

# Comunicacions digitals passabanda

Margarita Cabrera  
Francesc Tarrés Ruiz

Revisió a càrrec de  
Francesc Rey Micolau  
Francesc Tarrés Ruiz

PID\_00195472



*Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu copiar-los, distribuir-los i transmetre'ls públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), no en feu un ús comercial i no en feu obra derivada. La llicència completa es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.ca>*

# Índex

<b>Introducció</b> .....	5
<b>Objectius</b> .....	8
<b>1. Modulacions lineals QAM</b> .....	9
1.1. Modulador de senyals QAM .....	9
1.2. Modulacions QAM quadrades .....	10
1.3. Modulacions PSK .....	14
1.4. Modulació 32-QAM .....	15
1.5. Amplada de banda de les modulacions QAM .....	16
1.6. Energia mitjana de bit de les modulacions QAM .....	18
1.7. Desmodulador QAM .....	20
1.8. Probabilitat d'error de les modulacions QAM .....	24
1.8.1. BER d'un sistema BPSK .....	25
1.8.2. BER d'un sistema QPSK .....	26
1.8.3. BER d'un sistema 16-QAM .....	27
1.8.4. Casos generals .....	28
<b>2. Modulacions digitals de freqüència</b> .....	30
2.1. Modulacions CPFSK i MSK .....	30
2.2. Modulacions GMSK .....	35
2.3. Desmodulació de senyals CPM .....	37
<b>Resum</b> .....	39
<b>Exercicis d'autoavaluació</b> .....	41
<b>Fórmules matemàtiques</b> .....	45
<b>Bibliografia</b> .....	46



## Introducció

En el mòdul 3 hem estudiat les modulacions passabanda en general. En elles, a partir dels dos senyals, component en fase i component en quadratura, de naturalesa analògica, es forma la modulació passabanda, que resulta ser un senyal de contingut freqüencial centrat entorn de la freqüència portadora.

En el mòdul 5 hem tractat l'estudi de modulacions digitals en banda base, això són senyals de contingut freqüencial centrats entorn de l'origen de freqüències (freqüència igual a zero), tal que el missatge que transporten prové d'una seqüència de bits.

En aquest mòdul, es reprenen els conceptes apresos en els dos mòduls anteriors, ja que es veuran modulacions passabanda, on apareixen tan els conceptes de senyal portador i de freqüència portadora, com els conceptes de component en fase i en quadratura (que corresponen a modulacions digitals en banda base). Les modulacions digitals passabanda presenten, per tant, el seu contingut espectral centrat entorn d'una freqüència portadora. Són típiques de sistemes amb alt grau de multiplexat freqüencial, en els quals es reparteix l'amplada de banda disponible entre diferents usuaris.

Aquest mòdul es divideix en dos apartats. El primer es dedica a l'anàlisi de les modulacions digitals passabanda lineals i entre els diferents subapartats destaquen els de descripció dels senyals més utilitzats d'aquest tipus, densitat espectral, estructura del desmodulador i càlcul de la probabilitat d'error. En aquest apartat s'utilitzen els conceptes d'equivalent passabaix, component en fase i component en quadratura d'una banda, i les modulacions digitals de impulsos per un altre. El segon apartat es dedica a l'anàlisi de les modulacions digitals passabanda no lineals. L'estudi d'aquest tipus de modulacions resulta més complex que el de les modulacions lineals, per la qual cosa ens centrarem únicament en la seva descripció i en situar-les en les aplicacions en les quals s'utilitzen.

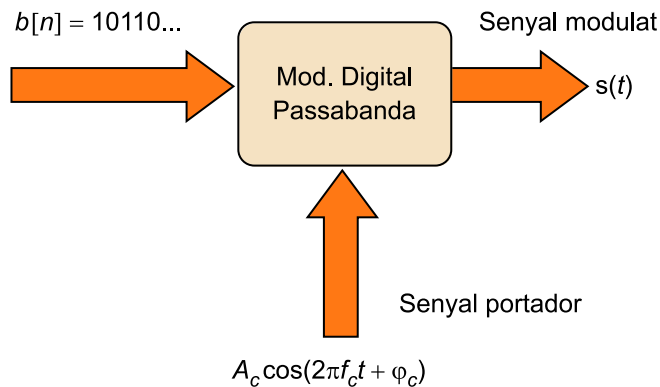
En les modulacions digitals passabanda intervé un senyal portador, definit per amplitud, freqüència i fase, d'una banda, i una seqüència de bits a transmetre per una altra. La seqüència de bits és el senyal d'entrada al modulador digital passabanda i es transmet a una determinada velocitat o a taxa de bit. El senyal obtingut és real i és passabanda, per tant, es troba format per component en fase i per component en quadratura respecte al senyal portador. En la figura 1 es presenta un esquema molt simplificat del modulador digital passabanda.

### Versió digital de les modulacions

Les modulacions digitals passabanda lineals, estudiades en l'apartat 1, representen la versió digital de les modulacions analògiques en fase i en quadratura del subapartat 3.1 del mòdul "Comunicacions analògiques: senyals passabanda", i les modulacions digitals passabanda no lineals o angulars, estudiades en l'apartat 2, representen la versió digital de les modulacions d'FM de l'apartat 6 del mòdul "Comunicacions analògiques: modulacions AM i FM".

Figura 1. Diagrama de blocs d'un modulador digital passabanda

Seqüència de bits



Mitjançant la seqüència de bits, es pot modular l'amplitud, la freqüència o la fase del senyal portador per donar lloc al senyal modulad.

Quan la modulació digital és d'amplitud, de fase o, simultàniament, d'amplitud i fase, el procés de modulació és lineal i la modulació resultant es denomina QAM (*quadrature amplitude modulation*) o també APK (*amplitude and phase keying*). Per analitzar aquests senyals, és útil utilitzar la formulació basada en components en fase i en quadratura:

$$s(t) = i_s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_s(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (1)$$

Si l'equació (1) descriu una modulació QAM, es compleix que tant el component en fase ( $i_s(t)$ ), com el component en quadratura ( $q_s(t)$ ) es corresponen amb una modulació digital en banda base de impulsos modulats en amplitud (PAM). Les modulacions digitals passabanda QAM s'utilitzen en moltes aplicacions.

Si el paràmetre modulad a partir de la seqüència de bits és la freqüència del senyal portador, el procés de modulació resulta no lineal i sol denominar-se modulació angular. En aquest tipus de modulació, la fase instantània del senyal modulad és el que representa la informació de manera més directa, resultant així més representativa que els components en fase i en quadratura. Les modulacions no lineals resultants poden ser de tipus FSK o *frequency shift keying*, en les quals la freqüència instantània es manté constant al llarg del temps de símbol, o bé CPM o CPM o *continuous phase modulation*, en les quals la fase instantània de la modulació es manté contínua en temps, fins i tot en les transicions de símbol. La propietat de continuïtat temporal de fase repercuteix en el fet que es manté l'espectre de la modulació, més limitat en banda que en les modulacions, en les quals la fase instantània presenta discontinuïtats. Com a cas particular, les modulacions CPFSK o *continuous phase frequency shift keying*, representen un tipus de modulacions digitals angulars que compleixen amb-

**Vegeu també**

Vegeu els components del senyal en fase i en quadratura en el mòdul "Comunicacions analògiques: modulacions AM i FM" d'aquesta assignatura.

**Vegeu també**

La modulació d'impulsos d'amplitud (PAM) s'estudia en l'apartat 3 del mòdul "Comunicacions digitals en banda base" d'aquesta assignatura.

dues condicions: la freqüència instantània és constant al llarg del temps dedicat a transmetre cada símbol i la fase instantània no presenta discontinuïtats en cap instant de temps.

## Objectius

Els objectius del mòdul comprenen l'aprenentatge dels conceptes i tècniques següents:

- 1.** Saber caracteritzar els components en fase i en quadratura d'una modulació de tipus QAM com a modulacions digitals de impulsos PAM.
- 2.** Estudiar l'espai del senyal o constel·lació del senyal per a modulacions QAM.
- 3.** Distingir entre modulacions PSK, APSK i QAM quadrades.
- 4.** Saber analitzar la probabilitat d'error per a modulacions QAM sobre canals gaussians.
- 5.** Saber caracteritzar la fase instantània del senyal d'una modulació angular com una modulació digital de impulsos PAM.
- 6.** Distingir entre modulacions FSK i modulacions CPM.
- 7.** Comprendre els avantatges obtinguts pel que fa a l'amplada de banda en treballar amb modulacions CPM.



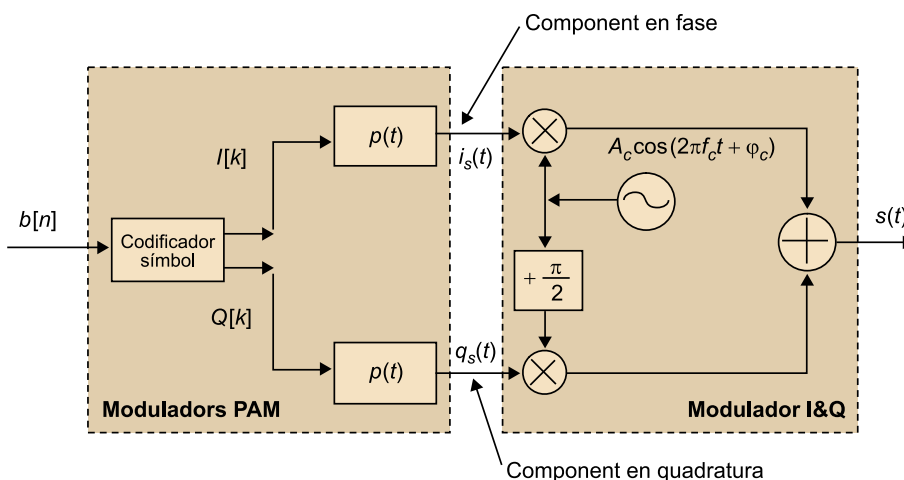
## 1. Modulacions lineals QAM

Les modulacions d'amplitud en quadratura o QAM inclouen un conjunt molt ampli de diferents tipus de modulacions passabanda digitals i lineals. És per això que iniciem aquest apartat descrivint les característiques genèriques d'aquest tipus de modulació i, posteriorment, descrivint de manera detallada les propietats diferencials de cada tipus.

### 1.1. Modulador de senyals QAM

Des d'una perspectiva funcional, un modulador digital QAM passabanda està format per un modulador digital en banda base, l'entrada del qual és una seqüència de bits, i té dos senyals de sortida consistents en dues modulacions de impulsos de tipus PAM. Les dues modulacions PAM, al seu torn, corresponen als components en fase i en quadratura d'un modulador I&Q. El procés complet es descriu en la figura 2.

Figura 2. Diagrama de blocs d'un modulador QAM



Els components en fase i en quadratura de la modulació s'expressen cadascun d'ells com una modulació de tipus PAM, segons:

$$i_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n]p(t - nT); \quad q_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q[n]p(t - nT) \quad (2)$$

A (2) les seqüències  $I[n]$  i  $Q[n]$ , representen respectivament la seqüència de símbols del component en fase i la seqüència de símbols del component en quadratura. La forma  $p(t)$  és la funció triada per al pols base. Un exemple de pols utilitzat és el pols rectangular sense retorn a zero (NRZ), tot i que de manera habitual s'utilitzen impulsos d'arrel cosinus realçat per ser espectralment més

eficients, com es discutirà més endavant. Els dos components I&Q, corresponents cadascun d'ells a una modulació PAM, es modulen mitjançant una modulació I&Q segons es mostra en la figura 2 i s'obté el senyal modulad QAM:

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n]p(t-nT)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q[n]p(t-nT)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (3)$$

Per a cada tipus de modulació QAM, s'utilitza un alfabet diferent de tots els possibles valors que cal assignar al parell d'amplituds ( $I[n]$ ,  $Q[n]$ ). Si els bits es codifiquen de  $b$  en  $b$ , l'alfabet es compon de  $M = 2^b$  parells possibles de valors. En general, els símbols són equiprobables i estadísticament independents en temps:

$$\Pr\{I[n] + jQ[n] = (I + jQ)_m = a_m\} = \frac{1}{M}; \quad M = 2^b \quad (4)$$

En utilitzar nomenclatura de símbols complexos, es fa coincidir la part real del símbol complex amb el símbol de la modulació PAM corresponent al component en fase, i la part imaginària del símbol complex amb el símbol de la modulació PAM corresponent al component en quadratura.

En resum, una modulació QAM és un senyal passabanda, l'equivalent passabaix complex del qual està format per dues modulacions de tipus PAM. Una d'elles es correspon amb la part real de l'equivalent passabaix i per tant es denomina component en fase, i l'altra es correspon amb la part imaginària de l'equivalent passabaix i per tant es denomina component en quadratura.

A continuació es descriuen els casos més usuals de modulació QAM.

## 1.2. Modulacions QAM quadrades

En les modulacions QAM de tipus quadrat es tenen  $M$  símbols disponibles, sent  $M$  potència de 4, és a dir, el nombre de bits assignat a la codificació de cada símbol és par. En particularitzar el nombre de símbols  $M$ , se sol denominar la modulació mitjançant el nombre de símbols com a xifra prèvia a les sigles QAM. Així, per exemple, 4-QAM és la modulació QAM de quatre nivells i 16-QAM és la modulació QAM de 16 nivells.

En realitzar la codificació dels símbols en QAM, els bits parells determinen el component en fase i els bits senars determinen el component en quadratura. Dit d'una altra manera, a cada  $b$  bits se'ls assigna un símbol complex, de tal manera que  $b/2$  bits determinen el símbol del component en fase i  $b/2$  bits

### Nota

En el cas que els bits a la sortida de la font no siguin equiprobables i estadísticament independents, s'afegeix un aleatoritzador (en anglès, *scrambler*) per garantir que els símbols transmesos siguin equiprobables i estadísticament independents en temps.

### Recordeu

Amb modulacions passabanda és útil definir el senyal equivalent passabaix complex i treballar amb aquest per simplificar nomenclatura en diferents anàlisis del senyal.

### Vegeu també

La nomenclatura M-QAM és per tant anàloga a la M-PAM utilitzada en el subapartat 4.3 del mòdul "Comunicacions digitals en banda base" d'aquesta assignatura.

determinen el símbol del component en quadratura. En ambdós casos la modulació de cada un dels dos components és de tipus polar (la meitat dels nivells són positius i l'altra meitat són negatius i simètrics respecte als nivells positius).

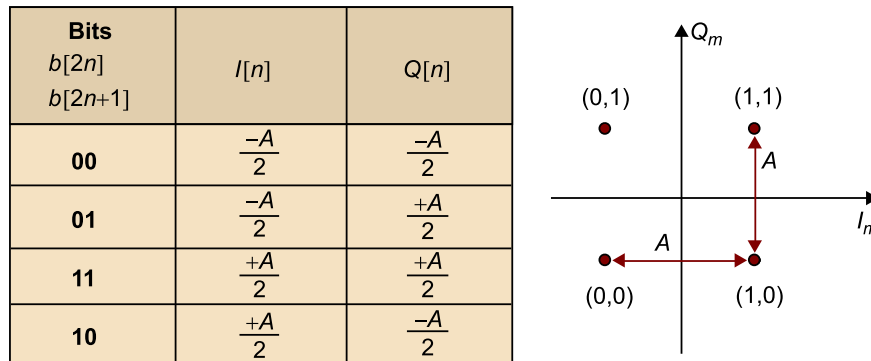
A continuació es presenta en l'exemple 1 un cas particular senzill de QAM quadrada, però prèviament heu de llegir la definició d'*espai de senyal* que sens dubte ajudarà a entendre aquest tipus de modulacions QAM quadrades.

Es denomina espai de senyal, o també, constel·lació del senyal, a la representació geomètrica dels símbols complexos d'una modulació QAM sobre un sistema d'eixos de coordenades cartesianes. O sigui, es representa la part imaginària o símbol del component en quadratura en funció de la part real o símbol del component en fase, i es dibuixa un punt o qualsevol altre signe senzill en cada parell de coordenades o símbols possibles de l'alfabet.

### Exemple 1. Modulació 4-QAM (QPSK)

Per a aquest tipus de modulació, s'assignen  $b = 2$  bits/símbol, donant lloc a  $M = 4$  símbols. En la figura 3 es mostra la taula d'assignació de nivells en realitzar la codificació de símbol. El primer de cada parell de bits (bits parells) determina el signe del component en fase ( $I[n]$ ) i el segon bit (bits senars) determina el signe del component en quadratura ( $Q[n]$ ). Ambdós símbols se solen representar en el denominat *espai de senyal* o *constel·lació del senyal*. Observeu en la figura que hi ha quatre punts, un per a cada un dels  $M = 4$  símbols i s'hi ha representat el parell de bits corresponents.

Figura 3. Codificació de símbol i espai de senyal de la modulació 4-QAM o QPSK



Mitjançant la constant  $A$ , se simbolitza en la figura 3 la separació entre les amplituds corresponents als dos símbols binaris polars de cada un dels dos components I&Q.

La modulació 4-QAM és més comunament coneguda amb el nom de QPSK (*quadrature and phase shift keying*), ja que en els instants en què es produeixen les transicions de símbol, únicament es produeixen canvis de fase sobre el senyal modulad, i el valor absolut dels símbols complexos queda constant. A partir de la taula de la figura 3 corresponent a aquesta modulació es dedueix que el símbol complex resultant és:

$$a_m = I_m + jQ_m = \frac{A}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_m} = \frac{A}{\sqrt{2}} \cos(\varphi_m) + j \frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\varphi_m) \quad (5)$$

$$\varphi_m = \frac{+\pi}{4}, \frac{+\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}$$

De l'equació (5) es dedueix que els símbols complexos resultants ( $a_m$ ) presenten tots el mateix valor absolut:  $\frac{A}{\sqrt{2}}$  i diferent fase  $\varphi_m$ . La fase depèn dels dos bits assignats. De la

figura 3, es dedueix que la fase  $\varphi_m = \frac{\pm\pi}{4}$  representa el parell de bits: 11. de la mateixa manera, es pot veure quin és el parell de bits assignats a la resta de les fases  $\varphi_m$  possibles.

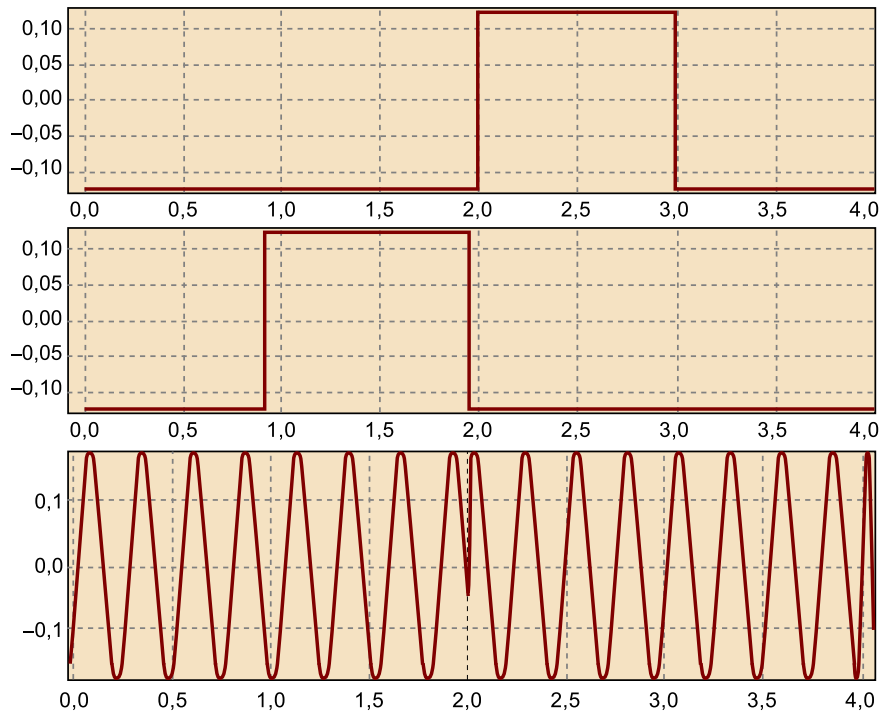
Per a aquest exemple, la modulació expressada a (3) queda particularitzada com a:

$$\begin{aligned} s(t) &= \\ &= A_c \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\varphi[n]) p(t-nT) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin(\varphi[n]) p(t-nT) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) = \\ &= A_c \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t-nT) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \varphi[n]) \end{aligned} \quad (6)$$

Per la qual cosa queda demostrat que a partir de la informació binària es modula únicament la fase del senyal portador, mitjançant el terme  $\varphi[n]$ .

En la figura 4 es mostra un tram dels senyals temporals per a un període de quatre símbols que successivament passen per les quatre fases possibles d'aquesta modulació. Per simplicitat en la figura, s'ha utilitzat un pols rectangular NRZ per a la modulació dels components I&Q.

Figura 4. Exemple de modulació QPSK al llarg de quatre períodes de símbol



L'eix temporal es troba normalitzat al temps de símbol. És a dir, està dividit pel temps de símbol  $T$ . La gràfica superior correspon al component en fase en funció del temps i la central, al component en quadratura també en funció del temps. En la gràfica inferior es representa el senyal modulad resultant i expressat per a un cas general en l'equació (6).

En les transicions de símbol del senyal modulad representat en la figura 4, s'observen clarament els canvis de fase instantània.

L'exemple 1 representa el cas més senzill possible de modulació QAM quadrada. A continuació, mitjançant l'exemple 2 s'analitza la modulació 16-QAM, també quadrada, i per la qual s'arriben a transmetre 4 bits per símbol.

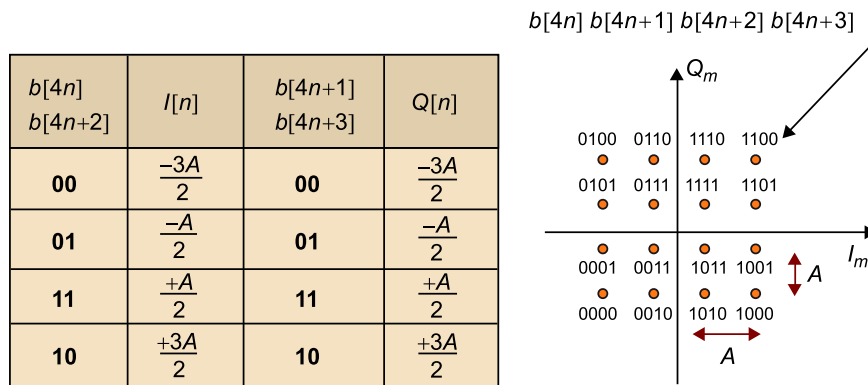
### Exemple 2. Modulació 16-QAM

Per a aquest tipus de modulació s'assignen  $b = 4$  bits/símbol, donant lloc a  $M = 16$  símbols.

En la figura 5 es mostra la taula d'assignació de nivells en realitzar la codificació de símbol. Els símbols del component en fase s'assignen a partir de dos bits, per la qual cosa s'han de tenir quatre nivells possibles d'una modulació PAM 4polar. El mateix passa per al component en quadratura. Per tant, amb els bits parells es decideix el signe i l'amplitud

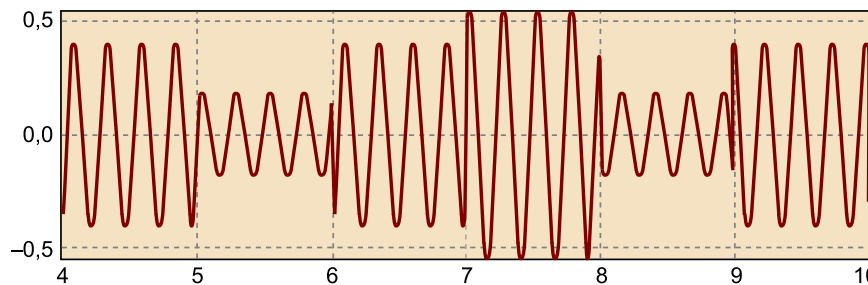
del component en fase, i amb els bits senars es decideix el signe i l'amplitud del component en quadratura.

Figura 5. Codificació de símbol i espai de senyal de la modulació 16-QAM



En el senyal de la figura 6, es representa l'assignació de bits a cada un dels  $M = 16$  símbols assumint de nou un pols rectangular NRZ.

Figura 6. Exemple de modulació 16-QAM al llarg de 6 períodes de símbol



El pols base  $p(t)$  és rectangular NRZ. L'eix temporal està normalitzat al temps de símbol.

En la modulació 16-QAM, a partir de la informació binària, es produeixen canvis tant en l'amplitud com en la fase del senyal modulad, ja que, en formar el símbol complex  $a_m = I_m + jQ_m$ , s'obtenen símbols que en coordenades polars presenten diferents valors tant en valor absolut com en fase.

En les transicions de símbol de la figura 6, s'observen clarament els canvis de fase instantània i d'amplitud del senyal modulad.

A més de QPSK i 16-QAM, altres formats de modulació, àmpliament utilitzats i també corresponents a espais de senyal amb representacions geomètriques quadrades, són 64-QAM, 256-QAM i 1024-QAM. Solen utilitzar-se quan es requereixen prestacions d'alta velocitat binària en una amplada de banda reduïda, i es poden permetre transmissions amb un elevat quocient d'energies senyal a soroll. Trobarem, per tant, modulacions 1024-QAM per exemple en escenaris de comunicacions digitals per cable, on el canal de comunicacions és prou bo per garantir una comunicació fiable amb constel·lacions de molts punts.

### 1.3. Modulacions PSK

En les modulacions digitals de fase, denominades PSK o *phase shift keying*, l'assignació dels bits determina directament la fase del símbol complex  $a_m = I_m + jQ_m$ , deixant sempre el valor absolut constant. La modulació QPSK de l'exemple 1 és un cas particular de modulacions PSK. Per al cas general, on es requereix un alfabet de  $M = 2^b$  símbols, es realitza l'assignació següent:

$$a_m = I_m + jQ_m = e^{j\varphi_m} = \cos\varphi_m + j\sin\varphi_m; \quad \varphi_m = m\frac{2\pi}{M}; \quad m = 0 \dots M - 1 \quad (7)$$

En l'equació (7) cada possible fase  $\varphi_m$  resulta de l'agrupació particular de  $b$  bits disponibles a l'entrada del codificador de símbol.

#### Exemple 3. Modulació 8-PSK

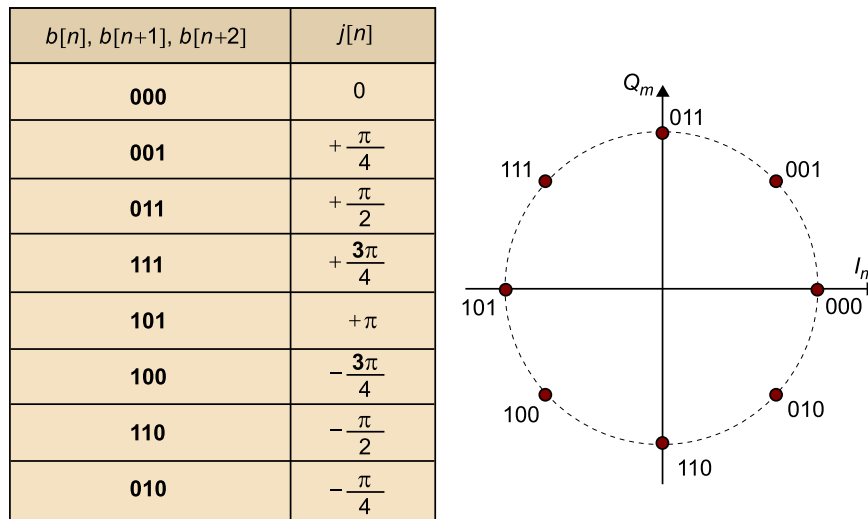
Per a aquest tipus de modulació s'assignen  $b = 3$  bits/símbol, donant lloc a  $M = 8$  símbols.

En la figura 7 es mostra la taula d'assignació de nivells en realitzar la codificació de símbol. Els tres bits de cada símbol determinen directament la fase del símbol que cal transmetre.

En l'espai de senyal de la figura 7, es representa l'assignació de bits a cada un dels  $M = 8$  símbols.

En la modulació 8-PSK, a partir de la informació binària, es produeixen canvis únicament en la fase del senyal modulad, ja que en formar el símbol complex  $a_m = I_m + jQ_m$ , s'obtenen símbols que en coordenades polars difereixen entre si únicament en la fase.

Figura 7. Codificació de símbol i espai de senyal de la modulació 8-PSK



4-PSK i 8-PSK son els dos tipus de modulació de fase més utilitzats a la pràctica.

En les modulacions de fase i pols rectangular, l'envolupant del senyal modulad es manté constant en el temps. Vegeu com a exemple el senyal modulad representat en la figura 4 per a la modulació 4-PSK. Aquesta característica fa de les modulacions PSK que siguin adequades en aplicacions, en les quals s'ha d'amplificar el senyal mitjançant amplificadors d'alta potència, com és el cas d'alguns sistemes de comunicacions per satèl·lit.

**Nota**

Observeu que en modulacions PSK els components fase i quadratura  $I_m, Q_m$  no són independents, sinó que mantenen una relació per garantir que la informació es trasllada directament a la fase del símbol. Així, el component en fase coincideix amb el cosinus de la fase del símbol i el component en quadratura amb el sinus de la fase, com es veu a l'equació 7.

**Nota**

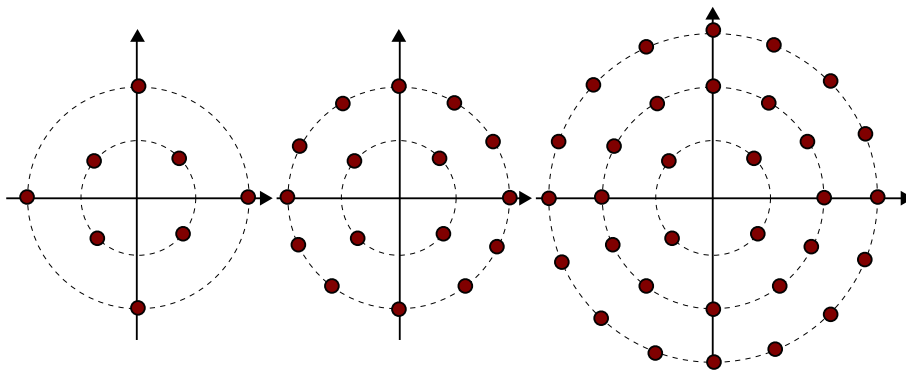
És important fer notar que quan el pols conformador no és rectangular, PSK deixa de ser un senyal d'envolupant constant.

Quan s'amplifiquen senyals amb elevat nivell d'amplificació, si aquests funcionen en règim de no linealitat, les modulacions que són d'envolupant constant resulten més robustes davant no linealitats. És a dir, menys distorsionades que les que no són de tipus PSK.

Alguns sistemes de comunicacions per satèl·lit estandarditzats, com per exemple la televisió digital per satèl·lit (DVB-S2), utilitzen modulacions denominades APSK o *amplitude phase shift keying*, consistents en diferents constel·lacions PSK concèntriques, i amb diferents radis en la constel·lació o espai de senyal.

En la figura 8 es mostren els tres casos de modulacions APSK definits en l'estàndard DVB-S2, mitjançant els quals es pot treballar amb modulacions de 8, 16 o 32 nivells.

Figura 8. Espai de senyal de modulacions concèntriques 8-APSK, 16-APSK i 32-APSK



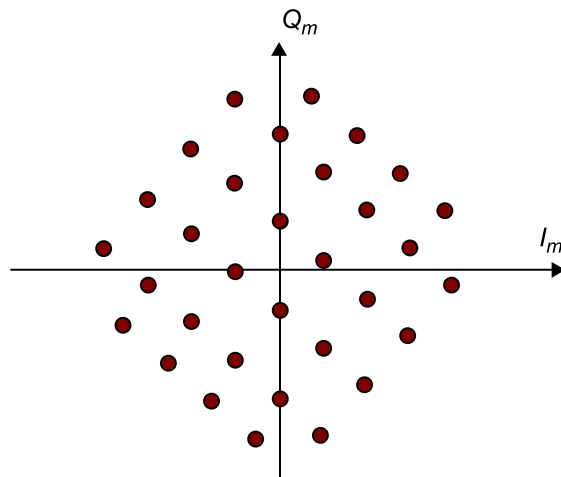
La modulació 32-APSK s'utilitza principalment si la condició de linealitat dels amplificadors es troba garantida. S'assignen 3, 4 i 5 bits per símbol respectivament a cada una de les tres modulacions. Encara que en la figura 8 no s'ha representat el conjunt de bits que determina cada símbol, l'assignació es fa igual que als exemples vistos (8-PSK, 16-QAM, ...).

#### 1.4. Modulació 32-QAM

A més de les modulacions de constel·lacions totalment quadrades o de les modulacions de constel·lacions circulars, hi ha altres tipus de codificació de símbol de tipus QAM, l'espai o constel·lació de senyal del qual presenta una forma geomètrica diferent. Un dels formats més populars és el 32-QAM tal com s'utilitza en l'estàndard V.32, integrat dins de la xarxa digital de serveis integrats per a transmissions mitjançant fax. Aquest tipus de modulacions es van desenvolupar àmpliament amb la digitalització de les xarxes telefòniques en les dècades dels setanta i vuitanta.

En l'espai de senyal representat en la figura 9, cada punt de la constel·lació representa un conjunt de 5 bits.

Figura 9. Espai de senyal de la modulació 32-QAM tal com s'utilitza en l'estàndard V.32



Una característica comuna a totes les modulacions QAM basades en el pols rectangular NRZ és que, com a resultat de la modulació, en el període assignat a cada símbol el senyal modulat resultant és una funció sinusoidal de freqüència igual a la freqüència del senyal portador:  $f_c$ , i d'amplitud  $A_m$  i/o fase  $\varphi_m$ , determinades pel símbol que s'estigui transmetent i constants al llarg de tot el període assignat al corresponent símbol. El senyal que es transmet durant el temps de símbol es denomina **pol de radiofreqüència** i s'expressa com a:

$$A_m \cos(2\pi f_c t + \varphi_m) \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (8)$$

### 1.5. Amplada de banda de les modulacions QAM

Un cop presentada la descripció de les modulacions digitals passabanda més bàsiques, ens ocuparem d'un altre aspecte d'interès, l'anàlisi de la seva amplada de banda. L'amplada de banda que ocupen és sempre un paràmetre crític en les modulacions passabanda, perquè normalment aquest tipus de senyals s'utilitzen en sistemes de comunicacions multiplexant-se entre si. És a dir, es transmeten simultàniament, però ocupant cada una d'elles una part diferent de l'amplada de banda adjudicada a tot el sistema.

Com a pas previ a la caracterització de l'amplada de banda, es necessita obtenir la funció de densitat espectral d'aquest tipus de modulacions, la qual se centra al voltant de la freqüència portadora.

Les modulacions analitzades en els subapartats 1.2, 1.3 i 1.4 són processos aleatoris passabanda de la forma:

$$s(t) = i_s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_s(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (9)$$



El senyal a (9) resulta un procés aleatori perquè els senyals  $i_s(t)$ ,  $q_s(t)$  són dos processos aleatoris i la fase  $\varphi_c$  és una variable aleatòria.

En els tres tipus de modulació, QAM quadrada, PSK i APSK, la funció de densitat espectral de la modulació,  $(S_s(f))$ , es pot expressar en funció de la densitat espectral del component en fase,  $S_{i_s}(f)$ , i de la densitat espectral del component en quadratura,  $S_{q_s}(f)$ :

$$S_s(f) = A_c^2 \frac{1}{4} (S_{i_s}(f - f_c) + S_{q_s}(f - f_c) + S_{i_s}(f + f_c) + S_{q_s}(f + f_c)) \quad (10)$$

Així, el desenvolupament que necessitem per analitzar la funció de densitat espectral de les modulacions QAM rau directament en el càlcul de la funció de densitat espectral dels seus components en fase i en quadratura. Ja que ambdós senyals són modulacions de tipus PAM, la seva funció de densitat espectral és proporcional a la transformada de Fourier del pols base elevada al quadrat. Si aquesta característica s'aplica a l'equació (10), la densitat espectral d'una modulació de tipus QAM queda reduïda a:

$$S_s(f) = A_c^2 K (P^2(f - f_c) + P^2(f + f_c)) \quad (11)$$

On  $P(f)$  és la transformada de Fourier del pols base  $p(t)$  en el domini del temps, i  $K$  és una constant que depèn del tipus de modulació.

Qualsevol modulació QAM que utilitzi impulsos rectangulars:

$$P(f) = TF \left[ \Pi \left( \frac{t}{T} \right) \right] = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \quad (12)$$

Presenta una funció de densitat espectral de la forma:

$$S_s(f) = A_c^2 K \left( \left| \frac{\sin(\pi(f-f_c)T)}{\pi(f-f_c)} \right|^2 + \left| \frac{\sin(\pi(f+f_c)T)}{\pi(f+f_c)} \right|^2 \right) \quad (13)$$

No tots els sistemes de comunicacions basats en modulacions QAM utilitzen el pols rectangular NRZ. Si les restriccions d'amplada de banda són importants, se solen utilitzar impulsos d'arrel de cosinus realçat, mitjançant els quals ja hem vist que l'amplada de banda del pols és igual a la meitat de la velocitat de símbol,  $r$ , incrementada en un tant per cent denominat factor de *rolloff*. El sistema UMTS utilitza modulacions QAM basades en impulsos arrel de cosinus realçat, el factor de *rolloff* del qual oscil·la entorn de valors d'un 25%.

Tornant a l'expressió genèrica (11) i a efectes de disseny d'un sistema de comunicacions, la conclusió important es manifesta en la següent idea clau:

#### Equació (10)

La demostració de l'equació (10) és difícil i està basada en les propietats estadístiques dels components en fase i en quadratura i de la variable aleatòria  $\varphi_c$ .

Diguem que tant per dificultat com per temps, la demostració escapa als objectius d'aquest curs, tanmateix, és una expressió que es pot aplicar a totes les modulacions d'aquest mòdul.

#### Vegeu també

L'ocupació espectral de la modulació d'impulsos d'amplitud (PAM) s'estudia en l'apartat 5 del mòdul "Comunicacions digitals en banda base" d'aquesta assignatura.

#### Vegeu també

Sobre els impulsos d'arrel de cosinus realçat, vegeu el mòdul "Comunicacions digitals en banda base" d'aquesta assignatura.

L'amplada de banda d'una modulació QAM  $s(t)$  resulta el doble que l'amplada de banda del pols  $p(t)$ .

$$B_s = 2B_p \quad (14)$$

El que s'ha de tenir en compte a l'hora d'implementar un estàndard o que realitzin les assignacions freqüencials de diferents senyals QAM modulades.

## 1.6. Energia mitjana de bit de les modulacions QAM

En analitzar la probabilitat d'error per a modulacions digitals, és important donar el resultat en funció del quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$ , a fi de poder comparar diferents sistemes de modulació digital en igualtat de condicions.

Com a pas previ al càlcul de l'energia mitjana transmesa per bit, és interessant recordar com es realitza el càlcul de l'energia mitjana de símbol, com la mitjana estadística ( $E[\cdot]$ ) de la integral del senyal al quadrat al llarg d'un període de símbol.

$$E_s = E \left[ \int_0^T s^2(t) dt \right] \quad (15)$$

A continuació, s'aplica la definició (15) a les modulacions QAM definides a (3), considerant per simplicitat, i sense pèrdua de generalitat, que:

- El pols base és rectangular NRZ  $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ . A causa de la constant  $\frac{1}{\sqrt{T}}$  aquest pols és d'energia igual a 1.
- Es compleix la relació següent entre la freqüència portadora i la velocitat de símbol:  $f_c = Nr$ , amb  $N \ll 1$ .

Per al càlcul de l'energia mitjana de símbol, quan el senyal modulad és el donat per (9), amb les expressions per als components en fase i en quadratura de l'equació (2), es parteix de l'expressió genèrica del senyal QAM:

### La relació $f_c = Nr$

La relació  $f_c = Nr$  indica que la freqüència portadora és un múltiple sencer de la velocitat de símbol. Aquesta condició es compleix a la pràctica perquè tots els senyals de rellotge d'un modulador provenen d'un oscil·lador únic, a partir del qual, mitjançant divisors de freqüència, s'aconsegueix la resta de senyals de rellotge a velocitats menors. La relació de multiplicitat de les freqüències és també molt útil en caracteritzar aquests senyals, ja que se simplifiquen els desenvolupaments matemàtics, com passa en el càlcul de l'energia mitjana de símbol.

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n]p(t-nT)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q[n]p(t-nT)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (16)$$

En aplicar l'operador estadístic  $E$ , s'obté:

$$\begin{aligned} E_s &= \\ &= A_c^2 \left( E[I_m^2] \int_0^T p^2(t) \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c) dt + E[Q_m^2] \int_0^T p^2(t) \sin^2(2\pi f_c t + \varphi_c) dt \right) = \\ &= A_c^2 \left( E[I_m^2] \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c) dt + E[Q_m^2] \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(2\pi f_c t + \varphi_c) dt \right) = \\ &= \frac{A_c^2}{2} (E[I_m^2] + E[Q_m^2]) = \frac{A_c^2}{2} (\sigma_I^2 + \sigma_Q^2) \end{aligned} \quad (17)$$

El càlcul de l'energia desenvolupat a (17) és correcte sempre que es compleixi  $f_c = Nr$ . El que és cert amb els exemples analitzats en aquest mòdul: QPSK, 16-QAM, PSK, APSK i 32-QAM.

L'energia mitjana de símbol,  $E_s$ , d'una modulació QAM,  $s(t)$ , és igual a la semisuma de les variàncies de les amplituds de símbol  $\sigma_I^2, \sigma_Q^2$ , multiplicada per l'amplitud al quadrat del senyal portador. L'energia mitjana per bit resulta igual a:

$$E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{A_c^2}{2b} (\sigma_I^2 + \sigma_Q^2) \quad (18)$$

A continuació, es presenta el càlcul de l'energia mitjana de símbol i de l'energia mitjana de bit per a tres casos particulars. En tots ells s'assumeix que el pols és rectangular NRZ i d'energia igual a 1, i es deixa el resultat en funció de l'amplitud del senyal portador  $A_c$  i de la distància entre símbols  $A$ .

#### Exemple 4. Energia de la modulació QPSK

Per a la modulació QPSK, els símbols dels components I&Q es defineixen segons la taula de la figura 3. Les variàncies corresponents a les amplituds de símbol resulten:

$$I_m = \frac{-A}{2}, \frac{+A}{2} \Rightarrow \sigma_I^2 = E[I_m^2] = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{-A}{2} \right)^2 + \left( \frac{+A}{2} \right)^2 \right) = \frac{A^2}{4}$$

$$Q_m = \frac{-A}{2}, \frac{+A}{2} \Rightarrow \sigma_Q^2 = E[Q_m^2] = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{-A}{2} \right)^2 + \left( \frac{+A}{2} \right)^2 \right) = \frac{A^2}{4}$$

Substituint ambdós valors a (17), s'obtenen l'energia mitjana de símbol i l'energia mitjana de bit en funció de l'amplitud de portadora i de la distància entre símbols.

#### Equació (17)

En el càlcul de l'expressió (17) i amb la relació  $f_c = Nr$  podeu comprovar fàcilment que:

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c) dt &= \\ &= \int_0^T \sin^2(2\pi f_c t + \varphi_c) dt = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

$$E_s = \frac{A_c 2A^2}{4}; E_b = \frac{A_c 2A^2}{8};$$

### Exemple 5. Energia de la modulació 16-QAM

Per a la modulació 16-QAM els símbols dels components I&Q es defineixen segons la taula de la figura 5. Les variàncies corresponents a les amplituds de símbol resulten:

$$I_m = \frac{-3A}{2}, \frac{-A}{2}, \frac{+A}{2}, \frac{+3A}{2} \Rightarrow \sigma_I^2 = E[I_m^2] = \frac{1}{4} \left( \left( \frac{-3A}{2} \right)^2 + \left( \frac{-A}{2} \right)^2 + \left( \frac{+A}{2} \right)^2 + \left( \frac{+3A}{2} \right)^2 \right) = \frac{5A^2}{4}$$

$$Q_m = \frac{-3A}{2}, \frac{-A}{2}, \frac{+A}{2}, \frac{+3A}{2} \Rightarrow \sigma_Q^2 = E[Q_m^2] = \frac{1}{4} \left( \left( \frac{-3A}{2} \right)^2 + \left( \frac{-A}{2} \right)^2 + \left( \frac{+A}{2} \right)^2 + \left( \frac{+3A}{2} \right)^2 \right) = \frac{5A^2}{4}$$

Substituint ambdós valors a (17), s'obtenen l'energia mitjana de símbol i l'energia mitjana de bit en funció de l'amplitud de portadora i de la distància entre símbols:

$$E_s = \frac{5A_c 2A^2}{4}; E_b = \frac{5A_c 2A^2}{16};$$

### Exemple 6. Energia de la modulació PSK

Per a la modulació PSK definida segons (7), el càlcul de les variàncies de símbol resulta més eficient si es realitza de forma conjunta per a ambdós components:

$$\begin{aligned} \sigma_I^2 + \sigma_Q^2 &= E[I_m^2] + E[Q_m^2] = E[(\cos\varphi_m)^2] + E[(\sin\varphi_m)^2] = \\ &E[(\cos\varphi_m)^2 + (\sin\varphi_m)^2] = E[1] = 1 \end{aligned} \quad (19)$$

Substituint a (17), s'obtenen l'energia mitjana de símbol i l'energia mitjana de bit en funció de l'amplitud de portadora:

$$E_s = \frac{A_c^2}{2}; E_b = \frac{A_c^2}{2b}; \quad (20)$$

En aquest exemple, la distància entre símbols no apareix de forma explícita, tot i que de forma implícita apareix en fixar que el radi en què es troben tots els punts és  $R = 1$ . De fet, en aquest cas, la distància entre símbols consecutius és, pel teorema de Pitàgores:

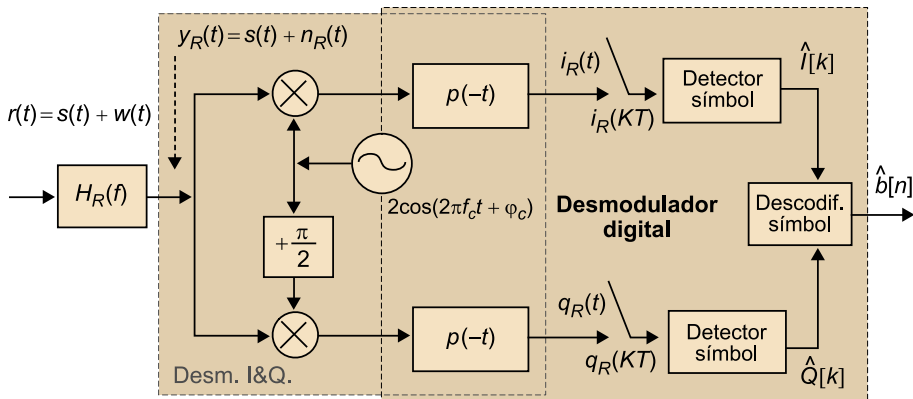
$$A^2 = \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{M}\right) \right)^2 + \sin^2\left(\frac{2\pi}{M}\right) = 2\left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{M}\right) \right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \quad (21)$$

## 1.7. Desmodulador QAM

Igual com amb el tema de modulacions digitals en banda base, el següent pas en l'estudi de les modulacions digitals passabanda QAM consisteix a mostrar l'estructura bàsica del desmodulador. L'objectiu final d'aquest subapartat és caracteritzar estadísticament les variables que s'obtenen per a la detecció dels símbols i així calcular en subapartats posteriors la probabilitat d'error.

Des del punt de vista funcional, un desmodulador digital QAM està format per un desmodulador passabanda, per tal de recuperar els dos components I&Q i un desmodulador digital en banda base.

Figura 10. Diagrama de blocs d'un desmodulador QAM



En la figura 10 es mostra el diagrama funcional d'un receptor de modulacions QAM. A continuació, es descriuen les diferents etapes per les quals està format:

- 1) El primer element consisteix en un filtre passabanda de funció de transferència  $H_R(f)$ , la finalitat del qual és la d'eliminar soroll a freqüències no ocupades pel senyal modulad. El filtre se centra en la freqüència portadora i la seva amplada de banda és el del senyal QAM.
- 2) La segona etapa és la formada pel desmodulador I&Q. La portadora de l'oscil·lador local ha d'estar sincronitzada en freqüència i fase amb la portadora del senyal QAM
- 3) Els filtres passabaix de resposta impulsional  $p(-t)$  són directament els filtres adaptats al pols base de la modulació, per la qual aquests elements es comparteixen entre ambdós sistemes: desmodulador I&Q i desmoduladors digitals.
- 4) Els dos senyals de sortida dels filtres adaptats  $i_R(t)$ ,  $q_R(t)$  es mostregen a raó d'una mostra per símbol.
- 5) La detecció de símbol es representa en la figura 10 de forma independent entre els dos components I&Q, la qual cosa seria propi de les modulacions amb espai de senyal en forma de quadrat, per exemple QPSK i 16-QAM, en les quals els bits parells codifiquen el component en fase i independentment, els bits senars codifiquen el component en quadratura.

Amb modulacions de tipus PSK, es realitza la detecció de símbol de forma conjunta, ja que la informació a detectar depèn de l'angle que formen entre si les dues mostres simultànies a la sortida dels convertidors A/D. És a dir, per a PSK, la desmodulació es realitza mitjançant la funció arctangent,  $\text{tg}^{-1}(\cdot)$ , o com a:

$$\hat{\varphi}[k] = \text{tg}^{-1}\left(\frac{q_R(kT)}{i_R(kT)}\right) \quad (22)$$

Per a la modulació PSK, els símbols del component en quadratura coincideixen amb el sinus de l'angle codificat i els símbols del component en fase coincideixen amb el cosinus de l'angle codificat, com en l'exemple de la taula de la figura 7 i segons es mostra en l'equació (7). És per això que, la funció arctangent de l'equació (22) és apropiada per a descodificar la seqüència de símbols.

Fins a aquest punt del subapartat s'ha presentat l'estructura del desmodulador. En l'hipotètic cas que no hi hagués senyal de soroll a l'entrada del filtre receptor, i per tant únicament fos present el senyal QAM, les mostres a l'entrada del receptor es correspondrien fidelment amb els símbols transmesos:

$$\begin{aligned} i_R(kT) &= I[k] \\ q_R(kT) &= Q[k] \end{aligned} \quad (23)$$

I per tant, el senyal es desmodularia correctament amb una probabilitat d'error nul·la. Tanmateix, a la pràctica, està el soroll gaussià  $w(t)$  sumat al senyal útil. Les variables,  $i_R(kT)$ ,  $q_R(kT)$ , contenen el símbol que cal detectar més les mostres de soroll, i resulten variables aleatòries gaussianes. Per caracteritzar-les estadísticament, s'analitza a continuació la distribució estadística del soroll a través de les diferents etapes del desmodulador. En aquesta anàlisi es reprenen conceptes de l'anàlisi de soroll passabanda i de l'anàlisi de les mostres de soroll a la sortida del filtre adaptat del desmodulador PAM, on es planteja el càlcul de la probabilitat d'error per obtenir el resultat en funció del quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$ . En el càlcul es requereix trobar la potència de les mostres de soroll, per la qual cosa és necessari caracteritzar els senyals de soroll a la sortida dels filtres passabaix.

El senyal de soroll a l'entrada del filtre receptor de la figura 10 presenta la funció de densitat espectral:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \text{ Watt/Hz} \quad (24)$$

La resposta impulsional del canal, per tal de simplificar al màxim l'anàlisi de la probabilitat d'error, s'assumeix ideal:

$$h_c(t) = \delta(t) \quad (25)$$

### Mostrejador

Un A/D, també denominat convertidor analògic/digital, és el que col·loquialment podríem denominar un "mostrejador". En la figura 10, a la sortida de cada un dels filtres adaptats, prenen mostres a raó d'una mostra per símbol. Així s'obtenen les mostres  $i_R(kT)$  a partir del senyal  $i_R(t)$ , i les mostres  $q_R(kT)$ , a partir del senyal  $q_R(t)$ . Per tant, cadascun dels dos punts de mostreig representa un A/D.

### Vegeu també

Vegeu els conceptes de l'anàlisi del soroll passabanda en el mòdul "Comunicacions analògiques: senyals passabanda", i els càlculs de probabilitat d'error en l'apartat 4 del mòdul "Comunicacions digitals en banda base" d'aquesta assignatura.

Els components en fase i en quadratura del soroll passabanda es caracteritzen a partir de les seves densitats espectrals. Si  $n_R(t)$  representa el soroll passabanda a la sortida del filtre receptor de resposta im pulsional  $h_R(t)$ , es pot expressar segons:

$$n_R(t) = w(t) * h_R(t) = i_n(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_n(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (26)$$

i la densitat espectral dels dos components és:

$$S_{i_n}(f) = S_{q_n}(f) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{B_s}\right) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_p}\right) \quad (27)$$

Si en l'obtenció dels components s'utilitza el filtre passabaix, consistent en un sistema, la resposta impulsional del qual és el filtre adaptat al pols base, els senyals  $i_R(t)$ ,  $q_R(t)$ , generalitzant ja a la suma de senyal útil més senyal de soroll, previ mostreig o conversió A/D, s'expressen segons:

$$\begin{aligned} i_R(t) &= (i_s(t) + i_n(t)) * p(-t) \\ q_R(t) &= (q_s(t) + q_n(t)) * p(-t) \end{aligned} \quad (28)$$

A partir de l'equació (2) recordem l'expressió dels components I&Q del senyal útil:

$$i_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n] p(t - nT); \quad q_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q[n] p(t - nT) \quad (29)$$

Per tant, substituint les expressions (29) a (28), resulta:

$$\begin{aligned} i_R(t) &= (A_c i_s(t) + i_n(t)) * p(-t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n] R_p(t - nT) + i_{np}(t) \\ q_R(t) &= (A_c q_s(t) + q_n(t)) * p(-t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q[n] R_p(t - nT) + q_{np}(t) \end{aligned} \quad (30)$$

A (30),  $i_{np}(t)$ ,  $q_{np}(t)$  corresponen als termes de soroll a la sortida dels filtres adaptats i la funció  $R_p(t)$  representa la funció d'autocorrelació del pols base:  $p(t)$ .

Les mostres d'ambdós senyals, a la sortida dels convertidors A/D de la figura 10, a temps de mostreig  $t_k = kT$  i amb impulsos  $p(t)$  d'energia unitat resulten:

$$\begin{aligned} i_R(kT) &= A_c I[k] + i_{np}(kT) \\ q_R(kT) &= A_c Q[k] + q_{np}(kT) \end{aligned} \quad (31)$$

#### Vegeu també

Vegeu la caracterització dels components en fase i en quadratura del soroll passabanda a partir de les seves densitats espectrals en el mòdul "Comunicacions analògiques: senyals passabanda".

#### Vegeu també

Vegeu els components I&Q del senyal en el subapartat 1.1 d'aquest mòdul didàctic.

La potència de les mostres de soroll a (31) es calcula d'igual manera a l'obtinguda per a les modulacions en banda base. A més, el valor de la potència de soroll és idèntic per a ambdós components (recordeu que estem normalitzant el pols a  $E_p = 1$ ):

$$\sigma^2 = \sigma_{i_{np}}^2 = \sigma_{q_{np}}^2 = \int S_{in}(f) |P(f)|^2 df = N_0 E_p = N_0 \quad (32)$$

Per tant, (32) és la potència de les mostres de soroll que cal utilitzar en el càlcul de la probabilitat d'error. El model estadístic per a ambdues mostres de soroll és idèntic:

$$\begin{aligned} i_{np}(kT) &: N(0, \sigma^2) \\ q_{np}(kT) &: N(0, \sigma^2) \end{aligned} \quad (33)$$

La conclusió principal d'aquesta anàlisi s'expressa seguidament.

Quan s'utilitzen impulsos d'energia igual a 1, la variable de decisió  $i_R(kT)$  és una variable aleatòria gaussiana de mitjana igual al símbol transmès pel component en fase, multiplicat per l'amplitud del senyal portador i de variància igual a la constant  $N_0$ ,

$$i_R(kT) : N(A_c I[k], N_0) \quad (34)$$

I la variable de decisió  $q_R(kT)$  és una variable aleatòria gaussiana de mitjana igual al símbol transmès pel component en quadratura, multiplicat per l'amplitud del senyal portador i de variància igual a la constant  $N_0$ .

$$q_R(kT) : N(A_c Q[k], N_0) \quad (35)$$

## 1.8. Probabilitat d'error de les modulacions QAM

En aquest subapartat s'analiza la qualitat de les modulacions QAM, basada en el càlcul de la probabilitat d'error de símbol, SER, i de la probabilitat d'error de bit, BER, en funció del quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$ . En formular ambdues probabilitats en funció del quocient donat, resulten d'utilitat l'expressió de l'energia mitjana de bit, la fórmula generalitzada del qual és (17), i la potència de les mostres de soroll calculada a (33).

Inicialment, es planteja el càlcul de manera detallada per a tres casos particulars, posteriorment es presenten resultats generalitzats, encara que sense demostracions, per a modulacions PSK i QAM.



### 1.8.1. BER d'un sistema BPSK

La modulació BPSK és la modulació 2-PSK, és a dir, una modulació binària de dues fases. Atenent la formulació donada a (7), particularitzada per a  $M = 2$  símbols, els dos símbols obtinguts resulten reals, ja que els símbols del component en quadratura són nuls. De fet, el component en quadratura de tota la modulació és nul. Particularitzant, per a  $M = 2$  queden les següents expressions per als símbols dels components I&Q.

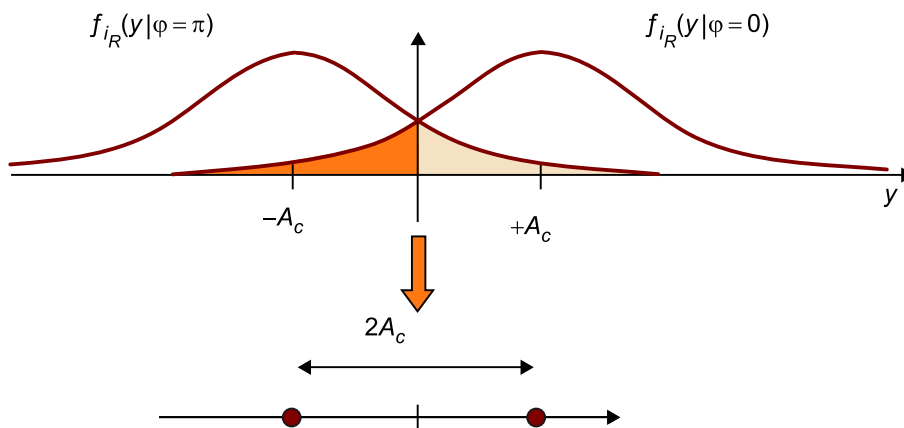
$$\begin{aligned} \varphi_1 = 0 &\Rightarrow a_1 = I_1 = +1; & Q_1 = 0 \\ \varphi_2 = \pi &\Rightarrow a_2 = I_2 = -1; & Q_2 = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

El senyal modulad se simplifica per tant, donant lloc a:

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n] p(t - nT) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c); \quad I[n] = \pm 1 \quad (37)$$

Un cop processat el senyal modulad  $s(t)$ , pel desmodulador de la figura 10 (només branca superior), la variable de decisió corresponent és la modelitzada en l'equació (34). L'espai de senyal d'aquesta variable de decisió,  $i_R(kT)$ , es representa en la figura 11 juntament amb les funcions de densitat de probabilitat de la variable de decisió condicionades pels dos possibles valors de símbol.

Figura 11. Representació de la distribució estadística de la variable de decisió del component en fase



Versió simplificada en la part inferior

Ja que els dos valors possibles transmesos són simètrics respecte a l'origen, el llindar de detecció se situa en 0 volts:

$$\begin{aligned} i_R(kT) > 0 &\Rightarrow \hat{I}[k] = +1 \\ i_R(kT) < 0 &\Rightarrow \hat{I}[k] = -1 \end{aligned} \quad (38)$$

D'on, realitzant un desenvolupament totalment anàleg al mostrat en el mòdul 5, es dedueix que la BER i la SER són igual a:

$$P_e = P_b = Q\left(\frac{A_c}{\sigma}\right) \quad (39)$$

Per a aquesta modulació, BPSK, i per tal d'expressar les probabilitats d'error en funció de l'energia mitjana de bit, de l'exemple 6 particularitzat a 1 bit per símbol ( $b = 1$ ). Es té:

$$E_b = E_s = \frac{A_c^2}{2} \quad (40)$$

I amb la potència de soroll calculada a (33), la probabilitat d'error donada a (39) és directament:

$$P_e = P_b = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (41)$$

### 1.8.2. BER d'un sistema QPSK

La modulació QPSK, caracteritzada en la figura 3, és una modulació quadrada, en la qual els bits parells codifiquen el component en fase i els bits senars codifiquen el component en quadratura. Aquesta característica permet la descodificació dels bits separatament, per tant, la BER dels bits transportats per cada un dels dos components coincideix amb la BER total del sistema. És a dir, la probabilitat d'error de bit és idèntica, tant si el bit es transporta a través del component en fase com si es transporta a través del component en quadratura.

En definitiva, expressant les probabilitats d'error de bit a cada component, mitjançant el corresponent sufix:

$$BER_I = BER_Q = BER_{QPSK} \quad (42)$$

Les coordenades que s'han d'utilitzar en la detecció són, per a la branca superior del desmodulador de la figura 10 corresponent al component en fase:

$$\begin{aligned} i_R(kT) &= A_c I[k] + i_{np}(kT); \\ i_{np}(kT) &: N(0, \sigma^2); \quad I[k] = \pm \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (43)$$

I per a la branca inferior del desmodulador de la figura 10 corresponent al component en quadratura:

$$\begin{aligned} q_R(kT) &= A_c Q[k] + q_{np}(kT); \\ q_{np}(kT) &: N(0, \sigma^2); \quad Q[k] = \pm \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (44)$$

El llindar de detecció se situa en 0 volts en ambdues branques, ja que cada branca correspon a una modulació 2-PAM de nivells:  $+\frac{AcA}{2}$ ,  $-\frac{AcA}{2}$ , donant lloc a la BER:

#### Observació

L'expressió coincideix amb la de la modulació 2PAM polar, i amb la de qualsevol modulació binària antipodal, és a dir, formada per dos símbols que són d'igual valor absolut i de signe contrari.

#### Observació

Aquesta propietat es compleix per a totes les modulacions QAM amb constelacions simètriques respecte de l'origen de coordenades. Aquest és el cas de les modulacions QAM quadrades o 32-QAM.

$$P_b = Q\left(\frac{A_c A}{2\sigma}\right) \quad (45)$$

Per a aquesta modulació, l'energia mitjana de bit, analitzada en l'exemple 4, és igual a:

$$E_b = \frac{1}{2}E_s = \frac{A_c^2 A^2}{8} \quad (46)$$

I amb la potència de soroll calculada a (32) s'obté la següent expressió per a la BER, que coincideix amb l'obtinguda per a senyals antipodals.

$$P_b = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (47)$$

### 1.8.3. BER d'un sistema 16-QAM

La modulació 16-QAM caracteritzada en la figura 6 també és una modulació quadrada, en la qual els bits parells codifiquen el component en fase i els bits senars codifiquen el component en quadratura. Aquesta característica permet la descodificació dels bits separadament, per tant, la BER de cada un dels dos components coincideix amb la BER total del sistema.

$$BER_I = BER_Q = BER_{QPSK} \quad (48)$$

En 16-QAM, tant el component en fase com el component en quadratura corresponen a modulacions 4-PAM de tipus polar. La SER de cada component és el doble de la corresponent BER. A causa de l'analogia entre ambdues coordenades o components, s'analitza a continuació únicament la SER del component en fase, ja que coincideix amb la SER del component en quadratura.

$$\begin{aligned} i_R(kT) &= A_c I[k] + i_{np}(kT); \\ i_{np}(kT) &: N(0, \sigma^2); \quad I[k] = \pm \frac{A}{2}, \pm \frac{3A}{2} \end{aligned} \quad (49)$$

Els llindars de detecció se situen en els punts mitjos entre símbols detectats:

$$-AA_c, 0, +AA_c \quad (50)$$

donant lloc per a modulacions 4-PAM polar:

$$P_e = \frac{3}{2}Q\left(\frac{A_c A}{2\sigma}\right) \quad (51)$$

Per completar l'anàlisi, la probabilitat d'error anterior s'ha d'expressar en funció del quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$ .

#### Vegeu també

La modulació d'impulsos d'amplitud (PAM) s'estudia en l'apartat 3 del mòdul "Comunicacions digitals en banda base" d'aquesta assignatura.

Per a aquesta modulació, l'energia mitjana de bit, ja que es transmeten 4 bits per símbol, i segons l'exemple 5, és igual a:

$$E_b = \frac{1}{4}E_s = \frac{5A_c^2 A^2}{8} \quad (52)$$

I amb la potència de soroll calculada a (32), s'obté la següent expressió per a la BER del component en fase.

$$P_b = \frac{1}{2}P_e = \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (53)$$

#### 1.8.4. Casos generals

Tant per a les modulacions QAM quadrades com per a les modulacions PSK, es poden obtenir expressions genèriques de la probabilitat d'error en funció del nombre de nivells M. A continuació, es mostren aquestes expressions sense demostrar-les:

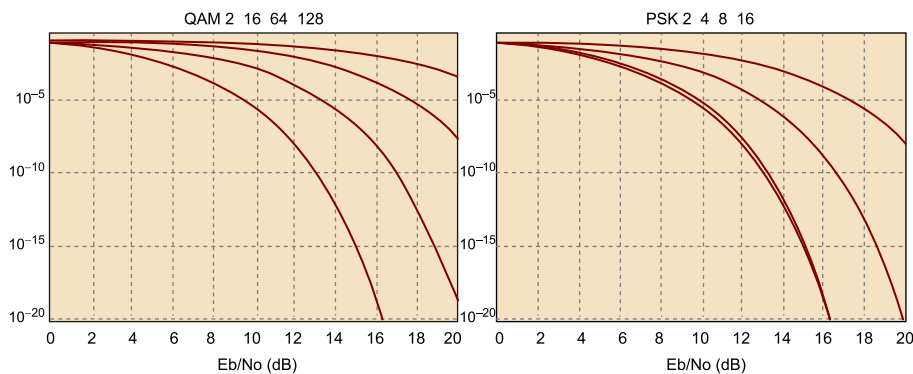
$$BER_{MQAM} = P_b = \frac{4(\sqrt{M}-1)}{b\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3b}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (54)$$

$$BER_{PSK} \simeq \frac{2}{b} Q\left(\sqrt{2b\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (55)$$

En la figura 12 es mostren diferents casos de la probabilitat d'error de bit, BER, de les modulacions M-QAM, equació (54), i de les modulacions PSK, equació (55). En cada cas, el nombre de bits transmesos per símbol, b, s'ha particularitzat mitjançant quatre valors diferents.

A partir de la figura 12 es poden deduir les mateixes conclusions que s'extreuen de l'anàlisi de la probabilitat d'error per a modulacions MPAM.

Figura 12. BER (eix y) per a modulacions QAM quadrades i PSK, en funció del quocient d'energies senyal a soroll (eix x), i del nombre de nivells



L'escala és logarítmica. En cada cas, les corbes inferiors corresponen a les modulacions de menor nombre de nivells i a les superiors a les de major nombre de nivells.

#### Vegeu també

La modulació d'impulsos d'amplitud (PAM) s'estudia en l'apartat 3 del mòdul "Comunicacions digitals en banda base" d'aquesta assignatura.

Suposant fixat el quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$  i la velocitat de bit del sistema, el nombre de nivells  $M$  més convenient s'obté com la resolució de la següent situació de compromís:

Aquesta propietat es compleix per a les modulacions digitals lineals en general.

- En augmentar el nombre de nivells, es degrada la BER (inconvenient).
- En augmentar el nombre de nivells, disminueix la velocitat de símbol  $r = \frac{r_b}{b}$  i, per a aquest tipus de modulació, això repercuteix en un decrement de l'amplada de banda necessària (avantatge).

## 2. Modulacions digitals de freqüència

En l'apartat 1, s'han estudiat detalladament modulacions digitals passabanda en les quals, a partir d'una seqüència de símbols que s'han de transmetre, complexos en general, es modula l'amplitud o la fase d'un senyal portador. Una característica intrínseca a les modulacions QAM és que, durant el període assignat a cada símbol, tant l'amplitud com la fase del senyal modulats resultant queden constants. Es produeixen canvis tant d'amplitud com de fase únicament en les transicions de símbol. En les modulacions digitals de freqüència, la fase del senyal portador no resta constant dins del període adjudicat a un símbol, i aquesta propietat provoca que la freqüència instantània dels diferents símbols transmesos sigui diferent entre si, ja que depèn directament de la seqüència de bits que s'han de transmetre. En aquest apartat es tractaran breument les modulacions digitals de freqüència per completar el mòdul, tot i que la descripció es fa de forma molt qualitativa i superficial.

Tal com es descriu en la introducció del mòdul, hi ha modulacions FSK, la freqüència instantània de les quals queda constant durant el període de símbol, i modulacions CPM, en les que es compleix que la fase instantània de la modulació és contínua en temps, fins i tot durant les transicions de símbol. Les modulacions CPFSK són modulacions que compleixen les dues característiques: freqüència constant dins de cada símbol i fase contínua en les transicions de símbol.

L'ús de les modulacions CPM és d'especial interès en totes aquelles aplicacions d'amplada de banda limitada. En determinades aplicacions, es fixa com a objectiu principal treballar amb modulacions d'ocupació espectral acotada a costa de mantenir la continuïtat temporal de la fase instantània de la modulació.

En el subapartat que segueix, es defineixen modulacions CPFSK com a pas previ a la descripció de modulacions CPM genèriques, i en el següent subapartat, les modulacions GMSK com a exemple de modulacions comercialment utilitzades en alguns estàndards com ara GSM i DECT. Per a aquest tipus de modulacions, a causa de la complexitat d'anàlisi, no s'estudia en aquest mòdul la probabilitat d'error de forma explícita, a diferència de l'anàlisi realitzada per a la modulació QAM.

### 2.1. Modulacions CPFSK i MSK

En les modulacions digitals de freqüència, a diferència del que passa amb les modulacions QAM, la informació binària determina directament la freqüència instantània del senyal modulats. Els bits s'agrupen de  $b$  en  $b$  per donar lloc a un conjunt de  $M = 2^b$  freqüències diferents. Sense pèrdua de generalitat, a

la resta d'aquest subapartat s'estudien únicament modulacions de freqüència binàries ( $b = 1, M = 2$ ), ja que gran part dels sistemes de comunicacions basats en modulacions FSK són binaris.

Assumint per tant el cas binari, a partir de la seqüència de bits  $b[n]$  codificada com a polar, s'obté una nova seqüència de símbols binària  $d[n]$  i es forma el senyal modulad com una seqüència de impulsos de radiofreqüència i freqüència  $f[n]$ :

$$\begin{aligned} d[n] &= \pm 1 \text{ volt} \\ f[n] &= f_c + d[n]f_d \text{ Hz} \end{aligned} \quad (56)$$

A (56) el paràmetre  $f_d$  té unitats d'Hz/volt.

En principi, mitjançant les condicions (56) es garanteix una modulació FSK de freqüència constant dins del període corresponent a cada símbol. Intuïtivament, s'ha d'obtenir una modulació de la manera següent:

$$\begin{aligned} d[n] = +1 &\rightarrow A_c \cos(2\pi(f_c + f_d)t) & nT \leq t \leq (n+1)T \\ d[n] = -1 &\rightarrow A_c \cos(2\pi(f_c - f_d)t) & nT \leq t \leq (n+1)T \end{aligned} \quad (57)$$

d'on es dedueix que la freqüència instantània de la modulació és constant en el període de símbol i depèn del bit que s'estigui transmetent.

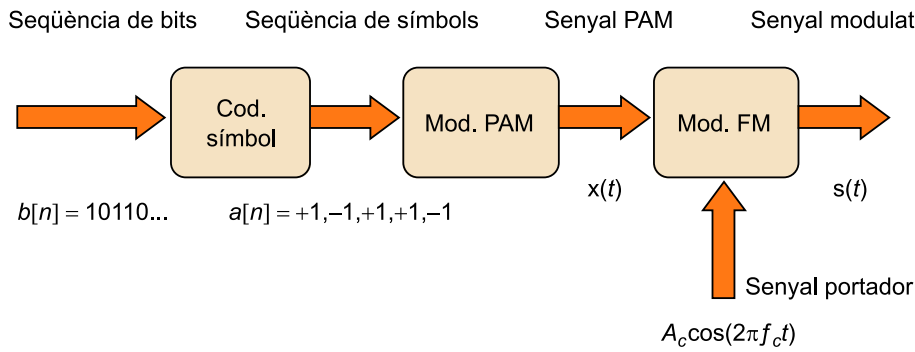
L'expressió (57) correspondria a una modulació digital de freqüència (FSK), però no garanteix per si mateixa que la modulació presenti continuïtat de fase en canviar de símbol, requeriment de la modulació CPFSK. La forma pràctica d'aconseguir tant les condicions (56), com la continuïtat de fase consisteix a utilitzar un modulador de freqüència (modulador de FM). A causa de l'integrador del senyal d'entrada, present en un modulador de FM, la continuïtat de la fase del senyal modulad queda garantida.

En la figura 13 es mostra el diagrama de blocs necessari per obtenir la modulació CPFSK. A continuació, mitjançant les expressions dels senyals presents en els diferents punts de l'esquema, es comenten les tres etapes del modulador.

#### Vegeu també

Sobre el modulador d'FM, vegeu el mòdul "Comunicacions analògiques: Una perspectiva històrica: modulacions AM i FM" d'aquesta assignatura.

Figura 13. Modulador de CPFSK



Mitjançant el codificador de símbol es forma la seqüència de símbols binària  $a[n]$ , a partir de la seqüència de bits  $b[n]$ .

A continuació, es forma una modulació PAM basada en impulsos rectangulars NRZ:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad (58)$$

La tercera etapa del modulador CPFSK consisteix a introduir el senyal PAM donat a (58) a un modulador de FM, obtenint d'aquesta manera:

$$s_{CPFSK}(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda\right) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_s(t)) \quad (59)$$

El paràmetre  $f_d$  es denomina sensibilitat de freqüències, igual com en les modulacions d'FM analògiques, on també apareix aquest paràmetre i exerceix el mateix paper. El senyal modulad, les freqüències instantànies de símbol del qual són les donades per (56), és igual a:

$$f_{FSK}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos\left(2\pi f_c t + \varphi_c + 2\pi f_d a[n](t - nT)\right) \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad (60)$$

Vegeu l'equació (60), on el temps corresponent al símbol transmès  $a[n]$  és l'interval  $nT \leq t \leq (n+1)T$ , en el qual, el senyal correspon a la transmissió del següent pols de radiofreqüència, desplaçat al període assignat al símbol:

$$A_c \cos\left(2\pi(f_c + f_d a[n])t + \varphi_c\right) \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad (61)$$

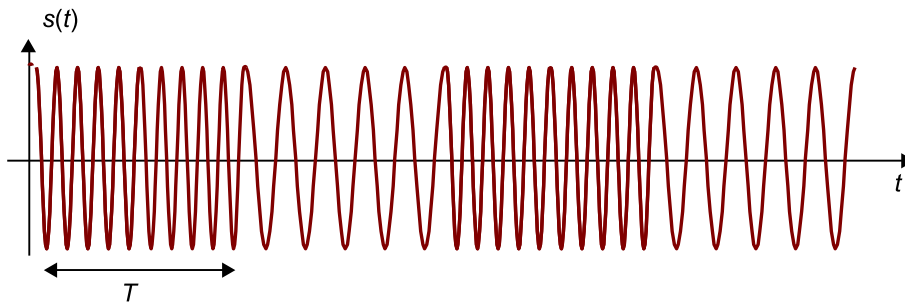
En la figura 14, es mostra un tram del senyal temporal modulad en 2 FSK de fase contínua (2CPFSK). La fase del senyal modulad es manté contínua fins i tot en les transicions de símbol. En la figura, es poden apreciar dos tipus de símbol, els de freqüència més gran, corresponents a la transmissió d'un bit 1 i els de freqüència més petita, corresponents a la transmissió d'un bit 0.

**Nota**

En definitiva, excepte en la fase inicial, el senyal de (61) coincideix amb el donat a (57).



Figura 14. Exemple de modulació 2FSK



Senyal temporal durant la transmissió dels bits 1010. Per al bit 1, es transmet la freqüència  $f_c + f_d$  i per al bit 0, es transmet la freqüència  $f_c - f_d$ .

La modulació 2PAM binària  $x(t)$  representa la freqüència instantània del senyal modulad, i la condició de continuïtat de fase es troba garantida per la integral de (58). De fet, la freqüència instantània resultant per al senyal  $s_{CPFSK}(t)$ , és:

$$f_{CPFSK}(t) = f_c + f_d x(t) \quad (62)$$

La modulació MSK (*minimum shift keying* o canvi mínim de fase) és un cas particular de CPFSK i correspon a la modulació definida a (58), que resulta d'utilitzar una constant de sensibilitat de freqüències,  $f_d$ , relacionada amb la velocitat de símbol,  $r$ , segons:

$$f_d = \frac{r}{4} \quad (63)$$

Tant per ajudar a comprendre la propietat de continuïtat de fase, com per descriure millor les modulacions CPFSK, és freqüent representar el diagrama de Trellis de la seva fase.

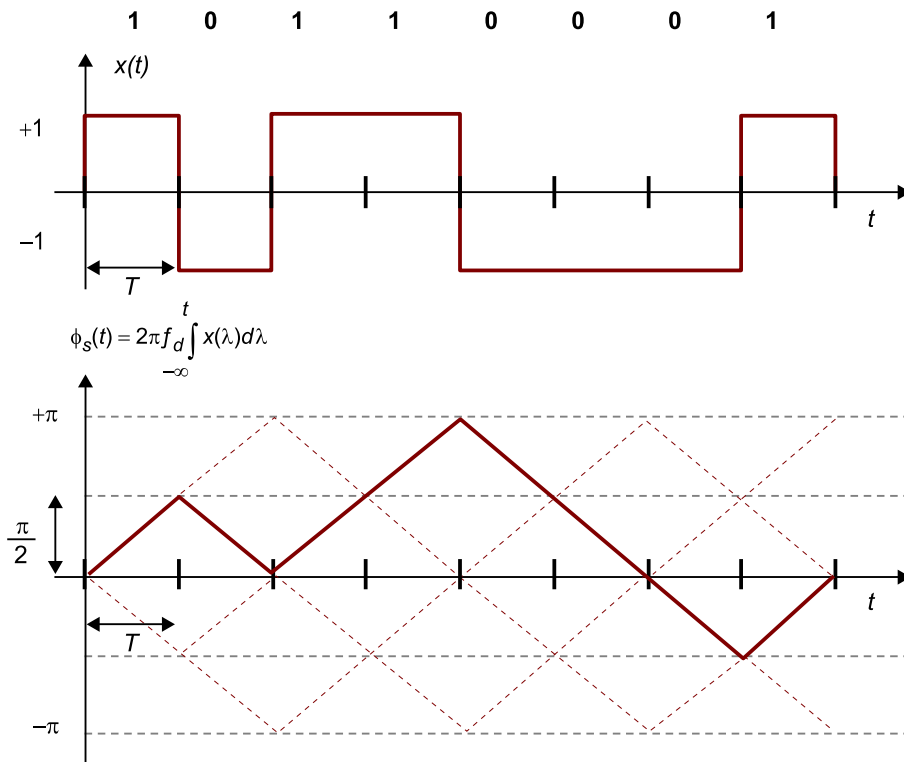
El **diagrama de Trellis** de la fase d'una modulació de fase contínua representa totes les possibles trajectòries que pot recórrer la fase instantània del senyal modulad. Per a la modulació MSK, al llarg d'un període de símbol, quan el bit que es transmet és 1, s'incrementa la fase en  $\frac{\pi}{2}$  rad, i quan el bit és igual a 0, decreix la fase en  $\frac{\pi}{2}$  rad.

#### Observació

Cal destacar que la modulació CPFSK és un cas particular de la modulació FSK, i a causa d'això la freqüència instantània es manté constant dins del període assignat a cada símbol.

En la figura 15, es mostra el diagrama de Trellis de la fase de la modulació MSK. En la part superior es representa l'evolució temporal o trajectòria del senyal  $x(t)$  per a una seqüència de bits donada: 10110001. En la part inferior de la figura, es pot observar el diagrama de Trellis. Mitjançant traç discontinu, es mostren totes les possibles trajectòries que podria seguir la fase instantània del senyal partint de fase igual a zero en l'instant inicial. Amb traç gruixut i continu es marca l'evolució que realment segueix la fase per a la seqüència de bits donada.

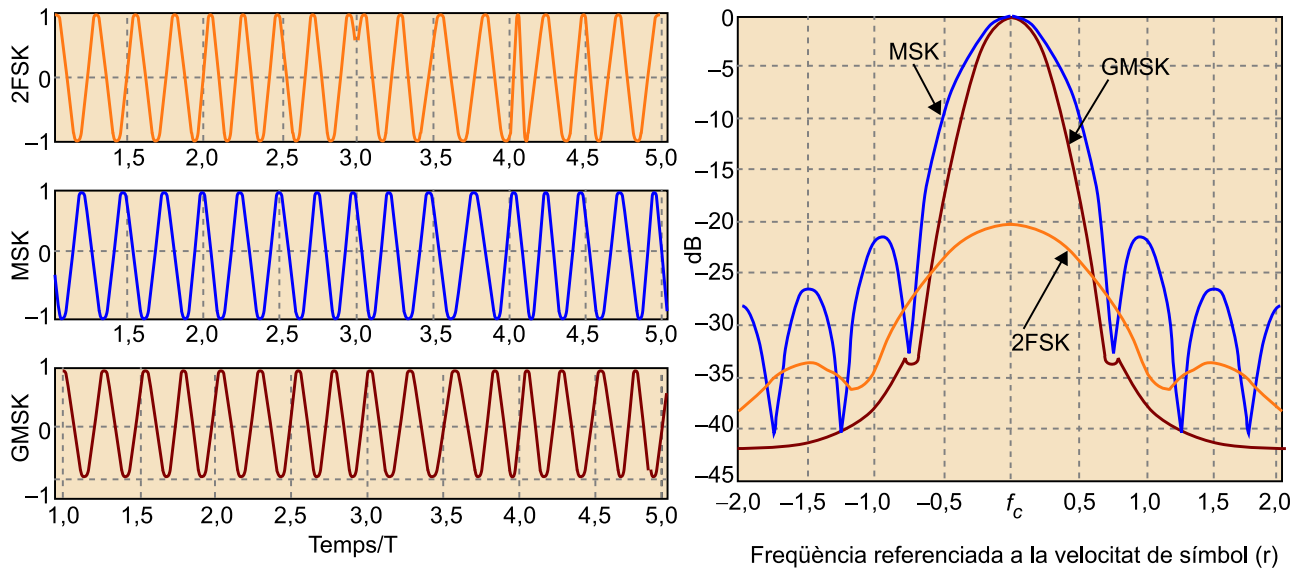
Figura 15. Diagrama de Trellis de la modulació MSK



Freqüència instantània  $x(t)$  i fase instantània,  $\phi_s(t)$ , del senyal modulat a través d'un temps de durada igual a 8 períodes de símbol.

Per veure la repercussió que té la continuïtat de fase sobre l'acotació d'amplada de banda, es mostren en la figura 16 la densitat espectral de diferents tipus de modulacions de freqüència. Les densitats espectrals s'han obtingut mitjançant simulacions. En particular, podem observar els resultats per a una modulació MSK, definida per (58) i per a una modulació 2-FSK, definida per (57). Per a totes dues s'ha triat idèntic valor de desviació de freqüència. En la modulació 2-FSK no es garanteix la continuïtat de fase. A més, es representa també un tercer tipus de modulació (GMSK) que es comenta en el subapartat següent.

Figura 16



Esquerra: Forma temporal  $S(t)$  de les modulacions 2-FSK, MSK i GMSK. Dreta: Densitat espectral  $S_s(f)$  en dB respecte de la freqüència normalitzada a la velocitat de símbol.

En la part esquerra de la figura 16 es mostra la forma temporal de tres modulacions binàries de freqüència al llarg de quatre períodes de símbol. En la gràfica superior, que correspon a 2-FSK, són visibles les discontinuïtats de senyal (o de fase) en les transicions de símbol. En la gràfica de la dreta, l'espectre amb lòbul principal més ample és el corresponent a la modulació 2-FSK.

El simple fet de mantenir la fase contínua en MSK com a única diferència respecte a 2-FSK té gran repercussió en la densitat espectral, com pot apreciar-se en la figura 16, ja que repercuteix a un lòbul principal més estret en MSK que a 2-FSK.

A continuació, es presenta la modulació GMSK com el cas extrem de fase encara més contínua i lòbul principal encara més estret que la modulació MSK.

## 2.2. Modulacions GMSK

La modulació MSK, definida en el subapartat anterior, no presenta discontinuïtats en la trajectòria temporal de la fase i això repercuteix en mantenir la seva densitat espectral delimitada, almenys respecte a l'amplada del lòbul principal. Si es realitza la derivada de la fase instantània de la modulació MSK, s'obté la freqüència instantània que coincideix amb el senyal PAM  $x(t)$  i que és un senyal amb discontinuïtats en les transicions de símbol, tal com es pot veure en la figura 15. En definitiva, per a una modulació MSK, la primera derivada de la fase instantània és discontinua en temps. Si es genera com a freqüència instantània una modulació PAM contínua en temps i que al mateix temps tingui diverses derivades (derivada segona, derivada tercera, etc.) totes contínues en temps, s'obindrà una forma temporal per a la fase  $\phi_s(t)$ , de variacions suaus i un espectre amb un lòbul principal més estret que per a la modulació MSK.

Es tracta de generar la modulació CPM de manera que, en derivar diverses vegades la seva fase instantània, se segueixi tenint una funció contínua. La forma d'obtenir-la és mitjançant impulsos  $p(t)$  genèrics de més durada que la del temps de símbol i formar la modulació CPM com a:

$$\begin{aligned}
 \text{PAM: } \quad x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]p(t-nT) \\
 s_{\text{CPM}}(t) &= A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda\right) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_s(t))
 \end{aligned} \tag{64}$$

Un efecte immediat provocat per l'ús de impulsos, de durada més gran que la del temps d'un símbol, és la presència d'ISI sobre el senyal PAM.

El cas particular més àmpliament utilitzat de modulacions CPM és el de la modulació GMSK, ja que és la modulació utilitzada tant en el sistema de telefonia mòbil GSM com en el sistema de telefonia sense fils DECT. Els paràmetres que la defineixen són:

- Pols  $p(t)$ , denominat gaussià, per al qual no se n'anul·len les derivades en cap cas.
- Sensibilitat de freqüències definida igual que per a la modulació MSK ( $f_d = \frac{f}{4}$ ).

#### Observació

Formalment, el pols es defineix com:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \frac{1}{2T} \left( Q\left(2\pi B_b \frac{t-T/2}{\sqrt{\ln 2}}\right) - Q\left(2\pi B_b \frac{t+T/2}{\sqrt{\ln 2}}\right) \right) = \\
 &= \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \sqrt{\frac{2\pi}{\ln 2}} B_b \exp\left(-\frac{2\pi^2 B_b^2}{\ln 2} t^2\right) \\
 B_b &= \frac{0,3}{T} \quad \text{GSM}; \quad B_b = \frac{0,5}{T} \quad \text{DECT}
 \end{aligned} \tag{65}$$

On  $T$  representa el temps de símbol i  $B_b$  l'amplada de banda del propi pols.

Amb el pols gaussià, la fase de la modulació presenta una variació molt suau al llarg del temps, tal com es mostra en la figura 17.

El preu a pagar per tenir modulacions espectralment més eficients és un increment en la complexitat del desmodulador. El pols gaussià utilitzat en GMSK s'estén en més d'un símbol, i per tant durant un cert interval de  $T_s$  segons s'està enviant informació de més d'un símbol, o dit d'una altra manera, s'està introduint interferència intersimbòlica (ISI) provocada per l'extensió del pols en més d'un temps de símbol. En els casos utilitzats en els estàndards GSM i DECT, encara que teòricament el pols gaussià s'estén en temps des de menys infinit a més infinit, amb valors d'amplada de banda normalitzats a la veloci-

#### Observació

Cal destacar que les modulacions MSK i GMSK són dos casos particulars de la modulació CPM. A més, MSK és també FSK de fase contínua o, dit d'una manera més compacte, CPFSK, mentre que GMSK no ho és, ja que la freqüència instantània no es manté constant en un període de símbol.

tat de símbol de 0,3 i 0,5 (GSM i DECT respectivament), es pot aproximar el pols per un de durada limitada a tres períodes de símbol, sense que per això el senyal quedi significativament afectat.

### 2.3. Desmodulació de senyals CPM

La desmodulació de les modulacions CPM pot implementar-se mitjançant diverses estratègies, de entre les quals en destaquen dues. La primera estratègia consisteix a realitzar una **descodificació de fase diferencial**. En el cas de la modulació MSK, és senzill d'entendre a partir de la figura 15. Al llarg de cada símbol, si es transmet un bit 1, la fase augmenta en  $\frac{\pi}{2}$  radians, i si es transmet un bit 0, la fase disminueix en  $\frac{\pi}{2}$  radians. D'aquí que, detectant l'increment de fase del senyal rebut  $r(t)$ , es proposa com a desmodulador el següent algoritme, on  $\varphi_r(kT)$  és la fase del senyal rebut  $r(t)$  en el moment de temps  $kT$ .

$$\begin{aligned} \varphi_r((k+1)T) - \varphi_r(kT) > 0 &\rightarrow \hat{b}[k] = 1 \\ \varphi_r((k+1)T) - \varphi_r(kT) < 0 &\rightarrow \hat{b}[k] = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

L'estratègia anterior resulta subòptima, a causa de la presència de soroll angular. El terme de soroll provoca errors en la detecció proposada en l'equació (66).

Per a la desmodulació del senyal GMSK, es pot utilitzar la mateixa norma de detecció de l'equació (66), si bé el bit detectat en aquest cas seria  $\hat{b}[k-1]$ , a causa que el pols base s'estén al llarg de tres períodes de símbol i això genera un retard al desmodulador. Amb l'estratègia de la descodificació diferencial aplicada a GMSK, la probabilitat d'error es degrada respecte a MSK, a causa de la presència d'ISI provocada per l'extensió del pols a tres períodes de símbol.

La segona estratègia de desmodulació de senyals CPM consisteix a aplicar l'**algoritme de Viterbi**. Triant de manera adequada el nombre d'estats, el retard de descodificació i les mètriques que cal actualitzar en cada estat, és l'estratègia que presenta més bones prestacions quant a probabilitat d'error. Com a contrapartida resulta la més complexa d'implementar.

#### Algoritme de Viterbi

L'algoritme de Viterbi és propi dels sistemes amb memòria. No és adequat el seu estudi en aquest curs introductori, per la qual cosa no en facilitarem més detalls, que es deixen per a cursos més avançats.

Respecte a les modulacions digitals de freqüència:

- Els senyals que mantenen la seva freqüència constant dins del període assignat a la transmissió de cada símbol es denominen modulacions FSK.
- Els senyals, la fase dels quals no presenta discontinuïtats en els instants de transició de símbol, es denominen de fase contínua o CPM.
- Els senyals que compleixen ambdues propietats, freqüència constant dins de cada símbol i fase contínua, es denominen CPFSK. L'exemple més destacat n'és la modulació MSK.
- Els senyals CPM que no són FSK són aquells mitjançant els quals s'obtenen formes temporals més suaus i un espectre freqüencial més estret. L'exemple més destacat el constitueix la modulació GMSK.

## Resum

En aquest mòdul s'han tractat les modulacions digitals passabanda classificades en modulacions lineals (per exemple, QAM i PSK) i en modulacions digitals de freqüència de tipus FSK i/o de tipus CPM.

Les modulacions QAM són similars a les modulacions digitals banda base de tipus PAM, analitzades en el mòdul 5, "Comunicacions digitals en banda base". La diferència entre ambdues rau en el marge de freqüències que ocupen. Mentre que les modulacions PAM s'utilitzen en comunicacions per cable, amb recorreguts curts i punt a punt, les modulacions QAM s'utilitzen en freqüències portadores de MHz i GHz, i ocupen amplades de banda que són regulades dins dels diferents estàndards per assignar un determinat marge freqüencial a cada senyal de tipus QAM (el control espectral es fa mitjançant la selecció del pols conformador  $p(t)$ ).

L'anàlisi de la probabilitat d'error de les modulacions de tipus QAM en canals gaussians resulta senzilla. S'obtenen expressions que depenen de l'energia mitjana transmesa per bit, d'igual manera que els desenvolupaments realitzats amb modulacions PAM.

Les modulacions de freqüència són modulacions angulars relativament complexes d'implementar i de desmodular, especialment en comparar-les amb les modulacions lineals de tipus QAM. En el cas general, són modulacions en les quals s'introdueix ISI entre símbols consecutius, encara que de manera controlada. La forma més habitual d'utilitzar modulacions angulars (o de freqüència) és en la seva variant de modulacions de fase contínua (CPM) i la principal raó és que s'obtenen modulacions, la funció de densitat espectral de les quals és d'amplada de banda relativament reduïda.

Tant el càlcul de la densitat espectral de manera exacta, com l'anàlisi de la probabilitat d'error de les modulacions de tipus CPM, es realitzen en general mitjançant simulacions computaritzades, a causa de la dificultat analítica que suposaria l'anàlisi detallada d'aquestes.

La comparació de les modulacions CPM respecte a les modulacions QAM resulta similar a la realitzada amb les modulacions de tipus analògic presentades en el mòdul "Comunicacions analògiques: modulacions AM i FM" en comparar FM respecte a les modulacions lineals DBL i AM.





## Exercicis d'autoavaluació

La resolució dels següents exercicis es proposa com a complement de l'estudi del mòdul. Es recomana que es realitzin mitjançant una estratègia sistemàtica. En general, és convenient resoldre els desenvolupaments plantejats de manera general, treballant amb les variables i paràmetres de forma genèrica i substituir-los pels seus valors numèrics en particular, al final dels apartats. D'aquesta manera es facilita la pròpia correcció i seguiment de l'exercici i s'obté una visió més àmplia que la del cas particular que s'estigui analitzant.

### 1. Modulació ASK

Es defineix la modulació digital d'amplitud de  $M$  nivells com un senyal passabanda, de manera que el component en fase és una modulació PAM unipolar i el component en quadratura és nul. Per al cas binari de  $M = 2$  nivells, els símbols binaris del component en fase es poden expressar com a:

$$I[k] = 0, A$$

Es demana:

a) Obtingueu l'expressió del senyal modulat  $s(t)$  en funció dels paràmetres del senyal portador

$$A_c, f_c, \varphi_c, \text{ per a un pols rectangular } p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right).$$

b) Dibuixeu l'espai de senyal i el senyal temporal per a la seqüència de bits: 1010 amb la relació de freqüències  $f_c = 4r$ .

c) Calculeu la probabilitat d'error sobre canal ideal AWGN (resposta impulsional de canal  $h_c(t) = \delta(t)$ ) en funció del quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$ .

d) Compareu el resultat obtingut amb la BER de la modulació BPSK.

### 2. Modulació a 8 símbols

Es forma una modulació digital d'amplitud i fase de  $M = 8$  nivells, com un senyal passabanda, de manera que el component en fase és una modulació 4PAM polar i el component en quadratura és una modulació 2 PAM polar.

Es demana:

a) Proposeu una taula d'assignació de tres bits per símbol de tipus Gray. És a dir, es pretén que dos símbols veïns es diferenciïn únicament en un bit.

b) Dibuixeu la constel·lació del senyal obtingut a partir de la taula anterior.

c) Calculeu la BER mitjana del sistema, considerant la seqüència de bits equiprobables i un canal ideal AWGN (resposta impulsional de canal  $h_c(t) = \delta(t)$ ) en funció del quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$ .

### 3. Modulació BPSK amb portadora

Per poder desmodular un senyal BPSK de forma coherent, es transmet un senyal igual a la suma de la pròpia modulació BPSK més la portadora, tal com s'expressa mitjançant la següent equació:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) + A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n] p(t - nT) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c); \quad I[n] = \pm 1 \quad (67)$$

El pols de treball  $p(t)$  és NRZ i d'energia, unitat. El senyal es transmet per mitjà d'un canal ideal AWGN de resposta impulsional  $h_c(t) = \delta(t)$ . Es demana:

a) Calculeu l'energia de bit mitjana del senyal total  $s(t)$  en funció de l'amplitud del senyal portador  $A_c$ .

b) Calculeu la probabilitat d'error BER en funció de  $A_c$  i de la potència de soroll a la sortida del filtre adaptat d'un desmodulador coherent (només la branca superior corresponent al

component en fase), assumint que, gràcies a la transmissió del portador, la desmodulació és coherent.

c) Expresseu la BER obtinguda en funció del quocient d'energies  $\frac{E_b}{N_0}$ .

d) Avalueu la degradació en dB que suposa la transmissió del senyal portador, respecte al cas BPSK sense portador estudiat en el subapartat 1.8.

#### 4. Modulacions APSK i energia mitjana

Considereu les tres modulacions 8-APSK, 16-APSK i 32-APSK de la figura 8. Suposeu que en tots els casos el radi del cercle en el qual es disposen els símbols de menor energia és  $R$ , el segon cercle és  $2R$  i el tercer, que apareix únicament per a la modulació 32-APSK, és  $3R$ . Es demana:

a) Calculeu l'energia mitjana de símbol  $E_s$ , per a cada una de les tres modulacions en funció d' $R$ .

b) Calculeu l'energia mitjana de bit  $E_b$ , per a cada una de les tres modulacions en funció d' $R$ .

Suposeu que per a un valor donat de  $R = R_0$  mitjançant les tres modulacions es pot aproximar la SER per  $P_e = 0,0001$ . Es demana:

c) Quina de les tres modulacions requereix transmetre més energia mitjana de símbol i per què?

d) Quina de les tres modulacions requereix transmetre més energia mitjana de bit i per què?

#### 5. Efectes de no linealitats sobre les modulacions QAM

Mitjançant aquest exercici, es pretén estudiar de forma gràfica els efectes de les no linealitats sobre les modulacions de tipus QAM. Aquest efecte pot simplificar-se estudiant directament com queda afectada la seqüència de símbols transmesos.

Es modela de forma molt simplificada que cada símbol complex queda afectat per la no linealitat mitjançant el següent model,  $A(re^{j\varphi})$ , típic dels amplificadors basats en tubs de ones progressives.

$$A(re^{j\varphi}) = \frac{2r^2}{1+r^2} e^{j\varphi} \quad (68)$$

$re^{j\varphi}$  representa un nombre complex en coordenades polars de valor absolut  $r$  i fase  $\varphi$ .

a) Dibuixeu com quedarà l'espai de senyal d'una modulació QPSK com la mostrada en la figura 3, per al cas particular que  $A = 1$ , si els símbols es veuen afectats per la no-linealitat de l'equació (68).

b) Dibuixeu com quedarà l'espai de senyal d'una modulació 16-QAM com la mostrada en la figura 5, per al cas particular que  $A = 1$ , si els símbols es veuen afectats per la no linealitat de l'equació (68).

Comenteu els resultats obtinguts.

#### 6. Desmodulació amb error de portadora

Sigui la modulació QPSK, definida en el subapartat 1.2. Es transmet sobre un canal ideal AWGN i es rep amb un receptor, el diagrama de blocs funcional del qual és el de la figura 10, amb l'única diferència que l'oscil·lador local del receptor no es troba sincronitzat en fase amb el senyal modulat. Considereu que la fase de l'oscil·lador local del receptor en aquest cas és  $\varphi_{OL} = \varphi_c + \varepsilon$ .

Es demana:

a) Obteniu les expressions de les mostres de senyal després de la conversió CA/D, identificant en cada cas (branca superior i branca inferior) el símbol útil, el terme d'interferència entre components i la mostra de soroll.

b) Dibuixeu l'espai de senyal rebut sense soroll per al cas en el qual l'error de fase és  $\varepsilon = \frac{\pi}{8}$ .

c) Comenteu com es degradarà la probabilitat d'error quan les decisions es continuïn prenent amb llindars igual a zero en cada un dels dos components I&Q.

**7. Modulació de fase diferencial DPSK**

Sigui la modulació DPSK (diferencial PSK), en la qual la informació de símbol rau en la diferència de fases entre cada dos símbols consecutius. Mitjançant aquest tipus de modulació, s'evita la necessitat de la detecció coherent. Treballant amb  $M = 4$  símbols, les fases del senyal  $s(t)$  es codifiquen diferencialment segons la taula:

$$\varphi[n] = \varphi[n - 1] + \Delta\varphi[n]$$

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t - nT) \cos(2\pi f_c(t - nT) + \varphi_c + \varphi[n])$$

bits	00	01	11	10
$\Delta\varphi$	0 rad	$\pi/2$ rad	$\pi$ rad	$3\pi/2$ rad

Es demana:

a) Si  $\varphi[0] = \frac{\pi}{4}$ , demostreu que l'espai de senyal de la modulació definida coincideix amb el de la modulació QPSK.

b) Calculeu les mostres de fase resultants  $\varphi[n]$  del senyal per a la seqüència de bits 0100111010101101 i les corresponents coordenades  $I[n]$ ,  $Q[n]$ .

**8. Modulació 4-CPFSK**

Sigui la modulació 4-CPFSK definida a partir dels paràmetres següents  $f_d = \frac{f_c}{8}$ ;  $f_c = Nr$ , amb  $N \gg 1$  i enter:

$$s_{CPFSK}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_d d[n](t - nT)\right) \Pi\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$

L'assignació de símbols es fa mitjançant la taula següent:

bits	00	01	11	10
$a[n]$	-3	-1	+1	+3

Suposeu que es transmet la seqüència 01001101000111.

Es demana:

- a) Calculeu la seqüència de símbols que es forma.
- b) A partir de la seqüència obtinguda, dibuixeu la freqüència instantània del senyal modulat:  $x(t)$ . Quin tipus de modulació en banda base representa?
- c) Dibueixeu la fase  $\varphi_s(t)$  de senyal modulat que es generaria a partir del senyal  $x(t)$ .

**9. Modulació 2-FSK de fase contínua**

Sigui la modulació 2-FSK de paràmetres  $f_d = \frac{f_c}{2}$ ;  $f_c = Nr$ , amb  $N \gg 1$  i enter:

$$s_{FSK}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_d d[n]t\right) \Pi\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$

Es demana:

a) Per a la seqüència 01001101, dibuixeu l'evolució temporal de la fase instantània del senyal, el component en fase i el component en quadratura.

b) És cert que la modulació donada resulta de fase contínua?

c) Calculeu la densitat espectral del component en fase i la densitat espectral del component en quadratura.

### 10. Desmodulació de senyal CPM

En aquest exercici es planteja l'anàlisi d'una modulació similar a GMSK. Sigui una modulació definida per (64) i que utilitza el pols  $p(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{3T}\right)\right) \Pi\left(\frac{t}{3T}\right)$ .

Es demana:

a) Justifiqueu que en absència de senyal de soroll, la diferència de fases del senyal rebut es pot expressar com a:

$$\begin{aligned} \varphi_r((k+2)T) - \varphi_r((k+1)T) &= g_0 d[k] + g_1 d[k+1] + g_1 d[k+2] \\ g_0 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} p(t) dt, \quad g_1 = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} p(t) dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} p(t) dt \end{aligned} \quad (69)$$

b) Calculeu les dues constants  $g_0$   $g_1$ .

c) Quins termes de l'equació (69) es poden interpretar com a ISI? Justifiqueu la resposta.

d) Plantegeu la descodificació del senyal a partir de les mostres  $\varphi_r(kT)$  mitjançant un descodificador de Viterbi. Proposeu el nombre d'estats, així com les mètriques que utilitzaríeu i un retard de descodificació adequat.

## Fórmules matemàtiques

### Expressions trigonomètriques

$$\begin{aligned}\cos(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}\cos(A-B) + \frac{1}{2}\cos(A+B) \\ \sin(A)\sin(B) &= \frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos(A+B) \\ \sin(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}\sin(A-B) + \frac{1}{2}\sin(A+B)\end{aligned}\tag{70}$$

$$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B) \\ \cos(A+B) &= \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)\end{aligned}\tag{71}$$

## **Bibliografia**

**Carlson, A. B.** (2001). *Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication* (4a. ed.). McGraw-Hill.

**Peebles, P. Z.** (2006). *Principios de Probabilidad, variables aleatorias y señales aleatorias*. McGraw-Hill.

**Proakis, J. G.** (2002). *Communication Systems Engineering*. Prentice Hall.

**Proakis, J. G.** (2003). *Digital Communications* (4a. ed.). McGraw-Hill.