

Comunicaciones digitales paso banda

Margarita Cabrera
Francesc Tarrés Ruiz

Revisión a cargo de
Francesc Rey Micolau
Francesc Tarrés Ruiz

PID_00195478



Los textos e imágenes publicados en esta obra están sujetos –excepto que se indique lo contrario– a una licencia de Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 España de Creative Commons. Podéis copiarlos, distribuirlos y transmitirlos públicamente siempre que citéis el autor y la fuente (FUOC. Fundació para la Universitat Oberta de Catalunya), no hagáis de ellos un uso comercial y ni obra derivada. La licencia completa se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.es>

Índice

Introducción	5
Objetivos	8
1. Modulaciones lineales QAM	9
1.1. Modulador de señales QAM	9
1.2. Modulaciones QAM cuadradas	11
1.3. Modulaciones PSK	14
1.4. Modulación 32-QAM	16
1.5. Ancho de banda de las modulaciones QAM	17
1.6. Energía media de bit de las modulaciones QAM	19
1.7. Demodulador QAM	21
1.8. Probabilidad de error de las modulaciones QAM	25
1.8.1. BER de un sistema BPSK	25
1.8.2. BER de un sistema QPSK	27
1.8.3. BER de un sistema 16-QAM	28
1.8.4. Casos generales	29
2. Modulaciones digitales de frecuencia	31
2.1. Modulaciones CPFSK y MSK	31
2.2. Modulaciones GMSK	36
2.3. Demodulación de señales CPM	38
Resumen	40
Ejercicios de autoevaluación	41
Fórmulas matemáticas	45
Bibliografía	46

Introducción

En el módulo 3 hemos estudiado las modulaciones paso banda en general. En ellas, a partir de las dos señales componente en fase y componente en cuadratura, de naturaleza analógica, se forma la modulación paso banda, que resulta ser una señal de contenido frecuencial centrado en torno a la frecuencia portadora.

En el módulo 5 hemos tratado el estudio de modulaciones digitales en banda base, esto es, señales de contenido frecuencial centrado en torno al origen de frecuencias (frecuencia igual a cero), y tales que el mensaje que transportan proviene de una secuencia de bits.

En el presente módulo, se retoman los conceptos aprendidos en los dos módulos anteriores, ya que se van a ver modulaciones paso banda donde aparecen tanto los conceptos de señal portadora y de frecuencia portadora, como los conceptos de componente en fase y en cuadratura (que corresponden a modulaciones digitales en banda base). Las modulaciones digitales paso banda presentan, por tanto, su contenido espectral centrado en torno a una frecuencia portadora. Son típicas de sistemas con alto grado de multiplexado frecuencial, en los que se reparte el ancho de banda disponible entre diferentes usuarios.

Este módulo se divide en dos apartados. El primero se dedica al análisis de las modulaciones digitales paso banda lineales y entre los diferentes subapartados destacan los de descripción de las señales de este tipo más utilizadas, densidad espectral, estructura del demodulador y cálculo de la probabilidad de error. En este apartado se utilizan los conceptos de equivalente pasa bajo, componente en fase y componente en cuadratura por un lado, y las modulaciones digitales de pulsos por otro. El segundo apartado se dedica al análisis de las modulaciones digitales paso banda no lineales. El estudio de este tipo de modulaciones resulta más complejo que el de las modulaciones lineales, por lo que nos centraremos únicamente en su descripción y en situarlas en las aplicaciones en las que se utilizan.

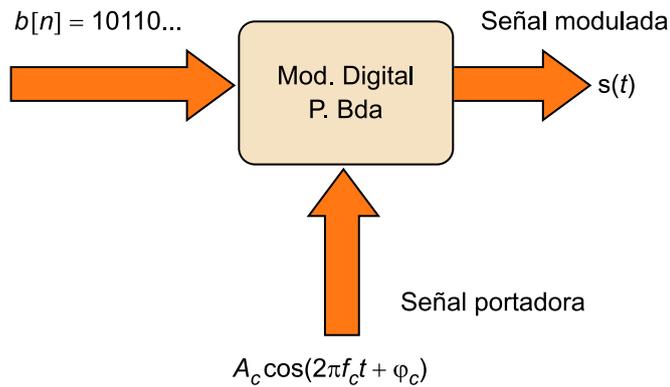
En las modulaciones digitales paso banda interviene una señal portadora, definida por amplitud, frecuencia y fase, por un lado, y una secuencia de bits a transmitir por otro. La secuencia de bits es la señal de entrada al modulador digital paso banda y se transmite a una determinada velocidad o tasa de bit. La señal obtenida es real y es paso banda, por tanto, se halla formada por componente en fase y por componente en cuadratura respecto a la señal portadora. En la figura 1 se presenta un esquema muy simplificado del modulador digital paso banda.

Versiones digitales de las modulaciones

Las modulaciones digitales paso banda lineales, estudiadas en el apartado 1, representan la versión digital de las modulaciones analógicas en fase y en cuadratura del subapartado 3.1 del módulo "Comunicaciones analógicas: señales paso banda", y las modulaciones digitales paso banda no lineales o angulares, estudiadas en el apartado 2, representan la versión digital de las modulaciones de FM del apartado 6 del módulo "Comunicaciones analógicas: modulaciones AM y FM".

Figura 1. Diagrama de bloques de un modulador digital paso banda

Secuencia de bits



Mediante la secuencia de bits, se puede modular la amplitud, la frecuencia o la fase de la señal portadora para dar lugar a la señal modulada.

Cuando la modulación digital es de amplitud, de fase o, simultáneamente, de amplitud y fase, el proceso de modulación es lineal y la modulación resultante se denomina QAM (*quadrature amplitude modulation*) o también APK (*amplitude and phase keying*). Para analizar estas señales es útil utilizar la formulación basada en componentes en fase y en cuadratura:

$$s(t) = i_s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_s(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (1)$$

Si la ecuación (1) describe una modulación QAM, se cumple que tanto la componente en fase ($i_s(t)$), como la componente en cuadratura ($q_s(t)$) se corresponden con una modulación digital en banda base de pulsos modulados en amplitud (PAM). Las modulaciones digitales paso banda QAM se utilizan en muchas aplicaciones.

Si el parámetro modulado a partir de la secuencia de bits es la frecuencia de la señal portadora, el proceso de modulación resulta no lineal y suele denominarse modulación angular. En este tipo de modulación la fase instantánea de la señal modulada es la que representa la información de forma más directa, resultando más representativa que las componentes en fase y en cuadratura. Las modulaciones no lineales resultantes pueden ser de tipo FSK o *frequency shift keying*, en las que la frecuencia instantánea se mantiene constante a lo largo del tiempo de símbolo, o bien CPM o *continuous phase modulation*, en las que la fase instantánea de la modulación se mantiene continua en tiempo, aun en las transiciones de símbolo. La propiedad de continuidad temporal de fase repercute en que se mantiene el espectro de la modulación más limitado en banda que en las modulaciones, en las que la fase instantánea presenta discontinuidades. Como caso particular, las modulaciones CPFSK o *continuous phase frequency shift keying*, representan un tipo de modulaciones digitales an-

Ved también

Podéis ver los componentes de la señal en fase y en cuadratura en el módulo "Comunicaciones analógicas: modulaciones AM y FM" de esta asignatura.

Ved también

La modulación de pulsos de amplitud (PAM) se estudia en el apartado 3 del módulo "Comunicaciones digitales en banda base" de esta asignatura.

gulares que reúnen ambas condiciones: la frecuencia instantánea es constante a lo largo del tiempo dedicado a transmitir cada símbolo y la fase instantánea no presenta discontinuidades en ningún instante de tiempo.

Objetivos

Los objetivos del módulo consisten en aprender los siguientes conceptos y técnicas:

1. Saber caracterizar las componentes en fase y en cuadratura de una modulación de tipo QAM como modulaciones digitales de pulsos PAM
2. Estudiar el espacio de la señal o constelación de la señal para modulaciones QAM.
3. Distinguir entre modulaciones PSK, APSK y QAM cuadradas
4. Saber analizar la probabilidad de error para modulaciones QAM sobre canales gaussianos.
5. Saber caracterizar la fase instantánea de la señal de una modulación angular como una modulación digital de pulsos PAM.
6. Distinguir entre modulaciones FSK y modulaciones CPM.
7. Comprender las ventajas obtenidas en cuanto a ancho de banda al trabajar con modulaciones CPM.

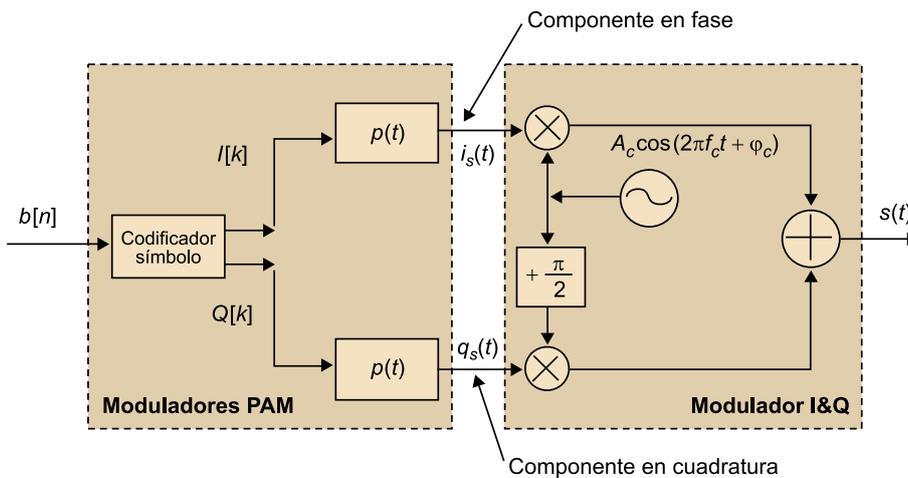
1. Modulaciones lineales QAM

Las modulaciones de amplitud en cuadratura o QAM abarcan un conjunto muy amplio de diferentes tipos de modulaciones paso banda digitales y lineales. Por ello, iniciamos este apartado describiendo las características genéricas de este tipo de modulación y, posteriormente, describiendo de forma detallada las propiedades diferenciales de cada tipo.

1.1. Modulador de señales QAM

Desde una perspectiva funcional, un modulador digital QAM paso banda está formado por un modulador digital en banda base, cuya entrada es una secuencia de bits y tiene dos señales de salida consistentes en dos modulaciones de pulsos de tipo PAM. Las dos modulaciones PAM a su vez corresponden a las componentes en fase y en cuadratura de un modulador I&Q. El proceso completo se describe en la figura 2.

Figura 2. Diagrama de bloques de un modulador QAM



Las componentes en fase y en cuadratura de la modulación se expresan cada una de ellas como una modulación de tipo PAM, según:

$$i_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n]p(t - nT); \quad q_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q[n]p(t - nT) \quad (2)$$

En (2) las secuencias $I[n]$ y $Q[n]$, representan respectivamente la secuencia de símbolos de la componente en fase y la secuencia de símbolos de la componente en cuadratura. La forma $p(t)$ es la función elegida para el pulso base. Un ejemplo de pulso utilizado es el pulso rectangular sin retorno a cero (NRZ), aunque de forma habitual se utilizan pulsos de raíz coseno realzado por ser espectralmente más eficientes, como se discutirá más adelante. Las dos componentes I&Q, correspondientes cada una de ellas a una modulación PAM, se modulan mediante una modulación I&Q según se muestra en la figura 2 y se obtiene la señal modulada QAM:

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n]p(t-nT)\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q[n]p(t-nT)\sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (3)$$

Para cada tipo de modulación QAM, se utiliza un alfabeto distinto de todos los posibles valores a asignar al par de amplitudes ($I[n]$, $Q[n]$). Si los bits se codifican de "b" en "b", el alfabeto se compone de $M = 2^b$ pares posibles de valores. En general, los símbolos son equiprobables y estadísticamente independientes en tiempo:

$$\Pr\{I[n] + jQ[n] = (I + jQ)_m = a_m\} = \frac{1}{M}; \quad M = 2^b \quad (4)$$

Al utilizar nomenclatura de símbolos complejos, se hace coincidir la parte real del símbolo complejo con el símbolo de la modulación PAM correspondiente a la componente en fase, y la parte imaginaria del símbolo complejo con el símbolo de la modulación PAM correspondiente a la componente en cuadratura.

En resumen, una modulación QAM es una señal paso banda cuyo equivalente paso bajo complejo está formado por dos modulaciones de tipo PAM. Una de ellas se corresponde con la parte real del equivalente paso bajo y por tanto se denomina componente en fase y la otra se corresponde con la parte imaginaria del equivalente paso bajo y por tanto se denomina componente en cuadratura.

A continuación se describen los casos más usuales de modulación QAM.

Nota

En el caso de que los bits en la salida de la fuente no sean equiprobables y estadísticamente independientes, se añade un aleatorizador (en inglés, *scrambler*) para garantizar que los símbolos transmitidos sean equiprobables y estadísticamente independientes en tiempo.

Recordad

Con modulaciones paso banda es útil definir la señal equivalente paso bajo complejo y trabajar con ella para simplificar nomenclatura en diferentes análisis de la señal.

1.2. Modulaciones QAM cuadradas

En las modulaciones QAM de tipo cuadrado, se tienen M símbolos disponibles, siendo M potencia de 4, es decir, el número de bits asignado a la codificación de cada símbolo es par. Al particularizar el número de símbolos M , se suele denominar a la modulación mediante el número de símbolos como cifra previa a las siglas QAM. Así, por ejemplo, 4-QAM es la modulación QAM de cuatro niveles y 16-QAM es la modulación QAM de 16 niveles.

Ved también

La nomenclatura M-QAM es por tanto análoga a la M-PAM utilizada en el subapartado 4.3 del módulo "Comunicaciones digitales en banda base" de esta asignatura.

Al realizar la codificación de los símbolos en QAM, los bits pares determinan la componente en fase y los bits impares determinan la componente en cuadratura. Dicho de otro modo, a cada b bits se les asigna un símbolo complejo, de tal manera que $b/2$ bits determinan el símbolo de la componente en fase y $b/2$ bits determinan el símbolo de la componente en cuadratura. En ambos casos la modulación de cada una de las dos componentes es de tipo polar (la mitad de los niveles son positivos y la otra mitad son negativos y simétricos respecto a los niveles positivos).

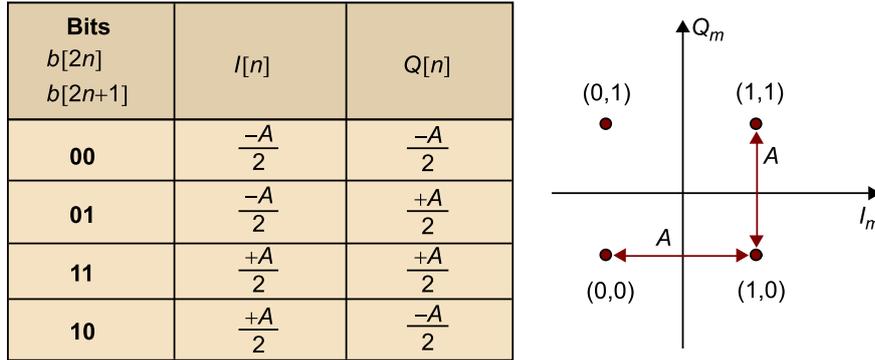
A continuación se presenta en el Ejemplo 1 un caso particular sencillo de QAM cuadrada, pero previamente debéis leer la definición de *espacio de señal* que sin duda ayudará a entender este tipo de modulaciones QAM cuadradas.

Se denomina **espacio de señal**, o también, constelación de la señal, a la representación geométrica de los símbolos complejos de una modulación QAM sobre un sistema de ejes de coordenadas cartesianas. Esto es, se representa la parte imaginaria o símbolo de la componente en cuadratura en función de la parte real o símbolo de la componente en fase. Se dibuja un punto o cualquier otro signo sencillo en cada par de coordenadas o símbolos posibles del alfabeto.

Ejemplo 1. Modulación 4-QAM (QPSK)

Para este tipo de modulación, se asignan $b = 2$ bits/símbolo, dando lugar a $M = 4$ símbolos. En la figura 3 se muestra la tabla de asignación de niveles al realizar la codificación de símbolo. El primero de cada par de bits (bits pares) determina el signo de la componente en fase ($I[n]$) y el segundo bit (bits impares) determina el signo de la componente en cuadratura ($Q[n]$). Ambos símbolos se suelen representar en el denominado *espacio de señal* o *constelación de la señal*. Observad en la figura que hay cuatro puntos, uno para cada uno de los $M = 4$ símbolos y se ha representado el par de bits correspondientes.

Figura 3. Codificación de símbolo y espacio de señal de la modulación 4-QAM o QPSK



Mediante la constante A , se simboliza en la figura 3 la separación entre las amplitudes correspondientes a los dos símbolos binarios polares de cada una de las dos componentes I&Q.

La modulación 4-QAM es más comúnmente conocida con el nombre de QPSK (*quadrature and phase shift keying*), debido a que en los instantes en que se producen las transiciones de símbolo, únicamente se producen cambios de fase sobre la señal modulada, y el valor absoluto de los símbolos complejos permanece constante. A partir de la tabla de la figura 3 correspondiente a esta modulación se deduce que el símbolo complejo resultante es:

$$a_m = I_m + jQ_m = \frac{A}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_m} = \frac{A}{\sqrt{2}} \cos(\varphi_m) + j \frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\varphi_m) \tag{5}$$

$$\varphi_m = \frac{+\pi}{4}, \frac{+\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}$$

De la ecuación (5) se deduce que los símbolos complejos resultantes (a_m) presentan todos el mismo valor absoluto: $\frac{A}{\sqrt{2}}$ y diferente fase φ_m . La fase depende de los dos bits asignados.

De la figura 3, se deduce que la fase $\varphi_m = \frac{+\pi}{4}$ representa el par de bits: 11. Análogamente, puede verse cuál es el par de bits asignados al resto de las fases φ_m posibles.

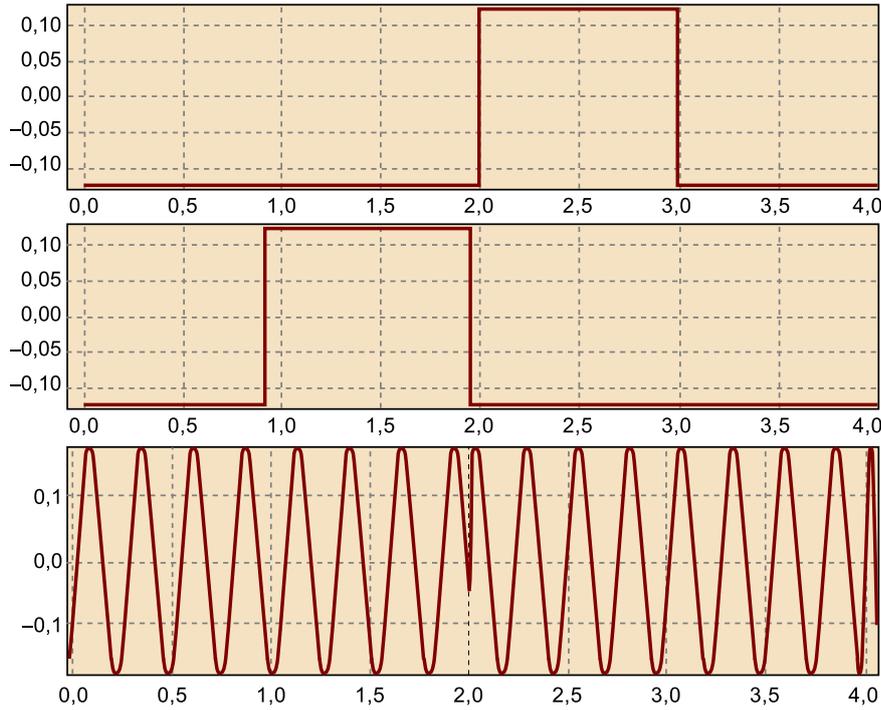
Para este ejemplo, la modulación expresada en (3) queda particularizada como:

$$s(t) = A_c \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\varphi[n]) p(t-nT) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin(\varphi[n]) p(t-nT) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) = A_c \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t-nT) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \varphi[n]) \tag{6}$$

Por lo que queda demostrado que a partir de la información binaria se modula únicamente la fase de la señal portadora, mediante el término $\varphi[n]$.

En la figura 4 se muestra un tramo de las señales temporales para un periodo de cuatro símbolos que sucesivamente pasan por las cuatro fases posibles de esta modulación. Por simplicidad en la figura, se ha utilizado un pulso rectangular NRZ para la modulación de las componentes I&Q.

Figura 4. Ejemplo de modulación QPSK a lo largo de cuatro periodos de símbolo



El eje temporal se halla normalizado al tiempo de símbolo. Es decir, está dividido por el tiempo de símbolo T . La gráfica superior corresponde a la componente en fase en función del tiempo y la central a la componente en cuadratura también en función del tiempo. En la gráfica inferior se representa la señal modulada resultante y expresada para un caso general en la ecuación (6).

En las transiciones de símbolo de la señal modulada representada en la figura 4, se observan claramente los cambios de fase instantánea.

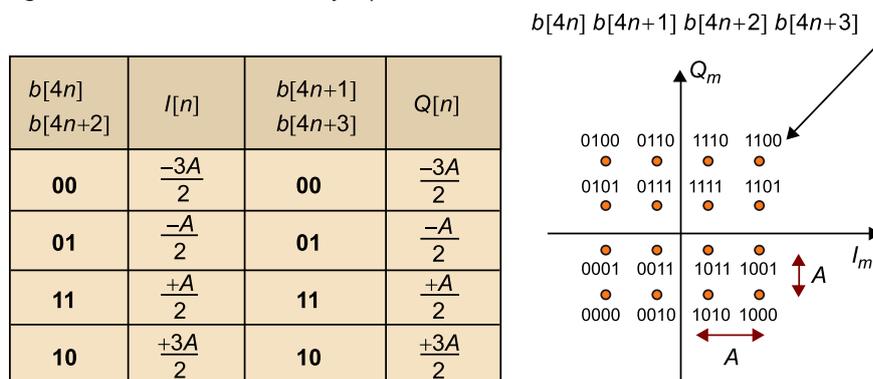
El Ejemplo 1 representa el caso más sencillo posible de modulación QAM cuadrada. A continuación, mediante el Ejemplo 2 se analiza la modulación 16-QAM, también cuadrada, y mediante la cual se llegan a transmitir 4 bits por símbolo.

Ejemplo 2. Modulación 16-QAM

Para este tipo de modulación se asignan $b = 4$ bits/símbolo, dando lugar a $M = 16$ símbolos.

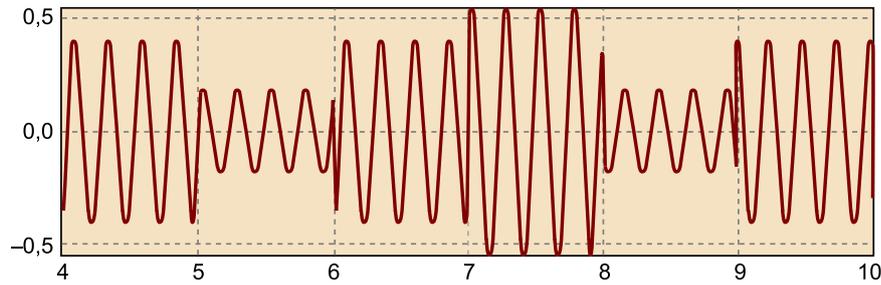
En la figura 5 se muestra la tabla de asignación de niveles al realizar la codificación de símbolo. Los símbolos de la componente en fase se asignan a partir de dos bits, por lo que se deben tener cuatro niveles posibles de una modulación PAM 4-polar. Lo mismo ocurre para la componente en cuadratura. Por tanto, con los bits pares se decide el signo y la amplitud de la componente en fase, y con los bits impares se decide el signo y la amplitud de la componente en cuadratura.

Figura 5. Codificación de símbolo y espacio de señal de la modulación 16-QAM



En la señal de la figura 6, se representa la asignación de bits a cada uno de los $M = 16$ símbolos asumiendo de nuevo un pulso rectangular NRZ.

Figura 6. Ejemplo de modulación 16-QAM a lo largo de 6 periodos de símbolo



El pulso base $p(t)$ es rectangular NRZ. El eje temporal está normalizado al tiempo de símbolo.

En la modulación 16-QAM, a partir de la información binaria, se producen cambios tanto en la amplitud como en la fase de la señal modulada, pues al formar el símbolo complejo $a_m = I_m + jQ_m$, se obtienen símbolos que en coordenadas polares presentan diferentes valores tanto en valor absoluto como en fase.

En las transiciones de símbolo de la figura 6 se observan claramente los cambios de fase instantánea y de amplitud de la señal modulada.

Además de QPSK y 16-QAM, otros formatos de modulación, ampliamente utilizados y también correspondientes a espacios de señal con representaciones geométricas cuadradas, son 64-QAM, 256-QAM y 1024-QAM. Suelen utilizarse cuando se requieren prestaciones de alta velocidad binaria en un ancho de banda reducido y se pueden permitir transmisiones con un elevado cociente de energías señal a ruido. Encontraremos, por lo tanto, modulaciones 1024-QAM, por ejemplo en escenarios de comunicaciones digitales por cable, donde el canal de comunicaciones es suficientemente bueno para garantizar una comunicación fiable con constelaciones de muchos puntos.

1.3. Modulaciones PSK

En las modulaciones digitales de fase, denominadas PSK o *phase shift keying*, la asignación de los bits determina directamente la fase del símbolo complejo $a_m = I_m + jQ_m$, dejando siempre el valor absoluto constante. La modulación QPSK del Ejemplo 1 es un caso particular de modulaciones PSK. Para el caso general, en que se requiere un alfabeto de $M = 2^b$ símbolos, se realiza la siguiente asignación:

$$a_m = I_m + jQ_m = e^{j\varphi_m} = \cos\varphi_m + j\sin\varphi_m; \quad \varphi_m = m\frac{2\pi}{M}; \quad m = 0 \dots M-1 \quad (7)$$

En la ecuación (7) cada posible fase φ_m resulta de la agrupación particular de "b" bits disponibles a la entrada del codificador de símbolo.

Ejemplo 3. Modulación 8-PSK

Para este tipo de modulación se asignan $b = 3$ bits/símbolo, dando lugar a $M = 8$ símbolos.

En la figura 7 se muestra la tabla de asignación de niveles al realizar la codificación de símbolo. Los tres bits de cada símbolo determinan directamente la fase del símbolo a transmitir.

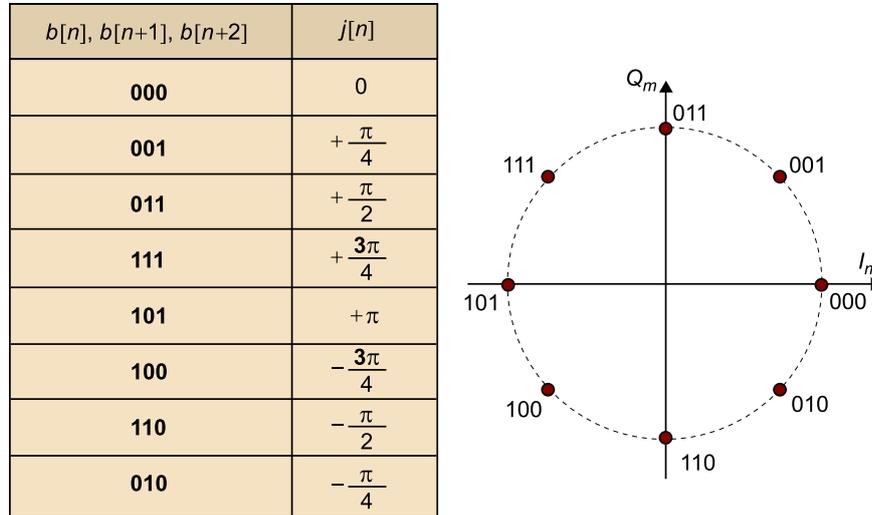
Nota

Observad que en modulaciones PSK las componentes fase y cuadratura I_m , Q_m no son independientes, sino que mantienen una relación para garantizar que la información se traslada directamente a la fase del símbolo. Así, la componente en fase coincide con el coseno de la fase del símbolo y la componente en cuadratura con el seno de la fase, como se ve en la ecuación (7).

En el espacio de señal de la figura 7, se representa la asignación de bits a cada uno de los $M = 8$ símbolos.

En la modulación 8-PSK, a partir de la información binaria, se producen cambios únicamente en la fase de la señal modulada, pues al formar el símbolo complejo $a_m = I_m + jQ_m$ se obtienen símbolos que en coordenadas polares difieren entre sí únicamente en la fase.

Figura 7. Codificación de símbolo y espacio de señal de la modulación 8-PSK



4-PSK y 8-PSK son los dos tipos de modulación de fase más utilizados en la práctica.

En las modulaciones de fase y pulso rectangular, la envolvente de la señal modulada se mantiene constante en el tiempo. Véase como ejemplo la señal modulada representada en la figura 4 para la modulación 4-PSK. Esta característica hace de las modulaciones PSK que sean adecuadas en aplicaciones en las que se debe amplificar la señal mediante amplificadores de alta potencia, como es el caso de algunos sistemas de comunicaciones por satélite.

Cuando se amplifican señales con elevado nivel de amplificación, si éstos funcionan en régimen de no linealidad, las modulaciones que son de envolvente constante resultan más robustas frente a no linealidades. Es decir, menos distorsionadas que las que no son de tipo PSK.

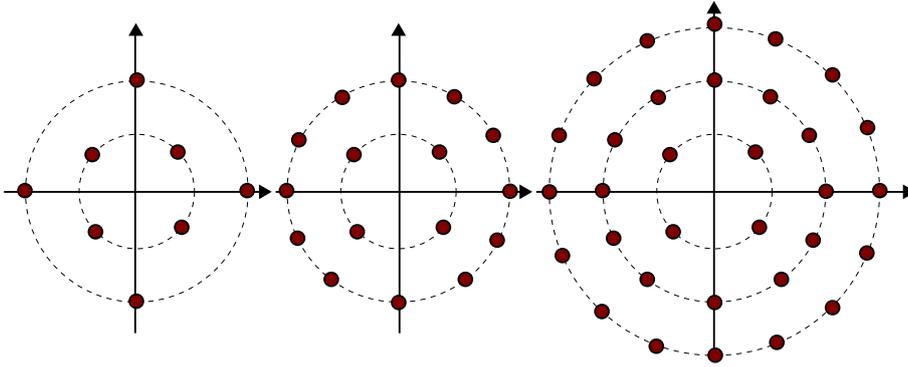
Algunos sistemas de comunicaciones por satélite estandarizados, como por ejemplo la televisión digital por satélite (DVB-S2), utilizan modulaciones denominadas APSK o *amplitude phase shift keying*, consistentes en diferentes constelaciones PSK concéntricas, y con diferentes radios en la constelación o espacio de señal.

En la figura 8 se muestran los tres casos de modulaciones APSK definidos en el estándar DVB-S2, mediante los que se puede trabajar con modulaciones de 8, 16 o 32 niveles.

Nota

Es importante hacer notar que cuando el pulso conformador no es rectangular, PSK deja de ser una señal de envolvente constante.

Figura 8. Espacio de señal de modulaciones concéntricas 8-APSK, 16-APSK y 32-APSK



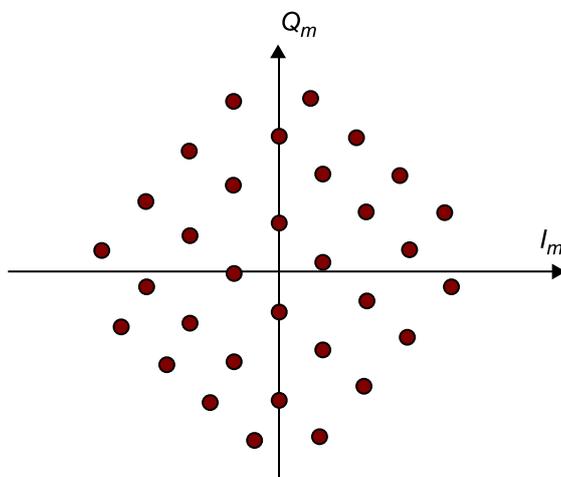
La modulación 32-APSK se utiliza principalmente si la condición de linealidad de los amplificadores se halla garantizada. Se asignan 3, 4 y 5 bits por símbolo respectivamente a cada una de las tres modulaciones. Aunque en la figura 8 no se ha representado el conjunto de bits que determina cada símbolo, la asignación se realiza de forma análoga a los ejemplos vistos (8-PSK, 16-QAM, ...).

1.4. Modulación 32-QAM

Además de las modulaciones de constelaciones totalmente cuadradas o de las modulaciones de constelaciones circulares, existen otros tipos de codificación de símbolo de tipo QAM, cuyo espacio o constelación de señal presenta una forma geométrica distinta. Uno de los formatos más populares es el 32-QAM tal como se utiliza en el estándar V.32, integrado dentro de la red digital de servicios integrados para transmisiones mediante fax. Este tipo de modulaciones se desarrollaron ampliamente con la digitalización de las redes telefónicas en las décadas de los setenta y ochenta.

En el espacio de señal representado en la figura 9, cada punto de la constelación representa un conjunto de 5 bits.

Figura 9. Espacio de señal de la modulación 32-QAM tal como se utiliza en el estándar V.32



Una característica común a todas las modulaciones QAM basadas en el pulso rectangular NRZ es que, como resultado de la modulación, en el periodo asignado a cada símbolo la señal modulada resultante es una función sinusoidal de frecuencia igual a la frecuencia de la señal portadora: f_c , y de amplitud A_m , y/o fase φ_m , determinadas por el símbolo que se esté transmitiendo y constantes a lo largo de todo el periodo asignado al correspondiente símbolo. La señal que se transmite durante el tiempo de símbolo se denomina **pulso de radiofrecuencia** y se expresa como:

$$A_m \cos(\pi f_c t + \varphi_m) \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (8)$$

1.5. Ancho de banda de las modulaciones QAM

Una vez presentada la descripción de las modulaciones digitales paso banda más básicas, vamos a ocuparnos de otro aspecto de interés, el análisis de su ancho de banda. El ancho de banda que ocupan es siempre un parámetro crítico en las modulaciones paso banda, porque normalmente este tipo de señales se utilizan en sistemas de comunicaciones multiplexándose entre sí. Es decir, se transmiten simultáneamente pero ocupando cada una de ellas una parte diferente del ancho de banda adjudicado a todo el sistema.

Como paso previo a la caracterización del ancho de banda, se necesita obtener la función de densidad espectral de este tipo de modulaciones, la cual se centra alrededor de la frecuencia portadora.

Las modulaciones analizadas en los subapartados 1.2, 1.3 y 1.4 son procesos aleatorios paso banda de la forma:

$$s(t) = i_s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_s(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (9)$$

La señal en (9) resulta un proceso aleatorio debido a que las señales $i_s(t)$, $q_s(t)$ son dos procesos aleatorios y la fase φ_c es una variable aleatoria.

En los tres tipos de modulación, QAM cuadrada, PSK y APSK, la función de densidad espectral de la modulación, $(S_s(f))$, se puede expresar en función de la densidad espectral de la componente en fase, $S_{i_s}(f)$, y de la densidad espectral de la componente en cuadratura, $S_{q_s}(f)$:

$$S_s(f) = A_c 2 \frac{1}{4} (S_{i_s}(f - f_c) + S_{q_s}(f - f_c) + S_{i_s}(f + f_c) + S_{q_s}(f + f_c)) \quad (10)$$

Así, el desarrollo que necesitaremos para analizar la función de densidad espectral de las modulaciones QAM radica directamente en el cálculo de la función de densidad espectral de sus componentes en fase y en cuadratura. Dado que ambas señales son modulaciones de tipo PAM, su función de densidad espectral es proporcional a la transformada de Fourier del pulso base elevada al cuadrado. Si esta característica se aplica a la ecuación (10), la densidad espectral de una modulación de tipo QAM queda reducida a:

$$S_s(f) = A_c 2K (P^2(f - f_c) + P^2(f + f_c)) \quad (11)$$

Donde $P(f)$ es la transformada de Fourier del pulso base, $p(t)$ en el dominio del tiempo y K es una constante que depende del tipo de modulación.

Cualquier modulación QAM que utilice pulsos rectangulares:

$$P(f) = TF\left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \frac{\text{sen}(\pi f T)}{\pi f} \quad (12)$$

Presenta una función de densidad espectral de la forma:

$$S_s(f) = A_c 2K \left(\left| \frac{\text{sen}(\pi(f-f_c)T)}{\pi(f-f_c)} \right|^2 + \left| \frac{\text{sen}(\pi(f+f_c)T)}{\pi(f+f_c)} \right|^2 \right) \quad (13)$$

No todos los sistemas de comunicaciones basados en modulaciones QAM utilizan el pulso rectangular NRZ. Si las restricciones de ancho de banda son importantes, se suelen utilizar pulsos de raíz de coseno realzado, mediante los cuales ya hemos visto que el ancho de banda del pulso es igual a la mitad de la velocidad de símbolo, r , incrementada en un tanto por ciento denominado factor de *rolloff*. El sistema UMTS utiliza modulaciones QAM basadas en pulsos raíz de coseno realzado, cuyo factor de *rolloff* oscila en torno a valores de un 25%.

Volviendo a la expresión genérica (11) y a efectos de diseño de un sistema de comunicaciones, la conclusión importante se manifiesta en la siguiente idea clave:

Ecuación (10)

La demostración de la ecuación (10) es difícil y está basada en las propiedades estadísticas de las componentes en fase y en cuadratura y de la variable aleatoria φ_c . Digamos que tanto por dificultad como por tiempo, la demostración escapa a los objetivos de este curso, sin embargo, es una expresión que se puede aplicar a todas las modulaciones del presente módulo.

Ved también

La ocupación espectral de la modulación de pulsos de amplitud (PAM) se estudia en el apartado 5 del módulo "Comunicaciones digitales en banda base" de esta asignatura.

Ved también

Sobre los pulsos de raíz de coseno realzado, podéis ver el módulo "Comunicaciones digitales en banda base" de esta asignatura.

El ancho de banda de una modulación QAM $s(t)$ resulta el doble que el ancho de banda del pulso $p(t)$.

$$B_s = 2B_p \quad (14)$$

Lo que debe tenerse en cuenta a la hora de implementar un estándar o de realizar las asignaciones frecuenciales de diferentes señales moduladas QAM.

1.6. Energía media de bit de las modulaciones QAM

Al analizar la probabilidad de error para modulaciones digitales, es importante dar el resultado en función del cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$, con el fin de poder comparar diferentes sistemas de modulación digital en igualdad de condiciones.

Como paso previo al cálculo de la energía media transmitida por bit, es interesante recordar cómo se realiza el cálculo de la energía media de símbolo, como el promedio estadístico ($E[\cdot]$) de la integral de la señal al cuadrado a lo largo de un periodo de símbolo.

$$E_s = E \left[\int_0^T s^2(t) dt \right] \quad (15)$$

A continuación, se aplica la definición (15) a las modulaciones QAM definidas en (3), considerando por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, que:

- El pulso base es rectangular NRZ $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T}{T}\right)$. Debido a la constante $\frac{1}{\sqrt{T}}$ este pulso es de energía igual a 1.
- Se cumple la siguiente relación entre la frecuencia portadora y la velocidad de símbolo: $f_c = N_r$, con $N \gg 1$.

Para el cálculo de la energía media de símbolo, cuando la señal modulada es la dada por (9), con las expresiones para las componentes en fase y en cuadratura de la ecuación (2), se parte de la expresión genérica de la señal QAM:

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n] p(t-nT) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q[n] p(t-nT) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (16)$$

$f_c = N_r$

La relación $f_c = N_r$ indica que la frecuencia portadora es un múltiplo entero de la velocidad de símbolo. Esta condición se cumple en la práctica porque todas las señales de reloj de un modulador provienen de un oscilador único, a partir del cual, mediante divisores de frecuencia se consigue el resto de señales de reloj a velocidades menores. La relación de multiplicidad de las frecuencias es también muy útil al caracterizar estas señales, ya que se simplifican los desarrollos matemáticos, como ocurre en el cálculo de la energía media de símbolo.

Ecuación (17)

En el cálculo de la expresión (17) y con la relación $f_c = N_r$ puede comprobar fácilmente que:

$$\int_0^T \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c) dt = \int_0^T \sin^2(2\pi f_c t + \varphi_c) dt = \frac{T}{2}$$

Al aplicar el operador estadístico E, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 E_s &= \\
 &= A_c^2 \left(E[I_m^2] \int_0^T p^2(t) \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c) dt + E[Q_m^2] \int_0^T p^2(t) \sin^2(2\pi f_c t + \varphi_c) dt \right) = \\
 &= A_c^2 \left(E[I_m^2] \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(2\pi f_c t + \varphi_c) dt + E[Q_m^2] \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(2\pi f_c t + \varphi_c) dt \right) = \\
 &= \frac{A_c^2}{2} (E[I_m^2] + E[Q_m^2]) = \frac{A_c^2}{2} (\sigma_I^2 + \sigma_Q^2)
 \end{aligned} \tag{17}$$

El cálculo de la energía desarrollado en (17) es correcto siempre que se cumpla $f_c = Nr$. Lo cual es cierto con los ejemplos analizados en este módulo: QPSK, 16-QAM, PSK, APSK y 32-QAM.

La energía media de símbolo, E_s , de una modulación QAM, $s(t)$, es igual a la semisuma de las varianzas de las amplitudes de símbolo σ_I^2, σ_Q^2 , multiplicada por la amplitud al cuadrado de la señal portadora. La energía media por bit resulta igual a:

$$E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{A_c^2}{2b} (\sigma_I^2 + \sigma_Q^2) \tag{18}$$

A continuación, se presenta el cálculo de la energía media de símbolo y de la energía media de bit para tres casos particulares. En todos ellos se asume que el pulso es rectangular NRZ y de energía igual a 1 y se deja el resultado en función de la amplitud de la señal portadora A_c y de la distancia entre símbolos A .

Ejemplo 4. Energía de la modulación QPSK

Para la modulación QPSK, los símbolos de las componentes I&Q se definen según la tabla de la figura 3. Las varianzas correspondientes a las amplitudes de símbolo resultan:

$$I_m = \frac{-A}{2}, \frac{+A}{2} \Rightarrow \sigma_I^2 = E[I_m^2] = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{-A}{2} \right)^2 + \left(\frac{+A}{2} \right)^2 \right) = \frac{A^2}{4}$$

Sustituyendo ambos valores en (17), se obtienen la energía media de símbolo y la energía media de bit en función de la amplitud de portadora y de la distancia entre símbolos.

$$E_s = \frac{A_c^2 A^2}{4}; E_b = \frac{A_c^2 A^2}{8};$$

Ejemplo 5. Energía de la modulación 16-QAM

Para la modulación 16-QAM los símbolos de las componentes I&Q se definen según la tabla de la figura 5. Las varianzas correspondientes a las amplitudes de símbolo resultan:

$$I_m = \frac{-3A}{2}, \frac{-A}{2}, \frac{+A}{2}, \frac{+3A}{2} \Rightarrow \sigma_I^2 = E[I_m^2] = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{-3A}{2} \right)^2 + \left(\frac{-A}{2} \right)^2 + \left(\frac{+A}{2} \right)^2 + \left(\frac{+3A}{2} \right)^2 \right) = \frac{5A^2}{4}$$

$$Q_m = \frac{-3A}{2}, \frac{-A}{2}, \frac{+A}{2}, \frac{+3A}{2} \Rightarrow \sigma_Q^2 = E[Q_m^2] = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{-3A}{2} \right)^2 + \left(\frac{-A}{2} \right)^2 + \left(\frac{+A}{2} \right)^2 + \left(\frac{+3A}{2} \right)^2 \right) = \frac{5A^2}{4}$$

Sustituyendo ambos valores en (17), se obtienen la energía media de símbolo y la energía media de bit en función de la amplitud de portadora y de la distancia entre símbolos:

$$E_s = \frac{5A_c 2A^2}{4}; E_b = \frac{5A_c 2A^2}{16};$$

Ejemplo 6. Energía de la modulación PSK

Para la modulación PSK definida según (7), el cálculo de las varianzas de símbolo resulta más eficiente si se realiza de forma conjunta para ambas componentes:

$$\begin{aligned} \sigma_I^2 + \sigma_Q^2 &= E[I_m^2] + E[Q_m^2] = E[(\cos\varphi_m)^2] + E[(\sen\varphi_m)^2] = \\ E[(\cos\varphi_m)^2 + (\sen\varphi_m)^2] &= E[1] = 1 \end{aligned} \tag{19}$$

Sustituyendo en (17), se obtienen la energía media de símbolo y la energía media de bit en función de la amplitud de portadora:

$$E_s = \frac{A_c 2}{2}; E_b = \frac{A_c 2}{2b}; \tag{20}$$

En este ejemplo, la distancia entre símbolos no aparece de forma explícita, aunque de forma implícita aparece al fijar que el radio en el que se encuentran todos los puntos es $R = 1$. De hecho, en este caso, la distancia entre símbolos consecutivos es, por el teorema de Pitágoras:

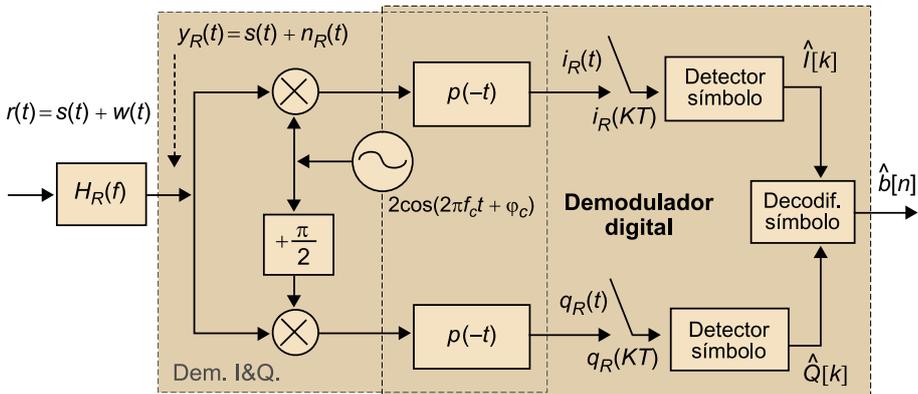
$$A^2 = \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{M}\right)\right)^2 + \sen^2\left(\frac{2\pi}{M}\right) = 2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{M}\right)\right) = 4\sen^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \tag{21}$$

1.7. Demodulador QAM

Al igual que con el tema de modulaciones digitales en banda base, el siguiente paso en el estudio de las modulaciones digitales paso banda QAM consiste en mostrar la estructura básica del demodulador. El objetivo final de este subapartado es caracterizar estadísticamente las variables que se obtienen para la detección de los símbolos y así calcular en subapartados posteriores la probabilidad de error.

Desde el punto de vista funcional, un demodulador digital QAM se halla formado por un demodulador paso banda, con el objeto de recuperar las dos componentes I&Q y un demodulador digital en banda base.

Figura 10. Diagrama de bloques de un demodulador QAM



En la figura 10 se muestra el diagrama funcional de un receptor de modulaciones QAM. A continuación, se describen las diferentes etapas por las que se halla formado:

- 1) El primer elemento consiste en un filtro paso banda de función de transferencia $H_R(f)$, cuya finalidad es la de eliminar ruido a frecuencias no ocupadas por la señal modulada. El filtro se centra en la frecuencia portadora y su ancho de banda es el de la señal QAM.
- 2) La segunda etapa es la formada por el demodulador I&Q. La portadora del oscilador local debe estar sincronizada en frecuencia y fase con la portadora de la señal QAM.
- 3) Los filtros paso bajo de respuesta impulsional $p(-t)$ son directamente los filtros adaptados al pulso base de la modulación, por lo que estos elementos se comparten entre ambos sistemas: demodulador I&Q y demoduladores digitales.
- 4) Las dos señales de salida de los filtros adaptados $i_R(t)$, $q_R(t)$ se muestrean a razón de una muestra por símbolo.
- 5) La detección de símbolo se representa en la figura 10 de forma independiente entre las dos componentes I&Q, lo que sería propio de las modulaciones con espacio de señal en forma de cuadrado, por ejemplo QPSK y 16-QAM, en las que los bits pares codifican la componente en fase e independientemente, los bits impares codifican la componente en cuadratura.

Con modulaciones de tipo PSK, se realiza la detección de símbolo de forma conjunta, ya que la información a detectar depende del ángulo que forman entre sí las dos muestras simultáneas a la salida de los conversores A/D. Es decir, para PSK, la demodulación se realiza mediante la función “arctangente” o $\text{tg}^{-1}(\cdot)$, como:

$$\hat{\phi}[k] = \text{tg}^{-1}\left(\frac{q_R(kT)}{i_R(kT)}\right) \quad (22)$$

Para la modulación PSK, los símbolos de la componente en cuadratura coinciden con el seno del ángulo codificado y los símbolos de la componente en fase coinciden con el coseno del ángulo codificado, como en el ejemplo de la tabla de la figura 7 y según se muestra en la ecuación (7). Por ello, la función arcotangente de la ecuación (23) es apropiada para decodificar la secuencia de símbolos.

Muestreador

Un A/D, también denominado conversor analógico/digital, es lo que coloquialmente podríamos denominar un “muestreador”. En la Figura 10, a la salida de cada uno de los filtros adaptados, se toman muestras a razón de una muestra por símbolo. Así se obtienen las muestras $i_R(kT)$ a partir de la señal $i_R(t)$ y las muestras $q_R(kT)$, a partir de la señal $q_R(t)$. Por tanto, cada uno de los dos puntos de muestreo representa un A/D.

Hasta este punto del subapartado se ha presentado la estructura del demodulador. En el hipotético caso de que no hubiera señal de ruido a la entrada del filtro receptor, y por tanto, únicamente estuviera presente la señal QAM, las muestras a la entrada del receptor se corresponderían fielmente con los símbolos transmitidos:

$$\begin{aligned} i_R(kT) &= I[k] \\ q_R(kT) &= Q[k] \end{aligned} \quad (23)$$

Y por tanto, la señal se demodularía correctamente con una probabilidad de error nula. Sin embargo, en la práctica, existe el ruido gaussiano $w(t)$ sumado a la señal útil. Las variables $i_R(kT)$, $q_R(kT)$, contienen el símbolo a detectar más las muestras de ruido, y resultan variables aleatorias gaussianas. Para caracterizarlas estadísticamente, se analiza a continuación la distribución estadística del ruido a través de las diferentes etapas del demodulador. En este análisis se retoman conceptos del análisis de ruido paso banda y del análisis de las muestras de ruido a la salida del filtro adaptado del demodulador PAM, donde se plantea el cálculo de la probabilidad de error para obtener el resultado en función del cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$. En el cálculo se requiere hallar la potencia de las muestras de ruido, por lo que es necesario caracterizar las señales de ruido a la salida de los filtros paso bajo.

La señal de ruido a la entrada del filtro receptor de la figura 10 presenta la función de densidad espectral:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \text{ Watt/Hz} \quad (24)$$

La respuesta impulsional del canal, con el objeto de simplificar al máximo el análisis de la probabilidad de error, se asume ideal:

$$h_c(t) = \delta(t) \quad (25)$$

Las componentes en fase y en cuadratura del ruido paso banda se caracterizan a partir de sus densidades espectrales. Si $n_R(t)$ representa el ruido paso banda a la salida del filtro receptor de respuesta impulsional $h_R(t)$, se puede expresar según:

$$n_R(t) = w(t) * h_R(t) = i_n(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - q_n(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (26)$$

y la densidad espectral de las dos componentes es:

$$S_{i_n}(f) = S_{q_n}(f) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{B_s}\right) = N_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_p}\right) \quad (27)$$

Ved también

Podéis ver los conceptos del análisis del ruido paso banda en el módulo "Comunicaciones analógicas: señales paso banda", y los cálculos de probabilidad de error en el apartado 4 del módulo "Comunicaciones digitales en banda base" de esta asignatura.

Ved también

Podéis ver la caracterización de los componentes en fase y en cuadratura del ruido paso banda a partir de sus densidades espectrales en el módulo "Comunicaciones analógicas: señales paso banda".

Si en la obtención de las componentes se utiliza el filtro paso bajo, consistente en un sistema cuya respuesta impulsional es el filtro adaptado al pulso base, las señales $i_R(t)$, $q_R(t)$, generalizando ya a la suma de señal útil más señal de ruido, previo muestreo o conversión A/D se expresan según:

$$\begin{aligned} i_R(t) &= (i_s(t) + i_n(t)) * p(-t) \\ q_R(t) &= (q_s(t) + q_n(t)) * p(-t) \end{aligned} \quad (28)$$

A partir de la ecuación (2) recordemos la expresión de las componentes I&Q de la señal útil:

$$i_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n]p(t-nT); \quad q_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q[n]p(t-nT) \quad (29)$$

Por tanto, sustituyendo las expresiones (30) en (29), resulta:

$$\begin{aligned} i_R(t) &= (A_c i_s(t) + i_n(t)) * p(-t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n]R_p(t-nT) + i_{np}(t) \\ q_R(t) &= (A_c q_s(t) + q_n(t)) * p(-t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q[n]R_p(t-nT) + q_{np}(t) \end{aligned} \quad (30)$$

En (31), $i_{np}(t)$, $q_{np}(t)$ corresponden a los términos de ruido a la salida de los filtros adaptados y la función $R_p(t)$ representa la función de autocorrelación del pulso base: $p(t)$.

Las muestras de ambas señales, a la salida de los convertidores A/D de la figura 10, a tiempo de muestreo $t_k = kT$ y con pulsos $p(t)$ de energía unidad resultan:

$$\begin{aligned} i_R(kT) &= A_c I[k] + i_{np}(kT) \\ q_R(kT) &= A_c Q[k] + q_{np}(kT) \end{aligned} \quad (31)$$

La potencia de las muestras de ruido en (32) se calcula de forma análoga a la obtenida para las modulaciones en banda base. Además, el valor de la potencia de ruido es idéntico para ambas componentes (recordad que estamos normalizando el pulso a $E_p = 1$):

$$\sigma^2 = \sigma_{i_{np}}^2 = \sigma_{q_{np}}^2 = \int S_{in}(f) |P(f)|^2 df = N_0 E_p = N_0 \quad (32)$$

Por tanto, (33) es la potencia de las muestras de ruido a utilizar en el cálculo de la probabilidad de error. El modelo estadístico para ambas muestras de ruido es idéntico:

Ved también

Podéis ver los componentes I&Q de la señal en el subapartado 1.1 de este módulo didáctico.

$$\begin{aligned} i_{np}(kT) &: N(0, \sigma^2) \\ q_{np}(kT) &: N(0, \sigma^2) \end{aligned} \quad (33)$$

La conclusión principal de este análisis se expresa a continuación.

Cuando se utilizan pulsos de energía igual a 1, la variable de decisión $i_R(kT)$ es una variable aleatoria gaussiana de media igual al símbolo transmitido por la componente en fase, multiplicado por la amplitud de la señal portadora y de varianza igual a la constante N_0 ,

$$i_R(kT) : N(A_c I[k], N_0) \quad (34)$$

Y la variable de decisión $q_R(kT)$ es una variable aleatoria gaussiana de media igual al símbolo transmitido por la componente en cuadratura, multiplicado por la amplitud de la señal portadora y de varianza igual a la constante N_0 .

$$q_R(kT) : N(A_c Q[k], N_0) \quad (35)$$

1.8. Probabilidad de error de las modulaciones QAM

En este subapartado se analiza la calidad de las modulaciones QAM, basada en el cálculo de la probabilidad de error de símbolo, SER, y de la probabilidad de error de bit, BER en función del cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$. Al formular ambas probabilidades en función del cociente dado, resultan de utilidad la expresión de la energía media de bit, cuya fórmula generalizada es (17), y la potencia de las muestras de ruido calculada en (33).

Inicialmente, se plantea el cálculo de forma detallada para tres casos particulares, posteriormente se presentan resultados generalizados, aunque sin demostraciones, para modulaciones PSK y QAM.

1.8.1. BER de un sistema BPSK

La modulación BPSK es la modulación 2-PSK, es decir, una modulación binaria de dos fases. Atendiendo a la formulación dada en (7), particularizada para $M = 2$ símbolos, los dos símbolos obtenidos resultan reales, ya que los símbolos de la componente en cuadratura son nulos. De hecho, la componente en cuadratura de toda la modulación es nula. Particularizando, para $M = 2$ quedan las siguientes expresiones para los símbolos de las componentes I&Q.

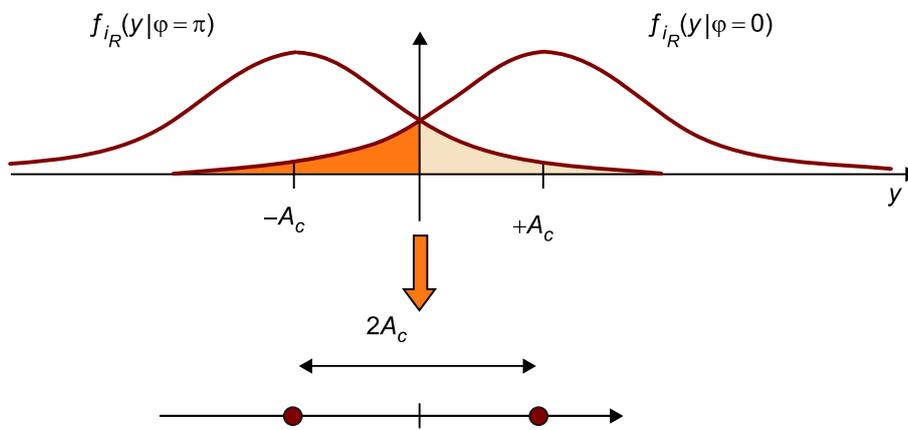
$$\begin{aligned} \varphi_1 = 0 &\Rightarrow a_1 = I_1 = +1; & Q_1 &= 0 \\ \varphi_2 = \pi &\Rightarrow a_2 = I_2 = -1; & Q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

La señal modulada se simplifica por tanto, dando lugar a:

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n] p(t - nT) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c); \quad I[n] = \pm 1 \quad (37)$$

Una vez procesada la señal modulada $s(t)$, por el demodulador de la figura 10 (solo rama superior), la variable de decisión correspondiente es la modelada en la ecuación (34). El espacio de señal de esta variable de decisión, $i_R(kT)$, se representa en la figura 11 junto con las funciones de densidad de probabilidad de la variable de decisión condicionadas por los dos posibles valores de símbolo.

Figura 11. Representación de la distribución estadística de la variable de decisión de la componente en fase



Versión simplificada en la parte inferior

Dado que los dos valores posibles transmitidos son simétricos respecto al origen, el umbral de detección se sitúa en 0 volts:

$$\begin{aligned} i_R(kT) > 0 &\Rightarrow \hat{I}[k] = +1 \\ i_R(kT) < 0 &\Rightarrow \hat{I}[k] = -1 \end{aligned} \quad (38)$$

De donde, realizando un desarrollo totalmente análogo al mostrado en el módulo 5, se deduce que la BER y la SER son igual a:

$$P_e = P_b = Q\left(\frac{A_c}{\sigma}\right) \quad (39)$$

Para esta modulación, BPSK, y con el objeto de expresar las probabilidades de error en función de la energía media de bit, del Ejemplo 6 particularizado a 1 bit por símbolo ($b = 1$). Se tiene:

$$E_b = E_s = \frac{A_c^2}{2} \quad (40)$$

Y con la potencia de ruido calculada en (32), la probabilidad de error dada en (40) es directamente:

$$P_e = P_b = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (41)$$

1.8.2. BER de un sistema QPSK

La modulación QPSK, caracterizada en la figura 3, es una modulación cuadrada, en la que los bits pares codifican la componente en fase y los bits impares codifican la componente en cuadratura. Esta característica permite la decodificación de los bits por separado, por tanto la BER de los bits transportados por cada una de las dos componentes coincide con la BER total del sistema. Es decir, la probabilidad de error de bit es idéntica, tanto si el bit se transporta a través de la componente en fase como si se transporta a través de la componente en cuadratura.

En definitiva, expresando las probabilidades de error de bit en cada componente, mediante el correspondiente sufijo:

$$BER_I = BER_Q = BER_{QPSK} \quad (42)$$

Las coordenadas a utilizar en la detección, son, para la rama superior del demodulador de la figura 10 correspondiente a la componente en fase:

$$\begin{aligned} i_R(kT) &= A_c I[k] + i_{np}(kT); \\ i_{np}(kT) &: N(0, \sigma^2); \quad I[k] = \pm \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (43)$$

Y para la rama inferior del demodulador de la figura 10 correspondiente a la componente en cuadratura:

$$\begin{aligned} q_R(kT) &= A_c Q[k] + q_{np}(kT); \\ q_{np}(kT) &: N(0, \sigma^2); \quad Q[k] = \pm \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (44)$$

El umbral de detección se sitúa en 0 volts en ambas ramas, pues cada rama corresponde a una modulación 2-PAM de niveles: $+\frac{A_c A}{2}$, $-\frac{A_c A}{2}$, dando lugar a la BER:

$$P_b = Q\left(\frac{A_c A}{2\sigma}\right) \quad (45)$$

Para esta modulación, la energía media de bit, analizada en el Ejemplo 4, es igual a:

Observación

La expresión coincide con la de la modulación 2-PAM polar y con la de cualquier modulación binaria antipodal, es decir, formada por dos símbolos que son de igual valor absoluto y de signo contrario.

Ved también

Esta propiedad se cumple para todas las modulaciones QAM con constelaciones simétricas respecto al origen de coordenadas. Tal es el caso de las modulaciones QAM cuadradas, o 32-QAM.

$$E_b = \frac{1}{2}E_s = \frac{A_c 2A^2}{8} \quad (46)$$

Y con la potencia de ruido calculada en (32) se obtiene la siguiente expresión para la BER, que coincide con la obtenida para señales antipodales.

$$P_b = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (47)$$

1.8.3. BER de un sistema 16-QAM

La modulación 16-QAM caracterizada en la figura 6 es también una modulación cuadrada, en la que los bits pares codifican la componente en fase y los bits impares codifican la componente en cuadratura. Esta característica permite la decodificación de los bits por separado, por tanto la BER de cada una de las dos componentes coincide con la BER total del sistema.

$$BER_I = BER_Q = BER_{QPSK} \quad (48)$$

En 16-QAM, tanto la componente en fase como la componente en cuadratura, corresponden a modulaciones 4-PAM de tipo polar. La SER de cada componente es el doble de la correspondiente BER. Debido a la analogía entre ambas coordenadas o componentes, se analiza a continuación únicamente la SER de la componente en fase, ya que coincide con la SER de la componente en cuadratura.

$$\begin{aligned} i_R(kT) &= A_c I[k] + i_{np}(kT); \\ i_{np}(kT) &: N(0, \sigma^2); \quad I[k] = \pm \frac{A}{2}, \pm \frac{3A}{2} \end{aligned} \quad (49)$$

Los umbrales de detección se sitúan en los puntos medios entre símbolos detectados:

$$-AA_c, 0, +AA_c \quad (50)$$

dando lugar para modulaciones 4-PAM polar:

$$P_e = \frac{3}{2} Q\left(\frac{AA_c}{2\sigma}\right) \quad (51)$$

Para completar el análisis, la probabilidad de error anterior debe expresarse en función del cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$.

Para esta modulación, la energía media de bit, dado que se transmiten 4 bits por símbolo, y según el Ejemplo 5, es igual a:

$$E_b = \frac{1}{4}E_s = \frac{5A_c 2A^2}{8} \quad (52)$$

Ved también

La modulación de pulsos de amplitud (PAM) se estudia en el apartado 3 del módulo "Comunicaciones digitales en banda base" de esta asignatura.

Y con la potencia de ruido calculada en (32) se obtiene la siguiente expresión para la BER de la componente en fase:

$$P_b = \frac{1}{2}P_e = \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (53)$$

1.8.4. Casos generales

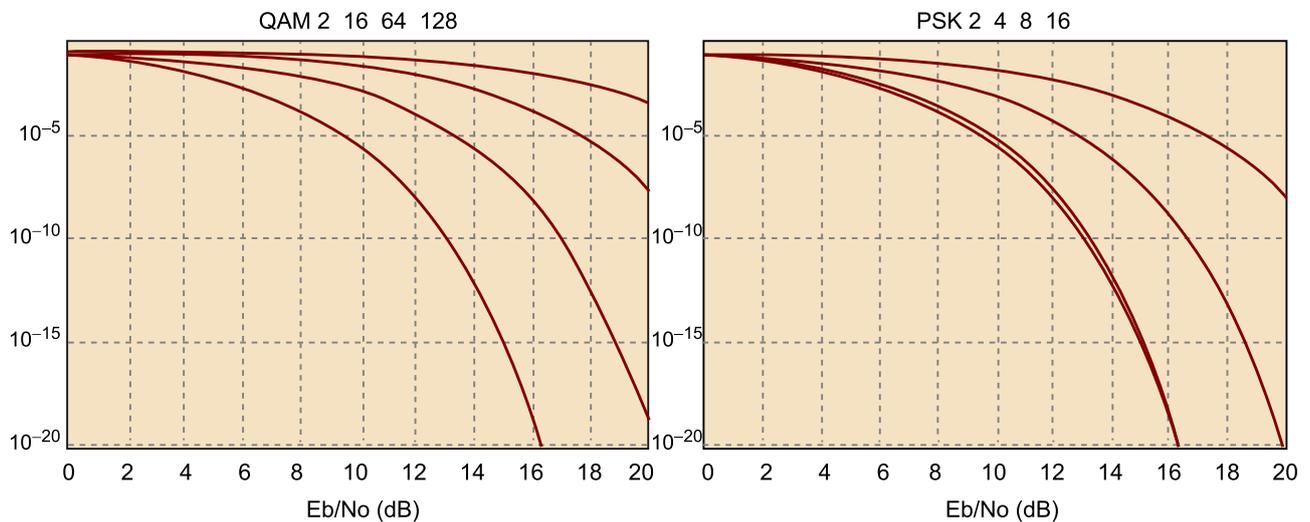
Tanto para las modulaciones QAM cuadradas como para las modulaciones PSK, se pueden obtener expresiones genéricas de la probabilidad de error en función del número de niveles M . A continuación, se muestran estas expresiones sin demostrarlas:

$$BER_{MQAM} = P_b = \frac{4(\sqrt{M}-1)}{b\sqrt{M}}Q\left(\sqrt{\frac{3b}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (54)$$

$$BER_{PSK} \approx \frac{2}{b}Q\left(\sqrt{2b\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (55)$$

En la figura 12 se muestran diferentes casos de la probabilidad de error de bit, BER, de las modulaciones M-QAM, ecuación (54), y de las modulaciones PSK, ecuación (55). En cada caso, el número de bits transmitidos por símbolo, b , se ha particularizado mediante cuatro valores diferentes.

Figura 12. BER (eje y) para modulaciones QAM cuadradas y PSK, en función del cociente de energías señal a ruido (eje x), y del número de niveles.



La escala es logarítmica. En cada caso, las curvas inferiores corresponden a las modulaciones de menor número de niveles y las superiores a las de mayor número de niveles.

A partir de la figura 12 se pueden deducir las mismas conclusiones que se extraen del análisis de la probabilidad de error para modulaciones M-PAM.

Suponiendo fijado el cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$ y la velocidad de bit del sistema, el número de niveles M más conveniente se obtiene como la resolución de la siguiente situación de compromiso.

Ved también

La modulación de pulsos de amplitud (PAM) se estudia en el apartado 3 del módulo "Comunicaciones digitales en banda base" de esta asignatura.

- Al aumentar el número de niveles, se degrada la BER (inconveniente).
- Al aumentar el número de niveles, disminuye la velocidad de símbolo $r = \frac{r_b}{b}$ y, para este tipo de modulación, ello repercute en un decremento del ancho de banda necesario (ventaja).

Esta propiedad se cumple para las modulaciones digitales lineales en general.

2. Modulaciones digitales de frecuencia

En el apartado 1, se han estudiado detalladamente modulaciones digitales paso banda, en las que, a partir de una secuencia de símbolos a transmitir, complejos en general, se modula la amplitud o la fase de una señal portadora. Una característica intrínseca a las modulaciones QAM es que, durante el periodo asignado a cada símbolo, tanto la amplitud como la fase de la señal modulada resultante permanecen constantes. Se producen cambios tanto de amplitud como de fase únicamente en las transiciones de símbolo. En las modulaciones digitales de frecuencia, la fase de la señal portadora no permanece constante dentro del periodo adjudicado a un símbolo, y esta propiedad provoca que la frecuencia instantánea de los diferentes símbolos transmitidos sea diferente entre sí, pues depende directamente de la secuencia de bits a transmitir. En este apartado se tratarán brevemente las modulaciones digitales de frecuencia para completar el módulo, aunque la descripción se hace de forma muy cualitativa y superficial.

Tal como se describe en la introducción del módulo, existen modulaciones FSK, cuya frecuencia instantánea permanece constante durante el periodo de símbolo, y modulaciones CPM, en las que se cumple que la fase instantánea de la modulación es continua en tiempo, aun durante las transiciones de símbolo. Las modulaciones CPFASK son modulaciones que cumplen las dos características: frecuencia constante dentro de cada símbolo y fase continua en las transiciones de símbolo.

El uso de las modulaciones CPM es de especial interés en todas aquellas aplicaciones de ancho de banda limitado. En determinadas aplicaciones, se fija como objetivo principal trabajar con modulaciones de ocupación espectral acotada a costa de mantener la continuidad temporal de la fase instantánea de la modulación.

En el subapartado que sigue, se definen modulaciones CPFASK como paso previo a la descripción de modulaciones CPM genéricas y en el siguiente subapartado, las modulaciones GMSK como ejemplo de modulaciones comercialmente utilizadas en algunos estándares como GSM y DECT. Para este tipo de modulaciones, debido a la complejidad de análisis, no se estudia en este módulo la probabilidad de error de forma explícita, a diferencia del análisis realizado para la modulación QAM.

2.1. Modulaciones CPFASK y MSK

En las modulaciones digitales de frecuencia, a diferencia de lo que ocurre con las modulaciones QAM, la información binaria determina directamente la frecuencia instantánea de la señal modulada. Los bits se agrupan de "b" en "b"

para dar lugar a un conjunto de $M = 2^b$ frecuencias diferentes. Sin pérdida de generalidad, en el resto de este subapartado se estudian únicamente modulaciones de frecuencia binarias ($b = 1$, $M = 2$), ya que la mayoría de los sistemas de comunicaciones basados en modulaciones FSK son binarios.

Asumiendo por tanto el caso binario, a partir de la secuencia de bits $b[n]$ codificada como polar, se obtiene una nueva secuencia de símbolos binaria $d[n]$ y se forma la señal modulada como una secuencia de pulsos de radiofrecuencia y frecuencias $f[n]$:

$$\begin{aligned} d[n] &= \pm 1 \text{ volt} \\ f[n] &= f_c + d[n]f_d \text{ Hz} \end{aligned} \quad (56)$$

En (56) el parámetro f_d tiene unidades de Hz/volt.

En principio, mediante las condiciones (56) se garantiza una modulación FSK de frecuencia constante dentro del periodo correspondiente a cada símbolo. Intuitivamente, se debe obtener una modulación del siguiente modo:

$$\begin{aligned} d[n] = +1 &\Rightarrow A_c \cos(2\pi(f_c + f_d)t) & nT \leq t \leq (n+1)T \\ d[n] = -1 &\Rightarrow A_c \cos(2\pi(f_c - f_d)t) & nT \leq t \leq (n+1)T \end{aligned} \quad (57)$$

de donde se deduce que la frecuencia instantánea de la modulación es constante en el periodo de símbolo y depende del bit que se esté transmitiendo.

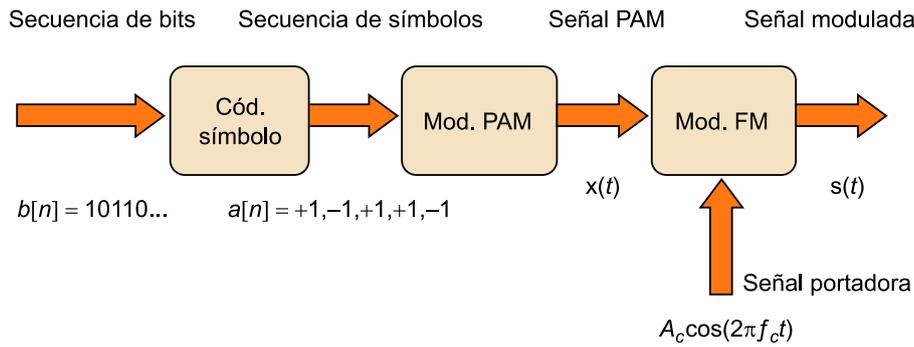
La expresión (57) correspondería a una modulación digital de frecuencia (FSK) pero no garantiza, por si misma, que la modulación presente continuidad de fase al cambiar de símbolo, requerimiento de la modulación CPFSK. La forma práctica de conseguir tanto las condiciones (56), como la continuidad de fase consiste en utilizar un modulador de frecuencia (modulador de FM). Debido al integrador de la señal de entrada, presente en un modulador de FM, la continuidad de la fase de la señal modulada queda garantizada.

En la figura 13 se muestra el diagrama de bloques necesario para obtener la modulación CPFSK. A continuación, mediante las expresiones de las señales presentes en los diferentes puntos del esquema, se comentan las tres etapas del modulador.

Ved también

Sobre el modulador de FM, podéis ver el módulo "Comunicaciones analógicas: modulaciones AM y FM" de esta asignatura.

Figura 13. Modulador de CPFSK



Mediante el codificador de símbolo se forma la secuencia de símbolos binaria $a[n]$, a partir de la secuencia de bits $b[n]$.

A continuación, se forma una modulación PAM basada en pulsos rectangulares NRZ:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad (58)$$

La tercera etapa del modulador CPFSK consiste en introducir la señal PAM dada en (58) a un modulador de FM, obteniendo de este modo:

$$s_{CPFSK}(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda\right) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \phi_s(t)\right) \quad (59)$$

El parámetro f_d se denomina sensibilidad de frecuencias, al igual que en las modulaciones de FM analógicas, donde también aparece este parámetro y desempeña el mismo papel. La señal modulada, cuyas frecuencias instantáneas de símbolo son las dadas por (56), es igual a:

$$s_{FSK}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos\left(2\pi f_c t + \varphi_c + 2\pi f_d a[n](t - nT)\right) \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad (60)$$

Ved de la ecuación (60), que el tiempo correspondiente al símbolo transmitido $a[n]$ es el intervalo $nT \leq t \leq (n+1)T$, en el cual, la señal corresponde a la transmisión del siguiente pulso de radiofrecuencia, desplazado al periodo asignado al símbolo:

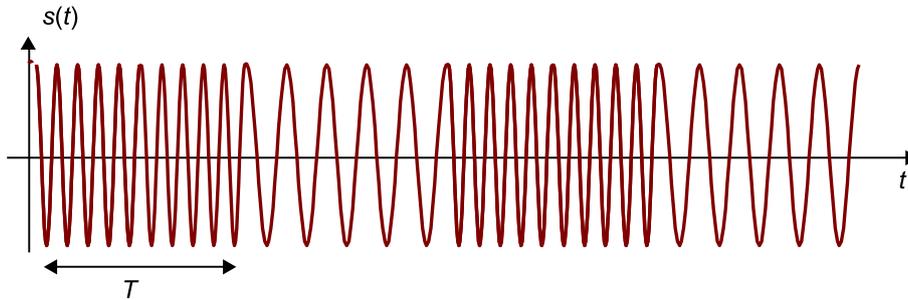
$$A_c \cos\left(2\pi(f_c + f_d a[n])t + \varphi_c\right) \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad (61)$$

Ved también

En definitiva, salvo la fase inicial, la señal de (61) coincide con la dada en (57).

En la figura 14, se muestra un tramo de la señal temporal modulada en 2-FSK de fase continua (2-CPFSK). La fase de la señal modulada se mantiene continua aun en las transiciones de símbolo. En la figura, se pueden apreciar dos tipos de símbolo, los de frecuencia mayor, correspondientes a la transmisión de un bit 1 y los de frecuencia menor, correspondientes a la transmisión de un bit 0.

Figura 14. Ejemplo de modulación 2-FSK



Señal temporal durante la transmisión de los bits 1010. Para el bit 1 se transmite la frecuencia $f_c + f_d$ y para el bit 0 se transmite la frecuencia $f_c - f_d$.

La modulación 2-PAM binaria $x(t)$ representa la frecuencia instantánea de la señal modulada y la condición de continuidad de fase se halla garantizada por la integral de (58). De hecho, la frecuencia instantánea resultante para la señal $s_{CPFSK}(t)$, es:

$$f_{CPFSK}(t) = f_c + f_d x(t) \quad (62)$$

La modulación MSK (*minimum shift keying* o cambio mínimo de fase) es un caso particular de CPFSK y corresponde a la modulación definida en (58), que resulta de utilizar una constante de sensibilidad de frecuencias, f_d , relacionada con la velocidad de símbolo, r , según:

$$f_d = \frac{r}{4} \quad (63)$$

Tanto para ayudar a comprender la propiedad de continuidad de fase, como para describir mejor las modulaciones CPFSK, es frecuente representar el diagrama de Trellis de su fase.

El **diagrama de Trellis** de la fase de una modulación de fase continua representa todas las posibles trayectorias que puede recorrer la fase instantánea de la señal modulada. Para la modulación MSK, a lo largo de un periodo de símbolo, cuando el bit que se transmite es 1, se incrementa la fase en $\frac{\pi}{2}$ rad, y cuando el bit es igual a 0, se decrementa la fase en $\frac{\pi}{2}$ rad.

Observación

Es de destacar que la modulación CPFSK es un caso particular de la modulación FSK, y debido a ello la frecuencia instantánea se mantiene constante dentro del periodo asignado a cada símbolo.

En la figura 15, se muestra el diagrama de Trellis de la fase de la modulación MSK. En la parte superior se representa la evolución temporal o trayectoria de la señal $x(t)$ para una secuencia de bits dada: 10110001. En la parte inferior de

la figura, se puede observar el diagrama de Trellis. Mediante trazo discontinuo, se muestran todas las posibles trayectorias que podría seguir la fase instantánea de la señal partiendo de fase igual a cero en el instante inicial. Con trazo grueso y continuo se marca la evolución que realmente sigue la fase para la secuencia de bits dada.

Figura 15. Diagrama de Trellis de la modulación MSK.

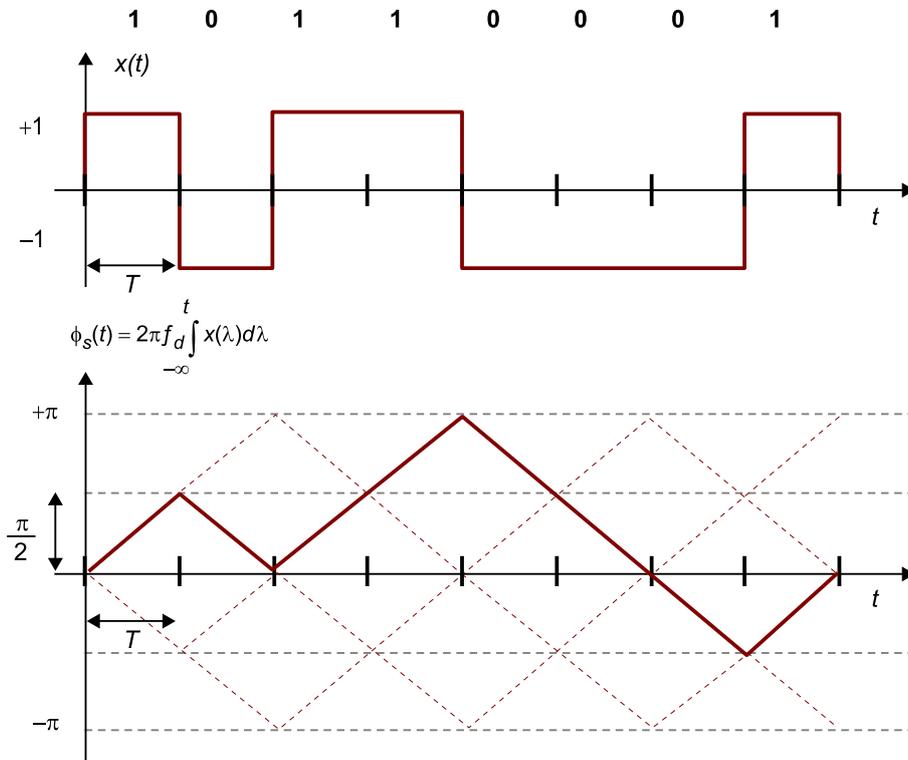
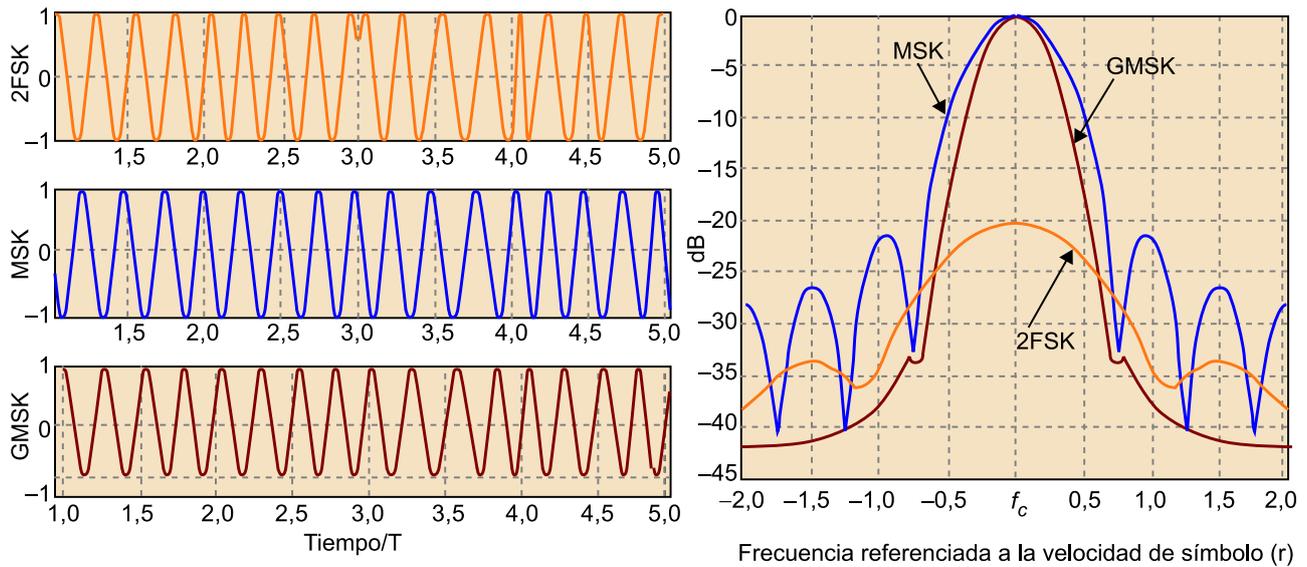


Figura 15. Diagrama de Trellis de la modulación MSK. Frecuencia instantánea $x(t)$ y fase instantánea, $\phi_s(t)$, de la señal modulada a través de un tiempo de duración igual a 8 periodos de símbolo.

Para ver la repercusión que tiene la continuidad de fase sobre la acotación de ancho de banda, se muestran en la figura 16 la densidad espectral de diferentes tipos de modulaciones de frecuencia. Las densidades espectrales se han obtenido mediante simulaciones. En particular, podemos observar los resultados para una modulación MSK, definida por (58) y para una modulación 2-FSK, definida por (57). Para ambas se ha elegido idéntico valor de desviación de frecuencias. En la modulación 2-FSK no se garantiza la continuidad de fase. Además, se representa también un tercer tipo de modulación (GMSK), que se comenta en el subapartado siguiente.

Figura 16.



Izquierda: Forma temporal $S(t)$ de las modulaciones 2-FSK, MSK y GMSK. Derecha: Densidad espectral $S_r(f)$ en dB respecto a la frecuencia normalizada a la velocidad de símbolo.

En la parte izquierda de la figura 16 se muestra la forma temporal de tres modulaciones binarias de frecuencia a lo largo de cuatro periodos de símbolo. En la gráfica superior, que corresponde a 2-FSK, son visibles las discontinuidades de señal (o de fase) en las transiciones de símbolo. En la gráfica de la derecha, el espectro con lóbulo principal más ancho es el correspondiente a la modulación 2-FSK.

El simple hecho de mantener la fase continua en MSK como única diferencia respecto a 2-FSK tiene gran repercusión en la densidad espectral, como puede apreciarse en la figura 16, ya que repercute en un lóbulo principal más estrecho en MSK que en 2-FSK.

A continuación se presenta la modulación GMSK como el caso extremo de fase aún más continua y lóbulo principal aún más estrecho que la modulación MSK.

2.2. Modulaciones GMSK

La modulación MSK, definida en el subpartado anterior, no presenta discontinuidades en la trayectoria temporal de la fase y ello repercute en mantener su densidad espectral acotada, al menos en lo que respecta a la referencia al ancho del lóbulo principal. Si se realiza la derivada de la fase instantánea de la modulación MSK, se obtiene la frecuencia instantánea que coincide con la señal PAM: $x(t)$ y que es una señal con discontinuidades en las transiciones de símbolo, tal como se puede apreciar en la figura 15. En definitiva, para una modulación MSK, la primera derivada de la fase instantánea es discontinua en tiempo. Si se genera como frecuencia instantánea una modulación PAM continua en tiempo y que a su vez tenga varias derivadas (derivada segunda, deri-

vada tercera, etc.) todas continuas en tiempo, se obtendrá una forma temporal para la fase $\phi_s(t)$, de variaciones suaves y un espectro con un lóbulo principal más estrecho que para la modulación MSK.

Se trata de generar la modulación CPM de tal modo que, al derivar varias veces su fase instantánea, se siga teniendo una función continua. La forma de obtenerla es mediante pulsos $p(t)$ genéricos de duración mayor a la del tiempo de símbolo y formar la modulación CPM como:

$$\begin{aligned}
 PAM: \quad x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d[n]p(t-nT) \\
 s_{CPM}(t) &= A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda\right) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_s(t))
 \end{aligned} \tag{64}$$

Un efecto inmediato provocado por el uso de pulsos cuya duración es mayor a la del tiempo de un símbolo es la presencia de ISI sobre la señal PAM.

El caso particular más ampliamente utilizado de modulaciones CPM es el de la modulación GMSK, ya que es la modulación utilizada tanto en el sistema de telefonía móvil GSM como en el sistema de telefonía inalámbrica DECT. Los parámetros que la definen son:

- Pulso $p(t)$, denominado gaussiano, para el que no se anulan sus derivadas en ningún caso.
- Sensibilidad de frecuencias definida igual que para la modulación MSK ($f_d = \frac{f}{4}$).

Nota

Formalmente, el pulso se define como:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \frac{1}{2T} \left(Q\left(2\pi B_b \frac{t-T/2}{\sqrt{\ln 2}}\right) - Q\left(2\pi B_b \frac{t+T/2}{\sqrt{\ln 2}}\right) \right) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \sqrt{\frac{2\pi}{\ln 2}} B_b \exp\left(-\frac{2\pi^2 B_b^2}{\ln 2} t^2\right) \\
 B_b &= \frac{0,3}{T} \quad \text{GSM}; \quad B_b = \frac{0,5}{T} \quad \text{DECT}
 \end{aligned} \tag{65}$$

Donde T representa el tiempo de símbolo y B_b el ancho de banda del propio pulso.

Con el pulso gaussiano, la fase de la modulación presenta una variación muy suave a lo largo del tiempo, tal como se muestra en la figura 17.

El precio a pagar por tener modulaciones espectralmente más eficientes es un incremento en la complejidad del demodulador. El pulso gaussiano utilizado en GMSK se extiende en más de un símbolo, y por lo tanto durante un cierto intervalo de T_s según se está enviando información de más de un símbolo, o dicho de otro modo, se está introduciendo interferencia intersimbólica (ISI) provocada por la extensión del pulso en más de un tiempo de símbolo. En los casos utilizados en los estándares GSM y DECT, aunque teóricamente el pulso gaussiano extiende en tiempo desde menos infinito a más infinito, con valores de ancho de banda normalizados a la velocidad de símbolo de 0,3 y 0,5 (GSM y DECT respectivamente), se puede aproximar el pulso por uno de duración limitada a tres períodos de símbolo, sin que por ello la señal quede significativamente afectada.

Observación

Es de destacar que las modulaciones MSK y GMSK son dos casos particulares de la modulación CPM. Además, MSK es también FSK de fase continua o dicho de forma más compacta, CPFSK, mientras que GMSK no lo es, ya que la frecuencia instantánea no se mantiene constante en un período de símbolo.

2.3. Demodulación de señales CPM

La demodulación de las modulaciones CPM puede implementarse mediante varias estrategias, de entre las que destacan dos. La primera estrategia consiste en realizar una **decodificación de fase diferencial**. En el caso de la modulación MSK, es sencillo de entender a partir de la figura 15. A lo largo de cada símbolo, si se transmite un bit 1, la fase aumenta en $\frac{\pi}{2}$ radianes y si se transmite un bit 0, la fase disminuye en $\frac{\pi}{2}$ radianes. De ahí que, detectando el incremento de fase de la señal recibida $r(t)$, se propone como demodulador el siguiente algoritmo, donde $\varphi_r(kT)$ es la fase de la señal recibida $r(t)$ en el instante de tiempo kT .

$$\begin{aligned} \varphi_r((k+1)T) - \varphi_r(kT) > 0 &\Rightarrow \hat{b}[k] = 1 \\ \varphi_r((k+1)T) - \varphi_r(kT) < 0 &\Rightarrow \hat{b}[k] = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

La estrategia anterior resulta subóptima, debido a la presencia de ruido angular. El término de ruido provoca errores en la detección propuesta en la ecuación (66).

Para la demodulación de la señal GMSK, se puede utilizar la misma norma de detección de la ecuación (66), si bien el bit detectado en este caso sería $\hat{b}[k-1]$, debido a que el pulso base se extiende a lo largo de tres períodos de símbolo y ello genera un retardo en el demodulador. Con la estrategia de la decodificación diferencial aplicada a GMSK, la probabilidad de error se degrada respecto a MSK, debido a la presencia de ISI provocada por la extensión del pulso a tres períodos de símbolo.

La segunda estrategia de demodulación de señales CPM consiste en aplicar el **algoritmo de Viterbi**. Eligiendo de forma adecuada el número de estados, el retardo de decodificación y las métricas a actualizar en cada estado, es la estrategia que presenta mejores prestaciones en cuanto a probabilidad de error. Como contrapartida resulta la más compleja de implementar.

Algoritmo de Viterbi

El algoritmo de Viterbi es propio de los sistemas con memoria. Su estudio no es adecuado en este curso introductorio, por lo que no facilitaremos más detalles, que se dejan para cursos más avanzados.

Respecto a las modulaciones digitales de frecuencia:

- Las señales que mantienen su frecuencia constante dentro del periodo asignado a la transmisión de cada símbolo se denominan modulaciones FSK.
- Las señales cuya fase no presenta discontinuidades en los instantes de transición de símbolo se denominan de fase continua o CPM.
- Las señales que cumplen ambas propiedades, frecuencia constante dentro de cada símbolo y fase continua, se denominan CPFSK. El ejemplo más destacado lo constituye la modulación MSK.
- Las señales CPM que no son FSK son aquellas mediante las que se obtiene formas temporales más suaves y un espectro frecuencial más estrecho. El ejemplo más destacado lo constituye la modulación GMSK.

Resumen

En este módulo se han tratado las modulaciones digitales paso banda clasificadas en modulaciones lineales (por ejemplo, QAM y PSK) y en modulaciones digitales de frecuencia de tipo FSK y/o de tipo CPM.

Las modulaciones QAM son similares a las modulaciones digitales banda base de tipo PAM, analizadas en el módulo 5, “Comunicaciones digitales en banda base”. La diferencia entre ambas radica en el margen de frecuencias que ocupan. Mientras que las modulaciones PAM se utilizan en comunicaciones por cable, con recorridos cortos y punto a punto, las modulaciones QAM se utilizan a frecuencias portadoras de MHz y GHz, y ocupan anchos de banda que son regulados dentro de los diferentes estándares para asignar un determinado margen frecuencial a cada señal de tipo QAM (el control espectral se hace mediante la selección del pulso conformador $p(t)$).

El análisis de la probabilidad de error de las modulaciones de tipo QAM en canales gaussianos resulta sencillo. Se obtienen expresiones que dependen de la energía media transmitida por bit, de forma análoga a los desarrollos realizados con modulaciones PAM.

Las modulaciones de frecuencia son modulaciones angulares relativamente complejas de implementar y de demodular, especialmente al compararlas con las modulaciones lineales de tipo QAM. En el caso general, son modulaciones en las que se introduce ISI entre símbolos consecutivos, aunque de manera controlada. La forma más habitual de utilizar modulaciones angulares (o de frecuencia) es en su variante de modulaciones de fase continua (CPM) y la principal razón es que se obtienen modulaciones, cuya función de densidad espectral es de ancho de banda relativamente reducido.

Tanto el cálculo de la densidad espectral de forma exacta, como el análisis de la probabilidad de error de las modulaciones de tipo CPM, se realizan en general mediante simulaciones computarizadas, debido a la dificultad analítica que supondría el análisis detallado de las mismas.

La comparación de las modulaciones CPM respecto a las modulaciones QAM resulta similar a la realizada con las modulaciones de tipo analógico presentadas en el módulo “Comunicaciones analógicas: modulaciones AM y FM” al comparar FM respecto a las modulaciones lineales DBL y AM.

Ejercicios de autoevaluación

La resolución de los siguientes ejercicios se propone como complemento al estudio del módulo. Se recomienda que se realicen mediante una estrategia sistemática. En general, es conveniente resolver los desarrollos planteados de forma general, trabajando con las variables y parámetros de forma genérica y sustituirlos por sus valores numéricos en particular, al final de los apartados. De este modo se facilita la propia corrección y seguimiento del ejercicio y se obtiene una visión más amplia que la del caso particular que se esté analizando.

1. Modulación ASK

Se define la modulación digital de amplitud de M niveles como una señal paso banda, de modo que la componente en fase es una modulación PAM unipolar y la componente en cuadratura es nula. Para el caso binario de $M = 2$ niveles, los símbolos binarios de la componente en fase se pueden expresar como:

$$I[k] = 0, A \quad (67)$$

Se pide:

a) Obtener la expresión de la señal modulada $s(t)$ en función de los parámetros de la señal

portadora A_c, f_c, φ_c para un pulso rectangular $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$.

b) Dibujar el espacio de señal y la señal temporal para la secuencia de bits: 1010 con la relación de frecuencias $f_c = 4r$.

c) Calcular la probabilidad de error sobre canal ideal AWGN (respuesta impulsional de canal $h_c(t) = \delta(t)$) en función del cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$.

d) Comparar el resultado obtenido con la BER de la modulación BPSK.

2. Modulación a 8 símbolos

Se forma una modulación digital de amplitud y fase de $M = 8$ niveles, como una señal paso banda, tal que la componente en fase es una modulación 4-PAM polar y la componente en cuadratura es una modulación 2-PAM polar.

Se pide:

a) Proponer una tabla de asignación de tres bits por símbolo de tipo Gray. Es decir, se pretende que dos símbolos vecinos se diferencien únicamente en un bit.

b) Dibujar la constelación de la señal obtenida a partir de la tabla anterior.

c) Calcular la BER promedio del sistema, considerando la secuencia de bits equiprobables y un canal ideal AWGN (respuesta impulsional de canal $h_c(t) = \delta(t)$) en función del cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$.

3. Modulación BPSK con portadora

Para poder demodular una señal BPSK de forma coherente, se transmite una señal igual a la suma de la propia modulación BPSK más la portadora, tal como se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) + A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I[n] p(t - nT) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c); \quad I[n] = \pm 1 \quad (68)$$

El pulso de trabajo $p(t)$ es NRZ y de energía, unidad. La señal se transmite a través de un canal ideal AWGN de respuesta impulsional $h_c(t) = \delta(t)$. Se pide:

a) Calcular la energía de bit promedio de la señal total $s(t)$ en función de la amplitud de la señal portadora A_c .

b) Calcular la probabilidad de error BER en función de A_c y de la potencia de ruido a la salida del filtro adaptado de un demodulador coherente (sólo la rama superior correspondiente a

la componente en fase), asumiendo que, gracias a la transmisión de la portadora, la demodulación es coherente.

c) Expresad la BER obtenida en función del cociente de energías $\frac{E_b}{N_0}$.

d) Evaluad la degradación en dB que supone la transmisión de la señal portadora, respecto al caso BPSK sin portadora estudiado en el subapartado 1.8.

4. Modulaciones APSK y energía media

Considerad las tres modulaciones 8-APSK, 16-APSK y 32-APSK de la figura 8. Suponed que en todos los casos el radio del círculo en el que se disponen los símbolos de menor energía es R , el segundo círculo es $2R$ y el tercero que aparece únicamente para la modulación 32-APSK es $3R$. Se pide:

a) Calculad la energía media de símbolo E_s para cada una de las tres modulaciones en función de R .

b) Calculad la energía media de bit E_b para cada una de las tres modulaciones en función de R .

Suponed que para un valor dado de $R = R_0$ mediante las tres modulaciones se puede aproximar la SER por $P_e = 0,0001$. Se pide:

c) ¿Cuál de las tres modulaciones requiere transmitir mayor energía media de símbolo y por qué?

d) ¿Cuál de las tres modulaciones requiere transmitir mayor energía media de bit y por qué?

5. Efectos de no linealidades sobre las modulaciones QAM

Mediante este ejercicio, se pretende estudiar de forma gráfica los efectos de las no linealidades sobre las modulaciones de tipo QAM. Este efecto puede simplificarse estudiando directamente cómo queda afectada la secuencia de símbolos transmitidos.

Se modela de forma muy simplificada que cada símbolo complejo queda afectado por la no linealidad mediante el siguiente modelo, $A(re^{j\varphi})$, típico de los amplificadores basados en tubos de ondas progresivas.

$$A(re^{j\varphi}) = \frac{2r^2}{1+r^2} e^{j\varphi} \quad (69)$$

$re^{j\varphi}$ representa un número complejo en coordenadas polares de valor absoluto r y fase φ .

a) Dibujad cómo quedará el espacio de señal de una modulación QPSK como la mostrada en la figura 3, para el caso particular de que $A = 1$, si los símbolos se ven afectados por la no linealidad de la ecuación (68).

b) Dibujad cómo quedará el espacio de señal de una modulación 16-QAM como la mostrada en la figura 5, para el caso particular de que $A = 1$, si los símbolos se ven afectados por la no linealidad de la ecuación (68).

Comentad los resultados obtenidos.

6. Demodulación con error de portadora

Sea la modulación QPSK, definida en el subapartado 1.2. Se transmite sobre un canal ideal AWGN y se recibe con un receptor, cuyo diagrama de bloques funcional es el dado en la figura 10, con la única diferencia de que el oscilador local del receptor no se halla sincronizado en fase con la señal modulada. Considerad que la fase del oscilador local del receptor en este caso es $\varphi_{OL} = \varphi_c + \varepsilon$.

Se pide:

a) Obtened las expresiones de las muestras de señal tras la conversión CA/D, identificando en cada caso (rama superior y rama inferior) el símbolo útil, el término de interferencia entre componentes y la muestra de ruido.

b) Dibujad el espacio de señal recibida sin ruido para el caso en que el error de fase es $\varepsilon = \frac{\pi}{8}$.

c) Comentad cómo se degradará la probabilidad de error cuando las decisiones se sigan tomando con umbrales igual a cero en cada una de las dos componentes I&Q.

7. Modulación de fase diferencial DPSK

Sea la modulación DPSK (diferencial PSK), en la que la información de símbolo reside en la diferencia de fases entre cada dos símbolos consecutivos. Mediante este tipo de modulación, se evita la necesidad de la detección coherente. Trabajando con $M = 4$ símbolos, las fases de la señal $s(t)$ se codifican diferencialmente según la tabla:

$$\varphi[n] = \varphi[n - 1] + \Delta\varphi[n] \qquad s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t - nT) \cos(2\pi f_c(t - nT) + \varphi_c + \varphi[n])$$

bits	00	01	11	10
$\Delta\varphi$	0 rad	$\pi/2$ rad	π rad	$3\pi/2$ rad

Se pide:

- a) Si $\varphi[0] = \frac{\pi}{4}$ demostrad que el espacio de señal de la modulación definida coincide con el de la modulación QPSK.
- b) Calculad las muestras de fase resultantes $\varphi[n]$ de la señal para la secuencia de bits 0100111010101101 y las correspondientes coordenadas $I[n]$, $Q[n]$.

8. Modulación 4-CPFSK

Sea la modulación 4-CPFSK definida a partir de los siguientes parámetros $f_d = \frac{r}{8}$; $f_c = Nr$, con $N \gg 1$ y entero:

$$s_{CPFSK}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_d a[n](t - nT)) \Pi\left(\frac{t - nT}{T}\right) \qquad (71)$$

La asignación de símbolos se realiza mediante la siguiente tabla:

bits	00	01	11	10
$a[n]$	-3	-1	+1	+3

Suponed que se transmite la secuencia 01001101000111.

Se pide:

- a) Calculad la secuencia de símbolos que se forma.
- b) A partir de la secuencia obtenida, dibujad la frecuencia instantánea de la señal modulada: $x(t)$. ¿Qué tipo de modulación en banda base representa?
- c) Dibujad la fase $\varphi_s(t)$ de señal modulada que se generaría a partir de la señal $x(t)$.

9. Modulación 2-FSK de fase continua

Sea la modulación 2-FSK de parámetros $f_d = \frac{r}{2}$; $f_c = Nr$, con $N \gg 1$ y entero:

$$s_{FSK}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_d a[n]t) \Pi\left(\frac{t - nT}{T}\right) \qquad (72)$$

Se pide:

- a) Para la secuencia 01001101, dibujad la evolución temporal de la fase instantánea de la señal, la componente en fase y la componente en cuadratura.

b) ¿Es cierto que la modulación dada resulta de fase continua?

c) Calculad la densidad espectral de la componente en fase y la densidad espectral de la componente en cuadratura.

10. Demodulación de señal CPM

En este ejercicio se plantea el análisis de una modulación similar a GMSK. Sea una modulación definida por (64) y que utiliza el pulso $p(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{3T}\right) \right) \Pi\left(\frac{t}{3T}\right)$.

Se pide:

a) Justificad que en ausencia de señal de ruido, la diferencia de fases de la señal recibida se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \varphi_r((k+2)T) - \varphi_r((k+1)T) &= g_1 d[k] + g_0 d[k+1] + g_1 d[k+2] \\ g_0 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} p(t) dt, \quad g_1 = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} p(t) dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} p(t) dt \end{aligned} \quad (73)$$

b) Calculad las dos constantes g_0 , g_1 .

c) ¿Qué términos de la ecuación (69) se pueden interpretar como ISI? Justificad la respuesta.

d) Plantead la decodificación de la señal a partir de las muestras $\varphi_r(kT)$ mediante un decodificador de Viterbi. Proponed el número de estados, así como las métricas que utilizaríais y un retardo de decodificación adecuado.

Fórmulas matemáticas

Expresiones trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}\cos(A - B) + \frac{1}{2}\cos(A + B) \\ \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) &= \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos(A + B) \\ \operatorname{sen}(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A - B) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A + B)\end{aligned}\quad (74)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A + B) &= \operatorname{sen}(A)\cos(B) + \cos(A)\operatorname{sen}(B) \\ \cos(A + B) &= \cos(A)\cos(B) - \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B)\end{aligned}\quad (75)$$

Bibliografía

Carlson, A. B. (2001). *Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication* (4.^a ed.). McGraw Hill.

Peebles, P. Z. (2006). *Principios de Probabilidad, variables aleatorias y señales aleatorias*. McGrawHill.

Proakis, J. G. (2002). *Communication Systems Engineering*. Prentice Hall.

Proakis, J. G. (2003). *Digital communications* (4.^a ed.). McGraw Hill.