Inferència d'informació per a una població

Distribucions mostrals i teorema central del límit. Intervals de confiança. Contrastos d'hipòtesi per a una població

Blanca de la Fuente

PID_00161054

UOC
Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

Introducción

L'objectiu de la inferència estadística és obtenir informació sobre una població, partint de la informació que conté la mostra. La selecció de la mostra ha de garantir la representativitat d'aquesta mostra, cosa que s'aconsegueix triant-la a l'atzar mitjançant diferents procediments de mostreig que estudiem en el mòdul 5.

Una vegada seleccionada una mostra, tenim un conjunt de valors; en aquest cas, els *mètodes descriptius* estudiats en el mòdul 1 faciliten l'anàlisi d'aquests valors mostrals. El problema que ara abordem és l'extensió d'aquests resultats al conjunt de la població o, dit d'una altra manera, respondre a l'interrogant següent: atesa certa informació mostral, què podem afirmar de la població?

La solució d'aquest problema és l'objectiu de la *inferència estadística*.

Fins ara s'havia suposat que els valors dels paràmetres de les distribucions de probabilitat eren coneguts. Això, però, gairebé no passa mai, de manera que hem d'usar les dades mostrals per a fer-ne l'estimació. Els **estimadors** proveeixen valors a aquests paràmetres.

Quan les inferències que es fan es refereixen a característiques poblacionals concretes, és necessària una etapa de disseny d'estimadors. En aquest mòdul presentem els conceptes bàsics per a estimar la proporció, la mitjana i la variància de la població.

Un enfocament alternatiu és indicar un rang de valors, entre els quals hi ha d'haver el paràmetre amb una determinada precisió: aquesta és la idea d'un **interval de confiança**.

A continuació plantegem en aquest mòdul el problema del **contrast d'hipòtesi**, desenvolupant mètodes que permeten contrastar la validesa d'una conjectura o d'una afirmació utilitzant dades mostrals. El procés comença quan un investigador formula una hipòtesi sobre la naturalesa d'una població. La formulació d'aquesta hipòtesi implica clarament l'elecció entre dues opcions; tot seguit l'investigador en selecciona una basant-se en els resultats d'un estadístic calculat a partir d'una mostra aleatòria de dades.

Objectius

Els objectius acadèmics del present mòdul es descriuen a continuació:

1. Explorar les distribucions de la mitjana, de la proporció i de la variància mostral.

2. Aplicar el teorema central del límit.

3. Crear intervals de confiança.

4. Utilitzar la distribució *t* en una prova d'hipòtesi.

5. Utilitzar la distribució khi quadrat (χ^2) en una prova d'hipòtesi.

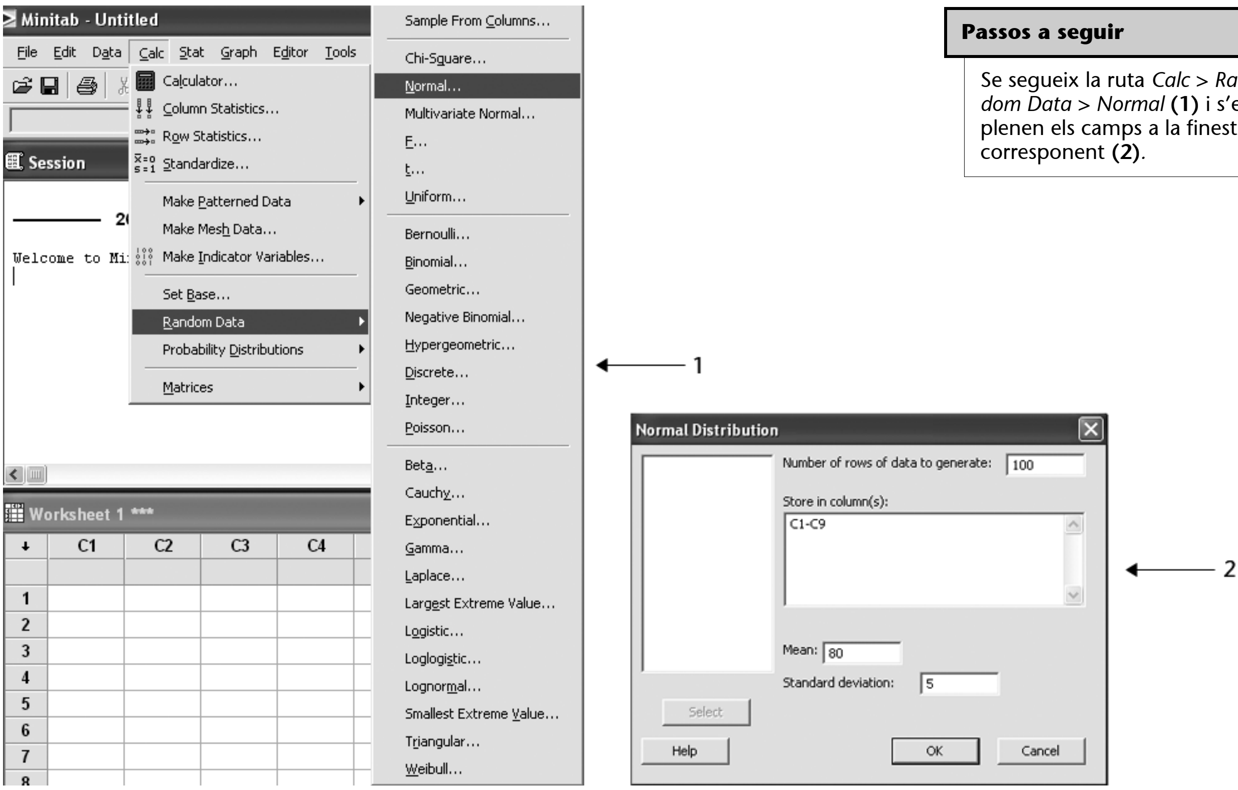
1. Distribucions mostrals i teorema central del límit

Una mostra aleatòria permet fer una inferència sobre certes característiques de la distribució de la població. Aquesta inferència es basa en algun **estadístic**, és a dir, en alguna funció particular de la informació mostral. La **distribució mostral** d'aquest estadístic és la distribució de probabilitats dels valors que pot prendre l'estadístic al llarg de totes les possibles mostres amb el mateix nombre d'observacions que es poden extreure de la població.

Per exemple, en la distribució normal, els dos paràmetres són la mitjana de la població μ i la desviació estàndard poblacional σ. Podem estimar el valor μ calculant la mitjana mostral, $\bar{x}$, i el valor de σ mitjançant el càlcul de la desviació típica mostral, s. En aquest cas, la mitjana mostral, $\bar{x}$, i la desviació típica mostral, s, són els estadístics. En el cas de la distribució binomial, els paràmetres són n i p. Per a estimar el paràmetre proporció poblacional, p, utilitzem l'estadístic proporció mostral, $\hat{p}$.

L'estudi de les distribucions mostrals el podem il·lustrar creant amb el Minitab 100 mostres de dades aleatòries normals amb una mitjana 80 i una desviació típica 5, amb 9 observacions de cada mostra (figura 1). A partir de dades aleatòries creem una columna de dades que contingui la mitjana de cada mostra.

Figura 1. Passos a seguir per a estudiar una distribució mostral

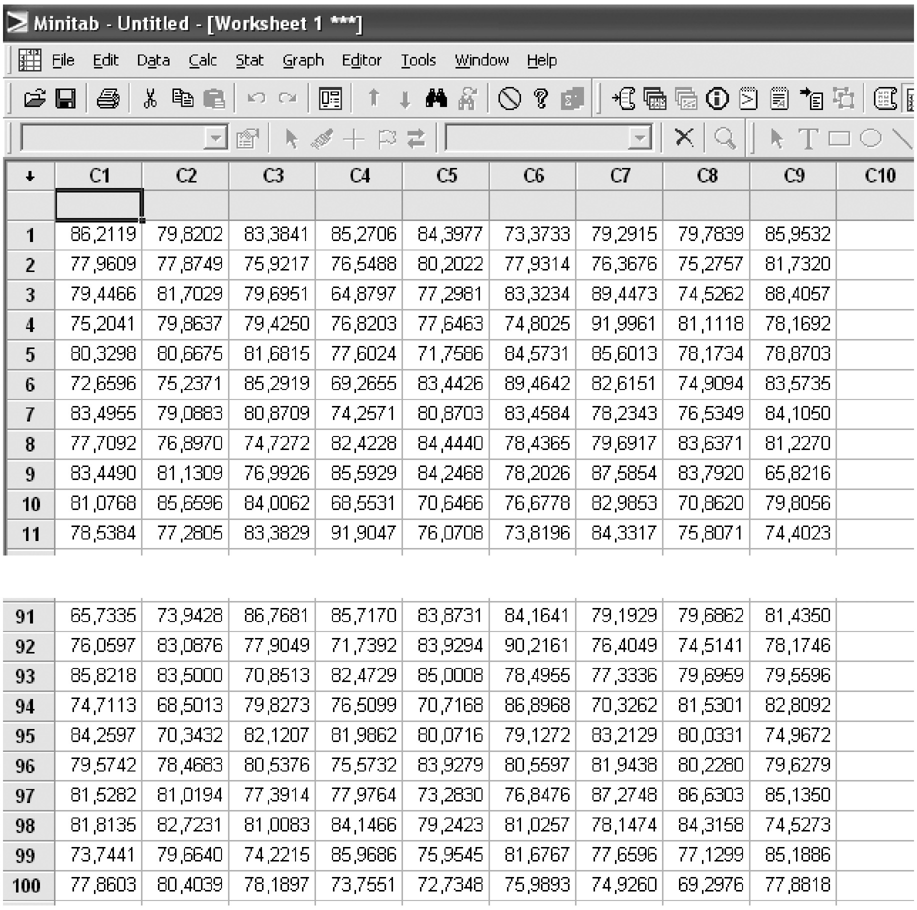


Passos a seguir

Se segueix la ruta *Calc* > *Random Data* > *Normal* **(1)** i s'emplenen els camps a la finestra corresponent **(2)**.

S'ha generat així una matriu de 9 columnes i 100 files (figura 2). Cada component d'aquesta matriu és una observació aleatòria provinent d'una distribució normal de mitjana 80 i desviació estàndard 5.

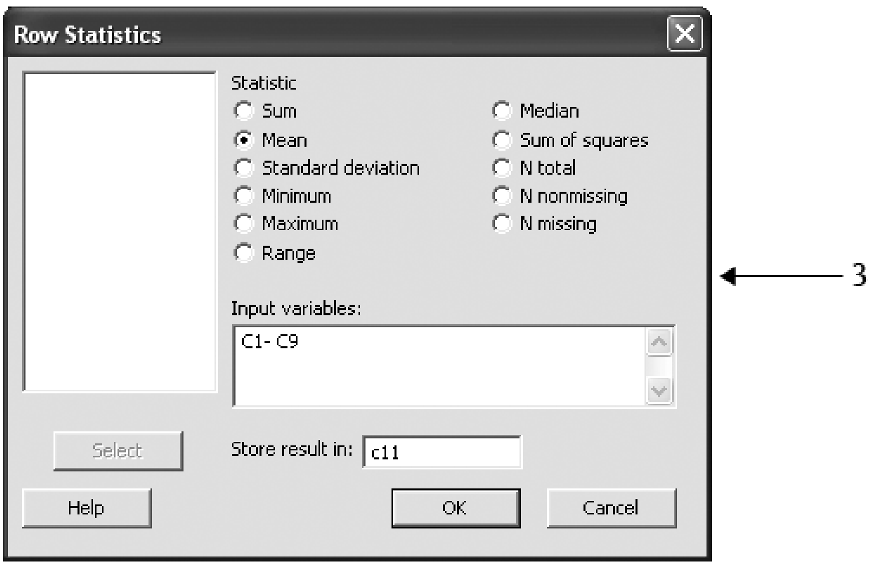
Figura 2. Resultat d'una matriu



↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
1	86,2119	79,8202	83,3841	85,2706	84,3977	73,3733	79,2915	79,7839	85,9532	
2	77,9609	77,8749	75,9217	76,5488	80,2022	77,9314	76,3676	75,2757	81,7320	
3	79,4466	81,7029	79,6951	64,8797	77,2981	83,3234	89,4473	74,5262	88,4057	
4	75,2041	79,8637	79,4250	76,8203	77,6463	74,8025	91,9961	81,1118	78,1692	
5	80,3298	80,6675	81,6815	77,6024	71,7586	84,5731	85,6013	78,1734	78,8703	
6	72,6596	75,2371	85,2919	69,2655	83,4426	89,4642	82,6151	74,9094	83,5735	
7	83,4955	79,0883	80,8709	74,2571	80,8703	83,4584	78,2343	76,5349	84,1050	
8	77,7092	76,8970	74,7272	82,4228	84,4440	78,4365	79,6917	83,6371	81,2270	
9	83,4490	81,1309	76,9926	85,5929	84,2468	78,2026	87,5854	83,7920	65,8216	
10	81,0768	85,6596	84,0062	68,5531	70,6466	76,6778	82,9853	70,8620	79,8056	
11	78,5384	77,2805	83,3829	91,9047	76,0708	73,8196	84,3317	75,8071	74,4023	
91	65,7335	73,9428	86,7681	85,7170	83,8731	84,1641	79,1929	79,6862	81,4350	
92	76,0597	83,0876	77,9049	71,7392	83,9294	90,2161	76,4049	74,5141	78,1746	
93	85,8218	83,5000	70,8513	82,4729	85,0008	78,4955	77,3336	79,6959	79,5596	
94	74,7113	68,5013	79,8273	76,5099	70,7168	86,8968	70,3262	81,5301	82,8092	
95	84,2597	70,3432	82,1207	81,9862	80,0716	79,1272	83,2129	80,0331	74,9672	
96	79,5742	78,4683	80,5376	75,5732	83,9279	80,5597	81,9438	80,2280	79,6279	
97	81,5282	81,0194	77,3914	77,9764	73,2830	76,8476	87,2748	86,6303	85,1350	
98	81,8135	82,7231	81,0083	84,1466	79,2423	81,0257	78,1474	84,3158	74,5273	
99	73,7441	79,6640	74,2215	85,9686	75,9545	81,6767	77,6596	77,1299	85,1886	
100	77,8603	80,4039	78,1897	73,7551	72,7348	75,9893	74,9260	69,2976	77,8818	

Considerarem que cada una de les files obtingudes és una mostra, i el que farem ara serà calcular la mitjana associada a cada una d'aquestes 100 mostres (figura 3):

Figura 3. Passos a seguir per a calcular les mitjanes



Passos a seguir

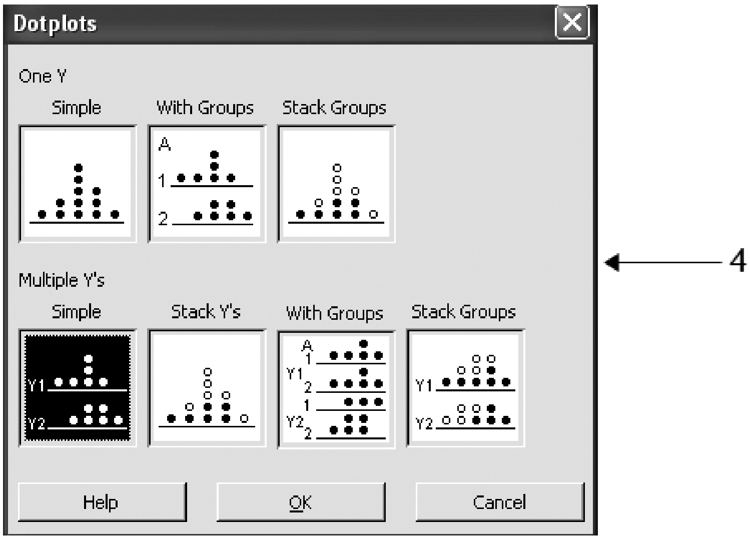
Un cop generades les dades se segueix la ruta *Calc* > *Row Statistics* i s'emplenen els camps a la finestra corresponent **(3)**.

A la columna C11 de la figura 4 hi ha 100 nous valors (les mitjanes). En la figura 5 es mostren els *dotplots* associats a les columnes C1 (que representa 100 valors aleatoris obtinguts d'una de normal 80-5), i C11:

Figura 4. Resultat de l'anàlisi

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12
											x-barra	
1	86,2119	79,8202	83,3841	85,2706	84,3977	73,3733	79,2915	79,7839	85,9532		81,9429	
2	77,9609	77,8749	75,9217	76,5488	80,2022	77,9314	76,3676	75,2757	81,7320		77,7572	
3	79,4466	81,7029	79,6951	64,8797	77,2981	83,3234	89,4473	74,5262	88,4057		79,8583	
4	75,2041	79,8637	79,4250	76,8203	77,6463	74,8025	91,9961	81,1118	78,1692		79,4488	
5	80,3298	80,6675	81,6815	77,6024	71,7586	84,5731	85,6013	78,1734	78,8703		79,9175	
6	72,6596	75,2371	85,2919	69,2655	83,4426	89,4642	82,6151	74,9094	83,5735		79,6065	
7	83,4955	79,0883	80,8709	74,2571	80,8703	83,4584	78,2343	76,5349	84,1050		80,1016	
8	77,7092	76,8970	74,7272	82,4228	84,4440	78,4365	79,6917	83,6371	81,2270		79,9103	
9	83,4490	81,1309	76,9926	85,5929	84,2468	78,2026	87,5854	83,7920	65,8216		80,7571	
10	81,0768	85,6596	84,0062	68,5531	70,6466	76,6778	82,9853	70,8620	79,8056		77,8081	
11	78,5384	77,2805	83,3829	91,9047	76,0708	73,8196	84,3317	75,8071	74,4023		79,5042	
12	70,0951	78,7096	77,3802	82,9569	72,4905	76,7535	88,9660	85,7643	75,4986		78,7350	

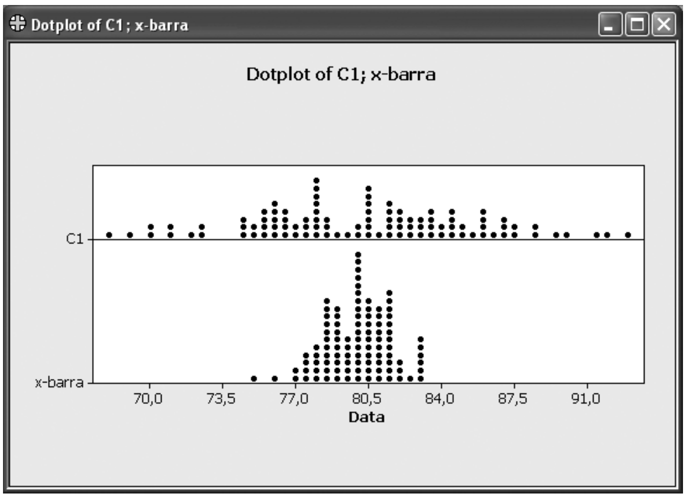
Figura 5. Passos a seguir per a crear el gràfic de punts dels *dotplots*



Passos a seguir

Se segueix la ruta *Graph* > *dotplots* i s'emplenen els camps a la finestra corresponent **(4)**.

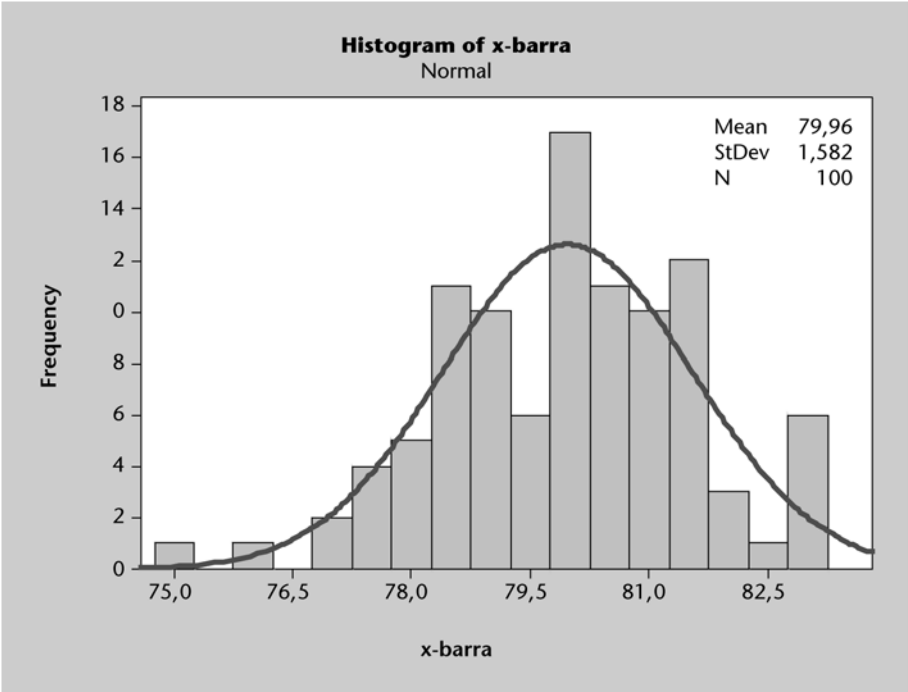
Figura 6. Gràfic de punts de valors dels *dotplots*



La sortida del Minitab de la figura 6 mostra que la distribució de la variable aleatòria inicial X (columna C1) era normal i, segons el gràfic de punts, sembla que també la distribució de la v. a. X-barra ($\overline{x}$) és normal, de mitjana molt similar i desviació estàndard menor (els punts de la $\overline{x}$ estan menys dispersos que els de la x).

També podem fer un histograma de freqüències de la distribució de les mitjanes mostrals ($\overline{x}$), com s'aprecia en la figura 7.

Figura 7. Histograma de freqüències absolutes de valors de $\bar{x}$ a partir de 9 mostres aleatòries simples, cada una de grandària 100



Finalment, en la figura 8 s'obtenen els estadístics que descriuen la distribució de les mitjanes mostrals.

Passos a seguir

Se segueix la ruta: *Stat > Basic Statistics > Display Descriptive Statistics* i se selecciona la variable *C11* (*x-barra*) a la finestra corresponent.

Figura 8. Resultat de l'anàlisi d'X-barra

```
Descriptive Statistics: x-barra

Variable    N  N*    Mean  SE Mean  StDev  Minimum      Q1
Median      Q3
x-barra   100   0  79,962    0,158  1,582   75,192  78,814
80,146  81,000

Variable  Maximum
x-barra    83,154
```

La mitjana dels 100 valors continguts en C11 (i que és una aproximació a la mitjana de la v. a. X-barra) és de 79,962, valor molt similar a la mitjana de *X* (que era de 80). Això és coherent amb el que la teoria ens indica:

- La mitjana mostral coincideix amb la mitjana de la població, $\mu_{\bar{X}} = \mu$.

La desviació estàndard dels 100 valors de la columna C11 (que serà una aproximació a la desviació estàndard de X-barra) és d'1,582. Si prenem la desviació estàndard de *X* (que era de 5) i la dividim per 3 (arrel de 9, la grandària de la mostra), obtenim el valor 1,667.

- Ambdós valors són molt semblants, tal com la teoria prediu:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n}$$

És interessant assenyalar que si no s'hagués pres inicialment una variable normalment distribuïda, les conclusions obtingudes serien semblants sempre que la grandària mostral n sigui prou gran tal com prediu el **teorema central del límit.**

Teorema central del límit

L'anàlisi anterior s'aplica només en la distribució normal. Què ocorre si les nostres dades provenen d'una altra distribució de probabilitat? Podem dir alguna cosa sobre la distribució mostral de la mitjana en aquest cas? Per a això es fa servir el **teorema central del límit**, el qual expressa que si tenim una mostra presa d'una distribució de probabilitat amb mitjana μ i desviació típica de σ, la distribució mostral de $\bar{x}$ és aproximadament normal amb mitjana μ i desviació típica de $\sigma/\sqrt{n}$, que és l'error estàndard. El més notable sobre el teorema central del límit és que la distribució de la mitjana mostral de $\bar{x}$ és més o menys normal, sigui quina sigui la distribució original de probabilitat. A mesura que augmenta la grandària de la mostra, l'aproximació a la distribució normal s'apropa cada vegada més.

Nota

Considerem que n és prou gran quan, com a mínim, $n > 30$.

Una conseqüència d'aquest teorema és que, atesa qualsevol variable aleatòria amb esperança μ i per a n prou gran, la distribució de la variable:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

és una normal estàndard $N(0,1)$.

Càlcul de l'error estàndard

Recordem que si la variable té una desviació típica coneguda σ, l'error estàndard es pot calcular com a $\sigma/\sqrt{n}$.

Quan σ és desconeguda, calculem l'error estàndard com a $s/\sqrt{n}$, on s és la desviació típica de la mostra.

Un cas particular és l'**aproximació de la binomial a la normal**:

Sigui X una variable aleatòria amb distribució $B(n, p)$ binomial amb n prou gran. Llavors, X és aproximadament normal amb esperança np *i* variància $np(1-p)$.

En aquest cas, n gran significa que np i $np(1-p)$ són tots dos més grans que 5 o bé que $n > 30$.

Per tant, quan la grandària de la mostra, n, és gran, la distribució de la **proporció** és aproximadament una distribució normal d'esperança p i desviació típica $\sqrt{p(1-p)/n}$. En aquest cas $\sqrt{p(1-p)/n}$ correspon a l'error estàndard $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

Recordatori

Si X segueix una distribució **binomial** de paràmetres n i p, aleshores:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Per als $k \in \{0, \ldots, n\}$

Exemple: es fa una enquesta sobre un determinat tema que té dues opcions, *A* i *B*. La probabilitat que un individu concret opini *A* és *p* i *n* és el nombre d'enquestes fetes. Hem preguntat a 400 habitants i trobem que el 30% opina *A*, és a dir, que podem establir que $p = 0{,}3$. Llavors, la distribució de la proporció d'habitants que opina *A* segueix una distribució normal, la mitjana de la qual és 0,3, que coincideix amb la proporció del 30% dels habitants de la població que opinen *A*, i la desviació estàndard és 0,0229, que correspon a la desviació típica de la població dividida per l'arrel quadrada de la grandària de la mostra.

$$N\left(0{,}3, \sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{400}}\right) = N(0{,}3; 0{,}0229)$$

2. Distribució de la mitjana mostral

S'han de considerar dos casos per a la distribució de la mitjana mostral:

Cas de desviació típica poblacional coneguda

Si la variable que estudiem segueix una distribució normal amb mitjana μ i desviació típica σ conegudes, llavors la mitjana mostral és també normal amb la mateixa mitjana μ i desviació típica $\sigma/\sqrt{n}$, on n és la grandària de la mostra.

Nota

Si σ és la desviació de la població i n la grandària de la mostra, es defineix l'**error estàndard de la mitjana mostral** com a:

$$\sigma/\sqrt{n}$$

Sempre que la distribució de les mitjanes mostrals sigui una distribució normal, podem calcular una **variable aleatòria normal estandarditzada, *Z***, que té una mitjana 0 i una variància 1.

Observeu

L'error estàndard és cada vegada menor com més gran és la grandària de la mostra.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Si la distribució de la població no és normal però la grandària mostral n és prou gran, llavors s'utilitzarà el teorema central del límit i la variable mitjana mostral s'acosta a una de normal estàndard a mesura que augmenta la grandària de la mostra. En general, aquest acostament es considera vàlid per a grandàries mostrals superiors a 30.

En l'apartat anterior hem vist que la variable aleatòria binomial segueix una distribució normal aproximada quan augmenta la grandària de la mostra.

Exemple: en l'assignatura d'*Arxivística* d'una llicenciatura de Documentació sabem que les qualificacions segueixen una distribució normal de mitjana 7,4 i de desviació estàndard 0,78. Volem saber el percentatge d'estudiants amb una nota superior a 6,5 i inferior a 8,5. Amb quina nota es qualifica com a excel·lent (A) si aquesta qualificació és la del 5% d'estudiants amb més bona nota?

Solució

La variable segueix una distribució $N(7,4; 0,78)$. Primer calculem l'estadístic Z normal estandarditzat:

$$P(6,5 \le X \le 8,5) = P\left(\frac{6,5-7,4}{0,78} \le \frac{X-7,4}{0,78} \le \frac{8,5-7,4}{0,78}\right) =$$
$$= P(-1,15 \le Z \le 1,41) =$$
$$= P(Z \le 1,41) - P(Z \le -1,15) = 0,9207 - 0,1251 = 0,7956$$

Busquem els valors de probabilitat en la taula $N(0,1)$ o els calculem amb qualsevol programa estadístic, com mostrem en l'exemple desenvolupat en el mòdul 1.

En vista del resultat podem dir que el percentatge d'estudiants amb nota superior a 6,5 i inferior a 8,5 és del 79,56%.

Per a calcular la nota a partir de la qual es qualifica com a excel·lent, calculem l'estadístic Z normal estandarditzat:

$$P(X \geq A) = P\left(\frac{X-7,4}{0,78} \geq \frac{A-7,4}{0,78}\right) = P(Z \geq z_A) = 0,05$$

En les taules de la $N(0,1)$ o amb qualsevol programa estadístic calculem un valor z que deixi a la dreta una àrea de 0,05; aproximadament, el valor és $z_A = 1,645$, de manera que:

$$\frac{A-7,4}{0,78} = 1,645 \qquad \Rightarrow \qquad A = 7,4 + 1,645 \cdot 0,78 = 8,683$$

A partir d'una nota de 8,6 es qualifica com a excel·lent (A).

Cas de desviació típica poblacional desconeguda

Quan la desviació poblacional és desconeguda i la grandària de la mostra és petita haurem de fer una estimació de la desviació típica amb l'anomenada *desviació típica mostral*. Per a això és necessari presentar una nova distribució de probabilitat. Aquesta nova distribució es coneix amb el nom de ***t* de Student**, les característiques de la qual es van explicar en el mòdul 1.

Per a determinar la distribució de la mitjana mostral quan la desviació poblacional és desconeguda, s'ha de calcular la desviació típica mostral:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Si la variable estudiada segueix una distribució normal amb una mitjana μ i una desviació típica desconeguda, l'estadístic mitjà mostral segueix una distribució t_{n-1}, és a dir, una ***t* de Student amb *n* – 1 graus de llibertat**.

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Nota

En aquest cas es defineix l'**error estàndard de la mitjana mostral** com a:

$$s/\sqrt{n}$$

Els graus de llibertat associats amb el valor de t són $n - 1$ (grandària de la mostra menys 1).

Exemple: el temps que ha trigat a infectar-se de virus cadascun dels ordinadors d'una editorial ha estat el següent (en segons): 2,5; 7,4; 8,0; 4,5; 7,4 i 9,2.

Imaginem-nos que el temps que triga un ordinador d'aquesta editorial a infectar-se segueix la distribució normal de mitjana 6,5 i que desconeixem la variància poblacional. Volem calcular la probabilitat que hi ha que un ordinador trigui entre 5 segons i 10 segons a infectar-se.

Solució

Com que desconeixem la variància de la població, la mitjana mostral segueix una distribució ***t* de Student amb 5 graus de llibertat**.

Per a calcular el valor de l'estadístic *t* hem de calcular la desviació típica mostral. El valor obtingut és $S = 2{,}5$.

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

La probabilitat sol·licitada és:

$$p(5 \le T \le 10) = p\left(\frac{5-6{,}5}{2{,}5/\sqrt{6}} \le t_5 \le \frac{10-6{,}5}{2{,}5/\sqrt{6}}\right) = p(-1{,}47 \le t_5 \le 3{,}43) =$$
$$p(t_5 \le 3{,}43) - p(t_5 \le -1{,}47) = 0{,}99 - 0{,}1 = 0{,}89$$

Per a calcular la probabilitat utilitzem la taula *t* o un programa estadístic (figura 9).

Passos a seguir

Per a calcular les probabilitats d'una distribució *t* de Student se segueix la ruta *Calc > Probability Distributions > t* i es completen els paràmetres en la finestra corresponent. El resultat es mostra en la figura 9.

Figura 9. Resultat del Minitab

Cumulative Distribution Function

```
Student's t distribution with 5 DF

   x  P( X <= x )
3,43     0,990682
```

Cumulative Distribution Function

```
Student's t distribution with 5 DF

    x  P( X <= x )
-1,47     0,100758
```

3. Distribució de la proporció mostral

En l'apartat 5 del mòdul 1 hem dit que la distribució binomial era la suma de *n* variables aleatòries independents, cadascuna de les quals té una probabilitat d'èxit *p*. Per a caracteritzar la distribució hem de saber el valor de *p*, que és la proporció de membres de la població que tenen una característica d'interès. La **proporció mostral d'èxits** en una mostra aleatòria extreta d'una població en què la proporció d'èxits *p* és:

Distribució de la proporció mostral

És una aplicació del **teorema central del límit**.

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

Per tant, $\hat{p}$ és la mitjana d'un conjunt de variables aleatòries independents. A més, podem utilitzar el teorema del límit central per a sostenir que la distribució de probabilitat de $\hat{p}$ es pot considerar una distribució normal si la grandària de la mostra és gran.

Nota

La distribució de $\hat{p}$ té una mitjana igual a la proporció poblacional *p*.

La desviació estàndard de $\hat{p}$ és l'**error estàndard de la mitjana mostral** com a:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

Com en el cas de la mitjana mostral, sempre que la distribució de la proporció mostral sigui una distribució normal, podem calcular una **variable aleatòria normal estandarditzada, *Z***, que té una mitjana 0 i una variància 1.

Fixeu-vos-hi

Com més gran és la grandària de la mostra, més petit és l'error estàndard.

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}}$$

La proporció mostral té moltes aplicacions, entre les quals hi ha l'estudi dels resultats d'enquestes, l'estimació de la quota percentual del mercat, el percentatge d'inversions empresarials que té èxit i els resultats electorals.

Exemple: el 22% dels discos es venen per la Xarxa en format MP3 i la resta es venen en botigues en format CD. Considerem les vendes dels pròxims 5.000 discos. Volem saber quina distribució segueix la proporció mostral de discos venuts per la Xarxa, quin és el nombre esperat de discos que s'hi vendran i quina és la probabilitat que se n'hi venguin més de 1.500.

Solució

En aquest exercici tenim que $p = 0{,}22$ i $n = 5.000$.

Per a determinar la distribució de la proporció mostral, atès que la grandària de la mostra és gran, $n = 5.000$, hi apliquem el teorema del límit central. La distribució és aproximadament **normal**; el valor de la mitjana és el de la proporció poblacional (0,22).

Calculem l'error estàndard: $s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0{,}22(1-0{,}22)}{5000}} = 0{,}00586$

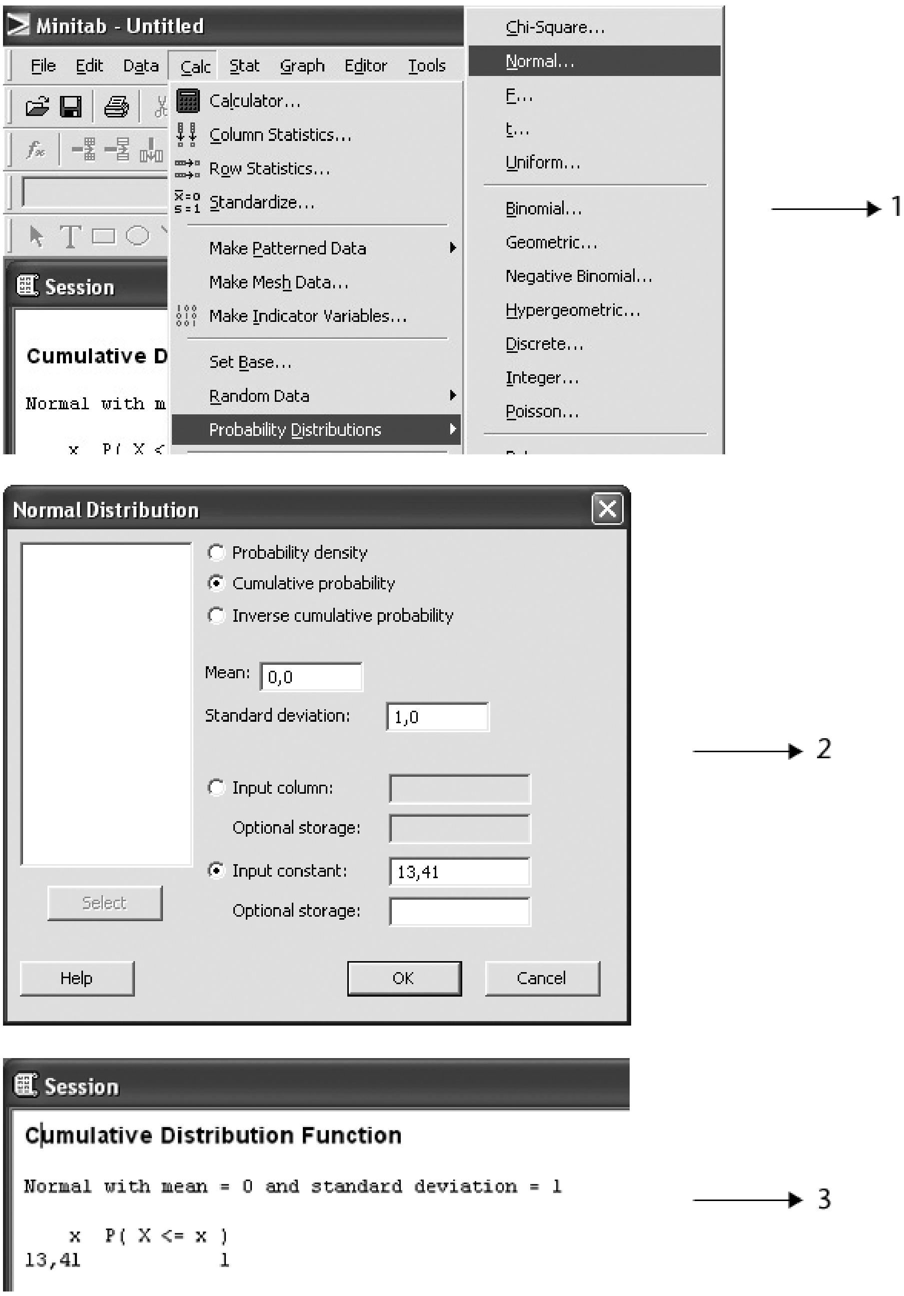
El valor esperat de discos venuts per la Xarxa és del 22% dels 5.000 que es venen en total, és a dir, 1.100 discos en format MP3.

La probabilitat que es venguin menys de 1.500 discos per la Xarxa és igual a la probabilitat que la proporció mostral sigui superior o igual al 30%. Per a obtenir aquesta probabilitat, primer hem de calcular l'estadístic Z normal estandarditzat:

$$P(p > 30\%) = P\left(Z > \frac{0,30 - 0,22}{0,00586}\right) = P(Z > 13,41) = 0$$

La probabilitat de Z s'obté en la taula $N(0,1)$. A la pràctica, els càlculs probabilístics anteriors se solen automatitzar amb l'ajuda d'algun programari estadístic o d'anàlisi de dades. La figura 10 mostra com podem calcular probabilitats d'una normal amb l'ajuda del Minitab.

Figura 10. Càlcul de probabilitats amb el Minitab



Passos a seguir

Se segueix la ruta *Calc > Probability Distributions > normal* **(1)** i s'emplenen els paràmetres en la finestra corresponent **(2)**. El resultat es mostra en **(3)**. El programa calcula $P(Z <= 13,41)$.

El valor obtingut amb el Minitab és $P(Z <= 13{,}41)$. Per tant, per a obtenir la probabilitat volguda hem de calcular la probabilitat complementària $P(Z > 13{,}41) = 1 - P(Z <= 13{,}41) = 1 - 1 = 0$.

4. Distribució de la variància mostral

Una vegada analitzades les distribucions de les mitjanes mostrals i les proporcions mostrals, examinem les distribucions de les variàncies mostrals. A mesura que les empreses i la indústria posen més èmfasi en la producció de productes que satisfacin els criteris de qualitat, hi ha una necessitat més gran de calcular i reduir la variància poblacional. Quan en un procés la variància és alta, hi ha algunes característiques dels productes que poden tenir una gamma més alta de valors, com a conseqüència de la qual hi ha més productes que no tenen un nivell de qualitat acceptable. Obtindrem productes de qualitat si el procés de producció té una variància baixa, de manera que el nombre d'unitats que tenen un nivell de qualitat inferior al volgut és més petit. Comprenent la distribució de les variàncies mostrals podem fer inferències sobre la variància poblacional.

Si estudiem una mostra aleatòria de grandària n i variància mostral s^2 obtinguda d'una població normal de mitjana μ i variància σ^2 desconegudes, la variància mostral es distribueix com una χ^2_{n-1} amb $n-1$ graus de llibertat:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_x^2}$$

Per tant, podem fer inferències sobre la variància poblacional σ^2 utilitzant s^2 i la distribució khi quadrat. Mostrem aquest procés en l'exemple següent.

Exemple: s'ha vist que en una gran ciutat durant l'estiu les factures del consum d'electricitat segueixen una distribució normal que té una desviació típica de 100 euros. Agafem una mostra aleatòria de 25 factures. Volem calcular la probabilitat que la desviació típica mostral sigui inferior a 75 euros.

Solució

En aquest exercici tenim que $n = 25$ i $\sigma^2 = (100)^2$. Utilitzant la distribució khi quadrat establim que:

$$P\left(s^2 < 75^2\right) = P\left(\frac{(25-1)75^2}{(100)^2} < \chi^2_{24\,g.l.}\right) = P\left(13{,}5 < \chi^2_{24\,g.l.}\right)$$

Els valors de la distribució khi quadrat els podem obtenir en la taula d'aquesta distribució amb 24 graus de llibertat:

$$\chi^2_{24\,g.l.} = 12{,}401;\ \chi^2_{24\,g.l.} = 13{,}848$$

El valor de probabilitat és entre 0,025 i 0,05 (0,0428) exactament.

5. Intervals de confiança per a una població

En els apartats anteriors, considerem l'estimació puntual d'un paràmetre desconegut de la població, és a dir, el càlcul d'un únic nombre que sigui una bona aproximació. En la majoria dels problemes pràctics, un estimador puntual per si sol és inadequat. Per exemple, suposem que un control realitzat sobre una mostra aleatòria de manuals procedents d'una gran tramesa d'una editorial ens porta a estimar que el 10% de tots els manuals són defectuosos. Un gerent que s'enfronta a aquesta dada possiblement es farà preguntes com ara: pot estar totalment segur que el veritable valor del percentatge de manuals defectuosos és entre el 5% i el 15%? O és molt possible que entre el 9% i l'11% dels manuals siguin defectuosos? Aquesta classe de preguntes requereixen informació que va més enllà de la que conté una simple estimació puntual; són preguntes que busquen la fiabilitat de l'esmentat estimador. En altres paraules, es tracta de la recerca d'un **estimador per intervals**, un rang de valors entre els quals possiblement estigui la quantitat que s'estima.

Hem de mesurar d'alguna manera la confiança que podem tenir en l'interval. Aquest percentatge de mostres que donen lloc a intervals que contenen l'autèntic valor del paràmetre és l'anomenat **nivell de confiança**.

Nivell de confiança

El nivell de confiança també es denota per $(1-\alpha)$ 100% normalment considerarem $(1-\alpha)$, igual a 90%, 95% o 99%.

Així, doncs, un interval de confiança per a cert paràmetre amb un nivell de confiança de *C*% és un interval calculat a partir d'una mostra, de manera que el procediment de càlcul garanteix que el *C*% de les mostres doni lloc a un interval que contingui el valor real del paràmetre.

L'expressió *confiança del 95%* indica confiança en el mètode utilitzat, de manera que el 95% de les vegades que apliquem el mètode a la mateixa població obtindrem intervals que sí que contenen el valor del paràmetre poblacional.

Interval de confiança per a la mitjana quan la població és normal i coneixem la desviació estàndard

La variable que volem estudiar segueix una llei normal de mitjana μ (desconeguda) i desviació estàndard σ coneguda. Disposem d'una mostra aleatòria simple de grandària n i el valor de la mitjana de la mostra és $\overline{x}$.

Calculem els intervals de confiança al nivell de confiança $(1-\alpha)$% mitjançant l'expressió següent:

$$(\text{mitjana de la mostra} - ME, \text{mitjana de la mostra} + ME)$$

on *ME* és el **marge d'error**, que hem de calcular de manera que el $(1-\alpha)$% de les mostres produeixi un interval que contingui el verdader valor de μ.

El procediment que descrivim serveix també per a variables que no segueixin una distribució normal, sempre que la desviació típica sigui coneguda i que la grandària de la mostra sigui $n > 30$.

Fixem el nivell de confiança. S'acostuma a considerar $(1 - \alpha)$ igual a 90%, 95% o 99%.

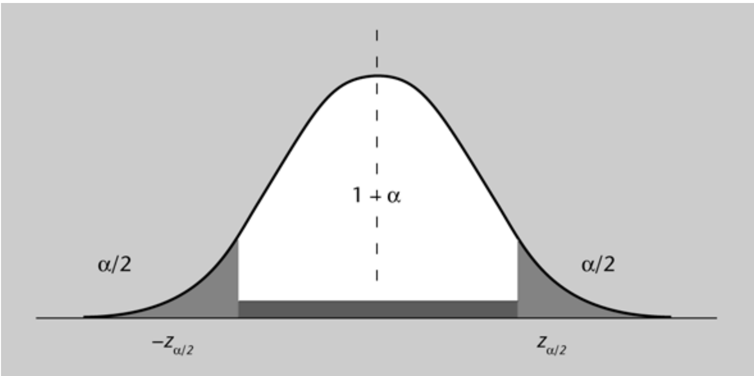
Calculem **l'error estàndard** de la mitjana com a $\sigma_{\overline{x}} = \sigma / \sqrt{n}$.

Obtenim el **valor crític**, que és el valor $z_{\alpha/2}$ que fa que:

$$P(Z \geq z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

en el qual Z és una variable aleatòria normal $N(0,1)$. Gràficament es mostra en la figura 11.

Figura 11. Gràfic d'interval de confiança per a μ amb desviació típica coneguda



Per als nivells de confiança usuals, els valors crítics corresponents són:

- $(1 - \alpha) = 90\% = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}1$ i $z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$
- $(1 - \alpha) = 95\% = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}05$ i $z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$
- $(1 - \alpha) = 99\% = 0{,}99$, $\alpha = 0{,}01$ i $z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}575$

Calculem l'anomenat **marge d'error** (també anomenat **precisió de l'estimació**) com a $z_{\alpha/2}$ per a l'error estàndard, és a dir, com a:

Nota

Per tant, el marge d'error és la meitat de la longitud de l'interval de confiança.

$$z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

L'interval de confiança obtingut amb la mostra de partida és:

$$\left(\overline{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left[\overline{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

o el que és el mateix, $\overline{x} \pm ME$.

S'han d'interpretar exactament els intervals de confiança. Si extraiem repetidament i independentment mostres aleatòries de n observacions de la població, el $100(1 - \alpha)\%$ d'aquests intervals contindrà el valor vertader de la mitjana poblacional.

L'efecte de la grandària de la mostra

Moltes vegades, un cop fixat el nivell de confiança, ens marcarem com a objectiu donar el valor del paràmetre μ amb certa precisió. L'única manera d'obtenir la precisió desitjada consisteix a modificar de manera adequada la grandària de la mostra. Suposem que volem una precisió o marge d'error ME; ja que sabem que:

Grandària de la mostra

És fàcil de veure que si volem reduir l'amplada de l'interval de confiança a la meitat, haurem de prendre una mostra quatre vegades més gran.

$$ME = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Obtenim la grandària volguda de la mostra per a aquesta precisió:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\right)^2 \frac{\sigma^2}{ME^2}$$

Interval de confiança per a la mitjana quan la població és normal i desconeixem la desviació estàndard

La variable que volem estudiar segueix una llei normal de mitjana μ (desconeguda) i desviació estàndard σ també desconeguda. Disposem d'una mostra aleatòria simple de grandària n i de valor de la mitjana de la mostra $\bar{x}$. Llavors:

Calculem els intervals de confiança al nivell de confiança $(1 - \alpha)\%$; mitjançant l'expressió següent fixem el **nivell de confiança**, que habitualment s'escriu com a $(1 - \alpha)\%$.

Calculem la desviació típica mostral s per a obtenir l'**error estàndard** de la mitjana com a:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Calculem el **valor crític**, que és el valor $t_{\alpha/2}$ tal que:

$$P(t_{n-1} \geq t_{n-1,\alpha/2}) = \alpha/2$$

en què t_{n-1} és una variable aleatòria de Student amb $n - 1$ graus de llibertat.

Com que el **marge d'error** és

$$ME = t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

L'interval de confiança obtingut amb la mostra de partida serà:

$$\bar{x} \pm ME$$

Interval de confiança per a la proporció

Ens interessa saber la proporció de membres de la població que tenen una característica específica. Si agafem una mostra aleatòria simple de grandària n, la proporció mostral és un bon estimador de la proporció poblacional. En aquest apartat desenvolupem intervals de confiança per a la proporció.

Quan la grandària de la mostra és força gran –en concret, superior a 100–, hem d'aplicar el teorema del límit central, i, com hem vist en apartats anteriors, la distribució de la proporció mostral segueix una distribució normal estàndard $N(0,1)$.

Com en els intervals anteriors, calculem el **marge d'error** com a $z_{\alpha/2}$ multiplicat per l'error estàndard; és a dir:

$$ME = z_{\alpha/2} s_{\hat{p}} = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Nota

El paràmetre és p.

L'estadístic és $\hat{p}$.

L'interval de confiança obtingut amb la mostra de partida és:

$$\hat{p} \pm ME$$

La grandària de la mostra és $n = \left(z_{\alpha/2}\right)^2 \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{ME^2}$

Exemple: un servidor de correu ha rebut 2.000 missatges, dels quals n'hi ha 250 que són correu brossa. Construïu un interval de confiança del 96% per a la proporció de correus brossa: quants correus hem d'estudiar en el servidor per a afirmar que l'error entre la proporció de correus brossa rebuts i la probabilitat que el servidor rebi un correu brossa sigui més petit que 0,03 amb una probabilitat del 95%?

Solució

L'interval de confiança del 96% per a la proporció de la població l'obtenim per mitjà de l'equació següent:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

D'això deduïm que $\hat{p} = \dfrac{250}{2000} = 0{,}125,\ n = 2000,\ z_{\alpha/2} = z_{0{,}02} = 2{,}054$.

Per tant, l'interval de confiança de la proporció poblacional al 96% és:

$$\left(0{,}125 - 2{,}054\sqrt{\frac{0{,}125 \cdot 0{,}875}{2000}};\quad 0{,}125 + 2{,}054\sqrt{\frac{0{,}125 \cdot 0{,}875}{2000}}\right) = (0{,}1098;\ 0{,}1402).$$

Podem dir que la proporció de tots els correus brossa rebuts de la població és entre el 10,98% i el 14,02% (amb un marge d'error de l'1,52% al nivell de confiança del 96%).

Hem de calcular la grandària mínima necessària de la mostra perquè l'error sigui més petit que 0,03 amb una probabilitat del 95%:

$$n \geq (z_{\alpha/2})^2 \frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{ME^2} = (z_{0{,}025})^2 \frac{0{,}125 \cdot 0{,}875}{0{,}03^2} = 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}109}{0{,}0009} = 466{,}75$$

Per tant, hem d'estudiar 467 missatges.

Exemple amb el Minitab: en l'exemple anterior hem comparat els intervals de confiança al 90% i al 99% mantenint constant la grandària de la mostra, per a respondre a la pregunta següent: a mesura que augmenta l'amplitud d'un interval de confiança, augmenta o disminueix el nivell de confiança associat? En les figures 12 i 13 utilitzarem el Minitab per a analitzar tots dos escenaris.

Figura 12. Resultat de l'interval de confiança del 90% amb el Minitab

```
Test and CI for One Proportion

Test of p = 0,125 vs p not = 0,125

Sample    X     N  Sample p         90% CI              Z-Value  P-Value
1       250  2000  0,125000  (0,112836; 0,137164)     0,00     1,000

Using the normal approximation.
```

Figura 13. Resultat de l'interval de confiança del 99% amb el Minitab

```
Test and CI for One Proportion

Test of p = 0,125 vs p not = 0,125

Sample    X     N  Sample p         99% CI              Z-Value  P-Value
1       250  2000  0,125000  (0,105951; 0,144049)     0,00     1,000

Using the normal approximation.
```

Noteu que quan augmenti el nivell de confiança, haurem d'ampliar l'amplitud de l'interval a fi d'"arribar" a un rang més gran per al paràmetre poblacional estimat.

Interval de confiança de la variància

Com podem construir un interval de confiança per a la variància poblacional?

Primer hem de fixar el nivell de confiança $1 - \alpha$. Després calculem l'estadístic.

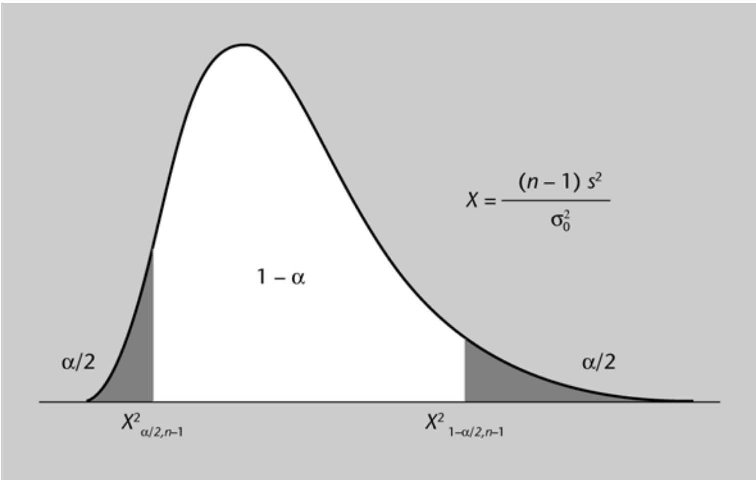
$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

és una observació d'una variable aleatòria χ^2 amb $n - 1$ graus de llibertat.

En què s^2 és la variància mostral d'una mostra aleatòria de grandària n agafada d'una població normal de variància σ^2.

La figura 14 mostra els valors de la distribució χ^2_{n-1} que tallen una probabilitat de $\alpha/2$ en les dues cues, és a dir, els punts crítics $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ i $\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}$.

Figura 14. Gràfic d'interval de confiança de la variància



Exemple d'interval de confiança per a la variància: una empresa d'autobusos urbans espera que les hores d'arribada en unes quantes parades no tindran gaire variabilitat. La variància de la mostra de 10 temps d'arribada d'autobús va ser $s^2 = 4{,}8$ minuts^2. Suposant que la població de temps d'arribada té una distribució normal, volem determinar un interval de confiança del 95% per a la variància poblacional dels temps d'arribada.

L'estadístic de prova $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ té una distribució khi quadrat amb $n - 1 = 9$ graus de llibertat. Determinem els valors $\chi^2_{9,0,975} = 16{,}0471$ i $\chi^2_{9,0,025} = 45{,}7222$.

L'interval de confiança per a la variància de la població és:

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}};\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right] = \left[\frac{9\cdot 4{,}8}{45{,}7222};\frac{9\cdot 4{,}8}{16{,}0471}\right] = [0{,}94;2{,}69]\,\text{minuts}$$

L'arrel quadrada d'aquests valors és l'interval de confiança del 95% per a la desviació estàndard: $0{,}97 \le \sigma \le 1{,}64$.

6. Contrastos d'hipòtesi per a una població

En aquest apartat desenvolupem mètodes per a contrastar hipòtesis que permeten contrastar la validesa d'una conjectura o afirmació utilitzant dades mostrals. El procés comença quan un investigador formula una hipòtesi sobre la naturalesa d'una població. La formulació d'aquesta hipòtesi implica l'elecció entre dues opcions; a continuació l'investigador en selecciona una basant-se en els resultats d'un estadístic calculat a partir d'una mostra aleatòria de dades.

Considerem els exemples següents de situacions d'aquest tipus:

1) Un investigador vol saber si una proposta de reforma fiscal és acollida de la mateixa manera per homes i dones. Per a analitzar si és així, recull les opinions d'una mostra aleatòria d'homes i dones.

2) Una companyia rep un carregament de peces. Només pot acceptar la tramesa si no hi ha més d'un 5% de peces defectuoses. La decisió d'acceptar la remesa pot basar-se en l'examen d'una mostra aleatòria de peces.

3) Una professora està interessada a valorar la utilitat de realitzar regularment controls en un curs d'estadística. El curs consta de dues parts i la professora fa aquests controls només en una de les parts. Quan acaba el curs, compara els coneixements dels estudiants en les dues parts del curs mitjançant un examen final i analitza la hipòtesi que els controls augmenten el nivell mitjà de coneixements.

Els exemples proposats tenen alguna cosa en comú. La hipòtesi es formula sobre la població, i les conclusions sobre la validesa d'aquesta hipòtesi es basen en la informació mostral. El test o contrast serà l'eina que ens permetrà extreure conclusions a partir de la diferència entre les observacions i els resultats que s'haurien d'obtenir si la hipòtesi de partida fos certa.

Plantejament del contrast d'hipòtesi

En la prova d'hipòtesis es comença proposant una hipòtesi de partida sobre un paràmetre poblacional. Aquesta hipòtesi es diu **hipòtesi nul·la** i es representa per $\boldsymbol{H_0}$. A continuació es defineix una altra hipòtesi, es diu **hipòtesi alternativa**, que és l'oposada del que s'afirma en la hipòtesi nul·la. La hipòtesi alternativa es representa amb $\boldsymbol{H_1}$. El procediment per a provar una hipòtesi comprèn l'ús de dades d'una mostra per a provar les dues asseveracions representades per H_0 i H_1.

Hipòtesi

Amb la mateixa hipòtesi nul·la podem estudiar diverses hipòtesis alternatives.

Les hipòtesis expressen una afirmació sobre el valor del paràmetre. Podem tenir una hipòtesi nul·la del tipus H_0: $\theta = \theta_0$.

La hipòtesi alternativa pot ser unilateral, com a H_1: $\theta > \theta_0$ o H_1: $\theta < \theta_0$, o bilateral, com a H_1: $\theta \neq \theta_0$.

Una vegada plantejades les hipòtesis nul·la i alternativa, hem de prendre una decisió a partir de les observacions. D'altra banda, hi ha dues decisions possibles:

1) Acceptar la hipòtesi nul·la.

2) Rebutjar la hipòtesi nul·la.

Errors en el contrast

A fi d'arribar a una d'aquestes dues conclusions, s'adopta una **regla de decisió** basada en l'evidència mostral. Per tant, no podem saber amb seguretat si la hipòtesi nul·la és certa o falsa i qualsevol regla de decisió adoptada té certa probabilitat d'arribar a una conclusió falsa. Com s'indica en la taula 1 poden cometre's dos tipus d'errors. Un error que es pot cometre, anomenat **error de tipus I**, és rebutjar una hipòtesi nul·la certa. Si la regla de decisió és tal que la probabilitat de rebutjar la hipòtesi nul·la quan és certa és α, llavors α s'anomena **nivell de significació** del contrast. La probabilitat d'acceptar la hipòtesi nul·la quan és certa és $(1 - \alpha)$. L'altre error possible, anomenat **error de tipus II**, ocorre quan s'accepta una hipòtesi nul·la falsa. La probabilitat de cometre aquest tipus d'error, quan la hipòtesi nul·la és falsa, és denotada per β. Llavors, la probabilitat de rebutjar una hipòtesi nul·la falsa és $(1 - \beta)$, i es denomina **potència del contrast.**

Regla de decisió

Error de tipus I: rebutjar una hipòtesi nul·la certa.

Error de tipus II: acceptar una hipòtesi nul·la falsa.

Nivell de significació: la probabilitat de rebutjar una hipòtesi nul·la que és certa (aquesta probabilitat a vegades s'expressa en tant per cent, amb la qual cosa ens referim a un contrast de significació α com un contrast al nivell 100 α%.

Potència: La probabilitat de rebutjar una hipòtesi nul·la que és falsa.

Taula 1. Errors i decisions correctes en contrastos d'hipòtesis

		Condició de la població	
		H_0 verdadera	**H_0 falsa**
Decisió	**Acceptar H_0**	Decisió correcta	Error de tipus II
	Rebutjar H_0	Error de tipus I	Decisió correcta

Atenció

Un nivell α = **0,05** significa que, encara que la hipòtesi nul·la sigui certa, les dades de 5 de cada 100 mostres ens la faran rebutjar. És a dir, acceptem que podem rebutjar la hipòtesi nul·la equivocadament 5 de cada 100 vegades.

Per a plantejar i resoldre un contrast d'hipòtesi:

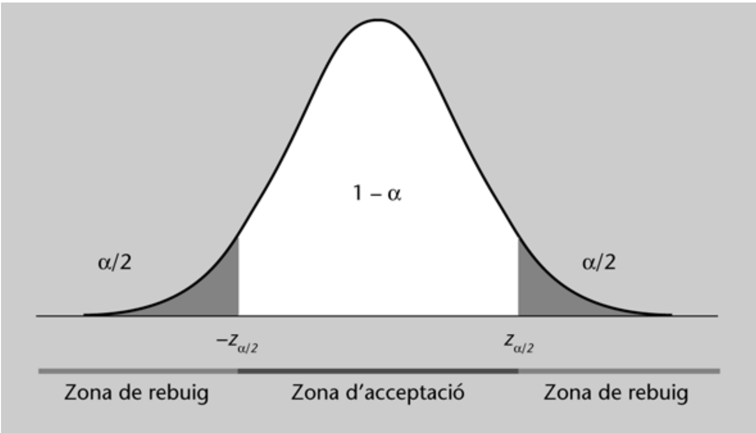
1. S'han de fixar les hipòtesis nul·la i alternativa.
2. S'ha de fixar un nivell de significació.
3. S'ha de determinar l'estadístic de contrast i la llei que té.
4. A partir d'aquí, tenim dos mètodes possibles:
4a. Calcular el *p*-valor associat al nostre estadístic de contrast calculat. Comparar el *p*-valor amb el nivell de significació i prendre una decisió.
4b. Calcular el valor crític. Comparar el valor crític amb l'estadístic de contrast i prendre una decisió.

Zona d'acceptació i zona de rebuig de la hipòtesi nul·la

Exemple 1. Contrast bilateral

La part del gràfic (figura 15) ombrejada en vermell correspon a la zona en la qual rebutgem la hipòtesi nul·la. La zona sense ombrejar correspon a la regió d'acceptació de la hipòtesi nul·la.

Figura 15. Gràfic que mostra la zona d'acceptació i de rebuig de la hipòtesi nul·la en un contrast bilateral



Recordeu

Si tenim una mostra de grandària n d'una distribució $N(\mu, \sigma^2)$, aleshores

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

segueix una distribució normal estàndard.

Per a determinar el valor $z_{\alpha/2}$, només cal imposar que l'error de tipus I (probabilitat de rebutjar H_0 quan és certa) sigui menor o igual que el nivell de significació α. Per exemple, per a $\alpha = 0{,}05$ trobem (per exemple, a les taules de la normal) que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Per a decidir si rebutgem la hipòtesi nul·la o no, utilitzarem l'anomenat **estadístic de contrast.** Un estadístic de contrast és una funció de la mostra la distribució de la qual coneixem sota la hipòtesi nul·la.

Validesa del mètode

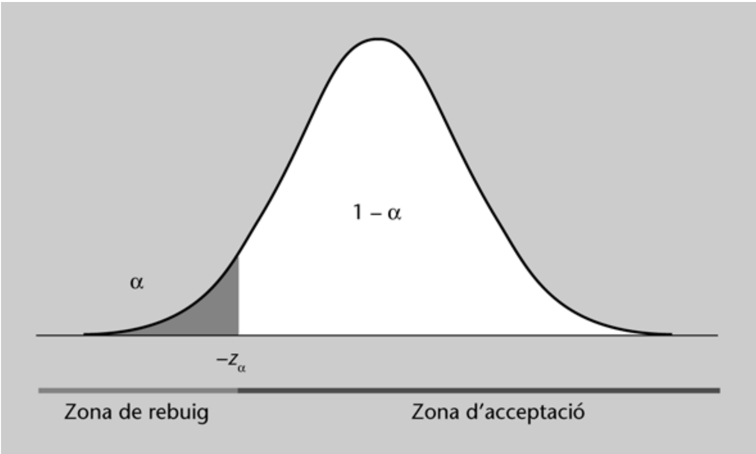
El mètode és el mateix per a qualsevol distribució simètrica, així que també serveix si l'estadístic de contrast segueix una distribució t de Student.

- Acceptarem H_0 si $|z| \le z_{\alpha/2}$
- Rebutjarem H_0 si $|z| \ge z_{\alpha/2}$

Exemple 2. Contrast unilateral inferior

La part del gràfic (figura 16) ombrejada en vermell correspon a la zona de rebuig de la hipòtesi nul·la. La zona sense ombrejar correspon a la regió d'acceptació de la hipòtesi nul·la.

Figura 16. Gràfic que mostra la zona de rebuig de la hipòtesi nul·la en un contrast unilateral inferior



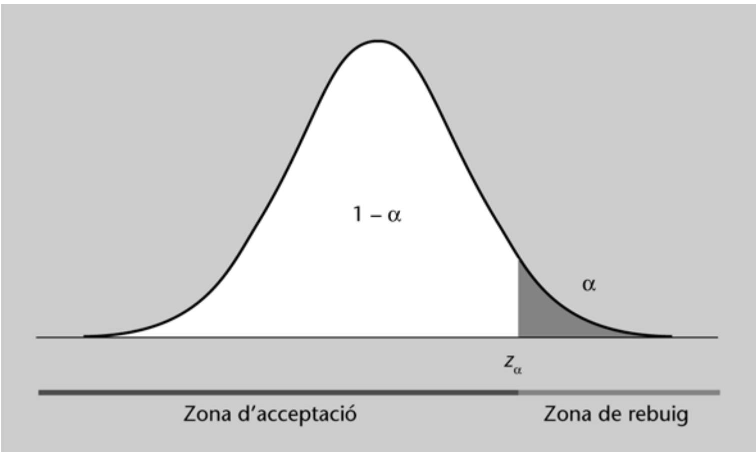
Per a $\alpha = 0,05$ trobem que $-z_\alpha = -1,65$. En aquest contrast unilateral es diu que la probabilitat de la cua de l'esquerra ha de ser α.

- Acceptarem H_0 si $\mathbf{Z} \geq -z_\alpha$
- Rebutjarem H_0 si $\mathbf{Z} < -z_\alpha$

Exemple 3. Contrast unilateral superior

La part del gràfic (figura 17) ombrejada en vermell correspon a la zona en la qual rebutgem la hipòtesi nul·la. La zona sense ombrejar correspon a la regió d'acceptació de la hipòtesi nul·la.

Figura 17. Gràfic que mostra l'acceptació o no de la hipòtesi nul·la en un contrast unilateral superior



Per a $\alpha = 0,05$ trobem que $z_\alpha = 1,65$. En aquest contrast unilateral es diu que la probabilitat de la cua de la dreta ha de ser α.

- Acceptarem H_0 si $\mathbf{Z} \leq z_\alpha$
- Rebutjarem H_0 si $\mathbf{Z} > z_\alpha$

El *p*-valor

Hi ha un altre mètode per a examinar el contrast de la hipòtesi nul·la. Fixeu-vos que si utilitzem un nivell de significació baix es redueix la probabilitat de rebutjar una hipòtesi nul·la vertadera. Això modifica la regla de decisió perquè sigui menys probable que es rebutgi la hipòtesi nul·la, independentment que sigui vertadera o no. Evidentment, com més petit és el nivell de significació al qual es rebutja una hipòtesi nul·la, més grans són els dubtes sobre la veracitat que té. En lloc de contrastar hipòtesis als nivells assignats de significació, els investigadors troben sovint el nivell més petit de significació al qual es pot rebutjar una hipòtesi nul·la.

El *p*-valor és el nivell més petit de significació al qual es pot rebutjar una hipòtesi nul·la.

El criteri del *p*-valor és el següent: rebutjar H_0 si el *p*-valor $< \alpha$.

Interpretació del *p*-valor

Considerem una mostra aleatòria de n observacions procedents d'una població que segueix una distribució normal de mitjana μ i desviació estàndard σ i la mitjana mostral calculada $\bar{x}$. Hem contrastat la hipòtesi nul·la $H_0 : \mu = \mu_0$ amb l'alternativa $H_1 : \mu > \mu_0$

El *p*-valor del contrast és:

$$p\text{-valor} = P\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq z_p \,\middle|\, H_0 : \mu = \mu_0 \right)$$

en què z_p és el valor normal estàndard corresponent al valor de significació més petit al qual es pot rebutjar la hipòtesi nul·la. La majoria dels programes informàtics estadístics calculen el *p*-valor. Aquest valor subministra més informació sobre el contrast, basant-se en la mitjana mostral observada, de manera que s'utilitza freqüentment en moltes aplicacions estadístiques.

Exemple d'aplicació del *p*-valor*:* un grup editorial publica un diari especialitzat en informació econòmica. El director del diari vol saber si el nombre mitjà d'exemplars diaris produïts i no venuts és més petit que 400. Per a respondre a aquesta pregunta, agafem una mostra formada pels resultats corresponents a 172 dies triats de manera aleatòria. La mitjana d'aquesta mostra és de 407 exemplars no venuts, amb una desviació estàndard de 38.

Utilitzant un nivell de significació de 0,05, feu un contrast d'hipòtesi per a respondre de manera raonada a la pregunta del director del diari.

Solució

1) Si fem el contrast H_0: mitjana poblacional = 400 contra H_1: mitjana poblacional ≠ 400, primer hem de calcular l'estadístic de contrast per a decidir si rebutgem la hipòtesi nul·la o no.

La desviació estàndard de la mostra és $\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{38}{\sqrt{172}} = 2,89$.

L'estadístic és $z = \frac{407 - 400}{2,89} = 2,42$. Aquest valor és una observació d'una distribució $N(0,1)$.

En aquest cas, com que és un contrast bilateral, dividim el nivell de significació α de la mateixa manera entre les dues cues de la distribució normal. Per tant, la probabilitat que Z sigui superior a $z_{\alpha/2}$ o inferior a $-z_{\alpha/2}$ és α. En aquest cas, el p-valor és la suma de les probabilitats de la cua superior i la cua inferior. El p-valor corresponent al contrast de dues cues és:

$$p - valor = 2P\left(\left|\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right|\right) > z_{\alpha/2};$$

$$P(Z > |2,42|) = P(Z > 2,42) + P(Z < -2,42) = 2 \cdot 0,00776 = 0,01552$$

Com que 0,01552 és més petit que el nivell de significació proposat ($\alpha = 0,05$), rebutgem la hipòtesi nul·la. No podem afirmar que el nombre mitjà d'exemplars diaris produïts i no venuts és de 400. Acceptem que és diferent de 400.

2) Si fem el contrast H_0: mitjana poblacional = 400 contra H_1: mitjana poblacional > 400, el p-valor és la probabilitat de la cua de la dreta:

$$p - valor = P(Z) > z_\alpha$$

$P(Z > 2,42) = 0,00776 < \alpha \Rightarrow$ Rebutgem la hipòtesi nul·la.

Acceptem la hipòtesi alternativa; per tant, acceptem que el nombre mitjà d'exemplars diaris produïts i no venuts és més gran que 400.

3) Si fem el contrast H_0: mitjana poblacional = 400 contra H_1: mitjana poblacional < 400, el p-valor és la probabilitat de la cua de l'esquerra:

$$p - valor = P(Z) < z_\alpha$$

$P(Z < 2,42) = 1 - 0,00776 = 0,99224 > \alpha \Rightarrow$ No podem rebutjar la hipòtesi nul·la.

Hem de rebutjar la hipòtesi alternativa; per tant, el nombre mitjà d'exemplars diaris produïts i no venuts no és més petit que 400.

Així, doncs, en vista dels resultats dels tres contrastos, la resposta a la pregunta del director és que el nombre mitjà d'exemplars diaris produïts i no venuts és més gran que 400.

Per a calcular el p-valor se sol utilitzar un programari estadístic, com veurem en exemples resolts amb el Minitab.

Un altre procediment: per a resoldre contrastos bilaterals utilitzant intervals de confiança.

Exemple: imaginem-nos que ens plantegen el contrast bilateral següent:

$$H_0\text{: } \mu = 280,\ H_1\text{: } \mu \neq 280$$

Per a provar aquesta hipòtesi amb un nivell de significació $\alpha = 0{,}05$, la grandària de la mostra és 36 i ens determinen que la mitjana mostral $\bar{x} = 278{,}5$ i la desviació estàndard de les mostres $s = 12$. Si substituïm aquests resultats per $z_{0{,}025} = 1{,}96$, veiem que l'interval de confiança del 95% per a la mitjana de la població és:

$$\bar{x} \pm 1{,}96\frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \ 278{,}5x \pm 1{,}96\frac{12}{\sqrt{36}}\ ;\ 278{,}5 \pm 3{,}92$$

L'interval és (274,58; 282,42).

El resultat permet arribar a la conclusió que, amb un 95% de confiança, la mitjana per a la població és entre 274,58 i 282,42. Com que el valor suposat de la mitjana de la població $\mu_0 = 280$ és en l'interval de confiança, la conclusió del contrast és que no podem rebutjar la hipòtesi nul·la; per tant, acceptem la hipòtesi que H_0: $\mu = 280$.

Exemple d'inferència per a una població (utilitzant el Minitab): una característica important en el disseny d'una pàgina web és el temps que trigarà a obrir la pàgina l'usuari, que es considera una variable normal. Amb l'objectiu d'estimar el temps mitjà, seleccionem a l'atzar 101 pàgines de les que ha dissenyat una empresa l'últim any, i n'obtenim les dades següents (en centèsimes de segon):

Taula 2. Temps de baixada de pàgines web

Temps de baixada	55	60	62	64	65	69
Nombre de pàgines	11	21	26	19	15	9

Observació: creeu un fitxer de dades en el full del Minitab i hi introduïm les dades de manera unitària.

a) Comproveu que la col·lecció de dades segueix una distribució aproximadament normal.

b) Considereu que el temps mitjà d'obertura de les pàgines d'aquesta empresa és de 62 centèsimes de segon, amb un nivell de confiança del 90%. Quin resultat obtenim? Raoneu la resposta del contrast per mitjà del *p*-valor.

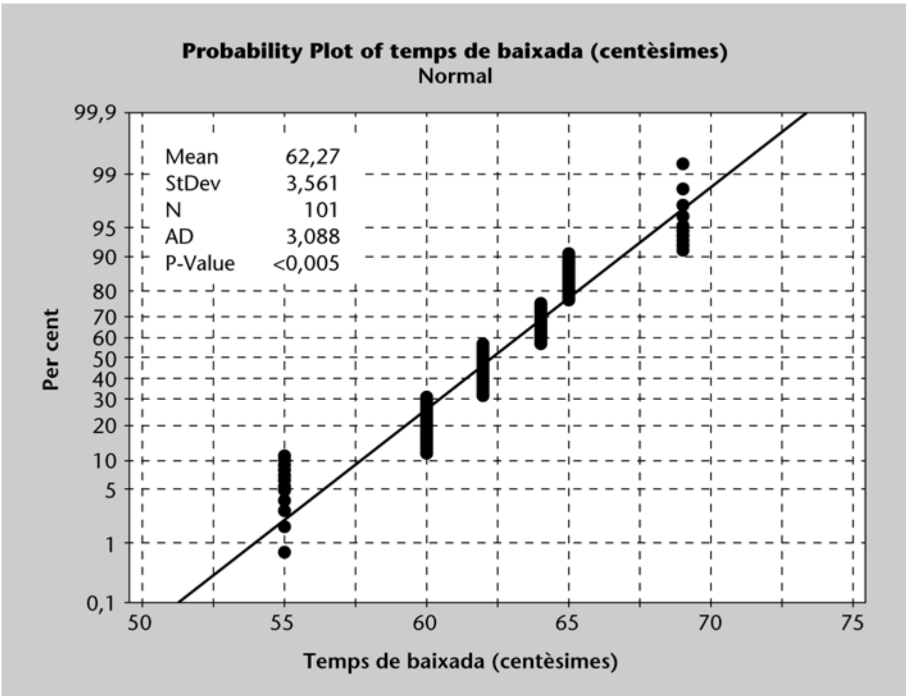
c) Calculeu un interval de confiança al nivell del 90% per al temps mitjà i digueu si el resultat obtingut és coherent amb el resultat esperat.

d) Finalment, feu el mateix contrast que en l'apartat *b* però aquesta vegada tenint en compte que no sabeu la desviació estàndard.

Solució

a) Per a comprovar la normalitat de les dades hem de seleccionar *Stat* > *Basic Statistics* > *Normality Test*. Així obtenim el gràfic de la figura 18.

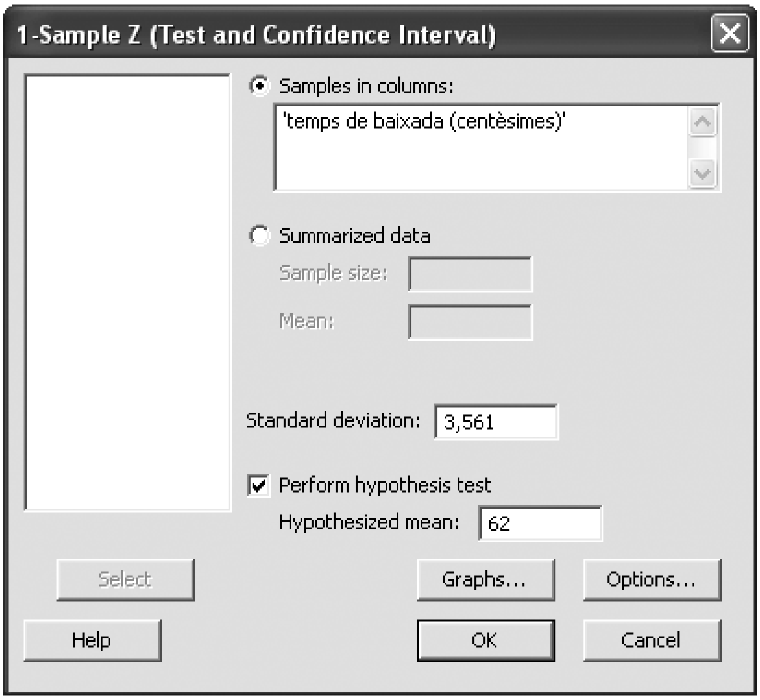
Figura 18. Gràfic de normalitat



Si ens fixem en el *p*-valor arribem a la conclusió que les dades segueixen una distribució normal. A més, podem assegurar que, com que X segueix una distribució normal, la mitjana mostral també segueix una distribució normal.

b) El contrast d'hipòtesi és H_0: $\mu = 62$ contra H_1: $\mu \neq 62$. És un contrast bilateral a un nivell de confiança de 0,90 (figura 19).

Figura 19. Passos que cal seguir per a fer el contrast d'hipòtesi



Els resultats del Minitab són els que mostra la figura 20.

Figura 20. Resultats del contrast d'hipòtesi i interval de confiança del 90% (desviació típica de població coneguda)

One-Sample Z: temps de baixada (centèsimes)

```
Test of mu = 62 vs not = 62
The assumed standard deviation = 3,561

Variable  N    Mean  StDev  SE Mean       90% CI          Z
temps   101  62,267  3,561    0,354  (61,685; 62,850)  0,75

Variable                      P
temps de baixada (cent.) 0,451
```

Fixem-nos que el *p*-valor és 0,451; per tant, com que el *p*-valor > α = 0,10, no podem rebutjar la hipòtesi nul·la i, doncs, acceptem que el temps mitjà és de 62 centèsimes de segon.

c) L'interval de confiança per al temps mitjà és (**61,685**; **62,850**), que és coherent amb els resultats esperats ja que conté el valor mitjà de 62 centèsimes de segon.

d) Anàlogament, fem el contrast d'hipòtesi per a la mitjana de la població amb desviació típica desconeguda: seleccionem *Stat* > *Basic Statistic* > *1-Sample t*, i obtenim els resultats de la figura 21.

Figura 21. Resultats del contrast d'hipòtesi i interval de confiança del 90% (desviació típica de població desconeguda)

One-Sample T: temps de baixada (centèsimes)

```
Test of mu = 62 vs not = 62

Variable  N    Mean  StDev  SE Mean       90% CI          T
temps    101  62,267  3,561    0,354  (61,679; 62,856)  0,75

Variable                      P
temps de baixada (cent.)    0,452
```

El p-valor és 0,452 > 0,10, cosa que ens indica que podem acceptar la hipòtesi que el temps mitjà és de 62 centèsimes de segon.

Continuant amb el mateix exemple, considerem que una pàgina no és satisfactòria quan triguem a baixar-la més de 68 centèsimes. Els programadors diuen que el percentatge de pàgines per a les quals el temps de baixada no és satisfactori no supera el 10%.

e) Calculem un interval de confiança per a la proporció de pàgines no satisfactòries, a un nivell de confiança del 95%.

f) Hi ha evidències, al nivell de 0,05, per a rebutjar l'afirmació dels programadors? Hem de plantejar les hipòtesis que s'han de contrastar i hem de fer el contrast.

e) Per a calcular l'interval de confiança de la proporció de pàgines no satisfactòries, a un nivell de confiança del 95%, seleccionem *Stat > Basic Statistics > 1 Proportion*.

Si ens fixem en la figura 23 de dades veiem que únicament hi ha nou pàgines que superen les 68 centèsimes de segon; o el que és el mateix, de les 101 pàgines que hi ha només n'hi ha 9 en què es considera que el temps de baixada no és satisfactori.

Figura 22. Passos que cal seguir per a obtenir un interval de confiança del 95% per a la proporció

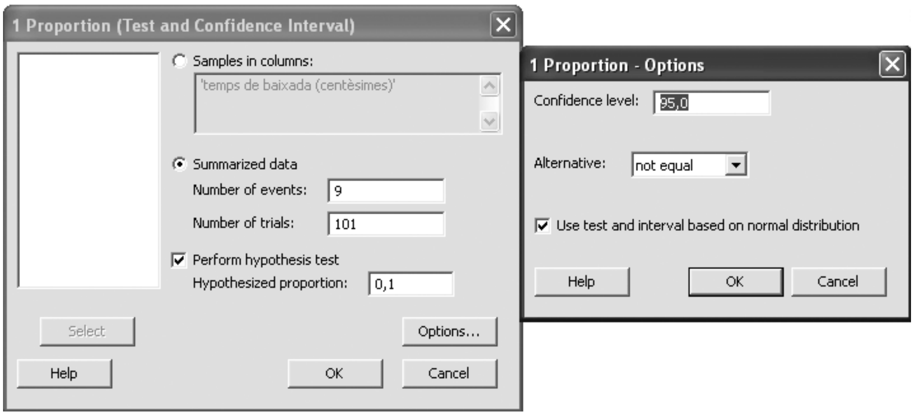


Figura 23. Resultats de l'interval de confiança del 95% per a la proporció de pàgines no satisfactòries

Test and CI for One Proportion

```
Test of p = 0,1 vs p not = 0,1


Sample X   N   Sample p          95% CI          Z-Value  P-Value
  1    9  101  0,089109  (0,033546; 0,144671)    -0,36    0,715

Using the normal approximation.
```

L'interval de confiança obtingut amb un nivell de confiança del 95% és: **(0,033546; 0,144671)**

f) Hem de plantejar un contrast unilateral per a la proporció de pàgines no satisfactòries:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p = 0{,}1, \\ H_1 : p > 0{,}1, \end{array}\right\},$$ en què p representa la proporció de pàgines per a les quals el temps de baixada no és satisfactori (figura 24).

Figura 24. Passos que cal seguir per a fer el contrast d'hipòtesi

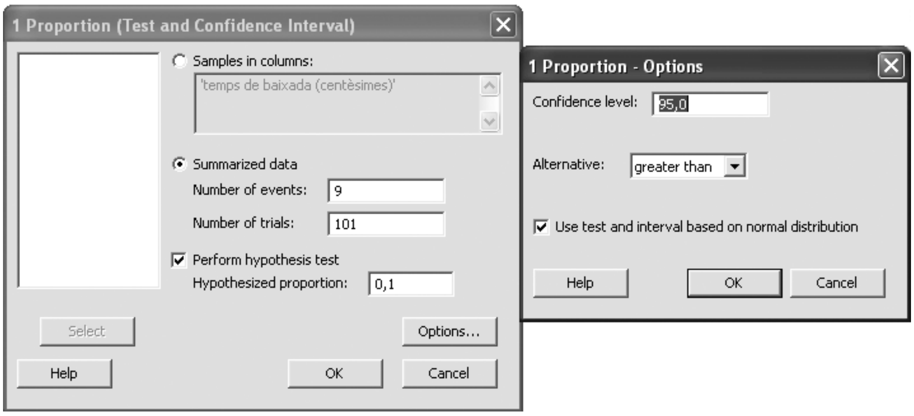


Figura 25. Resultats del contrast d'hipòtesi per a la proporció de pàgines

Test and CI for One Proportion

```
Test of p = 0,1 vs p > 0,1


                             95% Lower
Sample  X    N  Sample p        Bound  Z-Value  P-Value
1       9  101  0,089109     0,042479    -0,36    0,642

Using the normal approximation.
```

Segons es mostra en la figura 25, el p-valor del contrast val el següent: p-valor = 0,642. Com que és més gran que 0,05, acceptem la hipòtesi nul·la; per tant, acceptem l'afirmació dels programadors segons la qual el percentatge de pàgines no supera el 10%.

Resum

En aquest mòdul presentem les distribucions mostrals. S'hi analitza com hem de seleccionar una mostra aleatòria simple i com hem d'utilitzar les dades obtingudes amb aquesta mostra per a desenvolupar estimacions puntuals dels paràmetres de població. De la distribució de probabilitat d'aquestes variables aleatòries se'n diu *distribució mostral*. En particular, descrivim les distribucions de la mitjana de la mostra $\overline{x}$, de la proporció mostral $\hat{p}$ i de la variància mostral s^2. Després de desenvolupar les fórmules de la desviació típica o error estàndard per a aquests estimadors, indiquem que el teorema del límit central és la base per a utilitzar una distribució normal de probabilitats i acostar-nos a aquestes distribucions mostrals en el cas d'una mostra gran.

En aquest mòdul també es desenvolupen estimacions d'intervals de confiança de paràmetres d'una població. A més, hem utilitzat la distribució Z normal estàndard, la t de Student i la khi quadrat χ^2 per a construir intervals de confiança. Determinem la grandària de mostra necessària perquè els estimadors d'interval de μ i de p tinguin un nivell especificat de precisió.

Finalment, en aquest mòdul hem presentat la metodologia per a fer contrastos clàssics d'hipòtesis, començant amb els arguments per a prendre decisions en condicions d'incertesa. Les decisions les hem de prendre rebutjant una hipòtesi nul·la si hi ha proves contundents a favor de la hipòtesi alternativa. Podem cometre dues classes d'errors: un error de tipus I, que cometem quan rebutgem la hipòtesi nul·la quan és vertadera, i un error de tipus II, que cometem quan no rebutgem la hipòtesi nul·la quan no és vertadera. També hem presentat diversos mètodes i diverses regles de decisió específics per a fer contrastos. La regla de rebuig per a tots els procediments implica comparar el valor de l'estadístic amb un valor crític i també utilitzar el p-valor per a proves d'hipòtesis; la regla és rebutjar la hipòtesi nul·la sempre que el p-valor sigui més petit que α.

Exercicis d'autoavaluació

1) Una biblioteca presta una mitjana de $\mu = 320$ llibres per dia, amb una desviació estàndard de $\sigma = 75$ llibres. Tenim una mostra de 30 dies de funcionament, i $\bar{x}$ és la quantitat de la mitjana de la mostra de llibres prestats en un dia.
a) Presenteu la distribució mostral de $\bar{x}$.
b) Quina és la distribució estàndard de $\bar{x}$?
c) Quina probabilitat hi ha que la mitjana d'una mostra de 30 dies sigui entre 300 llibres i 400 llibres?
d) Quina probabilitat hi ha que la mitjana d'una mostra sigui de 325 préstecs al dia o més?

2) Un investigador ens informa dels resultats d'una enquesta i ens diu que l'error estàndard de la mitjana és de 20. La desviació estàndard de la població és de 500.
a) De quina grandària ha estat la mostra que s'ha fet servir en aquesta enquesta?
b) Quina probabilitat hi ha que l'error estimat quedi en ± 25 o menys de la mitjana de la població?

3) Cada curs escolar, una prestigiosa universitat ofereix beques als estudiants per a ampliar estudis a l'estranger. De l'experiència acumulada en altres convocatòries en traiem que les qualificacions mitjanes dels expedients aspirants a obtenir una beca es distribueixen segons una normal d'una mitjana de 6,9 punts i una desviació estàndard de 0,7 punts. Per a entendre l'aplicació del teorema del límit central, genereu amb el Minitab 50 mostres aleatòries de 100 observacions cadascuna, que corresponen a la població normal anterior $N(6{,}9,\ 0{,}7)$.
a) Calculeu en una nova columna la mitjana de les 50 mostres anteriors.
b) Comenteu els resultats fent referència al teorema del límit central.
c) Feu el *dotplot* associat a una de les mostres.
d) Compareu aquests resultats amb la mitjana de la població i el valor de la desviació estàndard de la mitjana mostral amb la desviació estàndard de la població i expliqueu la relació que hi ha entre tots dos valors.

4) Un estudi previ ens diu que el servei de préstec diari de llibres de les biblioteques d'una ciutat segueix una distribució normal amb una mitjana de 300 exemplars prestats i una desviació estàndard de 10. Una inspecció vol verificar si aquestes dades són correctes. Per fer-ho, agafa una mostra dels préstecs diaris de 10 biblioteques i obté una mitjana de 285 exemplars prestats.
a) Quina probabilitat hi ha que si la mitjana és efectivament de 300 exemplars prestats s'obtingui una mitjana de préstecs igual o inferior als 285 exemplars en les 10 biblioteques que componen la mostra?
b) Determineu un interval de confiança del 90% per a la mitjana de préstecs tenint en compte les dades de la mostra.
c) Quina decisió lògica ha de prendre l'inspector?

5) En la pàgina web d'una editorial hi surten dos números de telèfon. Hem comprovat, després d'analitzar 400 trucades del telèfon, que l'interval entre trucades té una variància de 2. Suposant normalitat, indiqueu si podem considerar, a un nivell de confiança del 90%, que la variància de l'interval entre trucades del primer número és inferior a 1,7.

6) El responsable de comunicacions d'un centre de documentació diu que la mitjana del temps de transferència d'un fitxer de 2 MB és superior a 30 segons. Per comprovar aquesta afirmació van agafar una mostra de temps de transferència de 12 fitxers de 2 MB, i van obtenir que la mitjana i la desviació estàndard mostrals valen $\bar{x} = 30{,}2,\ s = 1{,}833$ (en segons).
a) Tenint en compte que el temps de transferència es distribueix normalment, a partir de les dades mostrals obtingudes, tenim prou evidències per a acceptar l'afirmació del responsable? Calculeu el *p*-valor del contrast. (Agafeu $\alpha = 0{,}05$.)
b) Si a més de disposar d'aquestes observacions ens haguessin donat com a informació addicional (obtinguda d'experiències prèvies) que la variància del temps de transferència és de $\sigma^2 = 9{,}2$ segons^2, hauríem arribat a la mateixa conclusió que en l'apartat anterior? Calculeu el *p*-valor del contrast. (Agafeu $\alpha = 0{,}05$.)

Solucionari

1)
a) Normal amb μ = 320 i desviació típica 13,69
b) 13,69
c) 0,8558
d) 0,3557

2)
a) 625
b) 0,7888

3)

D'aquesta manera obtenim les 50 mostres amb 100 observacions cadascuna.

Worksheet 1 ***

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16
1	6,02255	7,51039	7,56941	6,73114	6,89504	7,27531	6,49352	7,07449	7,72782	8,01131	6,51824	7,31135	5,70901	7,18919	6,23128	7,986
2	5,82796	7,23382	8,63014	7,67923	6,82915	7,50193	6,80251	6,83211	6,08951	7,08834	7,44647	7,36977	6,94125	6,82865	8,08839	6,073
3	5,89460	6,19736	7,48944	7,16782	7,30042	6,23994	5,55889	5,92865	6,65836	7,20623	6,29604	6,50873	7,42008	6,63113	7,64693	7,277
4	7,91373	6,63874	6,88954	7,74717	7,75320	6,93165	6,16663	5,94975	7,84482	7,35052	6,62743	7,61428	6,31124	6,59273	6,66213	5,852
5	6,96531	6,54096	7,83251	6,71421	5,76998	6,48673	6,47134	6,87821	7,57085	6,96200	7,26595	7,65586	7,88420	8,22074	7,28688	5,476
6	6,38379	8,14155	5,26726	7,28067	6,89716	6,26790	7,12585	5,82249	6,81010	7,49986	6,99193	5,76598	7,32813	5,52918	7,05477	5,853
7	6,98679	7,50650	7,06138	7,30100	6,61602	7,20820	8,00421	6,49912	8,02260	7,28351	5,36631	6,93591	7,84171	6,61069	6,50505	6,263
8	6,28190	8,55299	8,20722	7,29348	6,51880	7,74509	6,95879	7,46706	7,55387	7,82200	7,22971	7,12365	7,03669	6,01653	8,28156	6,957
9	5,85308	6,42670	7,24762	7,50398	6,46682	7,32013	6,42494	5,69820	6,13376	6,79857	7,15053	6,40466	6,38444	6,24852	6,05964	6,250

Project Man...

Current Worksheet: Worksheet 1 18:19

a) En la columna C101 hi ha les mitjanes mostrals.

Worksheet 1 ***

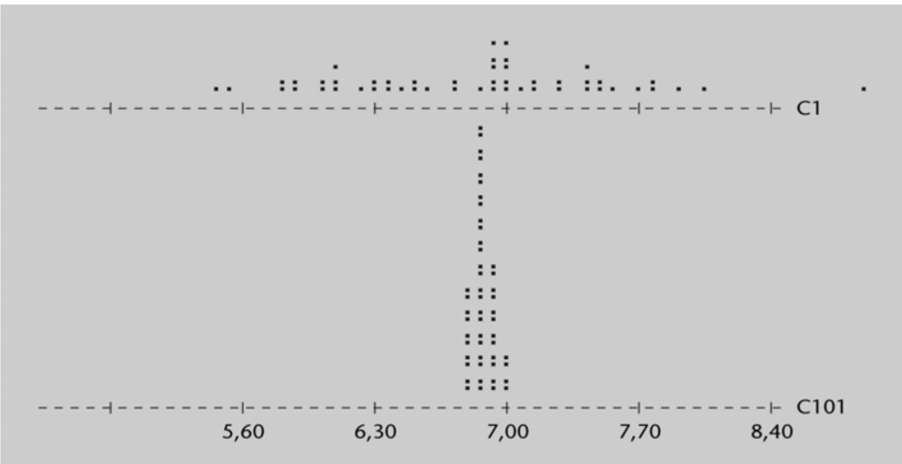
↓	C98	C99	C100	C101
1	5,49495	7,33352	6,49861	6,84032
2	7,27693	5,57569	5,13667	6,90402
3	6,86654	6,96175	7,56928	6,87066
4	7,85956	6,10293	7,09721	6,87309
5	7,68902	4,92515	7,13723	6,89323
6	6,51449	5,78576	7,18556	6,81035
7	7,46093	6,67470	5,89898	6,87570
8	5,41243	7,05719	7,60637	6,98587
9	8,66592	7,03988	7,55059	6,85254

Project Man...

Current Worksheet: Worksheet 1

b)

Dotplot: **C1; C101**



c) Després d'haver generat 50 mostres de dades provinents d'una distribució normal d'una mitjana de 6,9 i una desviació estàndard de 0,7, ens hem adonat que sembla que el primer *dotplot* correspon a una distribució normal.

Alhora, el segon *dotplot* correspon a la distribució de les mitjanes de les mostres i també a una distribució normal.

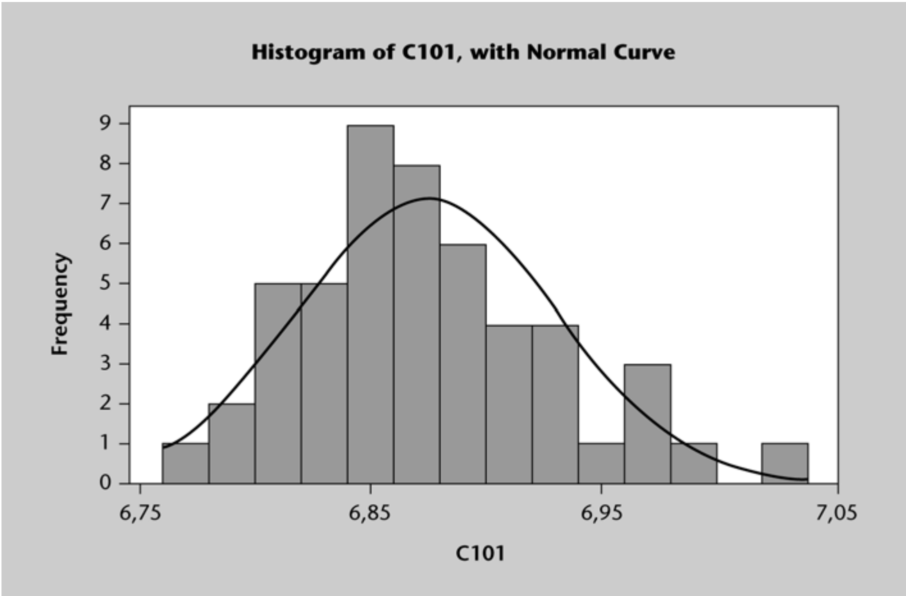
Això indica que les mitjanes d'aquestes mostres segueixen una distribució normal. Aquesta propietat és la que enuncia el teorema del límit central: amb independència de la distribució de les dades, la mitjana mostral (amb una grandària de mostra *n* prou gran) d'una col·lecció de dades segueix una distribució normal.

d) Estudiem la distribució d'aquestes mitjanes mostrals:

Descriptive Statistics: C101

Variable	N	Mean	Median	TrMean	StDev	SE Mean
C101	50	6,9035	6,8914	6,9016	0,0660	0,0093

Variable	Minimum	Maximum	Q1	Q3
C101	6,7837	7,0412	6,8507	6,9603



L'histograma de freqüències s'acosta a la corba normal; és simètrica.

La mitjana mostral coincideix amb la mitjana de la població: $\mu = \bar{x} = 6,9$.

La desviació estàndard de la mitjana mostral és aproximadament l'error estàndard.

Si la variable té una desviació estàndard coneguda σ (en la població), l'error estàndard el podem calcular com a:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Com a conseqüència d'això, direm que la mitjana mostral segueix una distribució normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, que es pot acostar a una $N(0,1)$, fent un canvi de variable (tipificació): $Z = \frac{X - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$.

4)

a) Si estandarditzem la puntuació de 285 en resulta un valor *z* de –4,74, cosa que implica (mirant les taules de la normal) que la probabilitat d'obtenir aquesta puntuació és aproximadament del 0%.

$$p(X < 285) = p(Z < \frac{285 - 300}{10/\sqrt{10}}) = p(Z < -4{,}74) \approx 0$$

b) L'interval de confiança és:

$$z_{\alpha/2,} = 1{,}64$$

$$I = 285 \ \pm 1{,}64 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = 285 \pm 5{,}17 \qquad [279{,}83;\ 290{,}19]$$

c) 300 és fora de l'interval, i per tant, amb un nivell de confiança del 90%, afirmem que la mitjana no arriba a 300 exemplars sinó que en queda per sota.

5) La hipòtesi nul·la és $\sigma^2 = 1{,}7$ i l'alternativa és $\sigma^2 < 1{,}7$.

L'estadístic de contrast és $\chi^2 = \frac{(400-1)s^2}{1{,}7}$, en què s^2 és la variància mostral. Per tant, $\chi^2 = 469{,}412$ i la distribució que té és la de χ^2 amb 400 – 1 = 399 graus de llibertat.

En aquest cas, el *p*-valor val $P(\chi^2 < 469{,}412) = 0{,}991406$, i per tant no rebutgem la hipòtesi nul·la: no podem afirmar que és inferior a 1,7. El valor crític és 363,253.

6)

a) Hem de fer el contrast d'una mitjana amb variància desconeguda. Les hipòtesis nul·la i alternativa són $\begin{array}{l} H_0 : \mu = 30 \\ H_1 : \mu > 30 \end{array}$, en què μ representa la mitjana del temps de transferència d'un fitxer de 2 MB. L'estadístic de contrast és $t = 0{,}378$. El valor crític val $t_{0.05,11} = 1{,}80$. Com que $t < t_{0.05,11}$, acceptem la hipòtesi nul·la i arribem a la conclusió que l'afirmació del responsable és certa. Si el volem calcular, el *p*-valor és $p = p(t_{11} > 0{,}378) \approx 0{,}36$. Com que és un *p*-valor alt, més gran que 0,05, acceptem la hipòtesi nul·la, tal com hem fet abans.

b) Hem de fer el contrast d'una mitjana amb variància coneguda.

La hipòtesi nul·la i l'alternativa són $\begin{array}{l} H_0 : \mu = 30 \\ H_1 : \mu > 30 \end{array}$, en què μ representa la mitjana del temps de transferència d'un fitxer de 2 MB.

L'estadístic de contrast és $z = \frac{\bar{x} - 30}{\sigma / \sqrt{12}}$, en què $\bar{x}$ és la mitjana mostral i σ és la desviació estàndard poblacional. La distribució de *z* és la d'una normal *N*(0,1). La mitjana i la desviació estàndard poblacionals valen, respectivament, $\bar{x} = 30{,}2$, $\sigma = \sqrt{9{,}2} \approx 3{,}03$. El valor de l'estadístic de contrast és $z \approx 0{,}228$.

El valor crític val $z_{0,05} \approx 1{,}645$. Com que $z < z_{0,05}$, tornem a acceptar la hipòtesi nul·la i arribem a la conclusió que l'afirmació del responsable no és certa. Si el volem calcular, el *p*-valor és $p = p(z > 0{,}228) \approx 0{,}41$. Com que és un *p*-valor alt, més gran que 0,05, acceptem la hipòtesi nul·la, com hem fet abans. Per tant, hem arribat a la mateixa conclusió que en l'apartat anterior.