctica, cada una és modulada per un símbol complex diferent. La funció *sinc* (en traç més gruixut) representa l'espectre aproximat que s'obtidria si es transmetés a igual velocitat de símbol però en QAM-SC.

En el cas de la modulació de portadora única, els símbols es transmeten en sèrie, és a dir, es transmeten un rere l'altre en el temps i cada un ocupa una amplada de banda que, en el millor cas, es pot reduir a  $r$  Hz. En el cas de modulacions OFDM, el conjunt total de símbols es divideix en grups de  $N$  símbols. Cada grup de  $N$  símbols es transmet en paral·lel, i cada un ocupa una freqüència portadora diferent. Per a la transmissió d'un símbol en particular, es disposa d'un temps  $N$  vegades major que en el cas SC, mentre que l'amplada de banda disponible per a cada símbol queda dividida per  $N$ .

## 1.2. Modulador QAM de portadora única (QAM-SC)

En aquest apartat, revisarem alguns conceptes de la modulació QAM convencional o SC. Per a això veurem, d'una banda, el diagrama de blocs del modulador i, d'una altra, l'expressió temporal del senyal modulad.

L'esquema d'un modulador QAM per a la transmissió d'una seqüència de símbols complexos  $a[n] = I[n] + jQ[n]$ , ocupant un amplada de banda al voltant de la freqüència portadora  $f_c$ , es mostra a la figura 5.

A la figura 5, la modulació QAM resultant es pot expressar en funció del component en fase i del component en quadratura com a

$$s(t)_{QAM} = i_s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_s(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c). \quad (4)$$

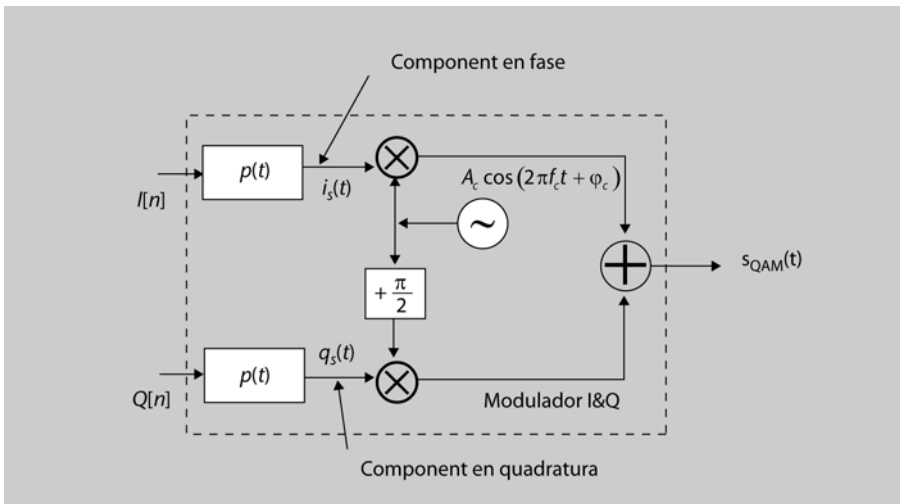


Figura 5. Modulador QAM de portadora única

De l'expressió (4), es dedueix que el senyal equivalent passabaix complex, amb pols base rectangular d'energia igual a la unitat, és igual a

$$b_s(t) = i_s(t) + jq_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]p(t - nT) \tag{5}$$

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

**La notació complexa...**  
 ... utilitzada en aquest apartat ens resultarà útil més endavant per a comprendre millor la característica d'ortogonalitat de la modulació OFDM.

A la figura 6, es mostra la representació complexa del modulador QAM de la figura 5, que a partir d'aquest punt, i en el que queda de mòdul, es representarà segons el diagrama mostrat. A més, s'esquematitza l'ocupació espectral del senyal passabaix al voltant de la freqüència zero i del senyal banda passant  $s_{QAM}(t)$  al voltant de la freqüència portadora.

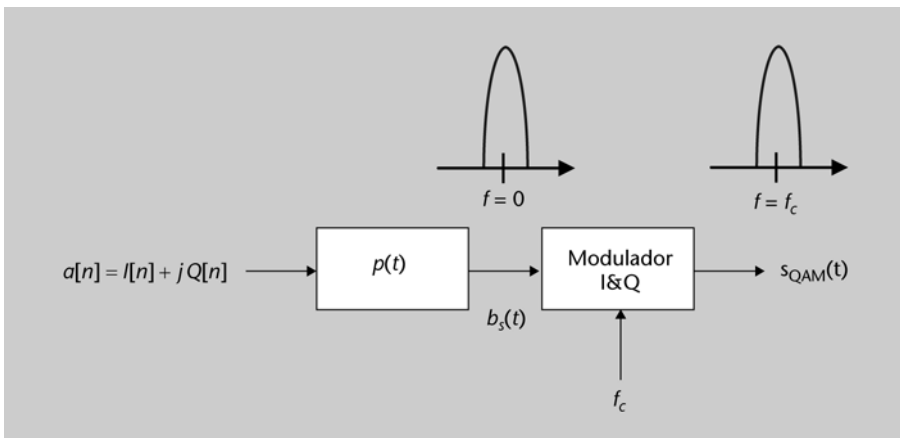


Figura 6. Representació simplificada del modulador QAM de portadora única

### 1.3. Modulador QAM-OFDM

A la figura 7, es mostra l'esquema simplificat d'un modulador QAM-OFDM per a la transmissió d'una seqüència de símbols  $a[n]$ , ocupant una amplada de banda al voltant de la freqüència portadora  $f_c$ . El més destacable davant la mo-

dulació QAM-SC és el convertidor de sèrie a paral·lel (S/P) mitjançant el qual es possibilita que cada grup de  $N$  símbols de la seqüència d'entrada es transmeti per  $N$  modulacions QAM en paral·lel.

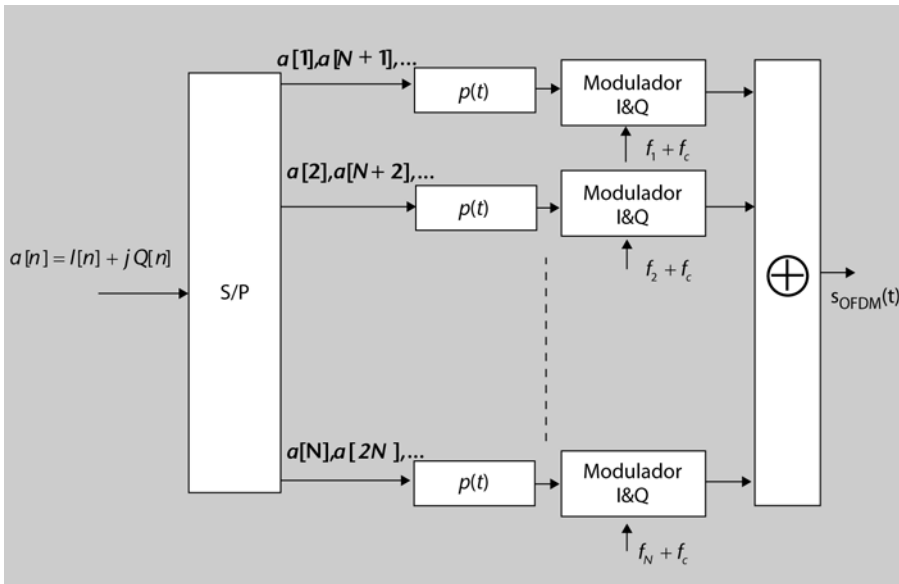


Figura 7. Modulador QAM-OFDM

El senyal OFDM resultant equival a la suma de  $N$  modulacions QAM. Aquest efecte es pot expressar mitjançant l'expressió següent:

$$s_{OFDM}(t) = \sum_{k=1}^N s_{QAM-k}(t) \tag{6}$$

L'equivalent passabaix complex de la modulació OFDM respecte a la freqüència portadora  $f_c$  és igual a la suma d'equivalents passabaix de les  $N$  modulacions QAM:

$$b_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N a[nN + k] e^{j2\pi f_k t} p(t - nNT_s) \tag{7}$$

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{NT_s}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T_p}{2}}{NT_s}\right) = \frac{1}{\sqrt{T_p}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T_p}{2}}{T_p}\right)$$

$$T_p = NT_s$$

**En comparar l'expressió...**

... de la modulació OFDM a (7) amb la donada per a la modulació SC a (5), podem veure que el pols rectangular utilitzat a OFDM és de durada  $N$  vegades superior que la del pols utilitzat a SC. En el període de  $T_p = NT$  es transmeten  $N$  símbols QAM que es diferencien entre ells per la freqüència  $f_k$  ( $T = T_s$ ).

En realitat, el modulador que es mostra a la figura 7 no correspon a un sistema realista, ja que, des d'un punt de vista tecnològic, és més eficient construir inicialment el senyal equivalent passabaix complex i, posteriorment, que realitzar el trasllat a la freqüència portadora de transmissió de l'equivalent passabaix mitjançant un modulador I&Q. L'esquema resultant es mostra a la figura 8 i, per tant, és equivalent al de la figura 7.

La forma temporal obtinguda per a una modulació OFDM s'obté com la suma de les formes temporals corresponents a les diferents modulacions QAM que la componen. Per a il·lustrar l'efecte produït sobre els senyals temporals, a la figura 9 es representen els equivalents passabaix per a un cas de modulació

BPSK (*binary-PSK*). Considerarem aquest cas senzill perquè els símbols d'una modulació BPSK són reals:

$$a[k] = \pm 1$$

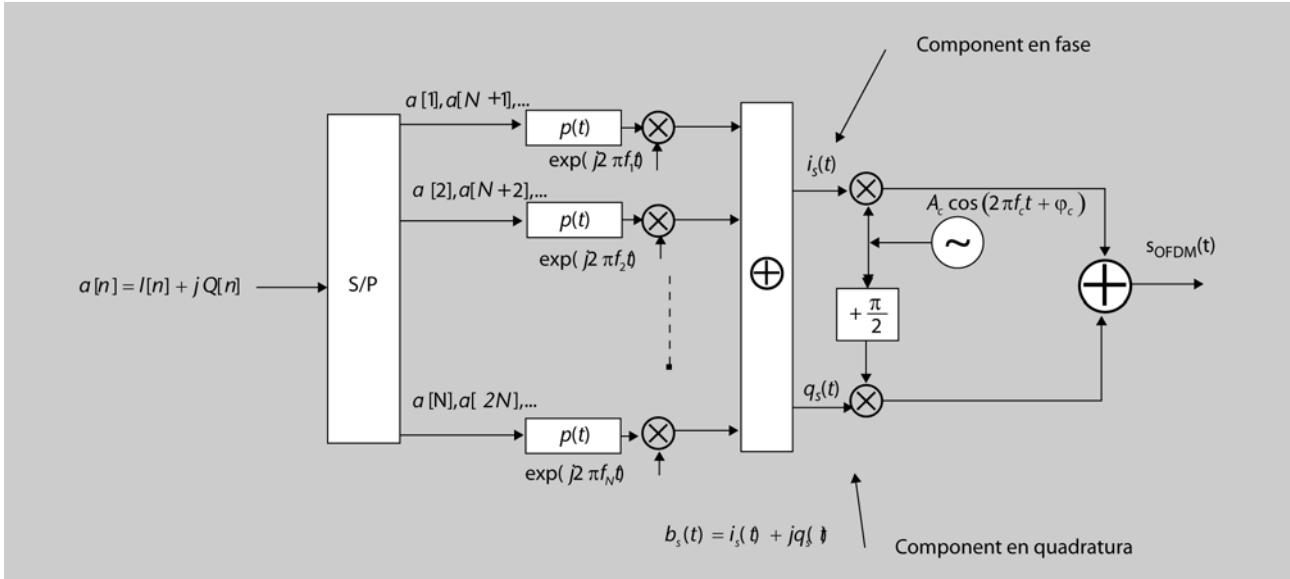


Figura 8. Modulador QAM-OFDM en dues etapes: construcció del senyal equivalent passabaix complex i trasllat a la freqüència portadora

L'equivalent passabaix de la modulació de portadora simple és real i, per tant, senzill de dibuixar. Quant a l'equivalent passabaix de la modulació OFDM, a causa de les exponencials complexes de l'expressió (7), en general, queda complex. En la gràfica corresponent de la figura 9, es representa de manera aïllada cada terme que contribueix a un únic símbol OFDM en el seu equivalent passabaix. De fet, per a la modulació OFDM, es representa únicament el que equival a la part imaginària (sinus). La part real seria anàloga, però amb senyals que s'inicien amb un màxim (cosinus).

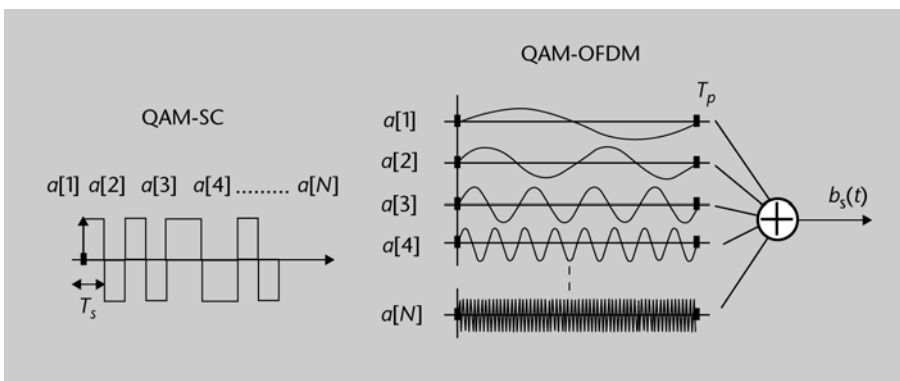


Figura 9. Equivalent passabaix per a les modulacions QAM-SC i QAM-OFDM, i símbols BPSK

## 2. Ortogonalització de portadores

Tal com s'ha definit el senyal equivalent passabaix en OFDM en l'expressió (7), les funcions que transporten els símbols de les diferents portadores corresponen a les exponencials complexes de freqüència  $f_k$ . Aquestes funcions han de ser ortogonals entre elles perquè en el receptor es puguin separar els símbols que corresponen a cada una de les portadores sense interferir-se entre elles. Aquesta propietat s'anomena *condició d'ortogonalitat* i dóna nom a la modulació OFDM.

### 2.1. Condició d'ortogonalitat

Per a detectar els símbols de la portadora  $k$  corresponents a la seqüència complexa  $a[k]$ , s'ha de dissenyar el filtre adaptat a l'exponencial corresponent. Si es rep el senyal OFDM descrit en l'expressió (7) i es realitza la *down conversion* mitjançant un desmodulador I&Q, s'obté el senyal passabaix equivalent del senyal rebut. A continuació, s'analitza la forma del senyal passabaix sense tenir en compte la presència del senyal de soroll i considerant únicament els símbols QAM transportats en símbol OFDM  $n$ -èsim.

Equivalent passabaix rebut en absència de soroll:

$$b_r(t) = b_s(t) = \sum_{k=1}^N a[nN + k'] e^{j2\pi f_k t} \frac{1}{\sqrt{T_p}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T_p}{2} - nT_p}{T_p}\right) \quad (8)$$

$$nT_p \leq t \leq (n+1)T_p$$

On, sense pèrdua de generalitat i únicament a efectes d'anàlisi, podem considerar que el senyal anterior correspon al primer símbol ( $n = 0$ ).

$$b_r(t) = \sum_{k=1}^N a[k'] e^{j2\pi f_k t} \frac{1}{\sqrt{T_p}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T_p}{2}}{T_p}\right) \quad (9)$$

El senyal anterior es processa mitjançant el filtre adaptat corresponent i es mostra a raó d'una mostra per símbol OFDM, la qual cosa dóna lloc a la funció

$$y_k(T_p) = \frac{1}{\sqrt{T_p}} \int_0^{T_p} b_r(t) e^{-j2\pi f_k t} dt = \sum_{k'=1}^N a[k'] \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} e^{j2\pi(f_k - f_{k'})t} dt, \quad (10)$$

ja que interessa obtenir

$$y_k(T_p) = a[k].$$



S'ha de complir la relació següent per a les diferents freqüències:

$$\frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} e^{j2\pi(f_{k'} - f_k)t} dt = \delta[k' - k] = \begin{cases} 1 & k' = k \\ 0 & k' \neq k \end{cases} \quad (11)$$

La relació (11) s'anomena *relació d'ortogonalitat*. Una manera d'obtenir la condició d'ortogonalitat consisteix a triar les diferents freqüències  $f_k$  de manera que cada una tingui un nombre enter de períodes en la  $T_p$  (durada del símbol OFDM).

Perquè l'exponencial corresponent a la freqüència  $f_1$  tingui un període sencer en el temps de símbol, s'escull:

$$f_1 = \frac{1}{T_p} \Rightarrow e^{j2\pi f_1 t} = e^{j2\pi \frac{1}{T_p} t} = \cos\left(2\pi \frac{1}{T_p} t\right) + j\sin\left(2\pi \frac{1}{T_p} t\right). \quad (12)$$

Perquè l'exponencial corresponent a la freqüència  $f_2$  tingui dos períodes sencers en el temps de símbol, s'escull:

$$f_2 = \frac{2}{T_p} \Rightarrow e^{j2\pi f_2 t} = e^{j2\pi \frac{2}{T_p} t} = \cos\left(2\pi \frac{2}{T_p} t\right) + j\sin\left(2\pi \frac{2}{T_p} t\right). \quad (13)$$

I així successivament. És a dir, es trien funcions amb valors de freqüència:

$$f_k = \frac{k}{T_p}; k = -\frac{N}{2} : \dots : +\frac{N}{2} - 1. \quad (14)$$

La separació freqüencial entre dues freqüències portadores consecutives resulta igual a:

$$\Delta f = \frac{1}{T_p}. \quad (15)$$

Tant les operacions necessàries per a construir el senyal de l'expressió (7), com el processat corresponent als  $N$  filtres adaptats per a processar els senyals de (11), són operacions basades en la transformada de Fourier i, a la pràctica, s'implementen sobre els senyals discretitzats o mostrejats. Si s'haguessin de mostrear directament sobre els senyals analògics o continus en el temps, es necessitarien  $N$  oscil·ladors al transmissor i  $N$  filtres adaptats analògics al receptor, la qual cosa, tecnològicament, és inviable a causa dels valors habitualment alts de  $N$  amb què s'opera. La manera més eficient de realitzar totes dues transformacions de Fourier consisteix en la utilització de l'algoritme IFFT al transmissor, i l'algoritme FFT al receptor. Els algorismes IFFT i FFT garanteixen l'ortogonalitat de les portadores en recepció alhora que minimitzen el nombre d'operacions a realitzar sobre les dades. La restricció que s'imposa és que el nombre de portadores transmeses en paral·lel ( $N$ ) ha de ser una potència de 2. Habitualment, es treballa amb valors de  $N$  compresos entre 64 i 8.182.

#### Freqüències positives i negatives

En l'expressió (14), es defineixen freqüències positives i freqüències negatives. És important recordar que les exponencials complexes de freqüència negativa presenten un contingut espectral en la freqüència negativa corresponent. D'aquesta manera, les portadores en l'equivalent passa-baix es distribueixen entre freqüències negatives i freqüències positives i, en conseqüència, el senyal OFDM pas de banda es troba centrat entorn de  $f_c$ .

## 2.2. Modulació mitjançant l'algoritme IFFT

L'algoritme IFFT s'implementa per a obtenir les  $N$  mostres corresponents a un símbol OFDM:

$$b_s[n] = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}-1} a[k] e^{j2\pi f_k n} = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}-1} a[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \quad (16)$$

$$0 \leq n \leq N$$

$$T_m = \frac{T_p}{N} = T_s$$

L'última línia de l'expressió anterior indica el temps de mostratge en què s'haurà de realitzar la conversió digital/analògica (D/A) al modulador i la conversió analògica/digital (A/D) al desmodulador. En definitiva, una versió més realista de l'esquema modulador de la figura 7 es presenta a la figura 10, que és tal com s'implementa a la pràctica un modulador OFDM.

En apartats posteriors, es complementa l'esquema amb més operacions utilitzades en els sistemes basats en OFDM.

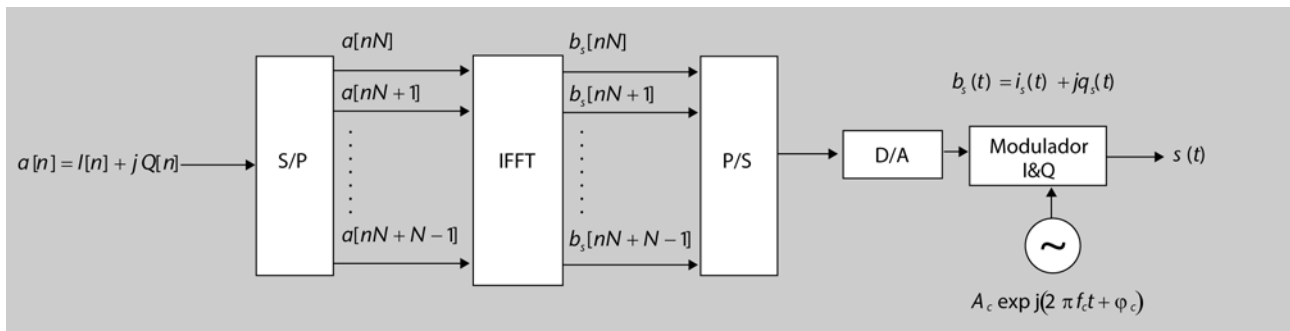


Figura 10. Modulador QAM-OFDM basat en l'algoritme IFFT. S/P és un bloc convertidor de dades en sèrie a paral·lel, i P/S és un bloc convertidor de dades en paral·lel a sèrie.

De fet, la modulació OFDM basada en l'algoritme IFFT, i la desmodulació OFDM basada en l'algoritme FFT, són una necessitat pràctica i d'implementació que s'utilitza en tots els transmissors i receptors d'OFDM. En l'àmbit d'anàlisi del sistema, és preferible utilitzar la nomenclatura de (7), ja que facilita en molts aspectes l'anàlisi dels senyals al llarg de les diferents etapes del sistema, i també és preferible utilitzar la nomenclatura de senyal continu entre el convertidor D/A del transmissor i el convertidor A/D del receptor, que apareix en l'expressió (7), amb la qual es reproduïx exactament la forma dels senyals.

L'algoritme IFFT és útil per a enviar cada símbol QAM  $a[n]$  a transmetre a la freqüència que ha d'ocupar en l'equivalent passabaix. IFFT significa 'operació inversa a l'FFT' i, per tant, amb l'IFFT es realitza una transformació del domini freqüencial al domini temporal. Dit d'una altra manera, el senyal de sortida del bloc IFFT és el senyal temporal que s'ha de transmetre (en la versió d'equivalent passabaix i discretitzada) perquè l'espectre del senyal esmentat coincideixi amb la trama de  $N$  símbols QAM que s'envia en cada símbol OFDM.

### 3. Canal de comunicacions en OFDM

Els principals avantatges de la modulació OFDM, comparat amb la modulació SC-QAM, s'obtenen a causa dels efectes que els canals de propagació produeixen en els senyals transmesos. En els entorns en què s'utilitzen aquest tipus d'aplicacions, els canals de comunicacions es caracteritzen per la seva resposta impulsional, d'una determinada durada temporal i de propietats variants en el temps. Per a l'anàlisi el senyal transmès es convoluciona amb la resposta impulsional que modela el canal:

$$s(t) * h_c(t) . \quad (17)$$

Quan el canal de comunicacions és ideal, la seva resposta impulsional es pot modelar com

$$h_c(t) = \alpha \delta(t - t_d) . \quad (18)$$

No es distorsiona el senyal transmès pel canal de comunicacions i, per tant, la forma del senyal rebut respecte al senyal transmès no canvia. Aquest model és vàlid en comunicacions sense fil sempre que es tingui un únic raig de senyal directe entre el transmissor i el receptor, i no es produeixin rebots o ecos entre tots dos. En aquest cas, el senyal rebut,  $r(t)$ , s'expressa com a

$$r(t) = \alpha s(t - t_d) . \quad (19)$$

En el cas de les modulacions digitals, sobre un canal ideal no es produeix ISI o interferències entre símbols consecutius.

Tanmateix, en aplicacions típiques d'OFDM, en general, es presenten dos efectes no volguts que caracteritzen la resposta impulsional d'un canal no ideal:

- La durada de la resposta impulsional
- El caràcter variant de la resposta impulsional

El primer dels efectes, la durada de la resposta impulsional,  $T_h$ , depèn dels diferents ecos o retards respecte al feix o camí principal entre el transmissor i el receptor. El senyal transmès experimenta diferents rebots sobre els obstacles físics que envolten tant el transmissor com el receptor i, en lloc de rebre una única replica del senyal com en (19), es reben un conjunt de rèpliques tal com es mostra a la figura 11. Aquest fenomen està parametritzat per la *dispersió temporal* o *delay spread* que mesura, de mitjana, la durada temporal de la resposta impulsional del canal. El segon dels efectes no desitjats del canal és la seva variabilitat, que està parametritzat pel temps de coherència, que intuïtivament mesura el temps transcorregut perquè la variació temporal del canal i els efectes que provoca sobre el senyal transmès siguin apreciables.

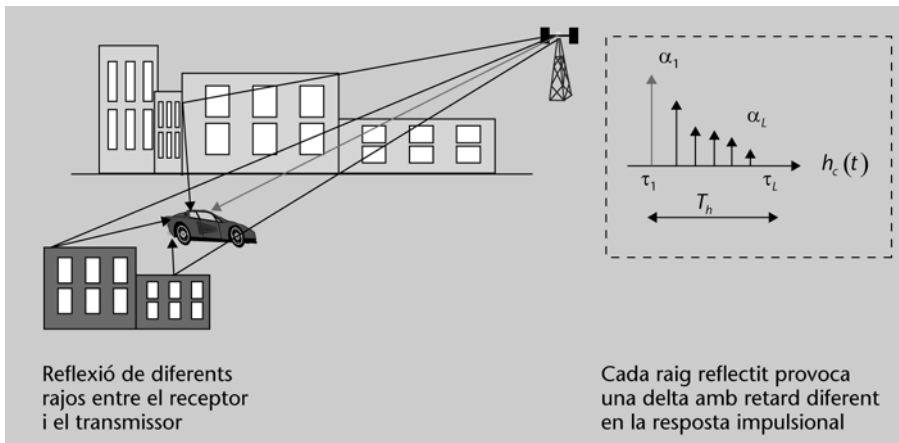


Figura 11. Modelatge de la resposta impulsional del canal com un conjunt de deltes de diferents nivells d'atenuació i retards

### Exemple 1. Efectes del delay spread sobre la portadora simple i sobre un senyal OFDM

Suposem que es transmeten símbols corresponents a una modulació QAM-SC suportada amb polsos rectangulars de durada temporal igual al temps de símbol. La velocitat de transmissió és de  $r = 1 \text{ Msímbols/s}$  i, per tant, el temps de símbol és  $T_s = 1 \mu\text{s}$ . El canal de comunicacions presenta un retard temporal de  $\tau_m$  de  $2 \mu\text{s}$  per la qual cosa, de mitjana, cada un dels diferents símbols QAM que arriben al receptor ocupa una durada de  $3 \mu\text{s}$ , la qual cosa provoca un nivell d'ISI important que degrada enormement la probabilitat d'error de símbol. Cal recordar que, en convolucionar un pols de durada  $T_s = 1 \mu\text{s}$  amb una resposta impulsional de durada  $2 \mu\text{s}$ , el pols resultant té una durada igual a la suma de totes dues durades, en aquest cas,  $3 \mu\text{s}$ .

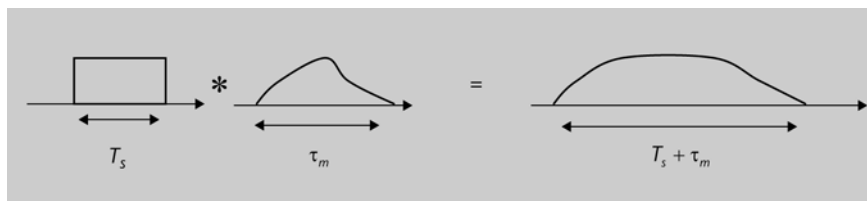


Figura 12. Temps de símbol i retard temporal per a la transmissió de símbols corresponents a una modulació QAM-SC

En aquestes condicions, és imprescindible la utilització d'un equalitzador temporal per a una descodificació de símbols amb baixa probabilitat d'error.

Per al cas de modulacions OFDM, tot i que es formalitzarà més endavant, ja podem intuir que tenint en compte que el temps de símbol OFDM és  $N$  vegades més gran, l'efecte de la dispersió temporal del canal es veurà mitigada i, per tant, la tasca d'equalització serà molt més senzilla de fer.

### 3.1. Efectes del canal de comunicacions en OFDM

Una de les característiques principals de l'OFDM consisteix en la introducció d'un temps de guarda entre símbol i símbol OFDM durant el qual es transmet una repetició parcial del símbol OFDM següent. Amb aquesta estratègia es combat l'efecte de l'ISI que podria provocar un canal selectiu en freqüències alhora que es preserva l'ortogonalitat entre les diferents portadores. Per aconseguir aquest efecte, l'últim tram de durada donada (per exemple  $T_G$ ) de la forma d'ona obtinguda en el modulador a la sortida del convertidor paral·lel en sèrie (P/S) de la figura 10 s'estén cíclicament i es transmet a l'inici del símbol. El tram repetit s'anomena *prefix cíclic*. La durada temporal del símbol OFDM

es reparteix entre la transmissió del prefix cíclic i la transmissió del símbol OFDM pròpiament dit:

$$T_{OFDM} = T_G + T_p \cdot \tag{20}$$

Tal com es representa a la figura 13, un tram de durada  $T_G$  del final de cada símbol es replica al principi del símbol corresponent. L'efecte repercuteix en la relació entre la velocitat de transmissió dels símbols QAM i l'amplada de banda necessària per a la modulació resultant:

$$r = \frac{N}{T_s} = \frac{N}{T_{OFDM}} = \frac{N}{T_G + T_p} < \frac{N}{T_p} = B_s \cdot \tag{21}$$

**El prefix cíclic**

La introducció del prefix cíclic en el temps de guarda incrementa lleugerament l'amplada de banda de la modulació OFDM per a una velocitat de transmissió determinada.

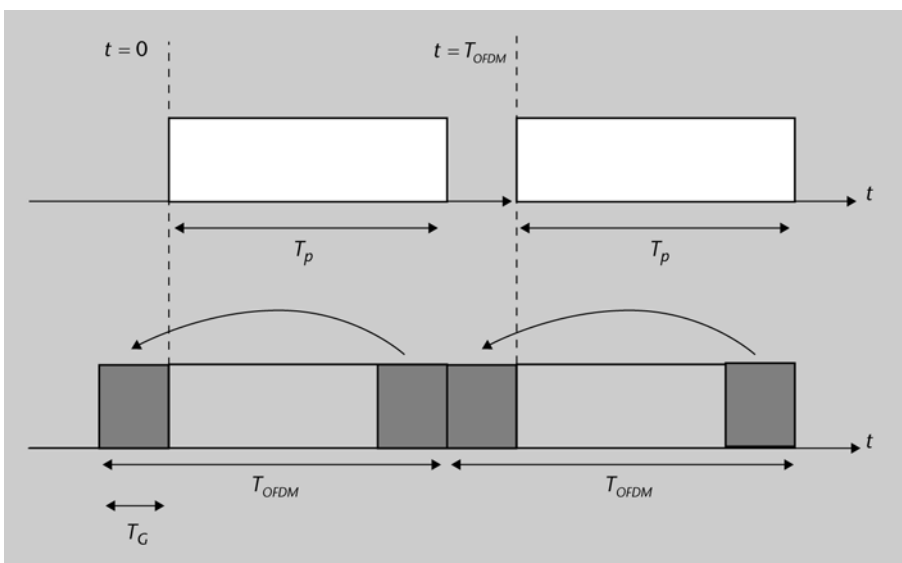


Figura 13. Introducció de l'interval de guarda

A causa que la introducció del prefix cíclic es realitza sobre la versió digital del senyal, per a completar l'esquema que mostra la figura 10, s'ha d'incloure un bloc amb una funció que sigui la inserció del prefix cíclic o repetició de les últimes mostres obtingudes en cada execució de l'algoritme IFFT.

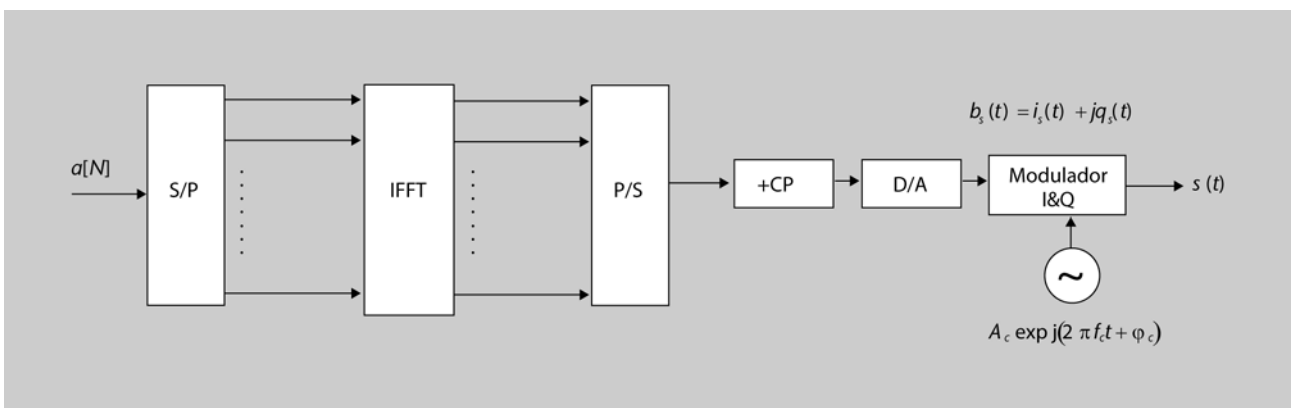


Figura 14. Modulador de QAM-OFDM, basat en l'algoritme IFFT, incloent-hi la inserció del prefix cíclic (CP)

### Exemple 2. Augment de l'amplada de banda en OFDM

Seguint l'exemple 2 de modulació QAM-SC de velocitat de transmissió  $r = 1$  Msímbols/s i temps de símbol  $T_s = 1 \mu\text{s}$ , en aquest exemple es calculen els paràmetres corresponents en transmetre la mateixa seqüència mitjançant una modulació OFDM, en la qual se suposa que l'extensió del prefix cíclic correspon a un 25% del símbol útil  $T_G = \frac{T_p}{4} = \frac{T_{OFDM}}{5}$  i que s'utilitza un algoritme IFFT de  $N = 64$  portadores.

Amb aquestes dades, es calculen els paràmetres següents:

- Temps adjudicat al símbol OFDM

$$T_{OFDM} = NT_s = 64 \mu\text{s}$$

- Temps de guarda

$$T_G = \frac{T_{OFDM}}{5} = 12,8 \mu\text{s}$$

- Temps adjudicat a la transmissió de  $N = 64$  símbols en paral·lel

$$T_p = T_{OFDM} - T_G = 51,2 \mu\text{s}$$

- Amplada de banda resultant per a la modulació OFDM

$$B_s = \frac{N}{T_p} = \frac{64}{51,2} 10^6 = 1,25 \text{ MHz}$$

- Freqüència de mostratge dels senyals passabaix tant en transmissió com en recepció

$$f_m = \frac{1}{T_m} = B_s = 1,25 \text{ MHz}$$

La introducció del temps de guarda amb la transmissió del prefix cíclic evita la interferència intersimbòlica (ISI) i la interferència entre portadores (ICI), sempre que es compleixi la condició que la durada del temps de guarda sigui superior o igual que la durada de la resposta impulsional del canal. A causa del caràcter aleatori dels canals de comunicacions, aquesta condició en el disseny d'un sistema basat en OFDM s'ajusta amb el paràmetre de *delay spread* del canal en qüestió:

$$\tau_m < T_G \quad (22)$$

Per a expressar formalment la forma d'ona corresponent a l'equivalent passabaix que inclogui el prefix cíclic, l'expressió (7) es modifica i dona lloc a la següent:

$$\begin{aligned} b_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N a[nN + k] e^{j2\pi f_k t} p(t - nT_{OFDM}) \\ p(t) &= \Pi\left(\frac{t + T_G - \frac{T_{OFDM}}{2}}{T_{OFDM}}\right) \\ T_{OFDM} &= NT_s \end{aligned} \quad (23)$$

En l'expressió (23), podem destacar que els símbols OFDM s'estenen al llarg d'un temps  $T_{OFDM}$  segons. Per exemple, el símbol OFDM corresponent a la transmissió dels valors  $a[k]$   $k = 1 \dots, N$  es transmet en l'interval de temps  $-T_G \leq t \leq T_p = T_{OFDM} - T_G$ . El símbol OFDM corresponent a la transmissió dels valors  $a[N + k]$   $k = 1 \dots, N$  es transmet en l'interval de temps

$T_{OFDM} - T_G \leq t \leq 2T_{OFDM} - T_G$ ; i, en general, el símbol OFDM corresponent a la transmissió dels valors  $a[nN + k]$   $k = 1 \dots, N$  es transmet en l'interval de temps  $nT_{OFDM} - T_G \leq t \leq (n + 1)T_{OFDM} - T_G$ . En la part de recepció, cada símbol rebut s'escolta únicament durant  $T_s = T_{OFDM} - T_G$  segons. Intuïtivament, es pot dir que es rebutja o es desaprofita un interval de  $T_G$  segons de cada símbol transmès per tal d'eliminar els transitoris que el canal de comunicacions ha provocat en un símbol OFDM a causa de la interferència del símbol OFDM anterior (cal recordar que la resposta impulsional del canal és de durada aproximada a la del *delay spread*, i sempre inferior al temps de guarda).

Si es compleix la condició de (22) en el domini de la freqüència, on tenim els símbols QAM, s'evita tant l'ISI com l'ICI; tanmateix, cada símbol complex  $a[nN + k]$  transmès queda afectat per la funció de transferència del canal avaluada justament a la freqüència a què es transmet el símbol  $H_c(f_c + f_k)$  corresponent. Aquesta propietat es representa gràficament a la figura 15.

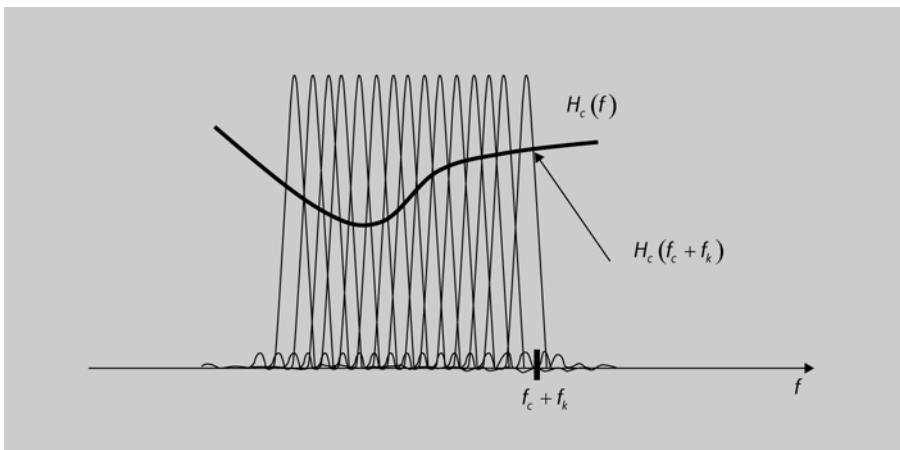


Figura 15. Efectes de la funció de transferència del canal en les portadores transmèses en OFDM

La demostració rigorosa de la propietat anterior requereix una anàlisi detallada dels senyals transmèsos que exposarem a continuació.

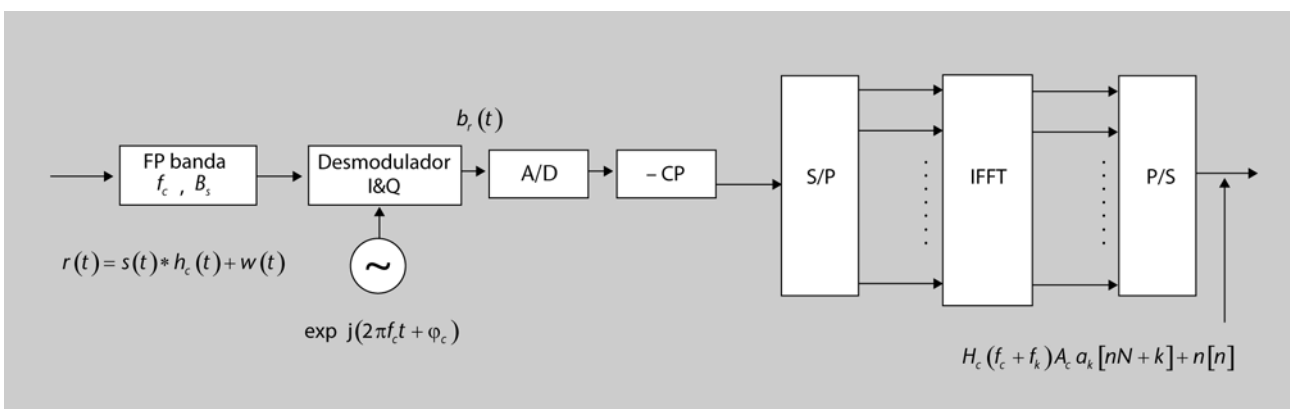


Figura 16. Diagrama de blocs funcional d'un desmodulador OFDM

A fi de facilitar l'anàlisi del processament del senyal mitjançant l'esquema desmodulador que mostra la figura 16, se simplifiquen els blocs posteriors al desmodulador I&Q, segons l'esquema de la figura 17. És a dir, les  $N$  sortides

obtingudes amb l'algoritme FFT també es poden obtenir mitjançant un banc de  $N$  branques, en què cada una consisteix en un multiplicador per una funció exponencial complexa i un integrador.

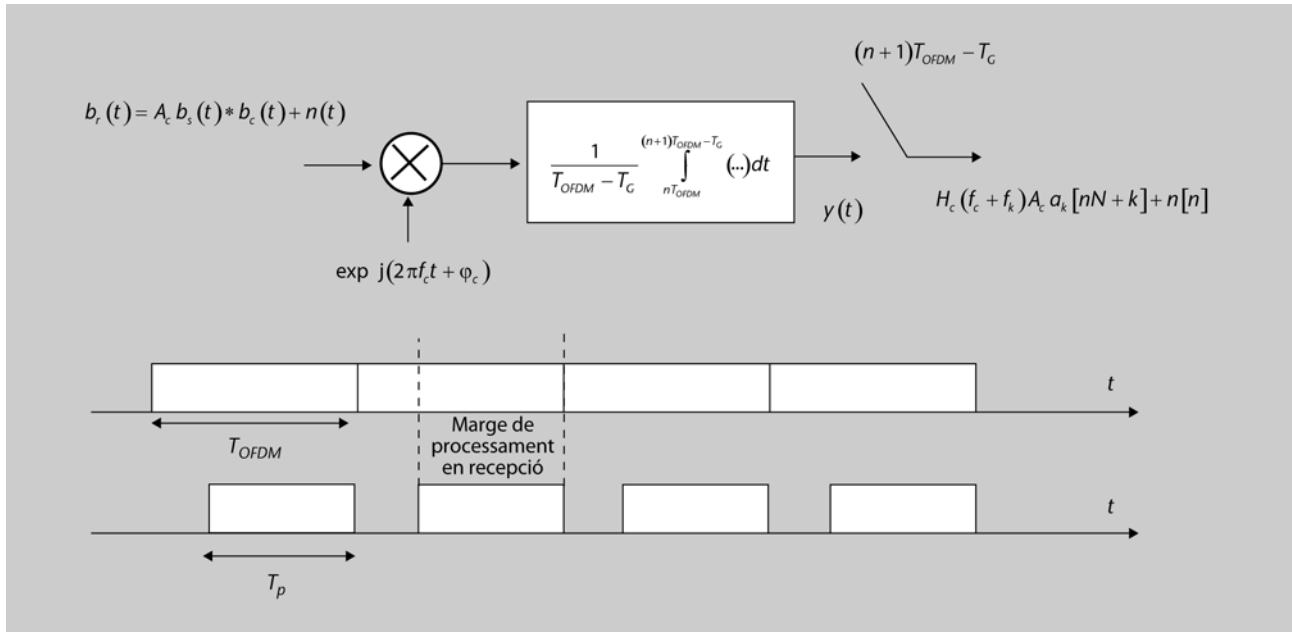


Figura 17. Diagrama de blocs funcional equivalent per al processament passabaix dels símbols transportats sobre la freqüència portadora  $f_k$ . El producte per l'exponencial complexa de freqüència  $-f_k$  juntament amb el mostratge integrador i posterior és equivalent a la sortida  $k$  del bloc FFT. Representació de la seqüència de polsos OFDM transmesos i polsos processats a recepció.

En tota la demostració s'analitza el senyal útil en absència de soroll. Això és equivalent a tenir un senyal de soroll nul,  $n(t) = 0$ , en el senyal d'entrada al desmodulador.

Sobre el senyal d'entrada, la funció  $b_c(t)$  representa l'equivalent passabaix de la resposta impulsional del canal respecte a la freqüència portadora de la modulació  $f_c$ , i és, en general, complexa. La seva transformada de Fourier coincideix amb la funció de transferència del canal de comunicacions.

$$TF[b_c(f)]|_{f=f_k} = B_c(f_k) = H_c(f_c + f_k) \quad (24)$$

Per simplificar la demostració, considerem a continuació el senyal de sortida de l'integrador per al símbol corresponent a  $n = 0$ . Aquesta simplificació es pot realitzar sense pèrdua de generalitat. En l'expressió (23), es tenen símbols OFDM que van de  $n = -\infty$  a  $n = +\infty$ . Tanmateix, en el temps d'integració corresponent a  $0 \leq t \leq T_p = T_{OFDM} - T_G$ , en recepció només hi ha el símbol OFDM de l'expressió corresponent a  $n = 0$ . Es pot veure que si el símbol anterior, corresponent a  $n = -1$ , es convoluciona amb un canal de resposta impulsional compresa en el marge temporal d'integració  $0 \leq t \leq T_G$ , el símbol resultant per a  $n = -1$  ja no està en el marge de temps d'integració  $0 \leq t \leq T_p = T_{OFDM} - T_G$ . El símbol corresponent a  $n = +1$  s'inicia en  $t = T_p = T_{OFDM} - T_G$ , per la qual cosa tampoc no és en el marge temporal d'integració  $0 \leq t \leq T_p = T_{OFDM} - T_G$ .

En aquest punt s'inicia la demostració de l'expressió resultant a la sortida del diagrama de la figura 17. Aquesta demostració s'inclou per a l'estudiant que vulgui aprofundir en la comprensió dels senyals OFDM; tanmateix, en un primer estudi del mòdul, se'n pot prescindir.



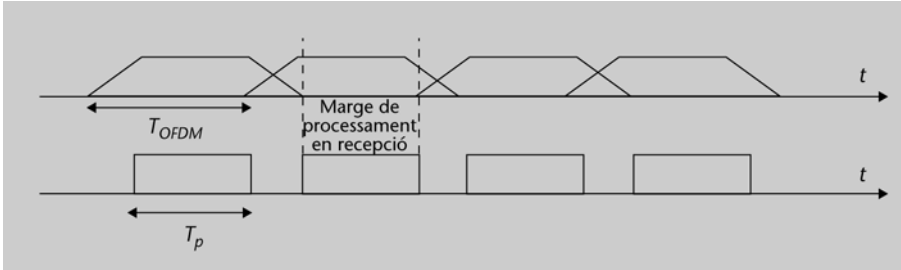


Figura 18. Representació de la seqüència de polsos OFDM transmesos i polsos processats en recepció en presència d'un canal de durada temporal superior o igual al temps de guarda.

### Convulsió de dues funcions

És important recordar que en convolucionar dues funcions de resposta impulsional de durada temporal finita, la funció resultant també és de durada temporal finita i coincideix amb la suma de durades de les dues funcions que es convolucionen. En el nostre cas, si la resposta impulsional del canal és, en el pitjor dels casos, de durada  $T_G$  i es convoluciona amb cada símbol de durada  $T_{OFDM}$ , el símbol resultant a la sortida del canal és de durada temporal  $T_{OFDM} + T_G$ . Els símbols resultants s'encavalquen entre ells en marges de temps igual a  $T_G$ , però entre símbol i símbol rebut hi ha un marge de temps de durada  $T_{OFDM} - T_G = T_p$ , sense encavalcament entre símbols consecutius. Aquest marge de temps és justament el que es processa mitjançant l'integrador de la figura 17, tal com es veu esquemàticament a la figura 18 i s'anomena *marge de processament en recepció*.

Si s'incorpora la simplificació donada en analitzar el senyal resultant per a  $n = 0$ , tenim que l'equivalent passabaix complex present en l'entrada de l'esquema de la figura 17 es pot expressar com:

$$b_r(t) = A_c \sum_{k=1}^N a[k] e^{j2\pi f_k t} \Pi\left(\frac{t + T_G - \frac{T_{OFDM}}{2}}{T_{OFDM}}\right) * b_c(t) = A_c \sum_{k=1}^N a[k] \int_0^{T_G} e^{j2\pi f_k (t-\lambda)} b_c(\lambda) d\lambda \quad (25)$$

$$0 \leq t \leq T_{OFDM} - T_G = T_p$$

Els límits d'integració s'imposen per la condició assumida per a la durada de l'equivalent passabaix del canal  $b_c(t)$ . El marge temporal de validesa de l'expressió (25) apareix en la segona línia de l'expressió i s'obté en incloure el prefix cíclic. A partir de (25) s'obté l'expressió (26), que és l'expressió bàsica per a demostrar, posteriorment, l'absència d'ICI entre les diferents freqüències portadores.

$$b_r(t) = A_c \sum_{k=1}^N a[k] e^{j2\pi f_k t} B_c(f_k) = A_c \sum_{k=1}^N a[k] e^{j2\pi f_k t} H_c(f_c + f_k) \quad (26)$$

$$0 \leq t \leq T_{OFDM} - T_G = T_p$$

L'equivalent passabaix (26) per l'esquema desmodulador representat a la figura 17, i amb la condició d'ortogonalitat analitzada en l'expressió (11) dona lloc, a la sortida de l'integrador, al símbol complex corresponent transmès per la portadora de freqüència  $f_k$ .

$$y_k(T_p) = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} b_r(t) e^{-j2\pi f_k t} dt =$$

$$A_c \sum_{k'=1}^N a[k'] H_c(f_c + f_{k'}) \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} e^{j2\pi(f_{k'} - f_k)t} dt = A_c a[k] H_c(f_c + f_k) \quad (27)$$

La inclusió del prefix cíclic en OFDM, de durada superior o igual a la de la resposta impulsional del canal, evita l'ISI temporal entre símbols OFDM i, a més, preserva l'ortogonalitat entre les diferents freqüències portadores i evita l'ICI. En aquestes condicions, l'únic efecte rellevant sobre els símbols és que cada un d'aquests queda multiplicat pel valor de la funció de transferència del canal, justament a la freqüència portadora a què ha estat transmès. Si en lloc del prefix cíclic s'introduís un temps de guarda basat en un silenci entre símbols OFDM s'evitaria la ISI temporal entre símbols OFDM però no la ICI entre portadores.

### 3.2. Equalització

L'equalització entesa com la compensació de l'efecte del canal sobre la modulació OFDM és senzilla a causa de l'absència d'ISI i d'ICI. Es realitza en el domini de la freqüència, és a dir, una vegada que el senyal ha estat processat mitjançant l'algoritme FFT i és un pas previ a la detecció de símbols. Consisteix en què cada sortida de les diferents portadores es divideix per la mostra de la funció de transferència del canal per la qual ha estat afectada. En aquest punt, es reprèn l'anàlisi del processament dels senyals considerant la presència de soroll. L'operació d'equalització és directament una divisió que es realitza per a tota la seqüència de símbols OFDM, és a dir, per a tots els valors de la variable  $n$  i per a cada una de les freqüències portadores, és a dir, per a qualsevol valor de la variable  $k$ .

#### Nota

Observeu que, malgrat que es parla d'equalització, tècnicament és un procés de compensació d'un escalar complex a cada portadora, i per tant, és molt més senzill el procés d'equalització en el cas d'una portadora única (SC), entès com la compensació de la ISI, que tècnicament és molt més complex de fer.

$$z[nN + k] = \frac{y_k(nT_{OFDM} + T_p)}{H_c(f_c + f_k)} = A_c a[nN + k] + n_k[n] \quad (28)$$

$$-\infty \leq n \leq +\infty; \quad 1 \leq k \leq N$$

Tots els senyals que intervenen en (28) són complexos, de part real i part imaginària en general no nul·les. En aquesta operació, la mostra de soroll queda afectada per la funció de transferència del canal corresponent, per la qual cosa per a les diferents portadores, els components de soroll modelats com a variables aleatòries gaussianes de mitjana nul·la presenten diferents variàncies o dispersions a causa de l'equalització, que consisteix en una divisió o normalització diferent per a cada freqüència portadora.

A partir d'aquest punt es procedeix a la detecció aïllada de cadascun dels símbols de les diferents portadores. Com ja hem comentat en la introducció, encara que en tot moment s'està parlant de modulacions QAM, en les portadores es poden introduir símbols corresponents a qualsevol modulació lineal, incloent-hi la M-PSK.

## 4. Probabilitat d'error en condicions ideals

En aquest apartat, s'aborda el càlcul de la probabilitat d'error per a modulacions OFDM en condicions ideals. Això significa que, per al sistema, s'assumeixen les característiques següents:

- La resposta impulsional del canal és invariant amb el temps.
- El canal és selectiu en freqüències, però la funció de transferència en l'amplada de banda de transmissió del senyal es coneix perfectament en el receptor, per la qual cosa és factible realitzar una equalització ideal.
- No es produeixen errors de sincronisme de freqüència ni de fase del senyal portador ni, tampoc, error en el temps de mostratge del senyal.
- L'amplificació del senyal, quan es necessita, sempre es realitza amb amplificadors lineals, per la qual cosa no es produeix distorsió a causa de possibles no linealitats.

L'equalització ideal es descriu en l'apartat 3.2, "Equalització".

En aquestes condicions, i com una primera aproximació a l'anàlisi de la probabilitat d'error per a modulacions OFDM, es calcula la probabilitat separatament per a cada portadora utilitzada. Assumint que en cada freqüència portadora es transmet una modulació pas de banda digital de tipus QAM, l'expressió de la probabilitat d'error respecte al quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$  coincideix amb l'obtinguda per a modulacions QAM\* però amb dos aspectes diferenciats per a OFDM:

\* Anàlitzades en l'assignatura de *Sistemes de comunicacions I*.

1) A causa que el senyal en una portadora està multiplicat per la funció de transferència del canal en aquella portadora, un factor de la probabilitat d'error afecta amb ponderacions diferents les diferents portadores que intervenen en la modulació.

2) La transmissió de senyal durant el prefix cíclic entre símbol i símbol OFDM disminueix l'eficiència de la modulació. A causa de la transcripció del prefix cíclic, el transmissor transmet símbols de durada  $T_{OFDM} = T_G + T_p$ , mentre que el receptor únicament processa cada símbol rebut durant  $T_p$  segons. La porció de senyal transmès en el temps de guarda i que no s'ha aprofitat en recepció fa que s'hagi d'enviar més energia mitjana transmesa per bit per a conservar la probabilitat d'error respecte a un enllaç convencional.

A continuació, se suposa que els símbols complexos  $\alpha[nN + k]$  corresponen a una modulació de tipus QPSK.

$$\alpha[nN + k] = \pm \frac{A}{2} + j\left(\pm \frac{A}{2}\right) \quad (29)$$

En una transmissió de tipus QAM-SC també basada en QPSK, la probabilitat d'error presenta la expressió següent:

$$P_{b(\text{QPSK-SC})} = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (30)$$

En transmetre símbols de tipus QPSK, l'expressió obtinguda per a la probabilitat d'error dels bits transmesos sobre la portadora k-enèsima, a partir del senyal detectat (28), és igual a:

$$P_{b(\text{QPSK-OFDM})} = Q\left(\sqrt{\frac{T_p}{T_p + T_G} |H_c(f_c + f_k)|^2 2 \frac{E_b}{N_0}}\right). \quad (31)$$

Per a simplificar la notació a partir d'aquest punt s'introdueix la nomenclatura següent per a la funció de transferència del canal i per a la probabilitat d'error dels bits transmesos sobre la portadora de freqüència  $f_k$ :

- Amplificació provocada pel canal sobre la portadora  $k$ :  $\gamma_k = |H_c(f_c + f_k)|$
- Probabilitat d'error sobre la portadora  $k$ :  $P_{bk} = Q\left(\sqrt{\frac{T_p}{T_p + T_G} \gamma_k^2 2 \frac{E_b}{N_0}}\right).$  (32)

Com a conclusió, destaquem que el factor dependent del canal de comunicacions i diferenciat per a cada portadora és una variable aleatòria  $\gamma_k = |H_c(f_c + f_k)|$ . Aquesta variable aleatòria es modela per a les aplicacions típiques d'OFDM com una variable aleatòria de tipus Rayleigh; la qual cosa significa que, en el factor complex  $H_c(f_c + f_k)$ , tant la part real com la part imaginària són variables aleatòries gaussianes de mitjana nul·la. Totes dues presenten una variància o dispersió idèntiques, i són estadísticament independents entre elles. Si alguna de les dues variables gaussianes tingués una mitjana estadística no nul·la, la distribució obtinguda per al valor absolut  $\gamma_k$  resultaria de tipus Rice. Aquesta propietat és deguda al fet que totes les amplituds dels raigs produïts en la resposta impulsional, segons es modela en l'expressió següent, també són variables aleatòries gaussianes.

$$h_c(t) = \sum_{l=0}^L \alpha_l \delta(t - \tau_l) \Rightarrow r(t) = \sum_{l=0}^L \alpha_l s(t - \tau_l). \quad (33)$$

Anàlogament, per a modulacions OFDM amb constel·lacions de símbol de tipus QAM quadrades de  $M$  símbols, o de tipus circular PSK de  $M$  símbols, les probabilitats d'error corresponen a variants de les presentades en l'assignatura de *Sistemes de comunicació I*, amb portadora simple:

$$BER_{MQAM} = P_{bk} = \frac{4(\sqrt{M}-1)}{b\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{T_p}{T_p + T_G} \gamma_k^2 \frac{3b}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (34)$$

! Vegeu l'annex al final del mòdul sobre les funcions de densitat de probabilitat de tipus Rice i Rayleigh.

$$BER_{PSK} = P_{bk} \approx \frac{2}{b} Q \left( \sqrt{\frac{T_p}{T_p+T_G} \gamma_k^2 2bsen^2 \left( \frac{\pi}{M} \right) \frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (35)$$

En definitiva, l'expressió de la probabilitat d'error per a una modulació OFDM en les condicions exposades al principi d'aquest apartat coincideix amb l'expressió que s'obtingria en utilitzar la mateixa modulació amb portadora simple, introduint tots dos factors provocats per la utilització del prefix cíclic i per la funció de transferència del canal.

La influència del primer dels dos factors esmentats,  $\frac{T_p}{T_p+T_G}$ , s'analitza en l'exemple següent com a pèrdua d'energia mitjana transmesa per bit. La influència del segon factor és un problema major en OFDM i es comenta al final d'aquest apartat.

### Exemple 3. Degradació de la probabilitat d'error provocada per la introducció del prefix cíclic

Seguint l'exemple 2 de modulació QAM-OFDM de velocitat de transmissió  $r = 1$  Msímbolos/s i de prefix cíclic igual a un 25% del símbol útil,  $T_G = \frac{T_p}{4} = \frac{T_{OFDM}}{5}$ , el factor corresponent que intervé en la probabilitat d'error és igual a

$$\frac{T_p}{T_p+T_G} = \frac{4}{5} \quad (36)$$

$$10 \log_{10} \left( \frac{T_p}{T_p+T_G} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{4}{5} \right) = -0,97 \text{ dB}$$

Per tant, perquè no augmenti la probabilitat d'error en la transmissió de la seqüència de símbols donada en ser transmesa en OFDM respecte a la seva transmissió en portadora simple, es necessita, en OFDM, augmentar l'energia mitjana per bit en 0,97 dB, la qual cosa equival a un 25% més de potència en el senyal transmès.

L'altre factor que intervé en la probabilitat d'error és una variable aleatòria ( $\gamma_k$ ). De fet, afecta de manera que la probabilitat d'error resultant també és una variable aleatòria, ja que depèn del valor de la funció de transferència del canal a una freqüència i per a un temps determinats.

A la pràctica, es realitza una anàlisi de la probabilitat mitjana d'error integrant, per exemple, l'expressió obtinguda per a QPSK en (32) amb la funció de densitat de probabilitat de la variable aleatòria  $\gamma_k$ . En aquesta anàlisi, atès que la funció de densitat de probabilitat de la variable és de tipus Rice o de tipus Rayleigh, però no depèn de la portadora  $k$ , es pot prescindir del subíndex que indica la freqüència.

$$P_b = E[P_{bk}] = \int_0^{+\infty} f_\gamma(\gamma) Q \left( \sqrt{\frac{T_p}{T_p+T_G} \gamma^2 2 \frac{E_b}{N_0}} \right) d\gamma \quad (37)$$

La resolució exacta de la integral anterior requereix de l'ús de mètodes numèrics, per la qual cosa, a la pràctica, es recorre a taules o a programes de simulació numèrica per a la seva avaluació exacta.

Adicionalment, per a la integral anterior s'aplica la cota superior següent anomenada *cota de Chernoff* vàlida per a qualsevol valor de  $x$ .\*

\* Tal com es demostra en l'annex d'aquest mòdul.

$$Q(\sqrt{2x}) \leq \frac{1}{2} e^{-x^2} \Rightarrow P_{b(L=1)} \leq \frac{1}{2} e^{-\gamma^2 \frac{T_p}{T_p+T_G} \frac{E_b}{N_0}}, \quad (38)$$

i com que  $\gamma$  és una variable aleatòria de tipus Rayleigh, utilitzant la funció de densitat de probabilitat de l'annex, es pot calcular la mitjana de la cota superior per a la probabilitat d'error que indica (38). Suposant que  $\gamma$  és una variable aleatòria de tipus Rayleigh de paràmetre igual a 1, és fàcil comprovar que, en mitjana, la cota superior en (38) resulta

$$\begin{aligned} P_{b(L=1)} &\leq E \left[ \frac{1}{2} e^{-\gamma^2 \frac{T_p}{T_p+T_G} \frac{E_b}{N_0}} \right] = \int_0^{+\infty} f_\gamma(\gamma) \frac{1}{2} e^{-\gamma^2 \frac{T_p}{T_p+T_G} \frac{E_b}{N_0}} d\gamma = \\ &= \int_0^{+\infty} \gamma \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2\right) \frac{1}{2} e^{-\gamma^2 \frac{T_p}{T_p+T_G} \frac{E_b}{N_0}} d\gamma = \frac{1}{1 + \frac{T_p}{T_p+T_G} \frac{E_b}{N_0}} \end{aligned} \quad (39)$$

En resum:

- 1) En OFDM, a causa del caràcter aleatori de la resposta impulsional dels canals de comunicacions i, per tant, de la funció de transferència, la probabilitat d'error resulta ser una variable aleatòria.
- 2) S'estudia la mitjana estadística d'una cota superior per a la probabilitat d'error, és a dir, la cota superior mitjanada per a la probabilitat d'error.
- 3) La probabilitat d'error mitjana no depèn de la freqüència portadora a la qual es transmet cada símbol.

Una altra conclusió important que es desprèn de l'anàlisi realitzada en aquest apartat és que, per a canals amb fàdings selectius en freqüència, alguns bits es detectaran amb pitjors condicions (més probabilitats d'error) que d'altres. En comunicacions, quan es produeix aquest fenomen, s'utilitzen estratègies per a evitar pèrdues significatives de bits. En mòduls anteriors ja s'ha estudiat la codificació de canal, que és la millor estratègia per a aquest efecte.

## 5. Estratègies addicionals en OFDM

Segons s'ha analitzat en l'apartat 4, per a una desmodulació perfecta dels senyals OFDM, en el receptor s'ha de conèixer la funció de transferència del canal de comunicacions. En un entorn realista (canal amb fàdings selectius en freqüència), la funció de transferència del canal varia amb el temps a una velocitat que depèn del temps de coherència del canal de comunicacions. L'estructura del senyal OFDM és bidimensional, ja que es reparteixen símbols en temps i en freqüència segons es mostra a la figura 3. Aprofitant l'estructura bidimensional del senyal OFDM, es transmeten el que s'anomena *símbols pilot* repartits en freqüència i en temps perquè, a partir d'aquests, en recepció es pugui realitzar una estimació de la funció de transferència del canal.

### 5.1. Freqüències pilot

A continuació, presentarem el concepte de *símbol pilot* i l'objectiu de la seva transmissió.

S'anomena *símbol pilot* un conjunt de símbols que s'estandarditzen per a transmetre's a unes freqüències portadores determinades i amb una periodicitat temporal determinada. En general, els símbols pilot s'escullen a partir d'una constel·lació relativament senzilla, de pocs nivells, com per exemple BPSK o QPSK. Els símbols pilot, que òbviament són coneguts en recepció, s'utilitzen per a estimar la funció de transferència del canal i, també, per a facilitar el sincronisme de la freqüència portadora dels senyals OFDM. D'alguna manera equival a la dedicació de freqüències portadores a la transmissió d'informació, necessària per a una correcta desmodulació, que resten velocitat a la transmissió dels símbols generats per la font d'informació.

La funció de transferència del canal es pot mesurar a les freqüències i temps per als quals es transmet un símbol pilot. La mesura de la funció de transferència del canal consisteix en una normalització o comparació de la mostra rebuda respecte al símbol que s'espera. Si per a un temps determinat ( $nT_{OFDM}$ ) i per a una portadora determinada ( $f_k$ ) es transmet un símbol pilot, per exemple  $\alpha = +1$ , la corresponent mostra al desmodulador és igual a

$$y_k(nT_{OFDM} + T_p) = \alpha H_c(f_c + f_k) A_c + n_k(nT_{OFDM} + T_p), \quad (40)$$

on l'últim sumand representa el terme de soroll.

La mesura de la funció de transferència es realitza a partir del quocient o normalització següents:

$$\hat{H}_c(f_c + f_k) = \frac{y_k(nT_{OFDM} + T_p)}{\alpha} \quad (41)$$

A causa de la presència de la mostra de soroll,  $n_k(nT_{OFDM} + T_p)$ , la mesura anterior és una estimació i no coincideix de manera exacta amb la funció de transferència. Tanmateix, en general, és una estimació suficient per a la desmodulació correcta dels símbols.

Triant una graella de freqüències pilot prou densa en freqüències es podrà extrapolar la resposta del canal de les freqüències que no transporten símbols pilot a partir de les freqüències que sí en transporten. En temps, els símbols pilot han d'aparèixer de manera prou densa per a seguir les fluctuacions de variació temporal del canal. El teorema del mostratge recomana, com a mínim, que es produeixin dos símbols pilot dins del temps de coherència.

En utilitzar símbols pilot sense transport de bits generats per la font d'informació, es perd eficiència o capacitat de transmissió perquè disminueix la velocitat de transmissió de símbols útils respecte a l'amplada de banda.

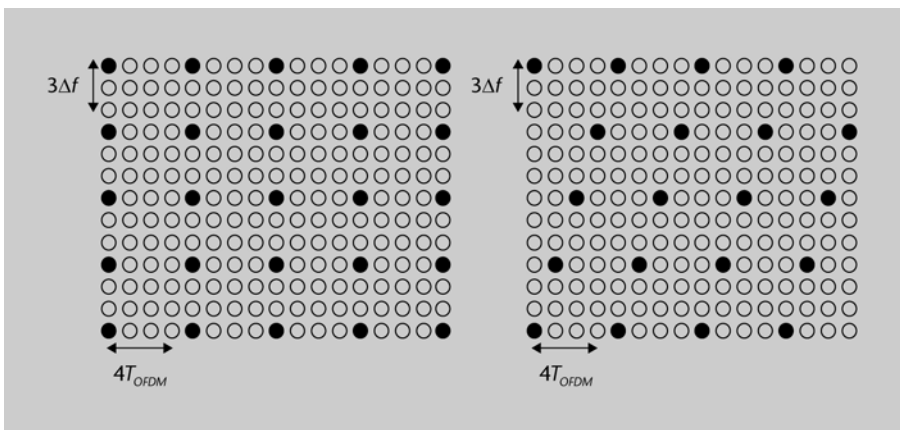


Figura 19. Exemples de graella de símbols pilot per a l'OFDM. Els punts negres corresponen a la transmissió dels símbols pilot. La funció de transferència del canal es mostra en una quarta part de les freqüències transmeses amb periodicitat igual a cada quatre símbols temporals OFDM. En l'estratègia que mostra la figura de la dreta, els temps de mostratge no coincideixen entre les diferents freqüències mostrejades. Aquesta és una estratègia que s'utilitza en l'estàndard DVB-T.

## 5.2. Interleaving i diversitat de canal

La codificació de canal en OFDM requereix una estratègia molt adequada per a introduir diversitat en la transmissió, de la mateixa manera que en un altre tipus d'aplicacions. En OFDM es realitza la codificació de canal tant per a possibilitar la diversitat temporal com la diversitat freqüencial.



Es produeix *diversitat en la transmissió* quan, per a un símbol determinat o per a un bit determinat, es transmeten o reben diferents repeticions o rèpliques des del transmissor al receptor. La diversitat es pot produir mitjançant diferents estratègies: diversitat temporal, diversitat freqüencial, diverses antenes en transmissió i/o en recepció. Quan es produeix diversitat, interessa que les diferents rèpliques que rep el receptor d'un símbol determinat estiguin afectades per fàdings estadísticament independents entre ells, amb l'objectiu d'evitar que totes les rèpliques pateixin un fàding profund simultàniament.

Perquè el guany per diversitat en OFDM sigui efectiva, com a pas previ a la codificació de símbols QAM, s'introdueix una etapa de codificació de canal i, per tant, una etapa de descodificació de canal com a pas posterior a la descodificació de símbols QAM. De fet, aquesta tècnica és la més senzilla i bàsica en un esquema de modulació basat en OFDM. Com es pot veure en l'últim apartat dedicat en part al sistema de radiodifusió de vídeo digital, en l'estàndard DVB s'utilitzen dos sistemes de codificació de canal: un s'aplica directament sobre la seqüència de bits, i l'altre, sobre la seqüència de símbols.

En tot cas, després de l'etapa de codificació de canal, tots els bits procedents d'una mateixa paraula codi (codis de bloc) o molt pròxims entre ells (codis convolucionals) se separen físicament, és a dir, es transmeten en temps i/o freqüències separades entre elles. D'aquesta manera, es vol independitzar al màxim la probabilitat que més d'un dels bits originàriament pròxims pateixi una gran atenuació o fàding profund durant la transmissió. Si la separació és temporal, interessa que dos bits procedents de la mateixa paraula codi estiguin separats durant la transmissió, almenys per un temps superior al temps de coherència del canal. Si la separació és freqüencial, interessa que dos bits procedents de la mateixa paraula codi estiguin separats almenys per un amplada major que l'amplada de banda de coherència del canal, que definit com l'invers de la dispersió temporal (*delay spread*), mesura intuïtivament la màxima distància entre dues freqüències que presenten atenuacions idèntiques. La separació dels bits en OFDM es realitza sempre de manera sistemàtica, mitjançant tècniques anomenades *d'entrellaçat* o *interleaving* (IL). En realitzar l'operació d'IL al modulador, es requereix desentrellaçar, és a dir, realitzar l'operació de desentrellaçat (DeIL) al desmodulador com a pas previ al descodificador de canal.

Les tècniques d'IL, tal com es presenta en el mòdul de "Codificació de canal", es poden dur a terme mitjançant dues estratègies diferenciades: IL de bloc i IL convolucional. A continuació veiem dos exemples d'estàndards amb els seus entrellaçadors corresponents.

**Exemple 4. IL de bloc**

En l'estàndard 802.11a,g de WLAN, entre el codificador de canal convolucional i el mapeatge dels símbols QAM, es fa un IL de bloc de  $K = 12$  files, i  $B = 16$  columnes ( $N = 192$ ). A la figura 20, es mostra un diagrama de blocs simplificat del modulador amb la inclusió del bloc d'IL.

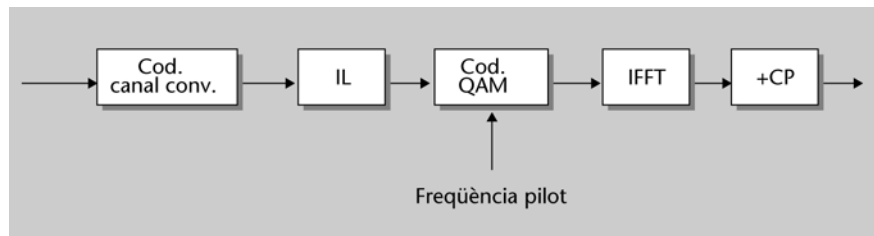


Figura 20. Modulador OFDM amb inclusió d'IL (Wi-Fi 802.11 a,g)

Per a l'operació d'IL, la seqüència de bits de sortida del codificador de canal es processa en trames de 192 bits cada una. A partir de cada trama, es forma la matriu d'entrellaçat i, posteriorment, es realitza la lectura dels bits.

$$(b[0] \ b[1] \ \dots \ b[191]) \Rightarrow \begin{pmatrix} b[0] & b[1] & \dots & b[15] \\ b[16] & b[17] & \dots & b[31] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b[176] & b[177] & \dots & b[191] \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b[0] \\ b[16] \\ \vdots \\ b[1] \\ b[17] \\ \vdots \\ b[179] \\ b[191] \end{pmatrix} \quad (42)$$

En el desmodulador, l'operació de desentrellaçat (DeIL) és anàloga a la descrita en IL, però la matriu de desentrellaçat ha de ser de 16 files i 12 columnes.

Mitjançant aquesta estratègia, s'assegura que els bits adjacents són mapats a símbols que corresponen a freqüències portadores no adjacents. De fet, la separació física que resulta en l'àmbit de portadores depèn del tipus de modulació. Si, per exemple, la modulació és 16QAM, els bits consecutius es transmeten separats per quatre portadores.

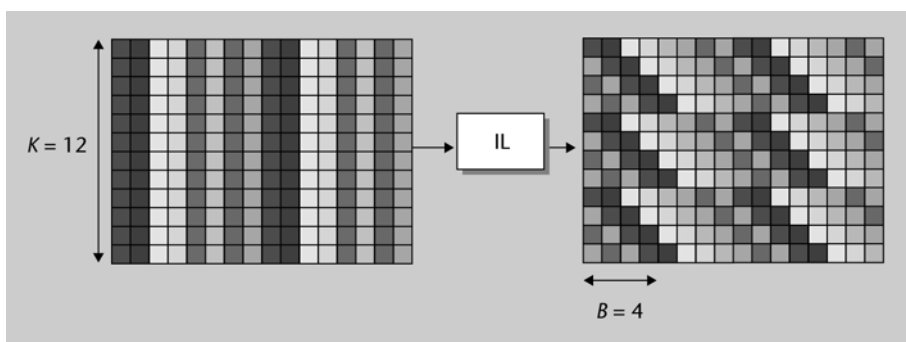


Figura 21. Acció d'un IL convolucional. Es diferencien les trames de  $K = 12$  utilitzant un color diferent per a cada una. A la sortida del bloc d'entrellaçat, es llegeixen els bits segons es disposa en la figura de la dreta, llegint-se per columnes.

**Exemple 5. IL convolucional**

L'estàndard DVB basat en OFDM es presenta de manera detallada en l'últim apartat, on es pot veure que porta dos codificadors de canal. Al modulador, el primer dels codificadors de canal és un codificador de canal de bloc i processa els bits agrupats en bytes, és a dir, en grups de 8 en 8 bits. L'IL que s'utilitza a la sortida d'aquest primer codificador convolucional opera directament sobre els bytes. Continua una estructura com la representada a la figura 21 amb els paràmetres següents:

$$\begin{aligned}
 B &= 12 \text{ bytes} = 96 \text{ bits} \\
 N &= 204 \text{ bytes} = 1.632 \text{ bits}
 \end{aligned} \quad (43)$$

En aquest exemple,  $N = 204$  bytes coincideix amb la longitud de la paraula codi del codificador de bloc utilitzat.

Gràcies a la tècnica d'IL, tots els bits procedents d'una mateixa paraula codi del codificador de canal es transmeten per portadores que resulten estadísticament independents entre elles, situació en la qual s'obté el guany màxim per diversitat.

En utilitzar un codi de canal de bloc per a aprofitar al màxim el guany per diversitat, es requereix que el nombre de freqüències portadores estadísticament independents per les quals es transmeten els bits d'una mateixa paraula codi sigui, com a mínim, igual a la distància de Hamming. Aquesta propietat és més difícil d'establir en utilitzar codis convolucionals; tanmateix, intuïtivament s'espera que el nombre de portadores independents a utilitzar superi significativament la distància lliure del codi. Si es compleixen les condicions anteriors, es pot afirmar que en canals amb fàdings selectius en freqüència, amb modulacions OFDM, és possible aconseguir una probabilitat d'error independent dels fàdings que presenta el canal. Com a contrapartida, s'ha d'augmentar l'energia mitjana transmesa per bit a partir de dos factors:

1) Un correspon a la relació entre el temps de símbol útil i el temps de símbol augmentat amb el temps de guarda:  $\frac{T_p}{T_p + T_G}$ .

El segon factor és inherent a la codificació de canal. Prenent com a exemple un codificador de bloc de distància de Hamming  $d_H$  i taxa de codificació  $R_c$ , el factor a causa de la codificació de canal equival a  $d_H R_c$ .

## 6. Espectre d'OFDM

En aquest apartat, es descriu un aspecte important de la implementació OFDM, que està relacionat amb l'ocupació espectral del senyal, tant en la banda assignada a la seva transmissió com en les anomenades *radiacions fora de banda*.

### 6.1. Efectes produïts en l'espectre en introduir prefix cíclic

Idealment, segons la descripció realitzada dels senyals OFDM, al voltant de cada  $N$  freqüència portadora es transmet una modulació QAM, amb els polsos base rectangulars de durada igual al temps de símbol OFDM. En el domini de la freqüència, cada modulació QAM, corresponent a una freqüència portadora, dona lloc a una funció de tipus sinc. Si  $TF$  és la transformada de Fourier d'un senyal temporal

$$TF\left(\Pi\left(\frac{t}{T_{OFDM}}\right)\right) = \frac{\text{sen}(\pi f T_{OFDM})}{\pi f} = T_{OFDM} \text{sinc}(f T_{OFDM}). \quad (44)$$

En la densitat espectral del senyal modulat total, la modulació QAM que es transmet a la freqüència portadora  $f_c + f_k$  contribueix a l'espectre total mitjançant un factor que és proporcional a

$$\text{sinc}^2\left((f - (f_c + f_k))T_{OFDM}\right). \quad (45)$$

Les diferents freqüències portadores estan separades entre elles  $\Delta f = \frac{1}{T_p} = \frac{1}{T_{OFDM} - T_G}$ . El fet d'haver introduït el temps de guarda repercuteix en el fet que les diferents funcions de tipus sinc sobre el senyal transmès no presenten els lòbuls laterals sintonitzats en freqüència. En augmentar el temps de símbol OFDM ( $T_{OFDM}$ ) respecte al temps útil de transmissió de símbol ( $T_p$ ), les funcions sinc corresponents en el domini de la freqüència mantenen la separació freqüencial  $\Delta f$ , mentre que disminueixen l'amplada tant del lòbul principal com dels lòbuls laterals. A la figura 22 es mostra esquemàticament l'efecte que es produeix sobre l'espectre del senyal modulat amb la inclusió del temps de guarda.

Sobre l'espectre resultant de la modulació OFDM, quan es calcula per a tots els components espectrals modulats per símbols QAM, la introducció del temps de guarda provoca dos efectes:

- Aparició d'un arrissament en la banda d'ocupació del senyal OFDM.
- Disminució del nivell dels lòbuls laterals.

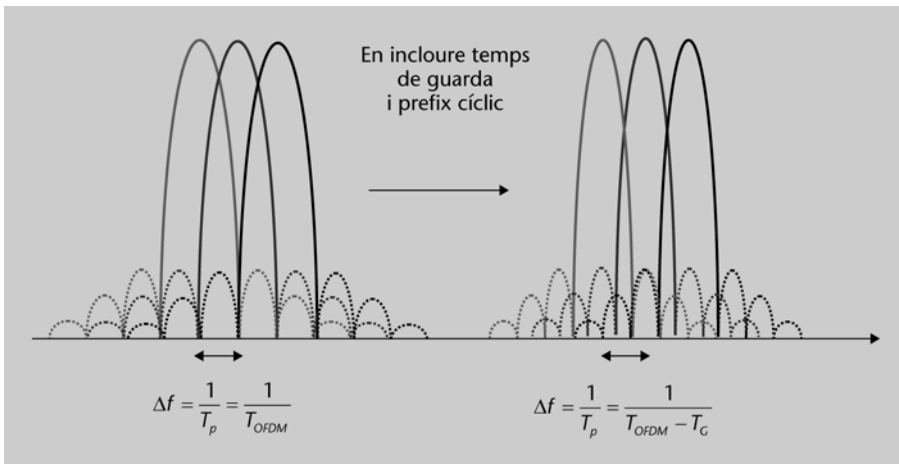


Figura 22. En la gràfica de l'esquerra, es mostren les funcions sinc corresponents a tres freqüències portadores consecutives en el cas en què no s'utilitza temps de guarda ( $T_p = T_{OFDM}$ ). En aquest cas, els lòbuls laterals de les diferents funcions estan sintonitzats entre ells, és a dir, tenen els zeros freqüencials coincidents. En la gràfica de la dreta, es mostren les funcions sinc corresponents a tres freqüències portadores consecutives en el cas en què sí s'utilitza temps de guarda ( $T_p < T_{OFDM}$ ). En aquest cas, els lòbuls laterals de les diferents sinc no estan sintonitzats entre ells, és a dir, no tenen els zeros freqüencials coincidents.

En conclusió, en l'efecte descrit anteriorment, la introducció del prefix cíclic en el temps de guarda entre cada dos símbols consecutius OFDM (característica introduïda com a estratègia per a combatre l'ISI que pot provocar un canal de resposta impulsional no ideal) genera una propietat molt favorable en el domini de la freqüència: la disminució del nivell dels lòbuls laterals respecte al principal.

## 6.2. Supressió de portadores

A continuació, es comenten dues estratègies més, que han estat específicament dissenyades en OFDM amb l'objectiu tant de moderar les radiacions fora de banda com de millorar l'espectre dins de la banda assignada:

- No transmissió de senyal a la freqüència central
- No transmissió de senyal a les freqüències laterals

En l'apartat 2.2, s'ha presentat la implementació pràctica del modulador basada en l'algoritme IFFT. Conseqüentment, el desmodulador s'implementa basat en l'algoritme FFT. En el disseny d'OFDM, es té un amplada de banda assignada a cada modulació que, en aquest apartat, s'anomena *amplada de banda de la modulació OFDM*,  $B_s$ .

En l'expressió (21), es mostra com l'amplada de banda coincideix amb  $N$  vegades l'invers del temps  $T_p$ , assignat a la part útil de la transmissió d'un símbol OFDM. És important recordar que  $T_p = T_{OFDM} - T_G$ . De fet, l'amplada de banda es divideix en  $N$  porcions d'amplada  $B_p$  assignades, cada una, a una portadora:

$$B_s = \frac{N}{T_p} = NB_p. \quad (46)$$

$N$  és una potència de 2, propietat que resulta forçada per la utilització dels algorismes IFFT i FFT. A la pràctica, les  $N$  freqüències assignades al senyal equivalent passa baix s'escullen segons els valors següents:

$$f_k = -\frac{M}{T_p}, -\frac{M-1}{T_p}, \dots, -\frac{1}{T_p}, +\frac{1}{T_p}, \dots, +\frac{M-1}{T_p}, +\frac{M}{T_p} \quad (47)$$

o, equivalentment,

$$f_k = -MB_p, -(M-1)B_p, \dots, -B_p, +B_p, \dots, +(M-1)B_p, +MB_p, \quad (48)$$

on  $M$  és un enter tal que  $M < \frac{N}{2}$ . Per exemple, en l'estàndard Wi-Fi 802.11a,g s'utilitzen els algorismes IFFT i FFT de  $N = 64$  portadores. Les freqüències assignades a la transmissió de senyal sobre l'equivalent passa baix són  $M = 26$  per cada banda, la qual cosa significa que en l'espectre únicament s'ocupen  $2M = 52$  de les seixanta-quatre possibles. A més, en la transmissió de dades es dediquen quatre de les portadores anteriors a freqüències pilot, per la qual cosa només transporten dades quaranta-vuit freqüències. A la figura 23, es mostra l'ocupació total per a aquest estàndard.

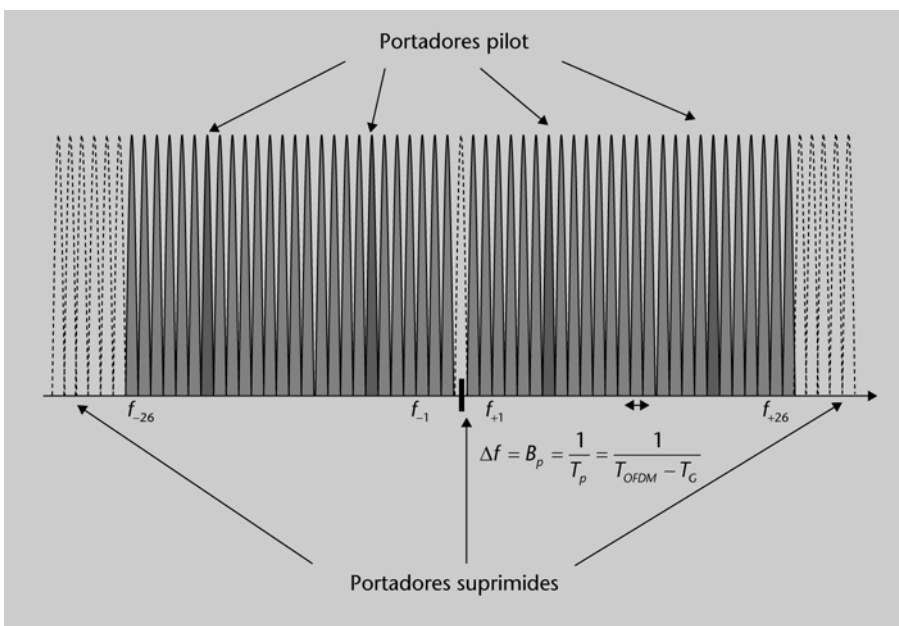


Figura 23. Exemple d'adjudicació de freqüències pilot i freqüències suprimides en l'estàndard Wi-Fi 802.11a,g

Operativament, per a aconseguir l'adjudicació anterior, dins del diagrama de blocs funcional corresponent, representat a la figura 20, les trames de dades que es presenten a l'entrada del bloc IFFT han de contenir quaranta-vuit símbols de dades i quatre símbols pilot, que es col·loquen segons les posicions indicades a la figura 23. La resta de posicions ( $12 = 64 - 52$ ), que corresponen a les portadores suprimides, es forcen a contenir valors iguals a zero a l'entrada del bloc IFFT.

Els avantatges obtinguts mitjançant les portadores suprimides són els següents:

- Amb l'eliminació de les portadores dels extrems, s'aconsegueix una amplitudina espectral més reduïda, el principal avantatge de la qual és afavorir que les radiacions fora de banda estiguin relativament delimitades.
- Amb l'eliminació de les portadores dels extrems, també s'aconsegueix l'efecte de sobremostrejat sobre els senyals digitals que millora l'efecte d'aliàsing o encavalcament freqüencial inherent a tota conversió D/A i a tota conversió A/D.
- Amb l'eliminació de la freqüència central, el component continu de tots els senyals passa baix sempre és nul, propietat que resulta molt convenient sempre que sigui probable trobar problemes de component continu en els equips.

#### **Exemple 8. Velocitat de transmissió de dades a Wi-Fi 802.11a,g**

Per a l'estàndard considerat, s'utilitzen dades que poden estar modulades en BPSK, en QPSK, en 16QAM o en 64QAM. El temps total del símbol OFDM és de  $4 \mu\text{s}$ , i un 20% d'aquest es dedica al temps de guarda per a la transmissió del CP. Considerant les dotze portadores suprimides i les quatre freqüències pilot de la figura 24, podem calcular la velocitat de bit real o útil per a cada una de les quatre modulacions considerades. Per a això, no considerarem la codificació de canal, que com ja sabem, és una estratègia que requereix una disminució de la velocitat de bit útil.

Dels  $N = 64$  símbols que potencialment es poden transmetre en el temps dedicat al símbol OFDM, únicament es transmeten  $K = 52$  símbols no nuls. Quatre dels anteriors corresponen a símbols pilot i no transporten dades, per la qual cosa únicament resulten  $K' = 48$  símbols complexos corresponents a dades. Per tant, considerant que, en el temps total dedicat a la transmissió de cada símbol OFDM, només es transporten  $K' = 48$  símbols, la velocitat de símbol resultant és la següent:

$$r = \frac{K'}{T_{\text{OFDM}}} = \frac{48}{4 \mu\text{s}} = 12 \text{ Msímbols/s.}$$

Amb modulació BPSK, la velocitat binària resulta

$$r_b = r = 12 \text{ Mbits/s.}$$

Amb modulació QPSK, la velocitat binària resulta

$$r_b = 2r = 24 \text{ Mbits/s.}$$

Amb modulació 16QAM, la velocitat binària resulta

$$r_b = 4r = 48 \text{ Mbits/s.}$$

Amb modulació 64QAM, la velocitat binària resulta

$$r_b = 8r = 96 \text{ Mbits/s.}$$

L'efecte provocat sobre l'espectre total OFDM és la mitjana de totes les funcions de tipus sinc no suprimides en el domini de la freqüència. Cada funció suporta la modulació adjudicada de tipus QAM. A la figura 24, es mostra un exemple d'espectre obtingut per simulació per a l'estàndard comentat.

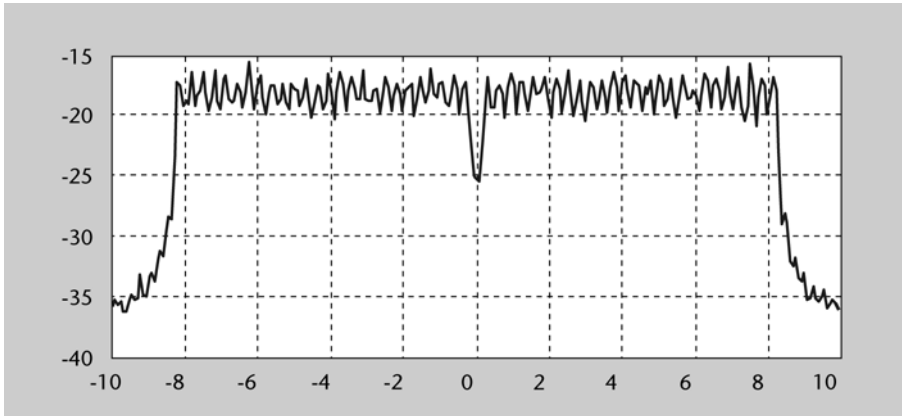


Figura 24. Espectre (dB) obtingut per simulació per a un senyal OFDM segons l'estàndard Wi-Fi 802.11a,g respecte a la freqüència (MHz)

### 6.3. Conformació de pols

Com a tècnica addicional per a mantenir l'espectre delimitat s'utilitza l'anomenada *conformació de polsos*, que consisteix a encavalcar temporalment els símbols OFDM consecutius durant un percentatge del temps de guarda que, en aquest apartat, s'anomena  $T_\delta$ .

S'ha vist que, amb el temps de guarda, cada símbol OFDM s'estén cíclicament fins a ocupar el temps total assignat. Mitjançant la conformació de pols, l'extensió cíclica del símbol es produeix per tots dos extrems: inici (CP) i final del símbol, i en tots dos extrems se suavitza sensiblement el pols durant un temps igual  $T_\delta$ .

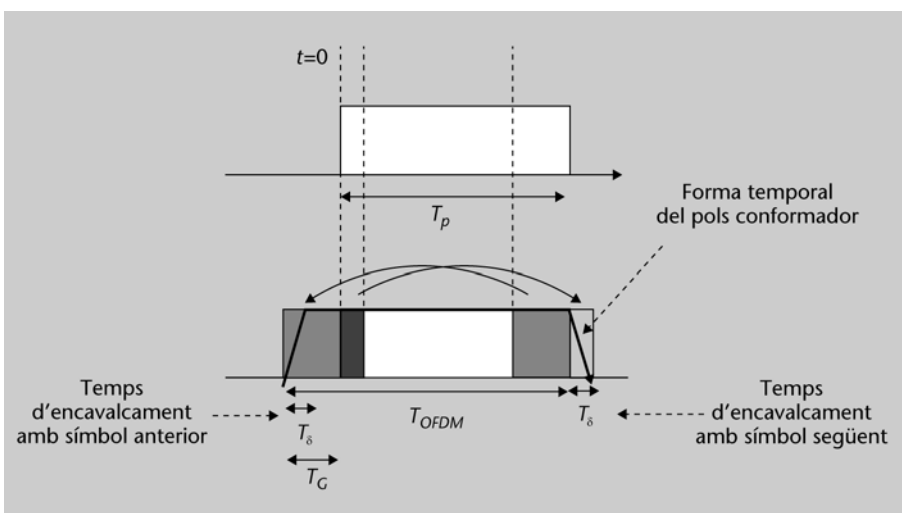


Figura 25. Extensió de símbol OFDM per a la inclusió del prefix cíclic i del temps d'encavalcament entre símbols mitjançant la inclusió del pols conformador

El temps d'encavalcament  $T_\delta$  sempre s'escull com un percentatge del temps de guarda i els valors típics per a aquest percentatge són els següents:

$$\delta = \frac{T_\delta}{T_G} = 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \tag{49}$$



L'avantatge obtingut rau en la millora significativa de les radiacions fora de banda amb l'increment del percentatge. Com a contrapartida, com més gran és el percentatge, pitjors són les condicions respecte al *delay spreads*,  $\tau_m$ , del canal tractades en l'apartat 3, ja que la nova condició és

$$\tau_m < T_G - T_\delta. \quad (50)$$

Per tant, el marge per a la durada de la resposta impulsional del canal és menor.

#### 6.4. Màscara espectral

Per raons pràctiques i qüestions diverses relacionades amb la planificació de xarxa, tots els estàndards basats en OFDM defineixen el que s'anomena la *màscara espectral de transmissió*, que no pot ser superada pels espectres de les respectives modulacions OFDM transmeses. La màscara espectral representa la màxima potència que es pot radiar fora de la banda assignada a una freqüència determinada a què se centra l'espectre del senyal OFDM. A la figura 26, es mostra la màscara de transmissió per a l'estàndard Wi-Fi 802.11a,g. Es veu que per a les freqüències amb una separació freqüencial superior a 11 MHz respecte a la freqüència central, l'atenuació ha de ser almenys de 20 dB respecte al màxim, mentre que per a les freqüències amb una separació superior a 30 MHz respecte a la freqüència central, l'atenuació ha de ser almenys de 40 dB respecte al màxim. El compliment d'aquests requeriments han de ser garantits. El fabricant dels dispositius sense fil que transmeten amb aquest estàndard ha de garantir el compliment d'aquests requisits.

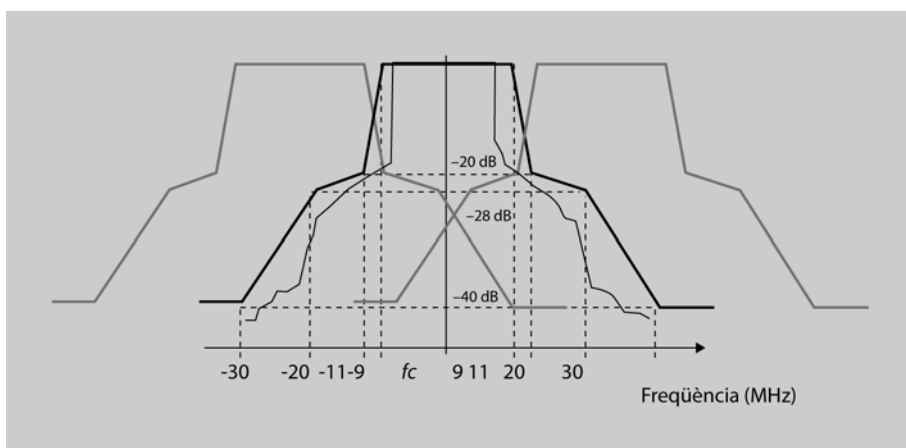


Figura 26. Màscara de transmissió per a l'estàndard Wi-Fi 802.11a,g obtinguda de la figura 120 del document IEEE Std 802.11 a-1999. En traçat gris es mostra la màscara que els senyals emesos en canals adjacents han de complir.

En les màscares espectrals d'estàndards dedicats a DVB i a DAB, es presenten característiques més restrictives, ja que es tenen marges de prop de 70 dB entre la banda passant i les bandes laterals, en lloc de 40 dB com en el cas de la figura 26.

## 7. Estàndards basats en OFDM

En aquest apartat es presenten els paràmetres referents a la modulació OFDM per a alguns casos particulars de les aplicacions habituals que utilitzen aquest tipus de modulació.

### 7.1. Sistema DAB

L'estàndard europeu de radiodifusió d'àudi digital (tradicionalment anomenat *ràdio comercial*) s'ha dissenyat perquè tingui certa flexibilitat en funció de l'entorn en què s'hagi d'utilitzar. La flexibilitat consisteix en quatre modes d'operació que es diferencien entre ells, especialment, en la durada del temps de símbol i del temps de guarda del símbol. Per exemple, per a grans àrees de cobertura terrestre en les quals es preveuen ecos de gran retard, interessa que el temps de guarda sigui gran (mode I), mentre que en el mode III, que constitueix el cas de menys temps de guarda, s'utilitza per a transmissions per satèl·lit.

Els quatre modes comparteixen l'amplada de banda assignada que queda especificada per la freqüència de mostratge dels senyals passabaix i es diferencien entre ells en el nombre de punts de l'FFT ( $N$ ) que, al seu torn, genera diferències en la durada del símbol OFDM i del temps de guarda entre altres paràmetres.

La freqüència de mostratge es fixa, per a tots els modes de transmissió, en 2.048 kHz. Aquesta característica és molt convenient, ja que canviar de modes, en general, permet utilitzar la mateixa estructura de maquinari entre els diferents sistemes receptors i transmissors, i únicament s'ha de canviar el programari per a implementar un cas o un altre. Normalment, els modes que treballen amb mides d'FFT més grans necessitaran targetes de memòria de més capacitat.

La taula següent mostra els paràmetres més rellevants per a cada un dels quatre modes.

Mode	$N$ (punts FFT)	$K$ (nombre de portadores no suprimides)	$\frac{1}{T_p} = \frac{f_s}{N}$ (amplada entre dues portadores consecutives)	$T_p$ (temps útil de símbol en ms)	$T_G = \frac{1}{4}T_p$ (temps de guarda en ms)	$T_{OFDM} = T_p + T_G$ (temps de símbol OFDM en ms)
I	2.048	1.536	1 KHz	1	0,25	1,25
IV	1.024	768	2 KHz	0,5	0,125	0,625
II	512	384	4 KHz	0,25	0,0625	0,3125
III	256	192	8 KHz	0,125	0,0313	0,1563

Taula 1. Taula de paràmetres OFDM per a DAB

## 7.2. Sistema DVB-T

L'estàndard de difusió de televisió digital terrestre és encara més flexible que el sistema d'àudio, ja que disposa de dos modes de transmissió en funció de la mida de l'FFT i, a més, per a cada mode es pot escollir entre una de les tres amplades de banda disponibles (6 MHz, 7 MHz, 8 MHz) amb diferents opcions per al temps de guarda ( $T_G = \frac{1}{4}T_p, \frac{1}{8}T_p, \frac{1}{16}T_p, \frac{1}{32}T_p$ ), la qual cosa genera un ampli ventall de possibilitats. La velocitat de bit màxima assequible, considerant únicament dades d'informació, és de 26,13 Mbits/s (28,4 Mbits/s després de la codificació de canal).

Els dos modes considerats en l'estàndard s'anomenen *mode 2k* i *mode 8k*.

En el mode 2k, la mida de l'FFT és de 2.048 i es treballa amb 1.704 portadores no nul·les. La durada dels símbols OFDM és de prop de 300  $\mu$ s i són els d'utilització més crítica en àrees de gran cobertura, ja que són els que presenten condicions més restrictives per a la durada de la resposta impulsional del canal. D'altra banda, resulta més convenient si es tenen restriccions d'eficiència computacional, ja que la mida de l'FFT del mode 2k és inferior a la del mode 8K. De fet, es va començar a utilitzar per a la difusió de televisió digital a Anglaterra, i avui en dia aquest és l'únic país europeu en què està estandarditzada.

En el mode 8k, la mida de l'FFT és de 8.192 i es treballa amb 6.816 portadores no nul·les. La durada dels símbols OFDM és de prop d'1,1 ms i és la d'utilització més generalitzada. La tecnologia actual permet dissenyar receptors de TDT amb capacitat de realitzar FFT de 8.192 punts de l'ordre de temps d'1,1 ms.

S'ha estandarditzat a més el mode 4k, que s'ha dissenyat exclusivament per a terminals *handheld* com agendes electròniques, telèfons mòbils, PDA, etc. En el mode 4k, la mida de l'FFT és de 4.096 i es treballa amb 3.408 portadores no nul·les. La durada dels símbols OFDM és de prop de 550  $\mu$ s.

La taula següent mostra els paràmetres més rellevants per a cada mode estandarditzat en difusió terrestre, considerant una amplada de banda fixa i el màxim temps de guarda possible.

- Freqüència de mostratge:

$$f_m = \frac{64}{7} \text{ MHz} \quad (51)$$

- Amplada de banda:  $B_s = 8 \text{ MHz}$
- Temps de guarda:  $T_G = \frac{1}{4}T_p$

Mode	N (punts FFT)	K (nombre de portadores no suprimides)	$\frac{1}{T_p} = \frac{f_m}{N}$ (amplada entre dues portadores consecutives)	$T_p$ (temps útil de símbol en ms)	$T_G = \frac{1}{4}T_p$ (temps de guarda en ms)	$T_{OFDM} = T_p + T_G$ (temps de símbol OFDM en ms)
2k	2.048	1.704	4,4643 kHz	0,224	0,056	0,28
8k	8.192	6.816	1,1161 kHz	0,896	0,224	1,12

Taula 2. Taula de paràmetres OFDM per a DVB

### 7.3. Sistema Wi-Fi IEEE 802.11a,g i Wimax 802.16

És important aclarir cada concepte que apareix en el títol, ja que, si bé usualment s'utilitzen de forma indistintes, hi ha una subtil diferència entre **Wi-Fi** i protocol IEEE 802.11, i entre Wimax i 802.16.

L'IEEE 802.11 a,g són dos protocols establerts per un grup de l'IEEE de comunicacions sense fil de curt abast. Defineixen l'ús dels dos nivells més baixos de l'arquitectura OSI (capes física i d'enllaç de dades), especificant les seves normes de funcionament en una xarxa de tipus àrea local WLAN, és a dir, en entorns reduïts, tant en l'àmbit domèstic com en l'interior d'un edifici en general. No se'n recomana l'ús per a abasts majors de 100 m, encara que aquesta característica sempre depèn de la velocitat màxima de transmissió a què s'utilitzi el sistema, que pot anar de 6 Mbits/s a 54 Mbits/s.

**Wi-Fi** és l'estàndard de WLAN que es basa en el protocol de l'IEEE 802.11a,g. Es pot dir que el protocol és més ampli que l'estàndard, ja que en l'estàndard es fixen casos particulars de tots els oferts pel protocol. Amb l'estàndard, es regulen les normes d'ús i de comercialització dels diferents productes basats en aquesta tecnologia.

De la mateixa manera, Wimax és un estàndard per a comunicacions entre xarxes sense fil d'àrea local basat en el protocol 802.16 i, respecte al Bifi, té l'avantatge que permet àrees de cobertura majors i majors velocitats de bit o amplades de banda.

Els estàndards 802.11 b (el b no està basat en OFDM) i 802.11 g utilitzen bandes de 2,4 GHz que no necessiten permisos per al seu ús. Aquests sistemes poden rebre interferències procedents de forns microones, telèfons sense fil i altres equips que utilitzin la mateixa banda de 2,4 GHz.

L'estàndard 802.11 a està basat en OFDM, igual que el g. Entre totes dues modalitats (a i g), l'única diferència, encara que important, és la freqüència portadora central a què transmeten, que en el cas de l'estàndard a és aproximadament de 5,4 GHz i en el cas de l'estàndard g és aproximadament de 2,3 GHz.

L'estàndard 802.16 està pensat per a una generació més avançada que els estàndards de xarxes sense fil 802.11, encara que comprèn un ampli rang de freqüències d'emissió com, per exemple, la banda que va de 10 GHz a 66 GHz. La versió estandarditzada per Wimax proposa utilitzar bandes d'ocupació a 2,4 GHz i a 3,4 GHz aproximadament. Les mides d'FFT més grans que preveu són de 2.048 i 4.096 punts, mitjançant una estratègia anomenada d'OFDMA (OFDM *access*), que significa que les diferents portadores de l'algoritme FFT es reparteixen, per exemple, entre els dos enllaços

establerts entre un punt d'accés i un terminal, o bé entre diferents usuaris.

Aquesta propietat s'anomena *escalabilitat*.

Protocol	$N$ (punts FFT)	$K$ (nombre de portadores no suprimides)	$\frac{1}{T_p} = \frac{f_m}{N}$ (amplada entre dues portadores consecutives)	$T_p$ (temps útil de símbol en ms)	Temps de guarda en ms	$T_{OFDM} = T_p + T_G$ (temps de símbol OFDM en ms)
Wi-Fi 802.11 a,g	64	52	312,5 kHz	0,0032	$T_G = \frac{1}{4}T_p = 0,0008$	0,004
Wimax 802.16	2.048	192	10,94 kHz	0,0914	$T_G = \frac{1}{8}T_p = 0,0114$	0,1029

Taula 3. Taula de paràmetres OFDM per a WLAN: Wi-Fi i Wimax

## Resum

Aquest mòdul està dedicat a l'estudi de les modulacions OFDM o de multipor-tadora, que es presenten com una alternativa a les modulacions de portadora simple.

Inicialment es realitza una anàlisi detallada de la forma dels senyals OFDM, mitjançant una interpretació com un conjunt de  $N$  modulacions lineals transmeses en paral·lel (sense pèrdua de generalitat s'ha fixat com a habitual la modulació QAM). S'emfatitza especialment la distribució temps/freqüència, ja que la transmissió d'un símbol originàriament codificat a partir d'una constel·lació de tipus QAM, en ser transmès mitjançant OFDM, s'expandeix en temps i es comprimeix en freqüència. El temps queda aproximadament multiplicat per  $N$ , i l'amplada de banda que ocupa cada símbol queda dividida per  $N$  en comparar-se amb una modulació de portadora simple tradicional.

La implementació pràctica de la modulació OFDM es basa en l'algoritme IFFT per fer-la computacionalment eficient. Anàlogament, la desmodulació OFDM es basa en l'algoritme FFT.

Per a entendre els avantatges de la modulació multipor-tadora davant les modula-cions de portadora simple, és necessari entendre la naturalesa dels canals de co-municacions, en els quals usualment es produeixen molts ecos o rebots del senyal entre el transmissor i el receptor, i hi sol haver una velocitat relativa entre tots dos. El fenomen físic dels rebots es modela a partir de la resposta impulsional del canal i es caracteritza mitjançant el paràmetre de *delay spread* o dispersió temporal.

En la modulació OFDM, s'inclou l'anomenat *prefix cíclic* en el temps de guarda entre cada dos símbols, com l'estratègia que evita l'ISI entre símbols consecutius i, a més, conserva l'ortogonalitat entre les diferents freqüències utilitzades per a la transmissió. Sempre que el retard màxim provocat per ecos sigui inferior al temps de guarda, amb aquesta estratègia, l'equalització de la funció de transferència del canal consisteix en una simple normalització o divisió de cada mostra detectada per la mateixa funció de transferència o, si és desconeguda, per una estimació d'aquesta.

El fet de permetre retards o ecos en el senyal rebut fa possible que la difusió de televisió digital i de radi digital cobreixi un gran territori mitjançant xarxes de freqüència simple, descrites breument en la introducció d'aquest mòdul.

S'introdueixen els anomenats *símbols pilot*, els valors prèviament acordats i estandarditzats dels quals no transporten bits de dades provinents de la font d'informació, sinó que transporten símbols coneguts en recepció i que s'utilitzen en recepció per a funcionalitats típiques de sincronisme i de desmodula-

ció. Destaca la funcionalitat que permet utilitzar els símbols pilot perquè en recepció es pugui estimar la funció de transferència del canal que s'utilitza en l'equalització, per la qual cosa la graella de col·locació de freqüències pilot s'ha de dissenyar tenint en compte la variabilitat temporal del canal.

Un aspecte menys tractat en aquest mòdul (per haver-se tractat en mòduls anteriors) però molt important en OFDM, és el fet que es realitza una codificació de canal sobre els bits (COFDM) i una dispersió d'aquests, tant en temps com en freqüència, mitjançant tècniques d'entrellaçament per a millorar la probabilitat d'error.

Una característica molt important en OFDM és l'espectre resultant de la modulació. Atès que l'espectre és un *recurs limitat* i a repartir, els estàndards són estrictes en definir la màscara espectral a què s'ha de cenyir cada senyal transmès. Per a complir la màscara esmentada, s'utilitzen estratègies addicionals, com la supressió de portadores i conformació de polsos temporals.

Òbviament, tant la inclusió del prefix cíclic com la inclusió de freqüències pilot en les estratègies de codificació de canal i la supressió d'algunes freqüències portadores, o bé resta velocitat de transmissió al sistema o bé en disminueix la qualitat, ja que comporten una pèrdua d'energia invertida per bit. Aquest és un aspecte important a tenir en compte a l'hora d'avaluar qualsevol sistema de transmissió.





## Activitats

La resolució dels exercicis següents es proposa com a complement de l'estudi del mòdul. Recomanem que es realitzin utilitzant una estratègia sistemàtica. En general, és convenient resoldre els exercicis de manera general, treballant amb les variables i paràmetres de manera genèrica, i substituir els valors numèrics concrets al final dels apartats. Així, es facilita la pròpia correcció i seguiment de l'exercici i s'obté una visió més àmplia que la del cas particular que s'estigui analitzant.

### 1. Càlcul de paràmetres de variació temporal de canal

En un sistema OFDM per a radiodifusió DAB en el mode IV, un vehicle a una velocitat de 120 km/h rep senyal a una freqüència portadora d'1,5 GHz.

- Trobeu els paràmetres de variació temporal del canal resultant.
- Quants símbols OFDM es poden transmetre entre cada dues estimacions de la funció de transferència del canal?
- Repetiu els dos apartats anteriors per a una velocitat de 48 km/h.

Vegeu la taula 1 de l'apartat 7.1 d'aquest mòdul.

### 2. Càlcul de velocitat de bit

En un sistema OFDM per a difusió de televisió en el mode 8k, s'utilitza el pla següent de freqüències pilot per a possibilitar l'estimació del canal:

- En tots els símbols OFDM, es dediquen 177 portadores pilot de manera contínua i permanent.
- Adicionalment, es dedica una freqüència pilot per cada 12 portadores (tots els símbols QAM transmesos en ordre  $n$ , essent  $n$  múltiple de 12) la posició de les quals en freqüència canvia de símbol a símbol.
- Un percentatge determinat dels símbols coincideix amb els pilots transmesos de manera contínua.

Tenint en compte les dades anteriors, resolcu els punts següents:

- Calculeu la velocitat de símbol útil de la transmissió.
- Si desmodula en 16 QAM i els bits provenen d'una codificació de canal de raó de codificació  $\frac{1}{2}$ , trobeu la velocitat de bit resultant.
- Si desmodula en 64 QAM i els bits provenen d'una codificació de canal de raó de codificació  $\frac{3}{4}$ , trobeu la velocitat de bit resultant.

Vegeu la taula 2 de l'apartat 7.2 d'aquest mòdul.

### 3. Avaluació de la probabilitat d'error

En un sistema de comunicacions, s'ha de transmetre una seqüència de bits a una velocitat d'1 Mbit/s, i es pot disposar d'un quocient d'energies en recepció igual a  $\frac{E_b}{N_0}$ . S'opta pel mode Wi-Fi amb els paràmetres d'OFDM corresponents.

- Per a la modulació QPSK, realitzeu les estimacions següents:
  - Una estimació de la probabilitat d'error, sense tenir en compte la codificació de canal i en un canal ideal AWGN.
  - Una estimació de la probabilitat d'error, sense tenir en compte la codificació de canal i en un canal de tipus Rayleigh.
- Per a modulació 16QAM, realitzeu les estimacions següents:
  - Una estimació de la probabilitat d'error, sense tenir en compte la codificació de canal i en un canal ideal AWGN.
  - Una estimació de la probabilitat d'error, sense tenir en compte la codificació de canal i en un canal de tipus Rayleigh.

#### 4. Avaluació d'amplada de banda en DVB

En les condicions establertes per a la taula de paràmetres OFDM corresponent a l'estàndard de DVB, feu les comprovacions següents:

- Verifiqueu el valor establert per a l'amplada de banda de 8 MHz en el mode de transmissió de 8k.
- Per al mateix mode 8k, si es canvia la freqüència de mostratge a  $f_m = \frac{48}{7} \text{ MHz}$  mantenint els valors de  $N$  i  $K$ , proveu que la nova amplada de banda és de 6 MHz, i calculeu els valors obtinguts per als temps de símbol útil, temps de símbol OFDM, i temps de guarda.

Vegeu la taula 2 de l'apartat 7.2 d'aquest mòdul.

#### 5. Retards en Wi-Fi

En diferents entorns on operen xarxes de tipus Wi-Fi basades en el protocol IEEE 802.11 a, s'han mesurat els valors de màxim retard o dispersió temporal següents:

- 30 ns en un banc
- 100 ns en un edifici d'oficines
- 200 ns en un centre comercial

- Determineu si són valors permesos en les condicions establertes en la taula de paràmetre per a WLAN (Wi-Fi).
- Repetiu els càlculs anteriors si, mantenint la freqüència de mostratge, es doblés el nombre de punts de l'FFT.
- Repetiu els càlculs anteriors si, mantenint la freqüència de mostratge, es dividís per dos el nombre de punts de l'FFT.

Vegeu la taula 3 de l'apartat 7.3 d'aquest mòdul.

#### 6. Proposta de sessions pràctiques

En aquesta activitat, es proposa la realització de diferents simulacions amb l'ajuda total o parcial de les miniaplicacions o *applets* programades.

- Simuleu efectes (millores) obtinguts en l'espectre OFDM en encavalcar els símbols OFDM consecutius.
- Simuleu efectes (millores) obtinguts en l'espectre OFDM en utilitzar diferents opcions per al temps de guarda.
- Simuleu efectes de sistemes no lineals en modulacions de tipus OFDM i en modulacions de portadora simple.

## Bibliografia

**Schulze, H.; Luders, C.** (2005). *Theory and applications of OFDM and CDMA. Wideband Wireless Communications*. Chichester (GB): Wiley.

**ETSI Standard: EN 300 744 V1.5.1** (2004-11). *Digital Video Broadcasting (DVB); Framing structure, channel coding and modulation for digital terrestrial television*. Text baixat de la web d'ETSI.

**IEEE Std 802.11a. Part 11.** *Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical layer (PHY) specifications*.

## Annexos

### 1. Distribució de Rayleigh

Siguin  $x, y$  dues variables aleatòries gaussianes. Totes dues són de mitjana nul·la i de variància  $\sigma^2$  i estadísticament independents entre elles.

La variable aleatòria  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  presenta una distribució de tipus Rayleigh de paràmetre  $\sigma^2$ , i la seva funció de densitat de probabilitat és igual a:

$$f_z(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\sigma^2}\right).$$

### 2. Distribució de Rice

Suposem que  $x, y$  són dues variables aleatòries gaussianes. Totes dues són de variància  $\sigma^2$  i estadísticament independents entre elles. La mitjana de la variable  $x$  és igual a  $m$ , i la mitjana de la variable  $y$  és nul·la.

La variable aleatòria  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  presenta una distribució de tipus Rice de paràmetres  $m, \sigma^2$ , i la seva funció de densitat de probabilitat és igual a:

$$f_z(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2 + m^2}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{mz}{\sigma^2}\right),$$

amb  $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(x \cos \theta) d\theta$  igual a la funció de Bessel modificada de primera classe i ordre 0.

### 3. Límit superior de la funció àrea de la gaussiana

La figura 27 s'inclou per a verificar una cota superior de la funció àrea de la gaussiana, que s'utilitza freqüentment per a realitzar aproximacions de la probabilitat d'error, especialment en anàlisi de guanys per diversitat.

Suposem que la funció àrea de la funció gaussiana és la següent:

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$$

Aquesta funció està delimitada superiorment:

$$Q(\sqrt{2}x) = Q(1.4142x) \leq \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

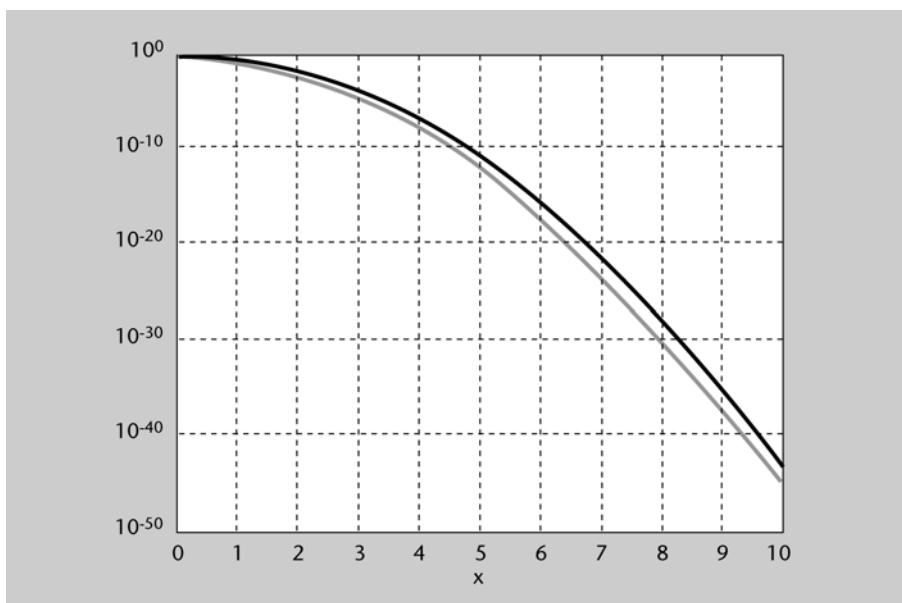


Figura 27. En gris, es representa la funció  $Q(\sqrt{2}x)$  i, en negre, la seva cota superior per a valors  $0 \leq x \leq 10$ .

