Annex

Carles Recasens i Aloy
Albert-Miquel Sánchez Delgado

PID_00200070

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-Compartir igual (BY-SA) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu modificar l'obra, reproduirla, distribuir-la o comunicar-la públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), i sempre que l'obra derivada quedi subjecta a la mateixa llicència que el material original. La llicència completa es pot consultar a http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/es/legalcode.ca

Índex

Introducció..... 5

Les equacions de Maxwell..... 9

La carta de Smith..... 19

Unió P-N..... 42

Figures de mèrit d'amplificadors..... 60

Modes TE i TM en una guia d'ones rectangular..... 76

Glossari..... 85

Bibliografia..... 87

Introducció

En aquest annex es tractaran cinc temes que poden ajudar a la comprensió del contingut dels diferents mòduls: les equacions de Maxwell, la carta de Smith, les unions P-N, les figures de mèrit en amplificadors i el procés de resolució dels modes transversals elèctrics (TE) i transversals magnètics (TM) en una guia d'ones rectangular. A continuació s'introdueixen aquests temes amb una mica més de detall i s'exposa en quins mòduls es pot necessitar la informació que aporta cada un.

Les equacions de Maxwell s'introdueixen en l'apartat "Les equacions de Maxwell". Aquestes equacions conformen el pilar fonamental de la teoria clàssica de l'electromagnetisme, i es resumeixen en tan sols quatre expressions, que poden ser presentades en forma diferencial o integral. Alternativament, si estem en règim permanent sinusoïdal, les equacions diferencials es poden expressar utilitzant fasors, introduïts i completament definits en aquest mateix apartat, que redueixen les equacions diferencials a equacions ordinàries. Igualment, es derivaran també les condicions de contorn que han de complir els camps electromagnètics en la interfície entre dos medis materials.

En aquesta assignatura, les equacions de Maxwell s'utilitzen especialment en l'anàlisi dels camps electromagnètics que es propaguen en els diferents tipus de guies d'ones i, en particular, en una guia d'ones rectangular, que es presenta en el mòdul "Guies d'ones". És recomanable conéixer-les i entendre'n el significat per a poder seguir correctament el fil d'aquest mòdul. Aquestes equacions també apareixen en el mòdul "Les equacions de Maxwell" de l'assignatura *Física II* i en el mòdul 3 de l'assignatura *Antenes*, on s'utilitzen per a trobar les equacions de radiació d'una antena.

En l'apartat "La carta de Smith" s'exposa la utilitat de la carta de Smith a l'hora de treballar amb impedàncies, admitàncies i coeficients de reflexió en una línia de transmissió, i es presenten alguns exemples pràctics. La carta de Smith és, de fet, una eina gràfica que es pot utilitzar per a transformar impedàncies en coeficients de reflexió (i a l'inrevés), impedàncies en admitàncies (i a l'inrevés) o per a calcular la longitud que es vol per a les línies de transmissió i *stubs* en un circuit, entre altres aplicacions. La finalitat d'aquest apartat es repassar les característiques més importants d'aquesta eina i comprovar-ne la utilitat gràcies a una sèrie d'exemples.

Aquesta eina és de gran utilitat a l'hora d'analitzar i entendre el comportament d'una línia de transmissió i també en l'estudi de l'estabilitat d'un amplificador. Per aquest motiu, la carta de Smith apareix (o es pot utilitzar) en els mòduls "Línies de transmissió", "Anàlisi de circuits de microones", "Amplificadors lineals de microones" i "Mescladors, multiplicadors i oscil·ladors de microones".

D'aquesta manera, queda clar que és imprescindible entendre i dominar el seu funcionament per a la comprensió correcta d'aquesta assignatura. Una introducció similar a aquesta eina es pot trobar en el mòdul 6 de l'assignatura *Física II*, on també es treballen les línies de transmissió.

L'apartat "Unió P-N" es dedica a les unions P-N. A més de dispositius passius i lineals, per a completar les possibilitats d'un circuit de microones, cal incorporar dispositius actius i no lineals, capaços de generar i transformar senyals a aquestes freqüències. En aquest apartat es presenten els fonaments dels dispositius actius bàsics utilitzats en els circuits de microones: el díode i el transistor. Es fa un recorregut per l'estructura i el funcionament dels dispositius semiconductors i, en particular, de la unió P-N. Finalment s'analitzen les característiques principals de diferents tipus de díodes segons la seva estructura interna, i, en particular, dels díodes Schottky i PIN.

Conéixer com funcionen els dispositius no lineals mitjançant les unions P-N és de gran utilitat a l'hora de seguir el mòdul "Mescladors, multiplicadors i oscil·ladors de microones" d'aquesta assignatura, on s'estudien els diferents elements no lineals de microones, com els díodes i els transistors i les seves característiques més importants. Tanmateix, aquesta informació es pot trobar també en el mòdul 1 de l'assignatura *Tecnologia electrònica*, dedicat íntegrament als díodes.

Les figures de mèrit que caracteritzen el comportament d'amplificadors s'analitzen en l'apartat "Figures de mèrit d'amplificadors". Els amplificadors són un dels dispositius avançats més importants en els circuits de microones. La seva missió primordial és incrementar la potència dels senyals de microones de molt baix nivell sense distorsionar-les; és a dir, obtenir a la sortida una rèplica exacta del senyal a l'entrada però amb una potència més alta. La realitat, però, és que els components bàsics de què està format un amplificador, els transistors, no tenen una característica lineal perfecta, és a dir, no són dispositius ideals, i presenten una resposta que no és perfectament lineal, a més de tenir un funcionament limitat a un interval concret de nivells de senyal a l'entrada. És per això que es defineix tot un seguit de característiques que anomenem *figures de mèrit de l'amplificador*, que ens serviran per a tenir una idea de què és capaç de fer el dispositiu, quins són els seus punts forts i febles, i que servirà com a referència comparativa respecte a altres amplificadors. Aquestes figures ajuden, per tant, a comparar-los i diferenciar-los, cosa que permet poder-ne triar el més adequat per a una aplicació en concret.

En els mòduls "Amplificadors lineals de microones" i "Mescladors, multiplicadors i oscil·ladors de microones" d'aquesta assignatura s'utilitzen moltes d'aquestes figures per a definir el comportament no solament d'amplificadors, sinó també d'altres dispositius que contenen elements no lineals, com els mescladors, els multiplicadors de freqüència i els oscil·ladors, de manera que cal conèixer-les prèviament. Algunes d'aquestes figures també s'introdueixen en

els mòduls "El transistor" i "L'amplificador operacional" de l'assignatura *Tecnologia electrònica* i en el mòdul "Introducció als sistemes de comunicacions" de l'assignatura *Electrònica de comunicacions*.

Finalment, en l'apartat "Modes TE i TM en una guia d'ones rectangular", es descriu el procediment per a solucionar la configuració dels camps per als infinits modes TE i TM que es propaguen en una guia d'ones rectangular. En el mòdul "Guies d'ones" es dóna la solució directa de la forma que prenen els vectors de camp E_z i H_z (equacions 6.49 i 6.50 del subapartat "Modes TE i TM en una guia d'ones rectangular"), que formen la configuració de camps per als modes TM i TE, respectivament. En aquest apartat es presenta la resolució completa dels vectors de camp en la direcció de les z.

1. Les equacions de Maxwell

Les **equacions de Maxwell** són un conjunt d'equacions que es poden expressar de manera diferencial o, alternativament, integral, i que descriuen, de manera macroscòpica, el comportament de qualsevol sistema electromagnètic. Mitjançant aquestes equacions es demostra que electricitat, magnetisme i llum només són manifestacions del mateix fenomen, el **camp electromagnètic**.

James Clerk Maxwell

James Clerk Maxwell (1831-1879) va ser un físic i matemàtic escocès que va deixar com a herència la formulació de la teoria electromagnètica clàssica.

En aquest apartat es presentaran les equacions de Maxwell en tres formats: en forma diferencial, en forma integral i en forma fasorial. El subapartat "Condicions de contorn en la separació de dos medis materials" es dedica a derivar les condicions de contorn entre dos medis materials.

1.1. Les equacions de Maxwell en forma diferencial

Considerem un medi material caracteritzat per dues variables:

- la permitivitat dielèctrica: $\varepsilon(\vec{r}, t)$.
- la permeabilitat magnètica: $\mu(\vec{r}, t)$.

Aquest medi material compleix les equacions de Maxwell, expressades com:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) &= \rho_f(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Llei de Gauss per camps elèctrics} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \rightarrow \text{Llei de Gauss per camps magnètics} \\
\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Llei de Faraday} \\
\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{J}_f(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Llei d'Ampere-Maxwell} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\rho_f(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Equació de conservació de la càrrega}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

amb:

$$\begin{aligned}
&\vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Camp elèctric} \\
&\vec{H}(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Camp magnètic} \\
&\rho_f(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Densitat volumètrica de càrrega lliure} \\
&\vec{J}(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Densitat volumètrica de corrent} \\
&\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Vector desplaçament o densitat de flux elèctric} \\
&\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Vector inducció magnètica o flux de camp magnètic}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Conservació

Tot i que l'expressió de la conservació de la càrrega no és pròpiament una de les equacions de Maxwell (de fet, aquesta informació ja hi està continguda), és útil tenir-la en compte en moltes situacions, motiu pel qual també l'hem afegit aquí.

Les equacions de Maxwell, per tant, ens diuen que:

1) En qualsevol punt de l'espai es genera camp elèctric si:

- hi ha càrrega en aquell punt,
- hi ha una disminució temporal del camp magnètic.

2) En qualsevol punt de l'espai es genera camp magnètic si:

- hi ha corrent elèctric en aquell punt,
- hi ha un augment temporal del camp elèctric.

1.2. Les equacions de Maxwell en forma integral

Aplicant el teorema de la divergència, expressat com:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \qquad 7.3$$

a les expressions que contenen divergències, i el de Stokes, expressat com:

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \qquad 7.4$$

a les expressions que contenen rotacionals, obtenim les equacions de Maxwell en forma integral:

$$\begin{gathered}
\oint_S \vec{D}(\vec{r},t)\, d\vec{s} = \int_V \rho_f(\vec{r},t)\, dv = Q_{\mathrm{IN}} \\
\oint_S \vec{B}(\vec{r},t)\, d\vec{s} = 0 \\
\oint_C \vec{E}(\vec{r},t)\, d\vec{l} = -\tfrac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}(\vec{r},t)\, d\vec{s} \\
\oint_C \vec{H}(\vec{r},t)\, d\vec{l} = \int_S \vec{J}_f(\vec{r},t)\, d\vec{s} + \tfrac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D}(\vec{r},t)\, d\vec{s} \\
\oint_S \vec{J}(\vec{r},t)\, d\vec{s} = -\tfrac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_f(\vec{r},t)\, dv = -\tfrac{\partial}{\partial t} Q_{\mathrm{IN}}
\end{gathered} \qquad 7.5$$

Aquestes expressions són igual de vàlides que les equacions en forma diferencial per a expressar el comportament dels camps electromagnètics. La diferència, però, rau en el fet que ens donen informació dels camps en àrees o contorns d'àrees, mentre que les equacions en forma diferencial ens donen informació dels camps en punts discrets de l'espai.

1.3. Condicions de contorn en la separació de dos medis materials

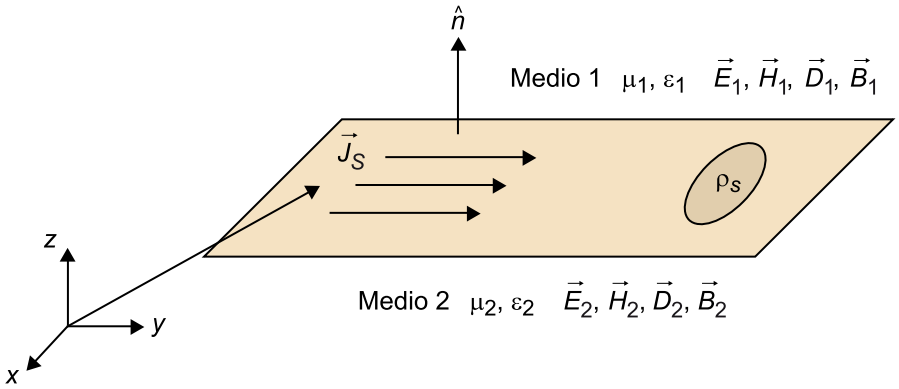
La interfície entre dos medis materials diferents (per exemple entre un conductor i un dielèctric, entre aigua i aire, etc.) genera una discontinuïtat en l'espai. Les equacions de Maxwell en la seva forma diferencial representen derivades dels camps elèctric i magnètic respecte a les coordenades espacials (divergència i rotacional). Aquestes, però, no tenen sentit on hi ha discontinuïtats i, per tant, no es poden utilitzar per a definir el comportament dels camps en aquests punts. Per a solucionar aquest problema, s'utilitzaran les condicions de contorn, obtingudes amb l'aplicació de les equacions de Maxwell en forma integral a zones al voltant de la discontinuïtat.

En el subapartat "Condicions de contorn generals" es derivaran les condicions que han de satisfer els camps en la interfície entre dos medis qualssevol. I en els subapartats "Condicions de contorn en la separació de dos medis dielèctrics" i "Condicions de contorn en la separació entre un medi dielèctric i un medi conductor perfecte" es veuran els casos particulars d'interfície entre dielèctric i dielèctric i entre dielèctric i conductor, respectivament.

1.3.1. Condicions de contorn generals

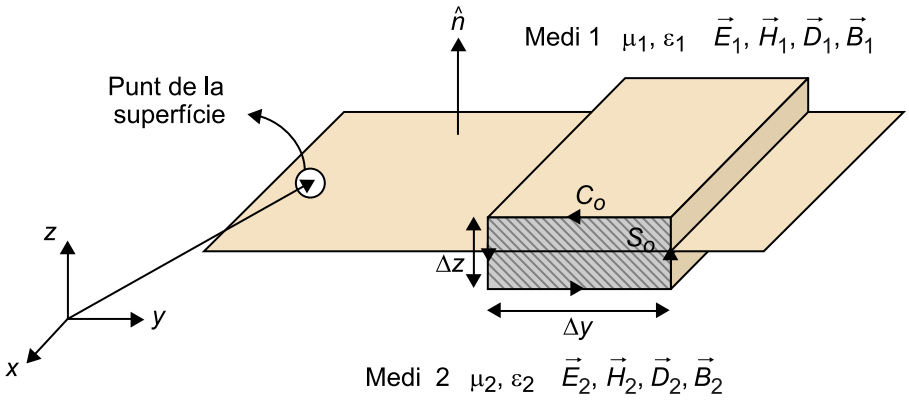
Considerem dos medis materials caracteritzats per les seves constants dielèctriques i magnètiques ϵ i μ. Suposem que en la interfície entre els dos medis hi ha un corrent lliure superficial $\vec{J}_s(\vec{r}, t)$ i una distribució de càrrega lliure $\rho_f(\vec{r}, t)$ (figura 1):

Figura 1. Interfície entre dos medis diferents



En un punt de la interfície s'escull una caixa rectangular amb un contorn C_0 i una secció de superfície S_0 (figura 2):

Figura 2. Contorn C_0 i secció amb una superfície S_0 sobre la interfície entre dos medis materials



Aplicant la llei de Faraday en forma integral sobre el rectangle al llarg del contorn C_0 i sobre la superfície S_0, s'obté:

$$\oint_{C_0} \vec{E}(\vec{r}, t)\, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_{S_0} \vec{B}(\vec{r}, t)\, d\vec{s} \qquad 7.6$$

A mesura que Δz esdevé més petit, l'àrea S_0 tendeix a 0, de mode que les contribucions a la integral de superfície són negligibles. A més, les contribucions a la integral de circulació respecte a y també són mínimes. En el límit ($\Delta z \rightarrow 0$) es redueix a:

$$E_1 \hat{y} \Delta y - E_2 \hat{y} \Delta y = 0 \qquad 7.7$$

o, el que és el mateix:

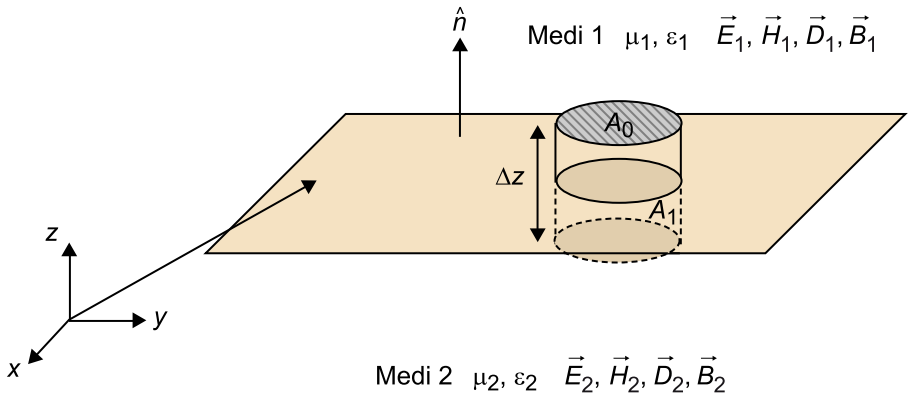
$$\begin{gathered} \vec{E}_{t1} - \vec{E}_{t2} = 0 \rightarrow \vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2} \\ n \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = 0 \end{gathered} \qquad 7.8$$

Utilitzant el mateix procediment amb la llei d'Ampère-Maxwell s'obté:

$$\hat{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t} = \vec{J}_S \qquad 7.9$$

Considerem ara un cilindre com el de la figura 3:

Figura 3. Cilindre d'altura Δz i àrea $A_1 + A_2$ sobre la interfície entre dos medis materials



Apliquem-hi l'equació de Gauss per a camps elèctrics:

$$\oint_{A_0 A_1} \vec{D}(\vec{r}, t)\, d\vec{s} = \int_{\text{Cilindre}} \rho_f(\vec{r}, t)\, dv \qquad 7.10$$

A mesura que $\Delta z \to 0$ la contribució a la integral de superfície per part d'$A_1 \to 0$. En aquestes condicions:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \int_{\text{Cilindre}} \rho_f(\vec{r}, t)\, dv = \lim_{\Delta z \to 0} \left[\left(\rho_f \Delta z \right) A_0 \right] = \rho_S A_0 \qquad 7.11$$

Per tant, es pot escriure:

$$D_1 \hat{z} A_0 - D_2 \hat{z} A_0 = \rho_S A_0 \to D_1 \hat{z} - D_2 \hat{z} = \rho_S \qquad 7.12$$

En general, es complirà que:

$$\hat{n} \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2 \right) = \rho_S \qquad 7.13$$

Utilitzant un procediment similar amb la llei de Gauss per a camps magnètics obtenim:

$$\hat{n} \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2 \right) = 0 \qquad 7.14$$

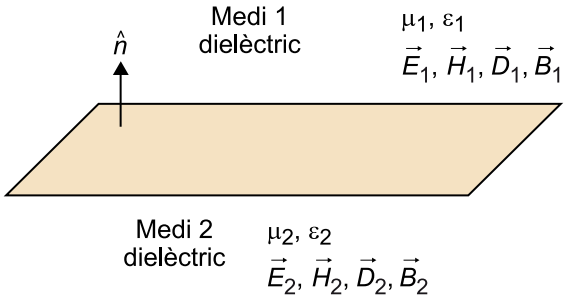
Resumint:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) = 0 &\to \vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2} \\ \hat{n} \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2 \right) = \rho_S &\to D_{n1} - D_{n2} = \rho_S \\ \hat{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) = \vec{J}_S &\to \vec{H}_{t1} - \vec{H}_{t2} = \vec{J}_S \\ \hat{n} \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2 \right) = 0 &\to B_{n1} = B_{n2} \end{aligned} \qquad 7.15$$

1.3.2. Condicions de contorn en la separació de dos medis dielèctrics

En la separació entre dos medis dielèctrics no tindrem acumulació de càrrega ni corrents superficials (figura 4):

Figura 4. Interfície entre un dielèctric (medi 1) i un altre dielèctric (medi 2)



Per tant, en les mateixes condicions que abans, les condicions de contorn ens quedaran:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{t1} &= \vec{E}_{t2} \\ D_{n1} &= D_{n2} \\ \vec{H}_{t1} &= \vec{H}_{t2} \\ B_{n1} &= B_{n2} \end{aligned} \qquad 7.16$$

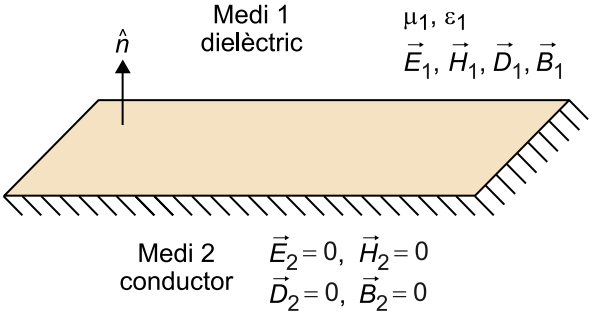
1.3.3. Condicions de contorn en la separació entre un medi dielèctric i un medi conductor perfecte

En un conductor perfecte es pot demostrar que:

1) Els camps elèctrics i magnètics variables amb el temps són nuls al seu interior.

2) Qualsevol corrent o càrrega variable en el temps en el conductor ha de ser sobre la superfície del conductor en forma de densitat superficial.

Figura 5. Interfície entre un dielèctric (medi 1) i un conductor (medi 2)



Per tant, en la interfície conductor-dielèctric:

$$\begin{aligned}
&\vec{E}_{t1} = 0;\ \vec{E}_{t2} = 0 \\
&\hat{n} \times \vec{H}_1 = \vec{H}_{t1} = \vec{J}_S;\ \vec{H}_{t2} = 0 \\
&\vec{D}_1 \cdot \hat{n} = D_{n1} = \rho_S;\ D_{n2} = 0 \\
&B_{n1} = 0;\ B_{n2} = 0
\end{aligned} \qquad 7.17$$

1.4. Equacions de Maxwell en règim permanent sinusoïdal

Les equacions de Maxwell vistes fins ara són vàlides per a camps electromagnètics amb una dependència arbitrària amb el temps. Les funcions temporals periòdiques arbitràries es poden descompondre fàcilment en sèries de Fourier de components sinusoïdals harmòniques, i les funcions transitòries no periòdiques es poden expressar com a integrals de Fourier. La suma de tots els resultats proporciona els camps totals.

En aquest apartat ens centrarem en els camps electromagnètics que tenen únicament dependència sinusoïdal amb el temps un cop assolit el règim estacionari. Aquesta dependència és la que anomenem ***règim permanent sinusoïdal*** **(RPS)**. En aquestes condicions, podem treballar amb les expressions fasorials dels camps, en comptes de fer servir les expressions temporals, atès que presenten alguns avantatges a l'hora de calcular els camps.

A continuació, es descriuran els fasors i es veuran les seves propietats més importants i, finalment es presentaran les expressions fasorials de les equacions de Maxwell.

1.4.1. Introducció als fasors

Les hipòtesis de partida són les següents:

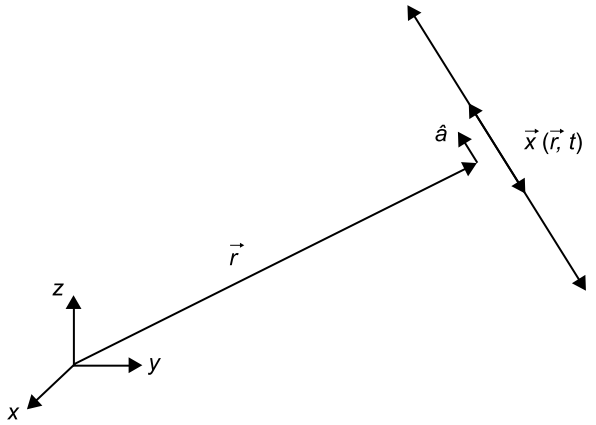
1) Totes les excitacions del sistema són sinusoïdals i a la mateixa freqüència f_0.

2) L'inici de les excitacions es va produir en un temps passat molt llunyà. Qualsevol règim transitori ja ha desaparegut en el temps d'interès i els valors de camp es van repetint periòdicament en qualsevol punt de l'espai.

3) Com a conseqüència de tot això, qualsevol camp que tingui el nostre sistema també dependrà sinusoïdalment del temps.

Imagineu-vos, per exemple, un camp vectorial $\vec{x}(\vec{r}, t)$ oscil·lant en l'espai (figura 6):

Figura 6. Camp vectorial $\vec{x}(\vec{r}, t)$ oscil·lant en l'espai



Segons les condicions anteriors, la magnitud vectorial $\vec{x}(\vec{r}, t)$ en cada punt de l'espai haurà de tenir la forma següent:

$$\vec{x}(\vec{r}, t) = A(\vec{r})\cos(\omega_o t + \varphi(\vec{r})) \cdot \hat{a}(\vec{r}) \qquad 7.18$$

on $\vec{x}(\vec{r}, t)$ és un vector de components reals, $A(\vec{r})$ és l'amplitud de l'oscil·lació, $\phi(\vec{r})$ és la fase inicial i $\hat{a}(\vec{r})$ és un vector unitari que indica la direcció i el sentit de l'oscil·lació. La pulsació es defineix com:

$$\omega_o = 2\pi f_o \qquad 7.19$$

on f_0 és la freqüència a la qual oscil·len totes les excitacions i qualsevol variable del sistema. Per tant, qualsevol variable del sistema tindrà el terme cos ($\omega_o t$ + ...). Com que això sempre és així, podem representar aquestes variables mitjançant un terme complex que no inclogui la informació cos ($\omega_o t$ + ...). Aquest terme s'expressarà com a $\vec{X}(\vec{r})$, i és el fasor de la variable vectorial $\vec{x}(\vec{r}, t)$. Aquest fasor el definirem com:

$$\vec{x}(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cdot \hat{a}(\vec{r}) \cdot \cos(\omega_o t + \phi(\vec{r})) \quad \Rightarrow \quad \vec{X}(\vec{r}) = A(\vec{r}) \cdot \hat{a}(\vec{r}) \cdot e^{j\phi(\vec{r})} \qquad 7.20$$

- $\vec{x}(\vec{r}, t)$ és un camp vectorial real.

- $\vec{X}(\vec{r})$ és un camp vectorial complex. Conté la mateixa informació exceptuant la dependència (coneguda) amb *t*.

A partir d'un fasor recuperarem el senyal temporal amb:

$$\begin{aligned}\vec{x}(\vec{r},t) &= A(\vec{r})\cdot\hat{a}(\vec{r})\cdot\cos(\omega_o t+\phi(\vec{r})) = A(\vec{r})\cdot\hat{a}(\vec{r})\Re\{e^{j(\omega_o t+\phi(\vec{r}))}\} = \\ &= A(\vec{r})\cdot\hat{a}(\vec{r})\Re\{e^{j\omega_o t}e^{j\phi(\vec{r})}\} = \Re\{A(\vec{r})\cdot\hat{a}(\vec{r})e^{j\phi(\vec{r})}e^{j\omega_o t}\} = \Re\{\vec{X}(\vec{r})e^{j\omega_o t}\}\end{aligned} \qquad 7.21$$

1.4.2. Propietats dels fasors

Per a operar amb fasors ens cal conèixer-ne les propietats. Siguin $\vec{x}(\vec{r},t)$, $\vec{y}(\vec{r},t)$ i $\vec{z}(\vec{r},t)$ tres magnituds vectorials reals amb dependència harmònica amb el temps. Amb els fasors associats $\vec{X}(\vec{r})$, $\vec{Y}(\vec{r})$ i $\vec{Z}(\vec{r})$, es compleix que:

$$\begin{aligned}\vec{x}(\vec{r},t) &= \vec{y}(\vec{r},t) && \rightarrow \quad \vec{X}(\vec{r}) = \vec{Y}(\vec{r}) \\ \vec{z}(\vec{r},t) &= \vec{x}(\vec{r},t)+\vec{y}(\vec{r},t) && \rightarrow \quad \vec{Z}(\vec{r}) = \vec{X}(\vec{r})+\vec{Y}(\vec{r}) \\ \vec{y}(\vec{r},t) &= \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{x}(\vec{r},t) && \rightarrow \quad \vec{Y}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{X}(\vec{r}) \\ \vec{y}(\vec{r},t) &= \frac{\partial}{\partial t}\vec{x}(\vec{r},t) && \rightarrow \quad \vec{Y}(\vec{r}) = j\omega\cdot\vec{X}(\vec{r}) \\ \vec{x}(\vec{r},t) &= \vec{y}(\vec{r},t)\times\hat{a} && \rightarrow \quad \vec{X}(\vec{r}) = \vec{Y}(\vec{r})\times\hat{a} \\ x(\vec{r},t) &= \vec{y}(\vec{r},t)\cdot\hat{a} && \rightarrow \quad X(\vec{r}) = \vec{Y}(\vec{r})\cdot\hat{a}\end{aligned} \qquad 7.22$$

Una de les propietats més importants per a l'electromagnetisme (i de les que més s'utilitza) és la de la derivada temporal, ja que apareix en les equacions de Maxwell. Podem observar que una derivada es converteix en un producte senzill, de manera que les operacions es simplificaran molt (ja no caldrà resoldre equacions diferencials).

1.4.3. Expressió fasorial de les equacions de Maxwell

Considerem un sistema electromagnètic en què totes les excitacions i respostes tenen dependència harmònica amb el temps (i, per tant, estem en RPS). Suposem també que la geometria del nostre sistema és fixa (no depèn del temps), és a dir:

$$\varepsilon(\vec{r},t) = \varepsilon(\vec{r}),\ \mu(\vec{r},t) = \mu(\vec{r}) \qquad 7.23$$

Sota aquestes hipòtesis, les expressions temporals dels camps es poden substituir per les seves expressions fasorials. Aplicant les propietats dels fasors, les equacions de Maxwell per als fasors dels camps es poden escriure com:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\vec{r}) &= \rho_f(\vec{r}) \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r}) &= 0 \\
\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) &= -j\omega\vec{B}(\vec{r}) \\
\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{r}) &= \vec{J}_f(\vec{r}) + j\omega\vec{D}(\vec{r}) \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{r}) &= -j\omega\rho_f(\vec{r})
\end{aligned}
\quad \text{amb} \quad
\begin{aligned}
\vec{D}(\vec{r}) &= \varepsilon(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r}) \\
\vec{B}(\vec{r}) &= \mu(\vec{r})\cdot\vec{H}(\vec{r})
\end{aligned}
\qquad 7.24$$

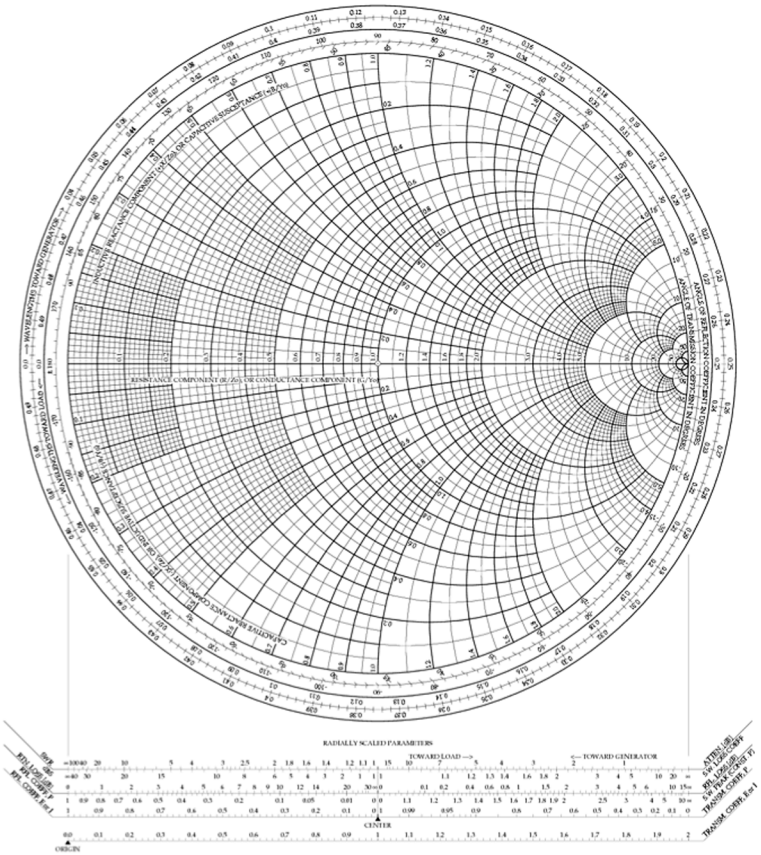
Les condicions de contorn en fasors són idèntiques a les dels camps totals.

2. La carta de Smith

La **carta de Smith** és una eina gràfica que va ser elaborada el 1939 per Phillip H. Smith als Laboratoris Bell, i que actualment continua sent molt utilitzada en la resolució de problemes amb línies de transmissió. La seva aplicació principal és la conversió directa entre coeficient de reflexió i la impedància o l'admitància, característica que permet analitzar de manera senzilla i intuïtiva el comportament i els problemes d'adaptació d'impedàncies d'una línia de transmissió i caracteritzar els components de microones. Tanmateix, hi ha aplicacions més avançades, com la representació de cercles d'estabilitat per a amplificadors/oscil·ladors, cercles de guany, cercles de figura de soroll, etc. De fet, tots els analitzadors de xarxes permeten la representació dels paràmetres S de reflexió (S_{ii}, per a i = 1, 2, ..., n) en una carta de Smith, ja que s'hi pot visualitzar simultàniament la informació del mòdul i la fase del coeficient de reflexió i de la part real i imaginària de la impedància o admitància corresponent, de manera que es converteix en una figura molt pràctica per a l'enginyer de microones.

En la figura 7 es mostra com és una carta de Smith.

Figura 7. La carta de Smith



Vista per primera vegada, una carta de Smith pot donar la impressió de no ser res més que un desgavell de corbes, cercles i números, però en realitat no és pas complicat entendre'n el significat. La clau és saber representar adequadament el coeficient de reflexió sobre la carta.

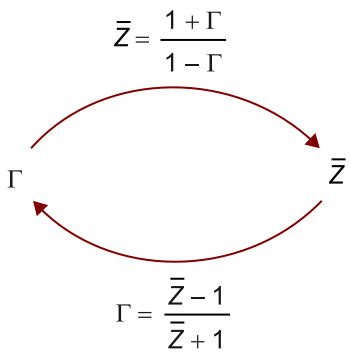
A continuació veurem com fer aquesta representació i com s'obté la impedància associada, a més de presentar alguns casos pràctics. Veurem també el procés anàleg per a obtenir l'admitància associada. Descriurem el procés per a passar d'una carta de Smith d'impedàncies a una d'admitàncies, cosa que permet convertir una impedància complexa en una admitància complexa sense haver de realitzar cap càlcul. Finalment, s'exposa com representar a la carta de Smith un moviment en una línia de transmissió.

2.1. La Carta de Smith d'impedàncies

La carta de Smith neix de la necessitat de realitzar una conversió entre el coeficient de reflexió (expressat com $\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta}$) i una impedància (expressada com $Z = R + jX$, essent R la resistència i X, la reactància), cosa que implica realitzar operacions amb números complexos.

En la figura 8 es mostren les operacions utilitzades per a realitzar aquesta conversió.

Figura 8. Conversió matemàtica entre el coeficient de reflexió i la impedància normalitzada associada



En aquesta figura, Γ és el coeficient de reflexió i $\bar{Z}$ és la impedància Z normalitzada respecte a la impedància característica de la línia de transmissió Z_0 amb:

$$\bar{Z} = \frac{Z}{Z_0} \qquad 7.25$$

Tot i que les calculadores modernes permeten introduir operacions amb complexos i resoldre-les amb certa facilitat, amb la carta de Smith es pot fer aquesta conversió gràficament sense necessitat de fer cap mena de càlcul.

L'origen d'aquests cercles i corbes rau, precisament, en la relació entre el coeficient de reflexió i el valor complex d'una impedància. Si definim:

$$\overline{Z} = \overline{R} + j\overline{X} \qquad 7.26$$

on $\overline{R}$ i $\overline{X}$ són la resistència normalitzada i la reactància normalitzada, respectivament, i:

$$\Gamma = \Gamma_R + \Gamma_I \qquad 7.27$$

on Γ_R i Γ_I són la part real i imaginària del coeficient de reflexió, llavors es compleix que:

$$\left(\Gamma_R - \frac{\overline{R}}{1+\overline{R}}\right)^2 + \Gamma_I^2 = \left(\frac{1}{1+\overline{R}}\right)^2 \qquad 7.28$$

Si es representa aquesta equació en funció de $\overline{R}$, s'obtenen els cercles de part real amb radi $1/1+\overline{R}$ i centrats a:

$$\Gamma_R = \frac{\overline{R}}{1+\overline{R}} \qquad 7.29$$

i

$$\Gamma_I = 0 \qquad 7.30$$

Tots els cercles passen pel punt (1, 0).

Les corbes que ens donen la part imaginària $\overline{X}$ són en realitat arcs de circumferència que tenen el centre fora de la carta. L'equació que descriu aquestes circumferències és donada per:

$$(\Gamma_R - 1)^2 + \left(\Gamma_I - \frac{1}{\overline{X}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\overline{X}}\right)^2 \qquad 7.31$$

que ens representa cercles de radi $1/|\overline{X}|$ centrats a:

$$\Gamma_R = 1 \qquad 7.32$$

i

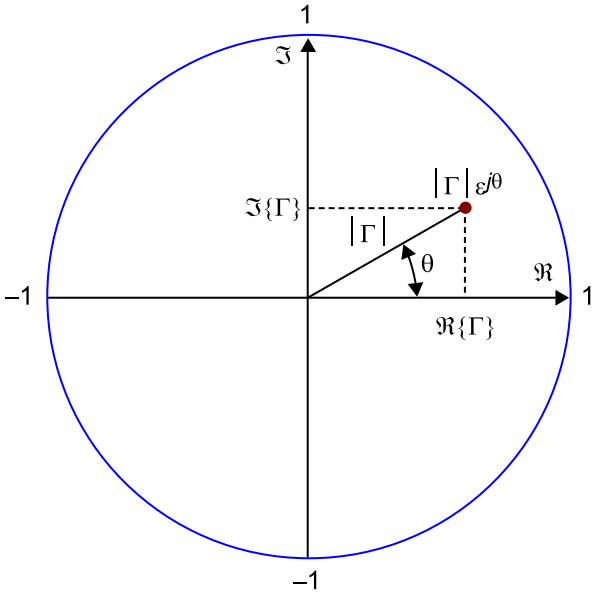
$$\Gamma_I = \frac{1}{\overline{X}} \qquad 7.33$$

Els diferents valors de $\overline{X}$ generen cercles amb diferents radis i centres en diferents posicions de la línea $\Gamma_R = 1$. Tots els cercles passen també pel punt (1, 0).

El procediment per a trobar la impedància associada a un coeficient de reflexió donat és el següent:

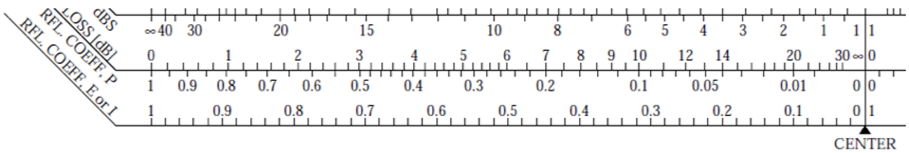
1) El primer que cal fer és representar el coeficient de reflexió Γ en el pla complex representat pel cercle unitari que proporciona la carta de Smith, on l'eix d'abscisses correspon a l'eix de part real i l'eix d'ordenades correspon a l'eix de part imaginària, i l'origen de coordenades se situa en el centre d'aquest cercle. En la figura 9 es mostra un exemple.

Figura 9. Representació del coeficient de reflexió en el pla complex que proporciona la carta de Smith d'impedàncies



Per tal de dibuixar de manera adequada el mòdul i la fase del coeficient de reflexió es poden utilitzar les escales graduades adjuntes sota la carta, juntament amb un compàs. L'amplitud adequada del mòdul del coeficient de reflexió la podem obtenir utilitzant l'escala situada a la part inferior esquerra amb el nom "RFL. COEFF". Aquesta escala va del 0 a l'1, tal com s'observa en la figura 10.

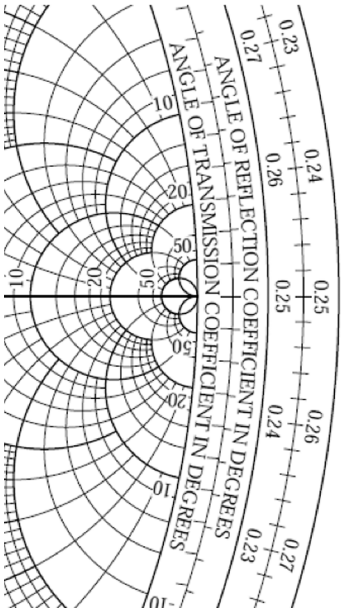
Figura 10. Escala graduada del mòdul del coeficient de reflexió



Per tant, utilitzant el compàs, agafem l'amplitud adequada punxant al 0 i al valor del mòdul del coeficient de reflexió. Aquest mòdul el representem posteriorment a la carta, utilitzant el centre com a origen de coordenades (tal com s'observa en la figura 9).

Per tal de conèixer la seva fase, utilitzarem l'escala "ANGLE OF REFLECTION COEFFICIENT IN DEGREES", situada en un dels marges del cercle, com s'observa en la figura 11.

Figura 11. Escala graduada de la fase del coeficient de reflexió



Aquesta fase té l'origen (0°) a l'eix de part real positiva i, seguint el sentit antihorari, s'incrementa fins als 180° (just a l'altre extrem de la carta de Smith). De manera anàloga, seguint el sentit horari, aquesta fase es decrementa fins als –180°, i arriba altre cop a l'altre extrem de la carta de Smith. D'aquesta manera, es pot representar adequadament qualsevol fase.

2) Un cop hem representat el coeficient de reflexió a la carta de Smith, la conversió a la seva impedància associada es fa utilitzant els cercles i les corbes que tenen com a origen el punt corresponent a $\Gamma = 1 + j0$. El cercle complet que creua el coeficient de reflexió ens dóna la part real de la impedància normalitzada $\overline{Z}$ (és a dir, $\overline{R}$). I la corba que finalitza en un extrem del cercle diferent de $\Gamma = 1 + j0$ ens dóna la part imaginària de la impedància normalitzada $\overline{Z}$ (és a dir, $\overline{X}$).

En la figura 12 es veu que a l'eix d'abscisses tenim els valors de la part real de la impedància i que la part imaginària la tenim continguda al contorn del cercle de part real 1.

Figura 12. Part real i imaginària de la impedància

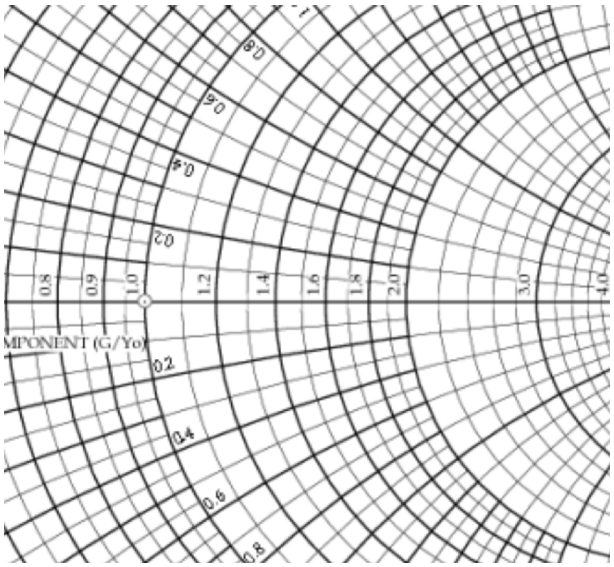
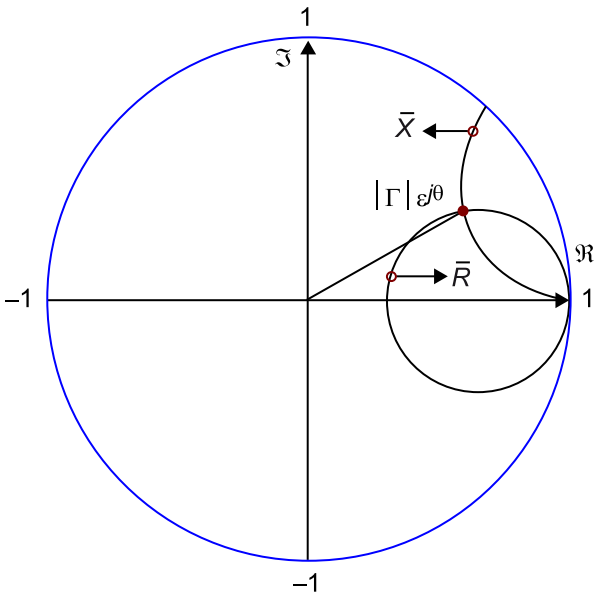


Figura 12

A l'eix d'abscisses tenim els valors de la part real de la impedància i la part imaginària la tenim continguda al contorn del cercle de part real 1.

Seguint amb el cas plantejat en la figura 9, obtindríem un resultat similar al que es presenta en la figura 13.

Figura 13. Part real i imaginària de la impedància associada al coeficient de reflexió



Per tant, recuperem el valor de la impedància normalitzada amb:

$$\bar{Z} = \bar{R} + j\bar{X} \qquad 7.34$$

Per a desnormalitzar, només cal multiplicar per la impedància de normalització, en aquest cas Z_0:

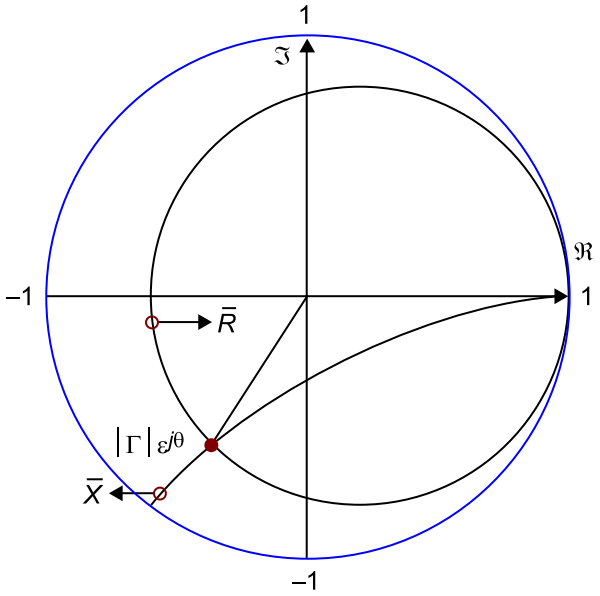
$$Z = \bar{Z} \cdot Z_0 \qquad 7.35$$

Cal tenir en compte que si el coeficient de reflexió té una fase entre 0° i 180°, (és a dir, si es troba per sobre de l'eix d'abscisses), el valor de la reactància normalitzada serà positiu, és a dir, tindrà un comportament inductiu. Però si el coeficient de reflexió té una fase inferior a 0° o superior a 180° (és a dir, si es troba per sota de l'eix d'abscisses), el valor de la reactància normalitzada serà negatiu, és a dir, tindrà un comportament capacitiu.

El punt Γ = 1 representa una impedància $\overline{Z} = \infty$, i el punt Γ = –1 representa una impedància $\overline{Z} = 0$.

En la figura 14 es mostra un exemple en què el valor de la fase del coeficient de reflexió està per sobre dels 180°.

Figura 14. Part real i imaginària de la impedància associada al coeficient de reflexió



El procediment és anàleg al cas anterior, tenint ara en compte que recuperem el valor de la impedància normalitzada amb:

$$\overline{Z} = \overline{R} - j\overline{X} \qquad 7.36$$

Per a desnormalitzar, seguim utilitzant l'equació 7.35.

El procediment per a fer l'operació inversa, és a dir, obtenir el coeficient de reflexió a partir del valor de la impedància és molt semblant al procediment anterior, seguint els passos també a l'inrevés:

1) Normalitzem la impedància utilitzant l'equació 7.25 i busquem a la carta de Smith el punt on es creuen el cercle de part real $\overline{R}$ i la corba de part imaginària $\overline{X}$. Cal tenir en compte que si $\overline{X}$ és negativa, hem de buscar-la per sota de l'eix d'abscisses.

2) Un cop localitzat aquest punt, obtenim el mòdul del coeficient de reflexió mesurant la distància del punt al centre de la carta de Smith i utilitzant l'escala graduada de la figura 10. I la seva fase l'obtenim utilitzant l'escala graduada de la figura 11.

A continuació es presenta un exemple en què s'utilitzarà la carta de Smith per a realitzar diverses transformacions entre coeficient de reflexió i impedància.

Una línea de transmissió amb una impedància característica de 50 Ω i longitud 0,3λ està carregada amb una impedància de valor $Z_L = 40 - j75$ Ω. Trobeu el coeficient de reflexió a la càrrega, a l'entrada de la línia de transmissió i la impedància d'entrada d'aquesta línia de transmissió.

Solució

El primer que hem de fer és normalitzar la impedància per a poder-la representar adequadament a la carta de Smith:

$$\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{40 - j75}{50} = 0{,}8 - j1{,}5 \qquad 7.37$$

Un cop normalitzada, busquem el cercle de valor 0,8 (part real) i la corba –1,5 (part imaginària per sota de l'eix d'abscisses) i dibuixem el punt. El coeficient de reflexió el trobem traçant una recta des del centre de la carta al punt. Per a conèixer el mòdul utilitzem el compàs i l'escala de la figura 10; per a conèixer la fase allarguem la línia fins que creui l'escala que es mostra en la figura 11. Tal com s'observa en la figura 15, el coeficient de reflexió obtingut té el valor següent:

$$\rho_L = 0{,}644\angle_{-57.7^\circ} = 0{,}644\angle_{-1\text{rad}} = 0{,}644e^{-j} \qquad 7.38$$

Atès que som en una línia de transmissió sense pèrdues, el coeficient de reflexió a l'entrada de la línia de transmissió ρ_{IN} el podem obtenir introduint un canvi de fase equivalent a una distància de 0,3λ en el coeficient de reflexió a la càrrega ρ_L. És a dir:

$$\rho_{IN} = \rho_L e^{-2j\beta l} = \rho_L e^{-2j\frac{2\pi}{\lambda}0{,}3\lambda} = 0{,}644e^{-j}e^{-j1{,}2\pi} = 0{,}644e^{-j(1{,}2\pi+1)} = 0{,}644\angle_{86{,}7^\circ} \qquad 7.39$$

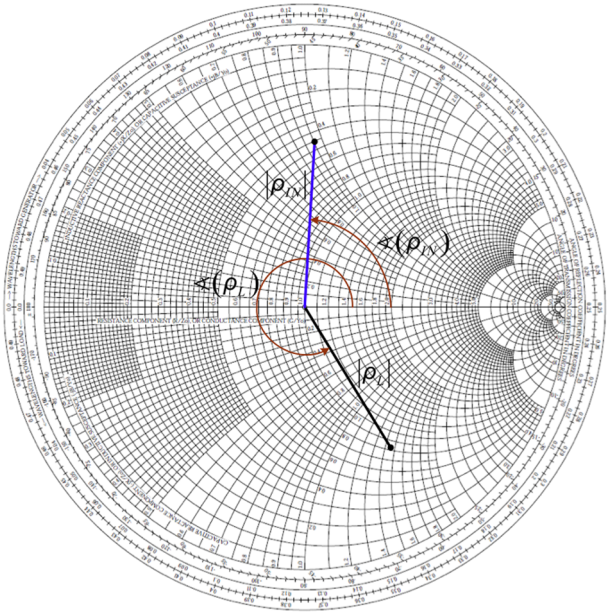
Per a obtenir la impedància d'entrada tornem a dibuixar el coeficient de reflexió ρ_{IN} a la carta de Smith. El procés és anàleg al cas anterior per a dibuixar-ne el mòdul i la fase; un cop dibuixat, llegim el valor de la impedància d'entrada normalitzada gràcies als cercles i les corbes de part real i imaginària, fins a obtenir:

$$\bar{Z}_{IN} = 0{,}44 + j0{,}96 \qquad 7.40$$

Finalment, desnormalitzem el valor i obtenim la impedància d'entrada:

$$Z_{IN} = \bar{Z}_{IN} \cdot Z_0 = (0{,}44 + j0{,}96) \cdot 50 = 22 + j48\ \Omega \qquad 7.41$$

Figura 15. Coeficient de reflexió a la càrrega i en l'entrada de la línia de transmissió per a $Z_L = 40 - j75\ \Omega$



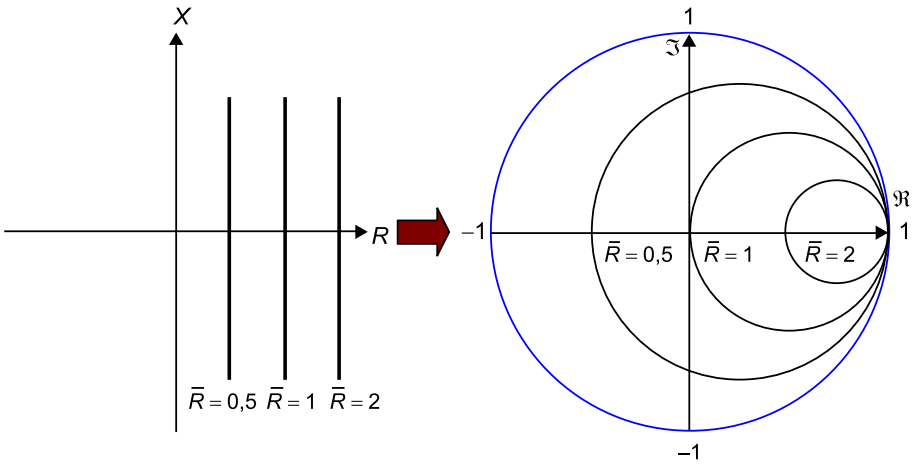
2.2. Casos pràctics de la carta de Smith d'impedàncies

Veurem ara uns quants exemples pràctics que poden ajudar a una comprensió més intuïtiva de la relació entre la representació cartesiana de la impedància i la seva representació a la carta de Smith.

1) Part real constant

La representació de tres impedàncies amb part real constant ($\overline{R} = 0{,}5, \overline{R} = 1$ i $\overline{R} = 2$) i qualsevol valor de part imaginària, en cartesianes i en la carta de Smith, es mostra en la figura 16.

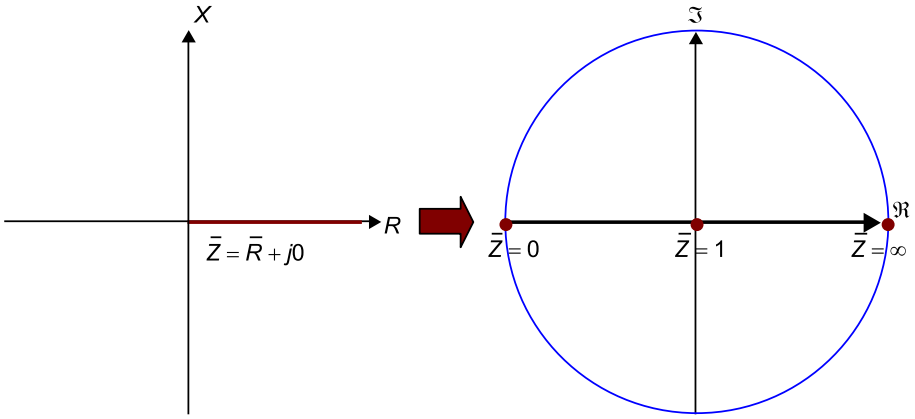
Figura 16. Representació en cartesianes i en la carta de Smith d'una impedància amb part real constant



2) Part imaginària nul·la

La representació de qualsevol impedància amb part imaginària nul·la en cartesianes i en la carta de Smith es mostra en la figura 17.

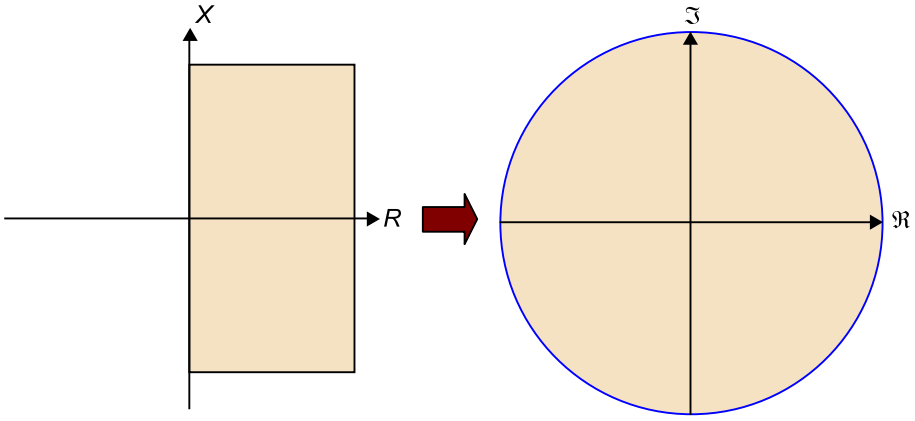
Figura 17. Representació en cartesianes i en la carta de Smith d'una impedància amb part imaginària nul·la



3) Part real positiva

La representació de qualsevol impedància amb part real positiva en cartesianes i en la carta de Smith es mostra en la figura 18.

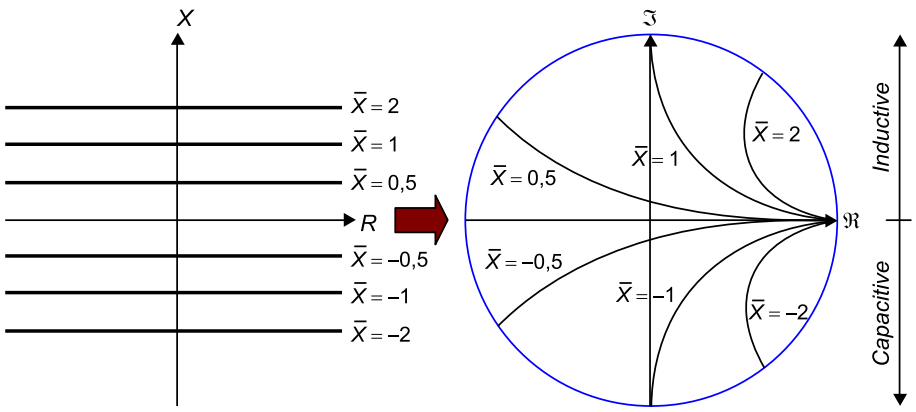
Figura 18. Representació en cartesianes i en la carta de Smith d'una impedància amb part real positiva



4) Part imaginària constant

La representació de sis impedàncies amb part imaginària constant ($\overline{X} = \pm 0{,}5$, $\overline{X} = \pm 1$ i $\overline{X} = \pm 2$) i qualsevol valor de part real, en cartesianes i en la carta de Smith, es mostra en la figura 19.

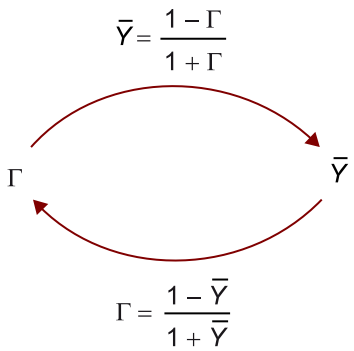
Figura 19. Representació en cartesianes i en la carta de Smith d'una impedància amb part imaginària constant



2.3. La carta de Smith d'admitàncies

De la mateixa manera que en el cas anterior, hi ha una relació unívoca entre el coeficient de reflexió i l'admitància en una línia de transmissió (expressada com $Y = G + jB$, on G és la conductància i B, la susceptància). Aquesta relació queda palesa en la figura 20.

Figura 20. Conversió matemàtica entre el coeficient de reflexió i la impedància normalitzada associada



En aquesta figura, Γ és el coeficient de reflexió i $\bar{Y}$ és l'admitància Y normalitzada respecte a l'admitància característica de la línia de transmissió Y_0 amb:

$$\bar{Y} = \frac{Y}{Y_0} \qquad 7.42$$

on:

$$Y = \frac{1}{Z} \qquad 7.43$$

i

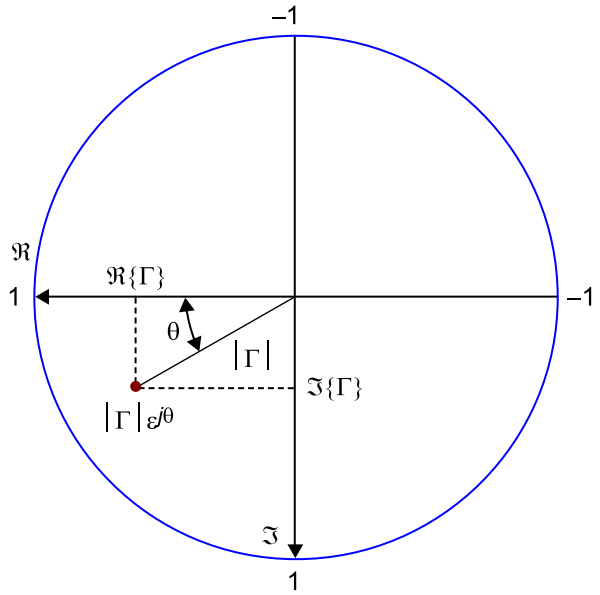
$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} \qquad 7.44$$

Novament, la carta de Smith ens permetrà realitzar aquesta conversió gràficament sense necessitat de fer cap mena de càlcul. El procediment per a trobar l'admitància associada a un coeficient de reflexió donat és el següent:

1) El primer que cal fer és representar el coeficient de reflexió Γ en el pla complex representat pel cercle unitari que proporciona la carta de Smith.

La diferència amb el cas de la carta de Smith d'impedàncies és que ara els eixos de part real i imaginària estan girats 180°, tal com podem observar en la figura 21, on s'ha representat un valor exemple de coeficient de reflexió:

Figura 21. Representació del coeficient de reflexió en el pla complex que proporciona la carta de Smith d'admitàncies



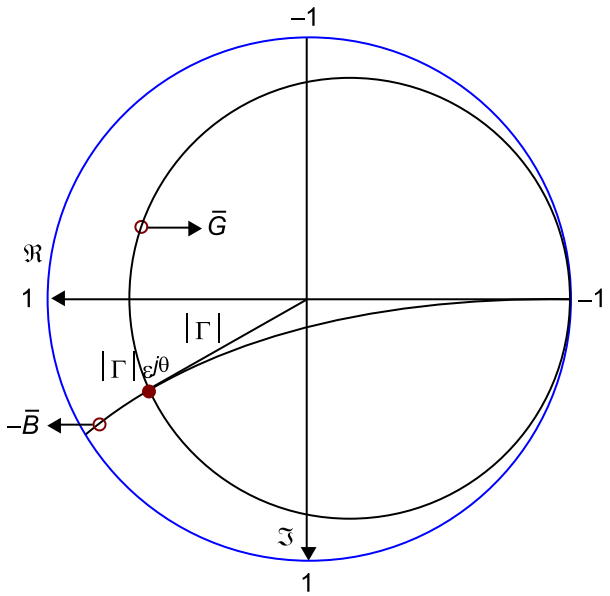
Es pot veure que la part real positiva es troba a l'esquerra de l'eix d'ordenades i la part negativa, a la dreta; la part imaginària positiva es troba sota l'eix d'abscisses i la part imaginària negativa, a sobre. Per tant, els 0° es troben situats a l'esquerra de la carta i augmenten en el sentit antihorari.

Per tal de dibuixar de manera adequada el mòdul i la fase del coeficient de reflexió s'utilitzen novament les escales graduades adjuntes a la carta i el compàs. L'amplitud adequada del mòdul del coeficient de reflexió l'obtenim utilitzant l'escala situada a la part inferior esquerra amb el nom "RFL. COEFF" (figura 10). Per a la fase utilitzem l'escala "ANGLE OF REFLECTION COEFFICIENT IN DEGREES", tenint en compte la definició dels eixos de la figura 21 i fent, per tant, les correccions necessàries.

2) Un cop hem representat el coeficient de reflexió a la carta de Smith, la conversió a l'admitància associada es realitza utilitzant els cercles i les corbes que tenen com a origen el punt corresponent a $\Gamma = -1 + j0$, exactament igual que en el cas de la carta de Smith d'impedàncies. El cercle complet que creua el coeficient de reflexió ens dóna la part real de l'admitància normalitzada $\overline{Y}$ (és a dir, $\overline{G}$), mentre que la corba que finalitza en un extrem del cercle diferent

a $\Gamma = -1 + j0$ ens dóna la part imaginària de l'admitància normalitzada $\overline{Y}$ (és a dir, $\overline{B}$). Cal recordar que si el coeficient de reflexió es troba per sobre de l'eix d'abscisses, el valor de la susceptància normalitzada serà positiu, però si el coeficient de reflexió es troba per sota de l'eix d'abscisses, el valor de la susceptància normalitzada serà negatiu. Per al cas plantejat en la figura 21 obtindríem un resultat similar al que es presenta en la figura 22.

Figura 22. Part real i imaginària de l'admitància associada al coeficient de reflexió



Recuperem el valor de l'admitància normalitzada amb:

$$\overline{Y} = \overline{G} + j\overline{B} \qquad 7.45$$

Per a desnormalitzar només cal multiplicar per l'admitància de normalització, en aquest cas Y_0:

$$Y = \overline{Y} \cdot Y_0 = \frac{\overline{Y}}{Z_0} \qquad 7.46$$

El procediment per a fer l'operació inversa, és a dir, obtenir el coeficient de reflexió a partir del valor de l'admitància és:

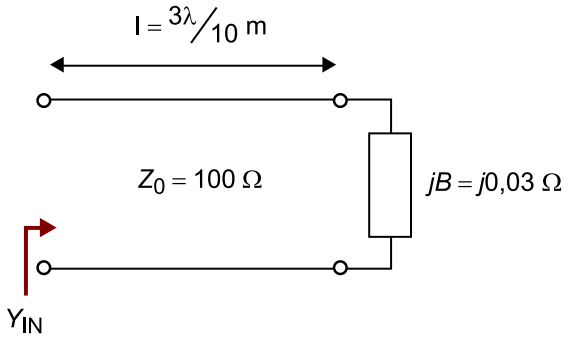
1) Normalitzem l'admitància utilitzant l'equació 7.42 i busquem a la carta de Smith el punt on es creuen el cercle de part real $\overline{G}$ i la corba de part imaginària $\overline{B}$. Cal tenir en compte que si $\overline{B}$ és negativa, hem de buscar-la per sota de l'eix d'abscisses.

2) Un cop localitzat aquest punt, obtenim el mòdul del coeficient de reflexió mesurant la distància del punt al centre de la carta de Smith i utilitzant l'escala graduada de la figura 10. La fase l'obtenim utilitzant l'escala graduada de la figura 11, tenint en compte, però, la situació dels eixos, tal com es mostra en la figura 21.

En l'exemple següent utilitzarem la carta de Smith per a realitzar transformacions entre admitàncies i coeficients de reflexió.

Es vol calcular l'admitància d'entrada d'una línia de transmissió carregada amb una susceptància, tal com es mostra en la figura 23.

Figura 23. Circuit exemple



Solució

El primer que hem de fer és normalitzar l'admitància per a poder-la representar adequadament sobre la carta de Smith:

$$\bar{Y}_L = \frac{Y_L}{Y_0} = Y_L \cdot Z_0 = j0{,}03 \cdot 100 = j3S \qquad 7.47$$

Un cop normalitzada, busquem la corba de valor 3 (part imaginària per sobre de l'eix d'abscisses) i dibuixem el punt. El coeficient de reflexió el trobem traçant una recta des del centre de la carta al punt. El seu mòdul és directament 1 (atès que som sobre el cercle unitari); per a conèixer la fase allarguem la línia fins que creui l'escala que es mostra en la figura 11. Tal com s'observa en la figura 24, el coeficient de reflexió obtingut pren el valor següent:

$$\rho_L = 1\angle_{217^\circ} = 1\angle_{3{,}78rad} = e^{j3{,}78} \qquad 7.48$$

El coeficient de reflexió a l'entrada de la línia de transmissió, ρ_{IN}, el podem obtenir desplaçant el coeficient de reflexió a la càrrega, ρ_L, 6λ/5 amb:

$$\rho_{IN} = \rho_L e^{-2j\beta l} = e^{j3.78} e^{-2j\frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{10}} = e^{j3.78} e^{-j\frac{6\pi}{5}} \simeq e^{j0} = 1\angle_{0^\circ} \qquad 7.49$$

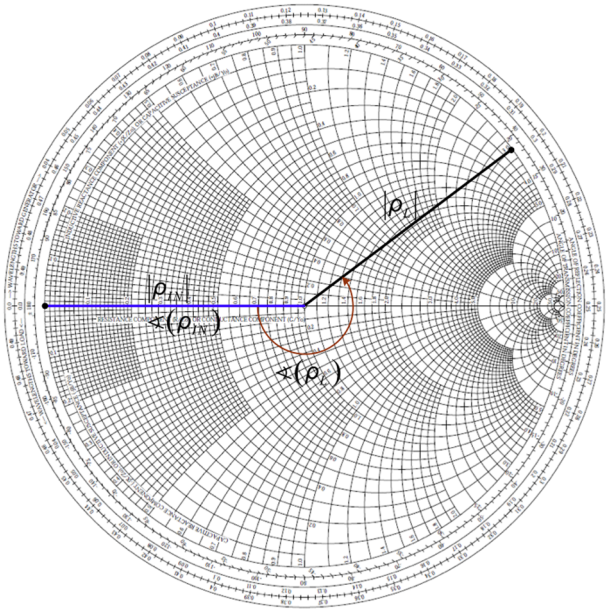
Per a obtenir l'admitància d'entrada tornem a dibuixar el coeficient de reflexió ρ_{IN} a la carta de Smith. El procés és anàleg al cas anterior per a dibuixar-ne el mòdul i la fase. Un cop dibuixat, llegim el valor de l'admitància, i obtenim:

$$\bar{Y}_{IN} = 0 \qquad 7.50$$

Finalment, desnormalitzant:

$$Y_{IN} = \bar{Y}_{IN} \cdot Y_0 = 0S \qquad 7.51$$

Figura 24. Resolució del problema utilitzant la carta de Smith



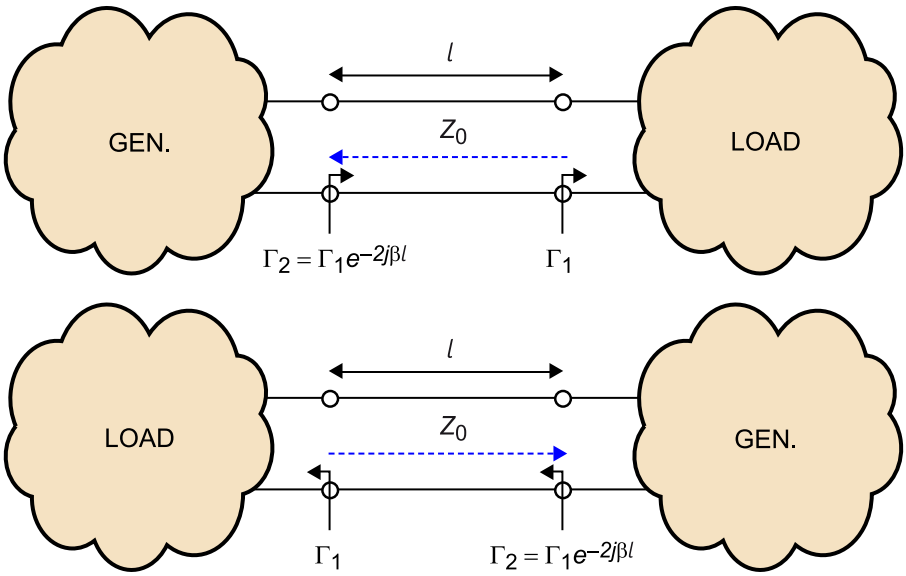
2.4. Moviments en una línia de transmissió sense pèrdues

El valor del coeficient de reflexió i el de la impedància o admitància sobre una línia de transmissió varia en funció del punt de la línia on ens situem. De fet, si ens movem sobre la línia de transmissió estarem generant un cert tipus de moviment a la carta de Smith. Hi ha dos tipus de moviments, cap a generador i cap a càrrega, en funció de cap a on ens movem. Veiem-los amb més detall.

2.4.1. Moviment cap a generador

El **moviment cap a generador** és el moviment contrari al sentit en què mirem, independentment de què hi hagi connectat als extrems de la línia de transmissió. En la figura 25 s'il·lustra aquest moviment.

Figura 25. Moviment cap a generador

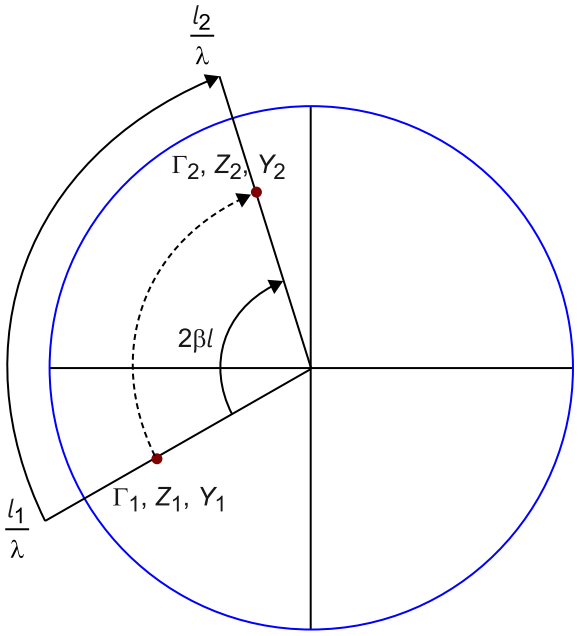


A mesura que retrocedim, el mòdul del coeficient de reflexió es manté constant, mentre que la fase del coeficient de reflexió va disminuint a raó de:

$$\begin{gathered} |\rho_2| = |\rho_1| \\ \angle(\rho_2) = \angle(\rho_1) - 2\beta l = \angle(\rho_1) - 4\pi\frac{l}{\lambda} \end{gathered} \qquad 7.52$$

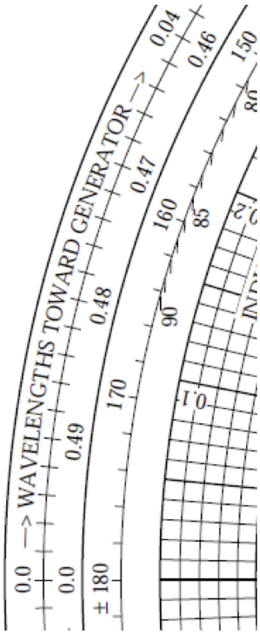
Sobre la carta de Smith, independentment que aquesta sigui d'admitàncies o d'impedàncies, el moviment que fem es produeix en el sentit horari, tal com es mostra en la figura 26.

Figura 26. Moviment cap a generador representat a la carta de Smith



Per a trobar Γ_2 no cal calcular βl. Aquest desplaçament es pot fer utilitzant una de les escales a l'extrem del cercle, concretament la de "WAVELENGTH TOWARD GENERATOR" (la més externa al cercle, com s'observa en la figura 27). En aquesta escala podem representar el desplaçament equivalent de la línia l normalitzat respecte a la longitud d'ona λ. Per tant, només cal calcular l/λ i moure's relativament sobre l'escala en el sentit horari.

Figura 27. Escala *Wavelength toward generator*

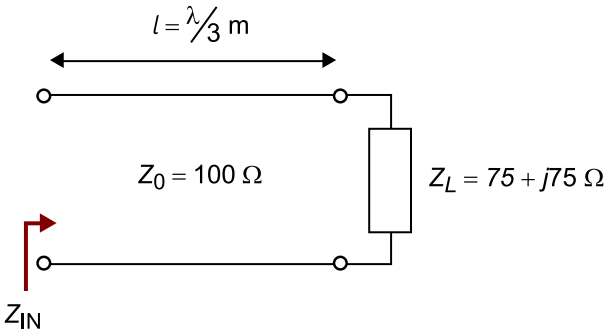


Es pot observar que en realitzar un moviment sobre la línia de transmissió equivalent a λ/2, tornem al mateix punt. Per tant, els valors de Γ, $\overline{Z}$ i $\overline{Y}$ són periòdics amb període λ/2.

Vegem ara un exemple en què necessitarem el moviment cap a generador per a trobar la solució. Aquest exemple és semblant a l'anterior, tot i que ara veurem que el podem resoldre directament amb la carta de Smith, sense haver de fer cap mena de càlcul.

Es vol calcular la impedància d'entrada d'una línia de transmissió carregada amb una impedància complexa, tal com es mostra en la figura 28.

Figura 28. Circuit exemple



Solució

El primer que fem és normalitzar la impedància per a poder-la representar adequadament a la carta de Smith:

$$\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{75 + j75\,\Omega}{100\,\Omega} = 0{,}75 + j0{,}75 \qquad 7.53$$

Un cop normalitzada, busquem el cercle i la corba de valor 0,75 (part imaginària per sobre de l'eix d'abscisses) i dibuixem el punt. El coeficient de reflexió el trobem traçant una recta des del centre de la carta al punt. En aquest cas obtenim (figura 29):

$$\rho_L = 0{,}41\angle_{85{,}2^o} = 0{,}41\angle_{1{,}48\text{rad}} = e^{j1{,}48} \qquad 7.54$$

El coeficient de reflexió a l'entrada de la línia de transmissió ρ_{IN} el podem obtenir desplaçant el coeficient de reflexió a la càrrega, ρ_L, una distància normalitzada:

$$\bar{l} = \frac{l}{\lambda} = \frac{\lambda/3}{\lambda} = \frac{1}{3} \qquad 7.55$$

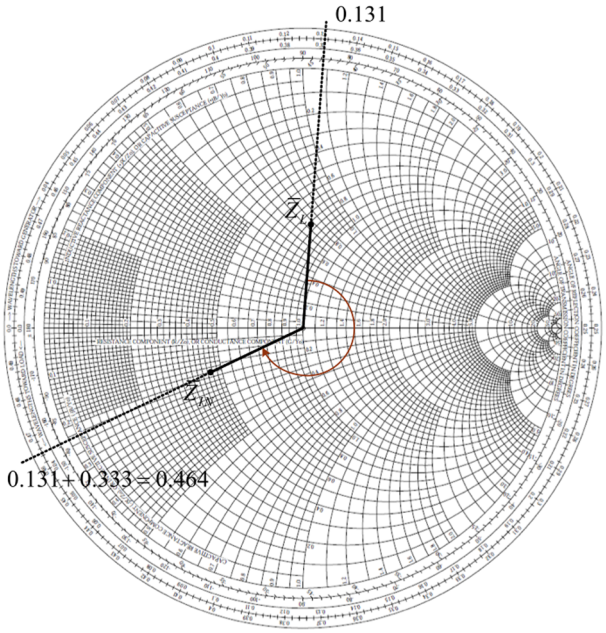
fent un moviment cap a generador. Amb aquesta finalitat allarguem la recta de ρ_L fins que creui l'escala mostrada a la figura 27 i llegim el valor (0,131). A aquest valor li sumem la longitud de la línia de transmissió normalitzada, cosa que ens dóna un valor de 0,464. Amb el mateix valor de mòdul que ρ_L obtenim el valor de ρ_{IN} sobre aquesta última recta. Per a obtenir la impedància d'entrada, llegim el valor del cercle (part real) i de la corba (part imaginària) que tallen el punt on hem situat ρ_{IN}, i obtenim:

$$\bar{Z}_{IN} = 0{,}44 + j0{,}19\ \Omega \qquad 7.56$$

Finalment, desnormalitzant:

$$Z_{IN} = \bar{Z}_{IN} \cdot Z_0 = 44 + j19\ \Omega \qquad 7.57$$

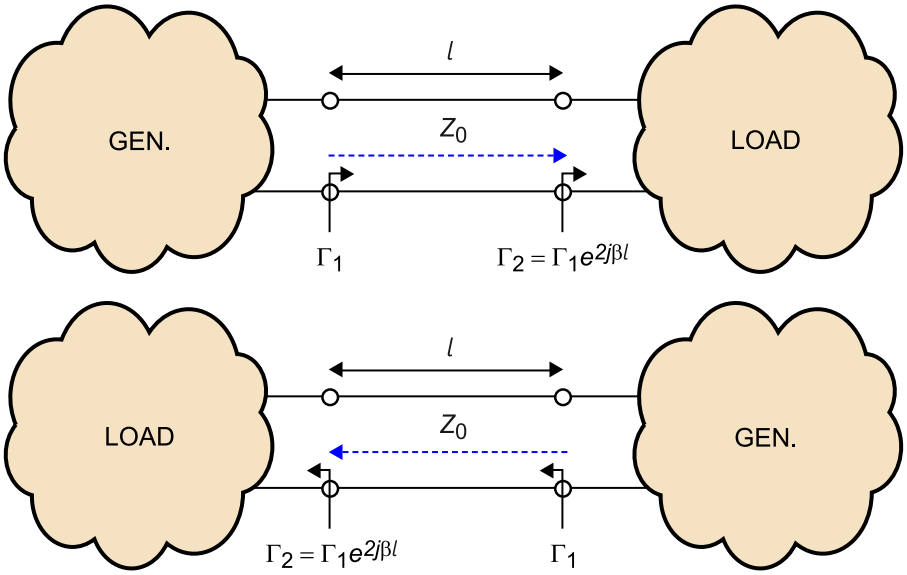
Figura 29. Moviment cap a generador en una línia de transmissió que acaba amb una impedància Z_L



2.4.2. Moviment cap a càrrega

El **moviment cap a càrrega** és el moviment en el mateix sentit en què mirem, independentment de què hi hagi connectat als extrems de la línia de transmissió. En la figura 30 s'il·lustra aquest moviment.

Figura 30. Moviment cap a càrrega

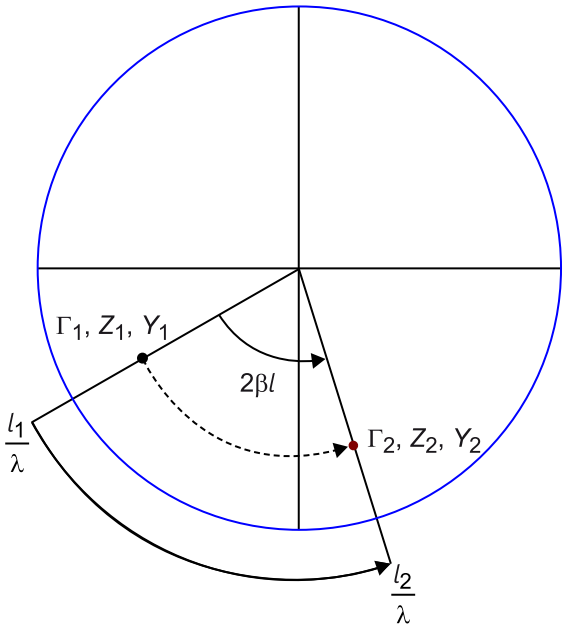


A mesura que avancem, el mòdul del coeficient de reflexió es manté constant i la fase del coeficient de reflexió va augmentant a raó de:

$$\begin{gathered} |\rho_2| = |\rho_1| \\ \angle(\rho_2) = \angle(\rho_1) + 2\beta l = \angle(\rho_1) + 4\pi\frac{l}{\lambda} \end{gathered} \qquad 7.58$$

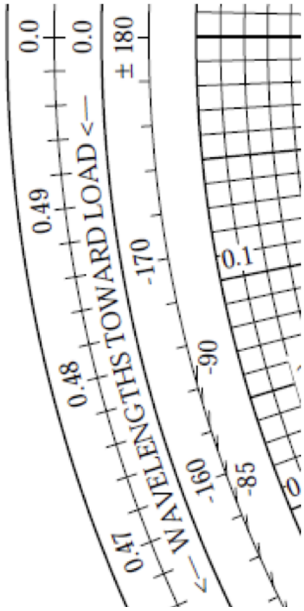
Sobre la carta de Smith, independentment que aquesta sigui d'admitàncies o d'impedàncies, el moviment que fem es produeix en el sentit horari, tal com es mostra en la figura 31.

Figura 31. Moviment cap a càrrega representat a la carta de Smith



Per a trobar Γ_2 podem utilitzar l'escala "WAVELENGTH TOWARD LOAD" (figura 32). En aquesta escala tenim el desplaçament equivalent de la línia *l* normalitzat respecte a la longitud d'ona λ. Per tant, només cal calcular l/λ i moure'ns relativament sobre l'escala en el sentit antihorari.

Figura 32. Escala *Wavelength toward load*

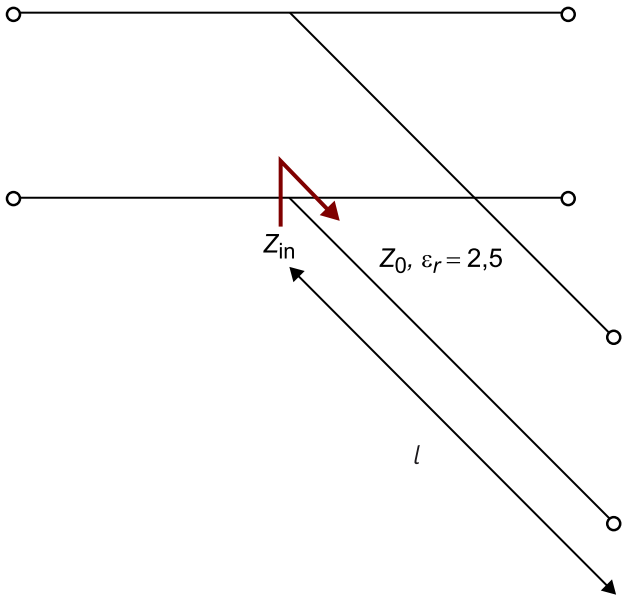


Igual que abans, podem veure que els valors de Γ, $\overline{Z}$ i $\overline{Y}$ són periòdics de període λ/2.

A continuació es presenta un exemple en què utilitzarem el moviment cap a càrrega sobre la carta de Smith per a resoldre'l.

En un sistema de radiofreqüència, es pretén eliminar la banda al voltant de 900 MHz amb el filtre que es presenta en la figura 33.

Figura 33. Filtre de RF

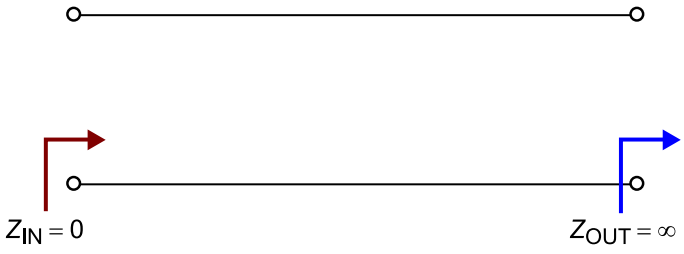


Calculeu la longitud *l* de l'*stub* amb permitivitat dielèctrica $\epsilon_r = 2{,}5$ per tal que impedeixi totalment el pas de senyals a la freqüència de 900 MHz.

Solució

Per a trobar aquesta longitud ens centrarem en les impedàncies d'entrada i sortida de l'*stub* que es mostren en la figura 34.

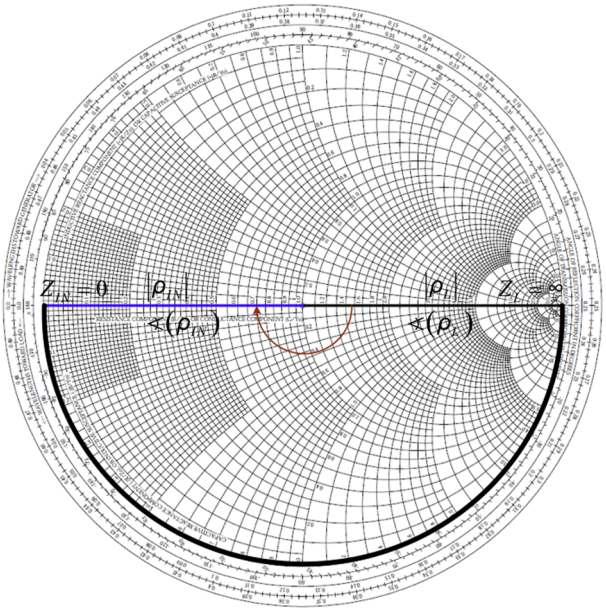
Figura 34. Impedàncies d'entrada i sortida de l'*stub*



La impedància d'entrada ha de ser de 0 Ω a 900 MHz, atès que d'aquesta manera curt-circuitem la línia de transmissió i filtrem aquesta freqüència (ja que no podrà arribar al port oposat). Com que volem resoldre el problema fent un moviment cap a càrrega, ens situem a l'entrada i la dibuixem a la carta de Smith (no cal normalitzar, ja que obtenim el mateix valor, tant per a l'entrada com per a la sortida). Un cop situats en aquest punt (figura 35) ens movem cap a càrrega (sentit antihorari) fins creuar el punt d'impedància ∞. Aquest està situat just a l'extrem oposat de la carta, de mode que la longitud de l'*stub* és precisament λ/4, que a la freqüència de 900 MHz i amb un dielèctric de permitivitat $\epsilon_r = 2{,}5$, correspon a:

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f} = \frac{c_0}{4f\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 900 \cdot 10^6\sqrt{2{,}5}} = 5{,}27\ \text{cm} \qquad 7.59$$

Figura 35. Moviment cap a càrrega en un *stub* acabat en circuit obert



2.5. Pas de la carta de Smith d'impedàncies a la carta de Smith d'admitàncies

Una línia de transmissió de longitud λ/4 és un inversor d'impedàncies, ja que la seva impedància d'entrada serà:

$$Z_{\mathrm{IN}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)} \underset{\beta l = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}}{=} Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \infty}{Z_0 + jZ_L \infty} = \frac{Z_0^2}{Z_L} \qquad 7.60$$

que, normalitzada respecte a Z_0, és:

$$\bar{Z}_{\mathrm{IN}} = \frac{1}{\bar{Z}_L} = \bar{Y}_L \qquad 7.61$$

Per tant, hem convertit una impedància normalitzada en una admitància normalitzada.

Tal com hem vist en l'apartat anterior, si ens movem en una línia de transmissió una longitud equivalent a λ/4 sobre la carta de Smith (independentment de si el sentit del moviment és cap a generador o cap a càrrega), acabem al punt simètric oposat de la carta (és a dir, rotem 180°).

Així doncs, per a passar d'una carta de Smith d'impedàncies a una carta de Smith d'admitàncies només hem de buscar el punt simètric respecte a l'origen de tots els punts d'interès, i podem utilitzar la mateixa carta per a resoldre un problema en què calgui treballar amb les dues definicions.

Veurem ara un exemple de càlcul d'una admitància a partir d'un impedància utilitzant la carta de Smith.

Trobeu l'admitància equivalent de la impedància:

$$Z = 50 + j75\ \Omega \qquad 7.62$$

El primer que podem fer és normalitzar respecte a una impedància. Ara no és estrictament necessari, ja que no ens estem movent sobre una línia de transmissió ni estem buscant el valor del coeficient de reflexió. Però si treballem amb valors tan grans d'impedància, la resolució que obtenim és molt més baixa. Per tant, podem utilitzar, per exemple, els 50 Ω com a impedància de normalització. D'aquesta manera obtenim:

$$\bar{Z} = \frac{Z}{50\ \Omega} = 1 + j1{,}5 \qquad 7.63$$

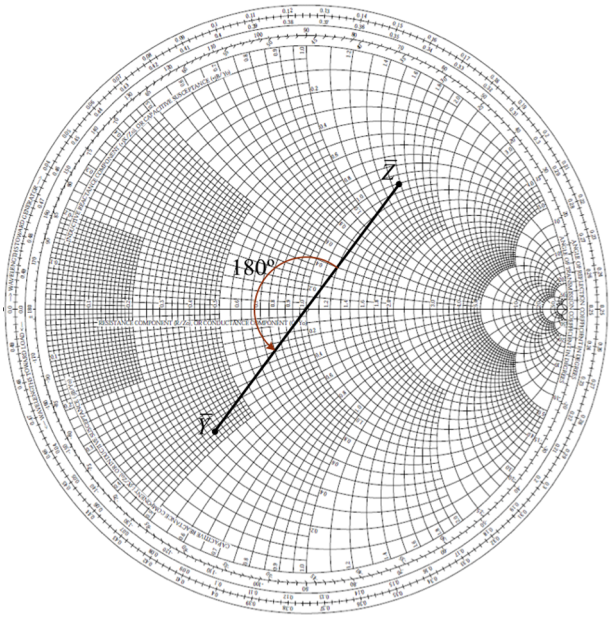
Un cop hem normalitzat, busquem aquest valor a la carta de Smith, utilitzant el cercle de part real 1 i la corba de part imaginària 1,5; el punt obtingut es mostra en la figura 36. Per a trobar l'admitància associada girem el coeficient de reflexió 180° i llegim el valor obtingut; en aquest cas obtenim:

$$\bar{Y} = 0{,}3 - j0{,}46 \qquad 7.64$$

Ara ja només resta desnormalitzar amb la mateixa impedància utilitzada per a normalitzar la impedància. D'aquesta manera arribem a:

$$Y = 0{,}006 - j0{,}009S \qquad 7.65$$

Figura 36. Gir de 180° del coeficient de reflexió per a trobar l'admitància associada a la impedància



Podeu comprovar que si utilitzeu altres valors d'impedància de normalització obteniu el mateix resultat.

3. Unió P-N

En aquest apartat es presenten els fonaments dels dispositius actius bàsics utilitzats en els circuits de microones: el **díode** i el **transistor**. Es fa un recorregut per l'estructura i el funcionament dels dispositius semiconductors i, en particular, de la unió P-N. Finalment, s'analitzen les principals característiques de diferents tipus de díodes en funció de la seva estructura interna, i, en particular, dels díodes Schottky i PIN.

3.1. Dispositius semiconductors

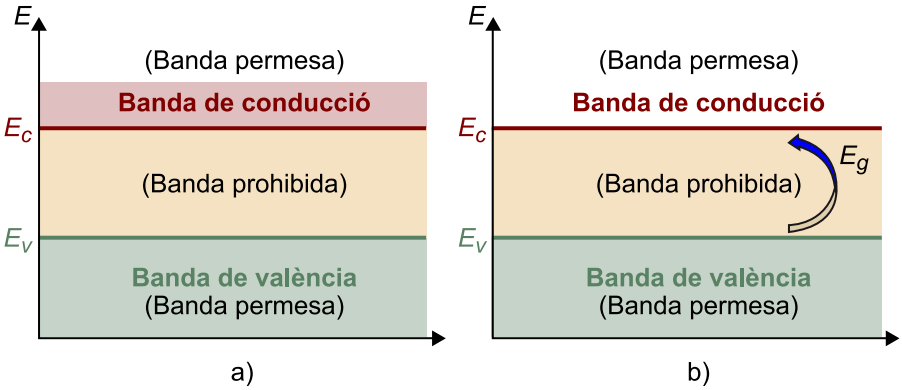
Per a comprendre les propietats bàsiques de qualsevol dispositiu actiu semiconductor cal repassar els conceptes físics en què es basen aquests dispositius.

3.1.1. Teoria de les bandes d'energia

En un semiconductor els electrons no poden tenir valors qualssevol d'energia sinó que només poden adoptar certs valors discrets. A més, hi ha certes bandes d'energia en què no és possible l'existència d'electrons.

> Els electrons ocupen nivells d'energia discrets agrupats en bandes permeses.

Figura 37. Gràfica de bandes d'energia. a) En un material conductor. b) En un material aïllant



En la figura 37 es pot apreciar, en la gràfica de l'esquerra, les bandes d'energia en un material conductor a 0 ºK, on es pot observar que la banda de conducció és parcialment ocupada amb electrons. En canvi, la gràfica de la dreta pertany a un material aïllant a 0 ºK; s'hi pot apreciar que la banda de conducció és buida d'electrons.

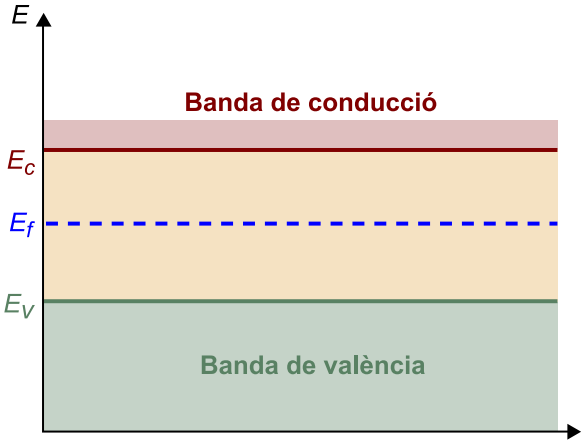
La diferència d'energia entre la banda de conducció i la de València s'anomena ***energia de la banda prohibida (gap)*** **($E_g = E_c - E_v$)** i en un semiconductor és al voltant d'1 eV.

Unitats

ºK (kelvin) és una unitat de mesura de temperatura i equival a la temperatura mesurada en graus Celsius més 273.

eV (electró-volt) és una unitat d'energia i representa l'energia cinètica que adquireix un electró quan és accelerat per una diferència de potencial d'un volt. Equival a **1,602176462 × 10^{-19} J**, valor que s'obté de multiplicar la càrrega de l'electró (1,602176462 × 10^{-19} C) per la unitat de potencial elèctric (volt).

Figura 38. Gràfica de bandes d'energia en un material semiconductor



En la figura 38 veiem les bandes d'energia típiques d'un semiconductor a temperatura ambient; s'hi pot apreciar que la banda de conducció és parcialment ocupada per electrons.

El **nivell de Fermi**, E_f, es defineix com un nivell característic per a cada material i ens permet calcular la densitat d'electrons en la banda de conducció per a qualsevol material i temperatura.

La funció de Fermi-Dirac ens dóna la probabilitat que un nivell d'energia E estigui ocupat per un electró.

La funció de Fermi-Dirac té la forma:

$$P_{e^-}(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_f}{KT}}} \qquad 7.66$$

on:

- K és la constant de Boltzmann: 1,38 * 10^{-23} JK^{-1}.

- T és la temperatura en kèlvins.

Lògicament aquesta expressió solament és vàlida per a energies, E, pertanyents a bandes permeses.

Per definició:

$$P_{e^-}(E_f) = \frac{1}{2} \qquad 7.67$$

$$P_{h^+}(E) = 1 - P_{e^-}(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E_f - E}{KT}}} \qquad 7.68$$

En equilibri termodinàmic, el nivell de Fermi, E_f, és constant per a qualsevol material. Això ha de ser així, ja que si hi hagués zones amb E_f diferents es produiria un flux d'electrons que trencaria l'equilibri.

Semiconductor intrínsec

Es defineix com **semiconductor intrínsec** a qualsevol semiconductor sense impureses el nivell de Fermi del qual està situat justament entre les bandes de València i de conducció.

Tal com es pot observar en la figura 38:

$$E_{fi} \approx \frac{1}{2}(E_c + E_v) \qquad 7.69$$

A aquest nivell E_{fi} se l'anomena ***nivell de Fermi intrínsec***.

Si definim n com la densitat d'electrons e^- en la banda de conducció i p com la densitat de forats h^+ en la banda de València, en un semiconductor intrínsec s'ha de complir:

$$n_i = p_i \qquad 7.70$$

essent $n_i = n$ i $p_i = p$ les densitats de e^- y h^+, respectivament, del semiconductor.

Semiconductor extrínsec

Quan un semiconductor es dopa amb impureses, el nivell de Fermi varia per a adaptar-se a la nova probabilitat d'ocupació dels nivells energètics:

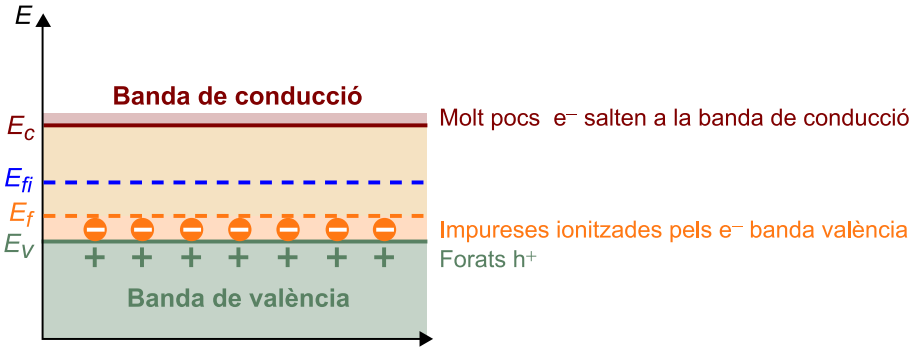
$$n = n_i e^{\frac{E_f - E_{fi}}{KT}} \qquad p = p_i e^{\frac{E_{fi} - E_f}{KT}} \qquad 7.71$$

$$np = n_i p_i = n_i^2 \qquad 7.72$$

1) Semiconductor extrínsec de tipus P

Els semiconductors de tipus P es produeixen quan es dopen amb impureses **acceptores** en una concentració $N_a >> n_i$ (això es considera dopatge normal). Aquestes impureses poden ser elements del grup III de la taula periòdica d'elements (com el bor), que tenen 3 electrons en la seva banda de València i, per tant, poden acceptar un quart electró.

Figura 39. Gràfica de bandes d'energia en un material semiconductor de tipus P



Gràcies al dopatge amb impureses, que es fixen a la xarxa cristal·lina del semiconductor, els electrons de la banda de València poden saltar i ionitzar-les i, atès que la concentració d'impureses és alta, la majoria d'electrons hi quedaran atrapats, ja que els és més fàcil arribar a la banda de conducció (és més probable, segons la funció de probabilitat de Fermi-Dirac).

Per tant, tindrem:

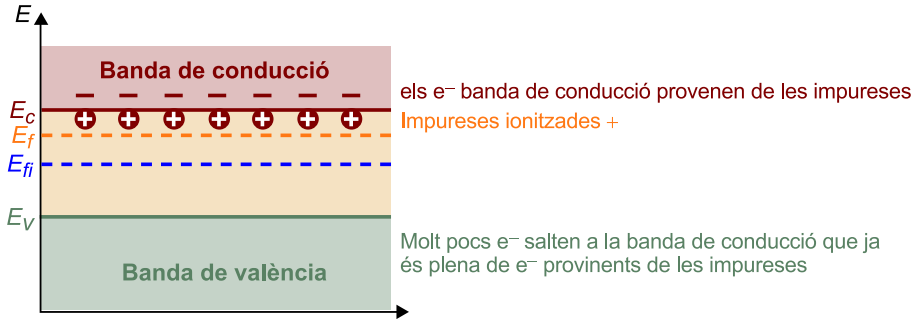
$$p \approx N_a \gg n_i \quad \rightarrow \quad n = \frac{n_i}{p}^2 \approx \frac{n_i}{N_a}^2 \ll n_i \qquad 7.73$$

En semiconductors de tipus P els forats h^+ són els **portadors majoritaris p**, mentre que els electrons e^- són els **portadors minoritaris n**.

2) Semiconductor extrínsec de tipus N

Els semiconductors de tipus N es produeixen quan es dopen amb impureses **donadores** en una concentració $N_d >> n_i$ (considerat un dopatge normal). Aquestes impureses poden ser elements del grup V de la taula periòdica d'elements (com el fòsfor), que tenen 5 electrons en la seva banda de València i, per tant, poden donar fàcilment un electró.

Figura 40. Gràfica de bandes d'energia en un material semiconductor de tipus N



Gràcies al dopatge amb impureses, que es fixen a la xarxa cristal·lina del semiconductor, els electrons d'aquestes impureses poden saltar fàcilment a la banda de conducció i, atès que la concentració d'impureses és alta, la majoria d'electrons provindran d'aquestes impureses, mentre que els electrons de la banda de València hi romandran, ja que els és més difícil (és menys probable, segons la funció de probabilitat de Fermi-Dirac).

Per tant, tindrem:

$$n \approx N_d \gg n_i \quad \rightarrow \quad p = \frac{n_i}{n}^2 \approx \frac{n_i}{N_d}^2 \ll p_i \qquad 7.74$$

En semiconductors de tipus N els electrons e^- són els **portadors majoritaris n**, mentre que els forats h^+ són els **portadors minoritaris p**.

3.1.2. La unió P-N

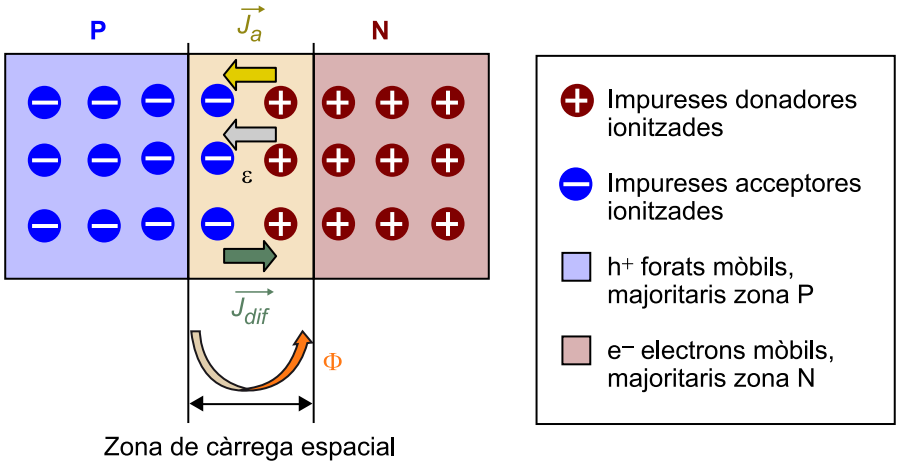
Tant un semiconductor de tipus P com un de tipus N estan en equilibri i són neutres per ells mateixos. Si unim un d'un tipus amb un de l'altre, tindrem una zona N i una altra zona P i es produirà una difusió d'electrons e^- i forats h^+ entre ambdues (semblant al que passaria amb els gasos), de manera que en arribar a l'equilibri cada zona quedarà carregada.

Tant els ions negatius de la zona P com els ions positius de la zona N estan físicament fixos en l'estructura cristal·lina del semiconductor i no es poden moure. Quan unim les dues zones es produeix un camp elèctric, E, a causa del desequilibri de càrregues, i es genera un corrent d'arrossegament $\overrightarrow{J_a}$. Com a resposta a aquest camp elèctric, els portadors majoritaris de cada zona (h^+ de la zona P i e^- de la zona N) en ser mòbils, poden generar un corrent invers i del mateix valor anomenat ***corrent de difusió***, $\overrightarrow{J_{dif}}$, i s'arriba a una situació d'equilibri:

$$\overrightarrow{J_{dif}} = \overrightarrow{J_a} \qquad 7.75$$

D'aquesta manera apareix una zona anomenada ***zona de càrrega espacial*** **(z.c.e.)** entre la zona N i la zona P i, a causa del camp elèctric i la distribució de càrregues, hi haurà una diferència de potencial Φ.

Figura 41. Representació d'ions i portadors en una unióP-N



Distribució de càrrega i camp elèctric

Un cop vist què passa amb les partícules en una unió P-N, analitzarem ara amb més detall la distribució de càrregues i el camp elèctric que es crea.

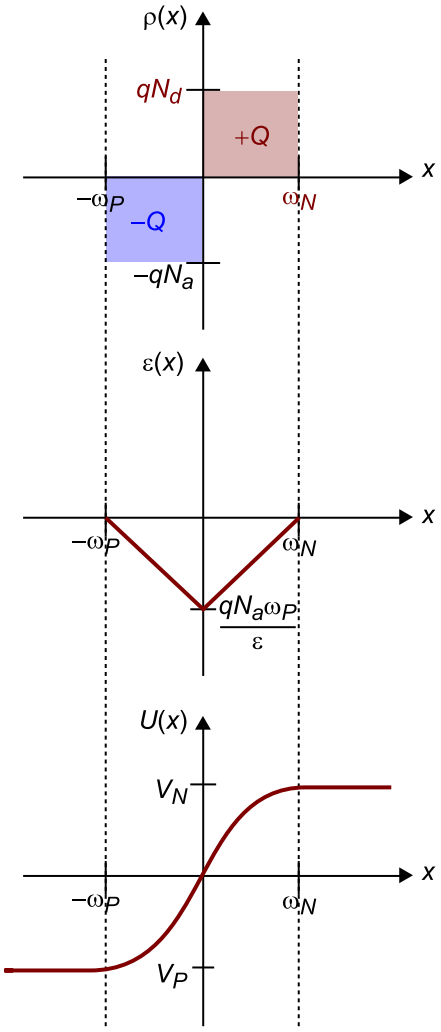
Per a això simplificarem el model de la unió P-N fent dues suposicions que s'aproximen força a la realitat:

- Unió abrupta.

- La z.c.e. s'ha escombrat de portadors (no hi ha càrregues mòbils).

En la figura 42 podem observar en primer lloc la distribució de càrregues a la zona de càrrega espacial delimitada entre $-\omega_P$ y ω_N.

Figura 42. Unió P-N



A la zona P hi ha una distribució de càrrega homogènia $-Q$ de valor $-qN_a$, mentre que a la zona N tenim la mateixa distribució però de signe contrari, ja que per la llei de conservació de la càrrega s'ha de complir:

$$qN_a = qN_d \qquad 7.76$$

El camp elèctric E generat per una distribució de càrregues ρ compleix la llei de Maxwell:

$$\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad E = \frac{1}{\varepsilon}\int \rho(x)dx \qquad 7.77$$

on ε és la permitivitat dielèctrica del medi.

Per tant:

$$E_{máx} = \frac{qN_a\omega_P}{\varepsilon} = \frac{qN_d\omega_N}{\varepsilon} \qquad 7.78$$

$$N_a\omega_P = N_d\omega_N \qquad 7.79$$

$$U(x) = \int E(x)dx \qquad 7.80$$

$$\phi_0 = V_N - V_P = 1/2(\omega_N + \omega_P)E_{\text{máx}} = 0{,}7 \text{ V} \qquad 7.81$$

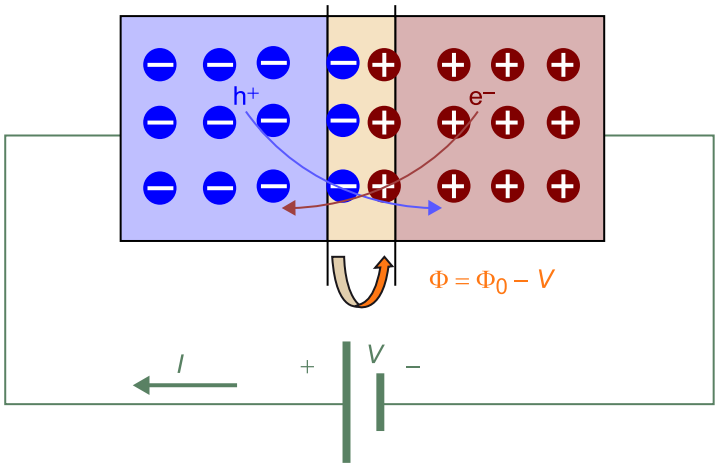
La diferència de potencial entre la zona N i la zona P acostuma a ser d'uns 0,7 volts, aproximadament, per al silici. Cal remarcar que el potencial es manté constant fora de la zona de càrrega espacial.

Díode d'unió P-N en polarització directa

Quan polaritzem una unió P-N amb una tensió $V > 0$ reduirem la diferència de potencial de la unió, $\phi = \phi_0 - V$, i així es reduirà també la zona de càrrega espacial.

En reduir la diferència de potencial entre ambdues zones es facilitarà el pas d'electrons e^- de la zona N a la zona P i de forats h^+ de la zona P a la zona N. La figura 43 mostra aquest efecte.

Figura 43. Unió P-N en polarització directa



D'aquesta manera, el circuit extern ha de subministrar h^+ per a contrarestar l'excés generant un **corrent del díode en contínua**:

$$I(V) = I_S(e^{\frac{qV}{KT}} - 1) \qquad 7.82$$

- I_S és el corrent de saturació i acostuma a valer entre 10^{-6} i 10^{-15} A.
- q és la càrrega de l'electró: 1,602 x 10^{-19} coulombs.
- K és la constant de Boltzmann: 1,38 * 10^{-23} JK^{-1}.

- T és la temperatura en kèlvins.

Es defineix:

$$\alpha = q/KT \qquad 7.83$$

Per a T = 298 ºK → α = 1/(25 mV).

Circuit equivalent en petit senyal

Fins aquest punt ens hem limitat a estudiar els semiconductors a nivell físic, aspecte necessari per a comprendre'n el funcionament i les característiques. A partir d'ara ens centrarem més en les seves característiques de petit senyal per a entendre'n les aplicacions en circuits de microones. Perquè puguem utilitzar un díode en un circuit de microones primer haurem de polaritzar-lo en contínua en un punt de treball concret (I_0, V_0) segons l'equació 7.82. Si ens interessa treballar en zona lineal, intentarem polaritzar-lo en un punt en què la seva característica *I-V* s'aproximi a un comportament lineal, tal com s'indica en la figura 44.

Al voltant d'aquest punt de polarització, si superposem una petita tensió alterna v_i sumada a la tensió de polarització contínua V_0, el comportament del díode en petit senyal es podrà aproximar, en primer ordre, al d'una conductància de valor:

$$g_d = \frac{\partial I}{\partial V}\bigg|_{V_0} \qquad 7.84$$

Seguint un altre raonament, podem plantejar l'equació del díode en directa 7.82 com una aproximació de Taylor de segon ordre al voltant de V_0:

$$I(V) = I_0 + v\frac{\partial I}{\partial V}\bigg|_{V_0} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 I}{\partial V^2}\bigg|_{V_0} + \ldots \qquad 7.85$$

$$I(V) = I_0 + i = I_0 + vg_d + \frac{v^2}{2}g'_d + \ldots \qquad 7.86$$

Aquesta última equació 7.86 s'anomena ***aproximació de petit senyal del díode*** i és vàlida per a la majoria d'anàlisis de circuits amb díodes, sense considerar els efectes de l'encapsulament.

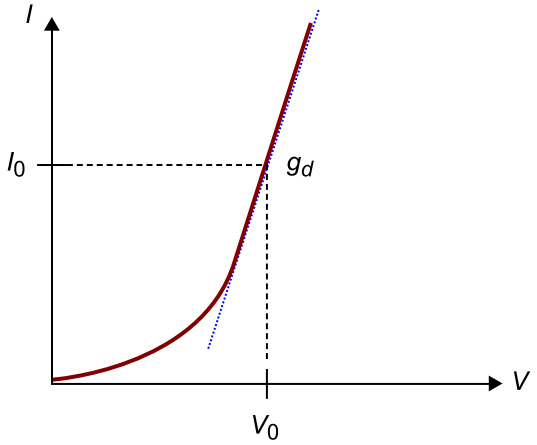
Segons la relació entre el corrent i la tensió en el díode, donada per l'equació 7.82, i aplicant 7.83, tindrem:

$$g_d = g(V_0) = \frac{q}{KT}I_0 \qquad 7.87$$

On *gd* és la **conductància dinàmica** del díode i la seva inversa, *Rj*, la **resistència dinàmica** de la unió. Se les anomena *dinàmiques* perquè dependran del punt de treball escollit.

$$g'_d = \left.\frac{\partial g_d}{\partial V}\right|_{V_0} = \frac{q}{KT} g_d \qquad 7.88$$

Figura 44. Característica *I-V* d'un díode polaritzat en directa: polarització en el punt de treball (V_0, I_0)



No obstant això, aquest model no és suficient per a considerar-lo vàlid en circuits reals. Haurem de tenir en compte almenys tres efectes addicionals més:

- **Capacitat de difusió dinàmica C_j**: Quan polaritzem el díode en contínua aquest efecte no es considera, ja que suposem que en aplicar una tensió fixa *V*, s'ha arribat ja a un equilibri de càrregues a la unió P-N, però quan treballem amb senyals de microones en petit senyal, que varien ràpidament d'un valor a un altre, haurem de considerar el fet que els portadors majoritaris lliures necessiten un cert **temps de recombinació mitjà**, τ_r, que dependrà del tipus de material i que en limitarà el funcionament en freqüència. Aquest fenomen es modelitza com una certa capacitat C_j en paral·lel, el valor de la qual depèn de la freqüència de treball, ω i del temps de recombinació mitjà τ_r:

  $$C_j(V_0) = \frac{1}{2}\omega\tau_r g_d(V_0) \qquad 7.89$$

  La recerca actual se centra a trobar materials semiconductors que minimitzin al màxim aquesta capacitat i permetin el funcionament del díode a freqüències elevades.

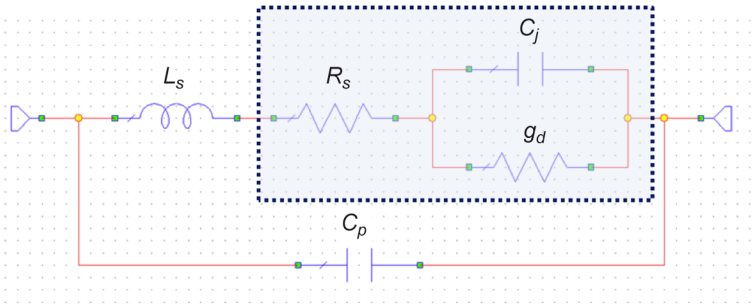
- **Efectes de l'encapsulament L_S i C_P**: a freqüències de microones, els efectes de l'encapsulament del semiconductor comencen a tenir un impacte important en el comportament del dispositiu, fins al punt de limitar-ne la freqüència de funcionament, per la qual cosa cal incloure'ls en el model de petit senyal del dispositiu. Bàsicament, es poden modelitzar com una inductància en sèrie de valor L_S i una capacitat en paral·lel C_P. Aquests valors,

facilitats pel fabricant, dependran de la capacitat tecnològica d'aquests fabricants, que s'esforçaran a minimitzar-los al màxim per a ampliar l'ús del díode a la màxima freqüència possible.

- **Efectes del contacte R_S**: Finalment, no podem tampoc obviar els efectes de la resistència òhmica, a causa dels contactes de l'encapsulament amb el semiconductor i amb la placa del circuit, que, si bé en contínua es poden menysprear, a freqüències de microones es converteixen en importants (recordeu l'efecte resistiu de la profunditat de penetració de les ones electromagnètiques en un conductor). Aquest valor també és subministrat per cada fabricant, que s'esforça a fabricar el díode amb la mínima R_S.

Per tant, el circuit equivalent en petit senyal d'un díode polaritzat en directa queda modelitzat de la manera que es presenta en la figura 45.

Figura 45. Circuit equivalent del díode en directa en petit senyal



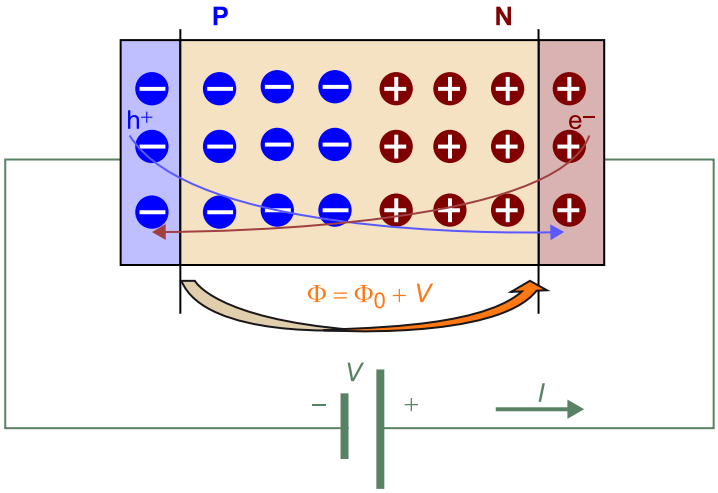
Cal assenyalar que per a la unió semiconductora només hem pres l'aproximació de primer ordre g_d, menyspreant la de segon ordre g'_d. En la majoria de les aplicacions lineals això serà cert; només en les aplicacions no lineals del díode caldrà considerar també el terme de segon ordre.

Díode d'unió P-N en polarització inversa

Quan es polaritza una unió P-N amb una tensió $V < 0$ augmentarà la diferència de potencial de la unió, $\Phi = \Phi_0 + V$, i augmentarà, per tant, la zona de càrrega espacial i el camp elèctric entre la zona P i la N.

En augmentar la diferència de potencial entre ambdues zones, es limitarà el pas d'e^- de la zona N a la zona P i de h^+ de la zona P a la zona N, de manera que molt pocs aconseguiran travessar l'àmplia zona de càrrega espacial per difusió. La figura 46 il·lustra aquest efecte.

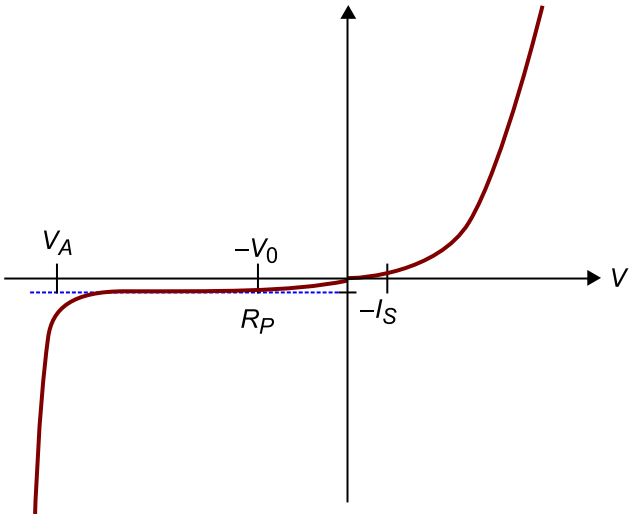
Figura 46. Unió P-N polaritzada en inversa



D'aquesta manera, el corrent generat serà molt petit i d'un valor pràcticament constant per a qualsevol valor de la tensió inversa V aplicada, tot i que a partir d'un cert valor V_A, el díode entrarà en el que s'anomena ***zona d'allau***, en la qual es pot arribar a produir la **ruptura de la unió** a causa de la gran intensitat del camp generat, que és capaç d'arrencar els ions de la seva estructura cristal·lina.

La figura 47 completa la característica I–V d'un díode incloent-hi la polarització inversa.

Figura 47. Característica I-V del díode: polarització inversa ($-V_0$, I_S)



Circuit equivalent en petit senyal

Un cop polaritzat el díode en contínua amb una tensió inversa en el punt de treball ($-V_0$, I_S), n'analitzem el comportament en petit senyal per a veure com es comportarà a freqüències de microones.

Igual que vam fer amb el díode en directa, ara també es podrà aproximar el comportament com una resistència de valor:

$$R_p = \left.\frac{1}{\frac{\partial I}{\partial V}}\right|_{V_0} \approx \text{cte.} \qquad 7.90$$

Si ens fixem en la zona de polarització inversa de la figura 47 veiem que en un gran interval de tensions negatives la R_P es manté pràcticament a un valor constant i de valor alt (a la pràctica, d'uns quants MΩ), de manera que el díode en inversa és gairebé un circuit obert, pel qual passa un corrent molt petit, gairebé menyspreable, $-I_S$. Això serà cert en el marge 0-V_A; més enllà de la tensió d'allau, el díode quedarà danyat.

Tanmateix, per al circuit equivalent en petit senyal haurem de tenir en compte els tres efectes que ja vam veure també en polarització directa, amb el matís que ara la capacitat C'_j del díode té un altre significat:

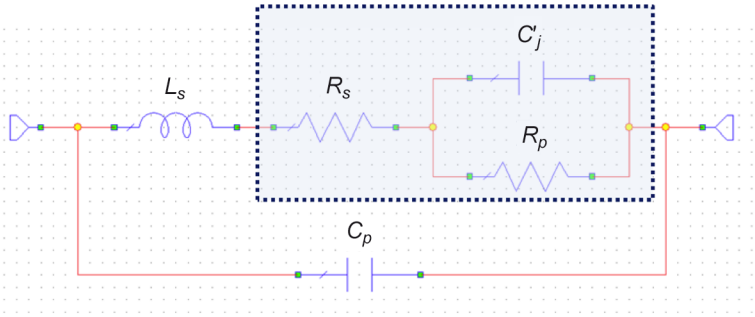
- **Capacitat de la zona de càrrega espacial (z.c.e.), C'$_j$**: El díode polaritzat en inversa genera una capacitat que depèn de l'eixamplament de la z.c.e. i aquest eixamplament és proporcional a la tensió inversa aplicada. Per tant, el díode en inversa es comporta com una capacitat controlada per tensió, i per això es diu que presenta un **efecte varactor**:

$$C'_j = \frac{C_{j0}}{\sqrt{(1-\frac{V}{\phi_0})}} \qquad 7.91$$

  El díode varactor és molt utilitzat per a dissenyar oscil·ladors controlats per tensió. La tècnica consisteix a situar el díode com a part del seu circuit ressonant i, simplement modificant la tensió de polarització V, aconseguim modificar la capacitat del circuit ressonant i, amb això, la freqüència d'oscil·lació. Això resulta molt útil en circuits moduladors o desmoduladors de freqüència, PLL, etc. Quant a la resta de components del circuit equivalent en petit senyal en inversa, L_S, C_P i R_S, tenen el mateix significat que en el cas de polarització directa.

La figura 48 mostra el circuit equivalent en petit senyal del díode polaritzat en inversa.

Figura 48. Circuit equivalent del díode en inversa en petit senyal



3.2. Díodes

Un cop explicades els fonaments del funcionament de la unió P-N semiconductora, en aquest apartat estarem en condicions d'analitzar els díodes utilitzats més comunament en els circuits de microones.

3.2.1. Díode de barrera Schottky

El díode de barrera Schottky és una **unió metall-semiconductor**.

Díode de barrera Schottky

El díode de barrera Schottky rep el seu nom del físic alemany Walter H. Schottky.

La zona semiconductora és de tipus N (s'utilitza molt habitualment el GaAs), on la mobilitat dels electrons és molt superior a la dels forats, de manera que les característiques del temps de recombinació τ_r seran donades principalment pels portadors majoritaris mòbils d'aquesta zona N, els electrons.

Les dues característiques principals d'aquests díodes són, d'una banda, la seva baixa tensió de colze o potencial d'unió i, de l'altra, la seva baixa capacitat de difusió en polarització directa, $C_{dif} \approx 0$.

1) Característica *I-V*

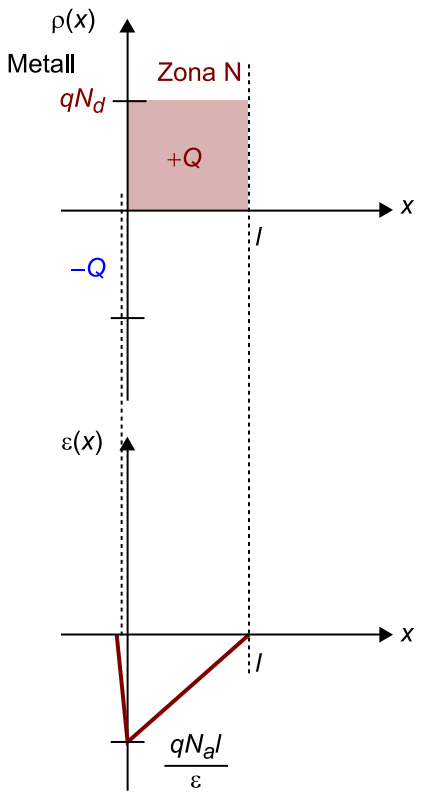
La carcaterística *I-V* del díode Schottky en polarització directa és molt semblant a la de qualsevol díode:

$$I = I_S(e^{\frac{qV}{\eta KT}} - 1) \qquad 7.92$$

on h és el factor d'idealitat i té un valor entre 1 i 2. Per a díodes Schottky acostuma a tenir un valor al voltant d'1,2.

2) Càrrega i camp elèctric

Figura 49. Distribució de càrrega i camp elèctric en un díode Schottky



La diferència principal amb la unió P-N és que, en aquest cas, el metall té una distribució de càrregues molt més estreta i concentrada, cosa que fa que el camp sigui molt més abrupte en el metall que en el semiconductor tipus N.

Podem dir que el metall es comporta com una zona P amb dopatge degenerat (zona P^+) sense ions, i és per això que la z.c.e. és molt estreta.

3) Característica *C-V*

Ja hem vist que el díode Schottky polaritzat en directa té una capacitat molt baixa pel fet que qualsevol portador mòbil majoritari e^- de la zona N que travessi la z.c.e. no quedarà acumulat, ja que la conductivitat σ del metall és molt alta. Tampoc no hi haurà capacitat deguda a h^+ que passin del metall al semiconductor de la zona N, atès que troben una gran barrera de potencial.

El díode Schottky polaritzat en inversa presenta un **efecte varactor** (vegeu el circuit equivalent en petit senyal del díode d'unió P-N en polarització directa):

$$C'_j = \frac{C_j(0)}{\sqrt{\left(1-\frac{V}{V_b}\right)}} \qquad 7.93$$

on V_b és el **potencial de la unió**.

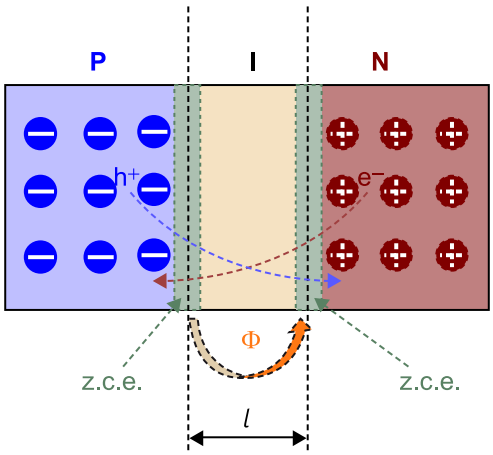
3.2.2. Díode PIN

El díode PIN rep el seu nom a causa de la seva estructura semiconductora interna, formada per una zona de tipus P, una zona semiconductora intrínseca en el centre i una altra zona de tipus N. Aquesta seria l'estructura del díode PIN ideal, si bé normalment té una zona P^+, la zona intrínseca és una zona N poc dopada i, finalment, la zona N és realment una zona N^+.

Per tant, la característica principal d'aquest díode és l'existència d'una zona intrínseca intermèdia que es caracteritza per no tenir portadors, a causa de l'intens camp elèctric de valor constant que hi ha.

Aquesta zona intermèdia fa que, d'una banda, es formin dues petites àrees de z.c.e. que faran que el díode tingui una capacitat molt petita (i això els fa molt indicats per a aplicacions de commutació en què calgui molt aïllament). D'altra banda, com més gran sigui aquesta àrea intermèdia, per a una mateixa tensió de polarització inversa, més petit serà el seu camp elèctric i, en conseqüència, caldran tensions de polarització més grans per a provocar la ruptura de la unió (i això els fa especialment indicats com a rectificadors de potència a tensions altes).

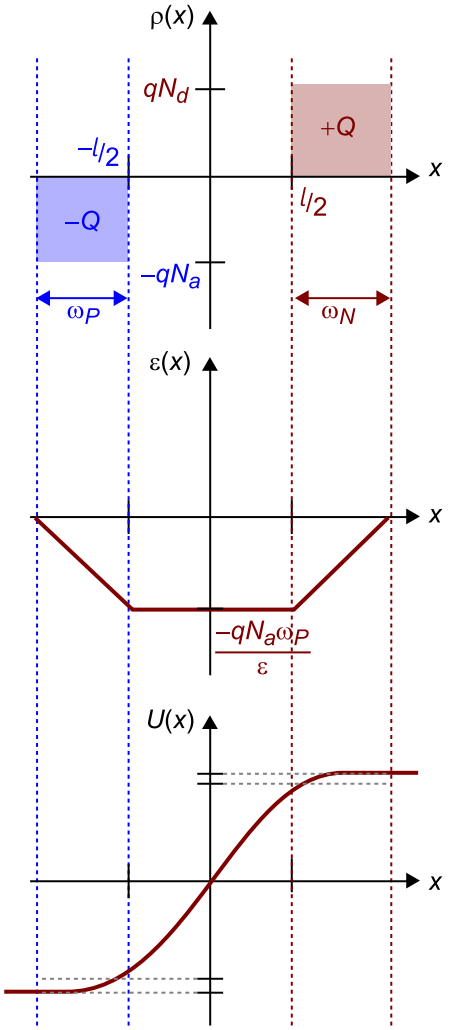
Figura 50. Estructura interna d'un díode PIN



Càrrega i camp elèctric

En la figura 51 es pot observar que la característica diferenciadora principal del díode PIN és la zona semiconductora intrínseca intermèdia, que hi provoca l'existència d'un camp màxim constant; això fa que es mantingui sense portadors i, com més gran sigui la seva longitud *l* més gran serà la seva contribució a la diferència de potencial Φ de la unió.

Figura 51. Distribució de càrrega i camp elèctric en un díode PIN



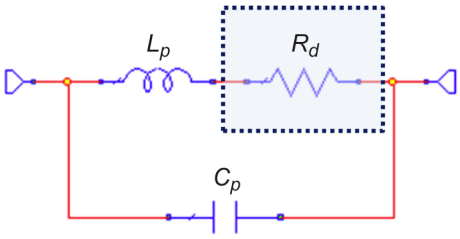
Díode PIN polaritzat en directa

Quan polaritzem un díode PIN en directa, la z.c.e. gairebé desapareix, es crea una gran concentració de portadors a la zona *I* i, si la longitud *l* es més petita que la longitud de difusió dels portadors, aquesta zona *I* serà conductora.

Efecte varistor del díode PIN en directa

El díode PIN en directa es comporta com una resistència R_d controlada per tensió. La capacitat és tan baixa que podem menysprear-la en el model. No obstant això, sí que haurem de seguir tenint en compte els efectes paràsits de l'encapsulament, representats per L_P i C_P.

Figura 52. Circuit equivalent del díode PIN polaritzat en directa



Per a calcular aquesta resistència del díode PIN en directa haurem de considerar el corrent que travessa el díode, I_d, la qual quedarà determinada per la quantitat de portadors de la zona intrínseca i la seva capacitat per a recombinar, que es mesura amb el paràmetre **temps de recombinació mitjà** τ_r:

$$I_d = \frac{Q}{\tau_r} = \frac{qnsl}{\tau_r} \quad \rightarrow \quad qn = \frac{I_d \tau_r}{sl} \qquad 7.94$$

on l és la longitud de la zona intrínseca, s n'és la secció, q és la càrrega de l'electró i n és el nombre de portadors.

Si considerem la **conductivitat elèctrica** σ en funció de la mobilitat dels portadors μ, de manera que $\sigma = 2\mu qn$, tindrem:

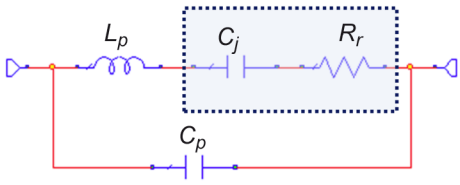
$$R_d = \rho \frac{l}{s} = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{s} = \frac{1}{2\mu qn}\frac{l}{s} = \frac{1}{2\mu \frac{I_d \tau_r}{sl}}\frac{l}{s} = \frac{l^2}{2\mu I_d \tau_r} = \frac{\beta}{I_d} \qquad 7.95$$

És a dir, la resistència en directa depèn del corrent de polarització que, al seu torn, depèn de la tensió de polarització aplicada.

Díode PIN polaritzat en inversa

Quan polaritzem un díode PIN en inversa fem que aparegui una capacitat C_j de la unió molt petita, a causa de la longitud de la zona intrínseca, i això fa que la impedància del díode sigui molt alta. Aquesta característica, unida a la baixa resistència que té en directa, fa que el díode PIN sigui especialment indicat per a la commutació entre circuits de microones. S'aconsegueixen valors típics de C_j de l'ordre d'1 pF o menys. Valors típics de R_r són per sota dels 5 Ω.

Figura 53. Circuit equivalent del díode PIN polaritzat en inversa



4. Figures de mèrit d'amplificadors

Entre les figures de mèrit més importants d'un amplificador hi ha les que descrivim en aquest apartat. En primer lloc, tenim la característica principal, que és el **guany de potència**. Normalment tindrem un requisit mínim de valor de guany, de manera que es descartaran els amplificadors que hi estiguin per sota.

Un altre requisit és l'**aïllament entre l'entrada i la sortida**. Aquest requisit serà important en aplicacions que requereixin garantit una bona estabilitat del dispositiu.

Les **pèrdues de retorn** ens donen una idea del grau d'adaptació d'impedàncies tant a l'entrada com a la sortida de l'amplificador. Normalment interessa que siguin tan altes com sigui possible, per tal d'assegurar la màxima transferència de potència de senyal entre la font i la càrrega i, alhora, disminuir els efectes de les reflexions de senyal que poden provocar interferència i distorsió.

Les figures de mèrit que ens mesuren la linealitat del dispositiu són també molt importants per a saber quin serà el nivell màxim de senyal que podrem amplificar a l'entrada sense començar a tenir problemes de distorsió. Aquestes figures són el **punt de compressió a menys 1 dB** i el **punt d'intercepció de tercer ordre**.

El **marge dinàmic sense espuris** ens defineix el marge de nivells de senyal amb què podrem treballar amb l'amplificador, de manera que pugui distingir el senyal del soroll i no comencin a aparèixer espuris indesitjats per sobre del nivell de soroll.

Finalment hem de conèixer el **nivell de soroll** que l'amplificador introduirà en el sistema. Com veurem, interessa que les primeres etapes d'un sistema de microones tinguin un nivell de soroll baix.

L'elecció final d'un amplificador dependrà, doncs, de l'aplicació en què s'hagi d'utilitzar, donant més pes a una figura o una altra, en funció de les condicions que ha de suportar dins de l'estructura.

És important tenir en compte cada figura de mèrit per a un disseny específic i saber trobar la solució òptima per a cada aplicació en concret. També hem de recordar la variació en funció de la freqüència que tenen cadascuna d'aquestes característiques.

A continuació s'exposen les principals figures de mèrit d'un amplificador.

4.1. Guany

Sens dubte, la característica principal, i que més ens interessarà, és el guany de l'amplificador, ja que defineix la raó de ser del dispositiu.

El **guany en potència** d'un amplificador és una mesura de la relació entre la potència de senyal a la sortida i la potència de senyal a l'entrada del dispositiu:

$$G = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \qquad 7.96$$

Aquesta definició que, en un principi sembla molt senzilla, no ho és tant quan entrem en una anàlisi més subtil sobre quina és la influència de la impedància de la font Z_S i la impedància de la càrrega Z_L amb què es trobarà l'amplificador i, precisament, serà aquest un dels aspectes a tenir més en compte en el disseny d'amplificadors.

Per tal de tenir un punt de referència comú, el full de dades d'un transistor sol donar el guany en el cas particular ideal en què les impedàncies de font Z_S i de càrrega Z_L estiguin perfectament adaptades al transistor. Llavors podem afirmar que el guany en potència és directament:

$$G[\text{dB}] = 20 \log \left(|S_{21}|\right) \qquad 7.97$$

Exemple 1

Els paràmetres S d'un transistor a 2 GHz són els següents:

$$S_{11} = |0{,}32|_{\angle -70}; \quad S_{21} = |5{,}56|_{\angle 60}; \quad S_{12} = |0{,}02|_{\angle 15}; \quad S_{22} = |0{,}71|_{\angle -31} \qquad 7.98$$

Es demana calcular el guany de potència d'un amplificador implementat amb aquest transistor a 2 GHz, considerant que les impedàncies de font Z_S i de càrrega Z_L estan perfectament adaptades al transistor.

Solució

Només cal aplicar l'equació 7.97:

$$G[\text{dB}] = 20 \log \left(|S_{21}|\right) = 20 \log \left(\left||5{,}56|_{\angle 60}\right|\right) = 20 \log \left(|5{,}56|\right) = 14{,}9 \text{ dB} \qquad 7.99$$

4.2. Aïllament

L'**aïllament** és una mesura de la influència del port de sortida sobre el d'entrada i és un paràmetre clau de cara a tenir una primera valoració sobre la possibilitat d'inestabilitat d'un circuit amplificador. Per a un sistema adaptat

a una impedància de referència de 50 Ω, en què les impedàncies de font Z_S i de càrrega Z_L estiguin perfectament adaptades al transistor, es defineix de la manera següent:

$$I[\text{dB}] = -20 \log \left(|S_{12}|\right) \qquad 7.100$$

En general, interessarà que l'amplificador tingui un aïllament alt, cosa que equival a dir que I tingui el valor més petit possible.

Exemple 2

Per al mateix transistor de l'exemple 1, es demana calcular l'aïllament d'un amplificador implementat amb aquest transistor a 2 GHz, en les mateixes condicions d'adaptació d'impedàncies.

Solució

Si apliquem l'equació 7.100:

$$I[\text{dB}] = -20 \log \left(|S_{12}|\right) = -20 \log \left(\left||0{,}02|_{\angle 15}\right|\right) = -20 \log \left(|0{,}02|\right) = 34 \text{ dB} \qquad 7.101$$

4.3. Pèrdues de retorn

Aquest paràmetre dóna una idea del grau d'adaptació d'impedàncies a l'entrada i a la sortida de l'amplificador quan està immers en un sistema adaptat a una impedància de referència de 50 Ω:

$$L_{\text{in}}[\text{dB}] = -20 \log \left(|\Gamma_{\text{in}}|\right) = -20 \log \left(|S_{11}|\right) \qquad 7.102$$

Aquestes serien les pèrdues de retorn a l'entrada; de la mateixa manera, es poden definir les pèrdues de retorn a la sortida:

$$L_{\text{out}}[\text{dB}] = -20 \log \left(|\Gamma_{\text{out}}|\right) = -20 \log \left(|S_{22}|\right) \qquad 7.103$$

En general, interessa que tant l'entrada com la sortida de l'amplificador estiguin tan adaptades com sigui possible a la impedància de referència de 50 Ω, de manera que interessarà tenir el valor més gran possible de pèrdues de retorn.

Exemple 3

Per al mateix transistor de l'exemple 1 es demana calcular les pèrdues de retorn a l'entrada i a la sortida d'un amplificador implementat amb aquest transistor a 2 GHz, en les mateixes condicions d'adaptació d'impedàncies.

Solució

Aplicant les equacions 7.102 i 7.103:

$$L_{in}[\text{dB}] = -20\log(|S_{11}|) = -20\log(|0{,}32|_{\angle -70}|) = -20\log(|0{,}32|) = 9{,}9\ \text{dB} \qquad 7.104$$

$$L_{out}[\text{dB}] = -20\log(|S_{22}|) = -20\log(|0{,}71|_{\angle -31}|) = -20\log(|0{,}71|) = 3\ \text{dB} \qquad 7.105$$

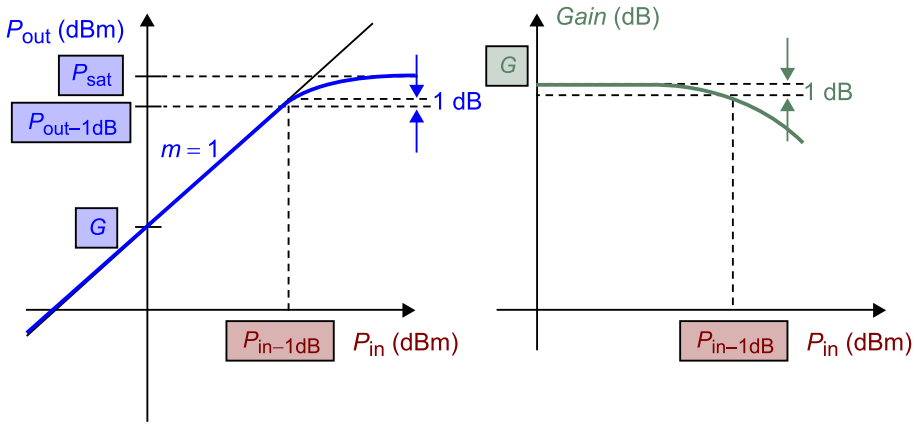
4.4. Nivell de compressió a –1 dB

El **nivell de compressión a –1 dB a l'entrada**, P_{in-1dB}, d'un amplificador es defineix com el nivell de potència de senyal a l'entrada per al qual el nivell de potència de senyal a la sortida està 1 dB per sota del que esperaríem si el seu comportament continués sent idealment lineal.

Amb aquest paràmetre, P_{in-1dB} (dBm), tenim una manera de valorar la potència màxima que l'amplificador és capaç de suportar en règim lineal, a partir de la qual podem considerar que comença a entrar en zona no lineal i s'aproxima a la potència de saturació, P_{sat}, que és el límit màxim que el dispositiu és capaç de lliurar. D'alguna manera, P_{in-1dB} ens marca el límit superior de potència de treball en la zona lineal de l'amplificador.

La figura 54 il·lustra de dues maneres diferents el significat d'aquesta figura de mèrit.

Figura 54. Concepte de *nivell de compressió a -1 dB*, P_{-1dB}



A l'esquerra de la figura 54 podem veure la gràfica que relaciona la potència de senyal a l'entrada, P_{in} (dBm), amb la potència de senyal a la sortida, P_{out} (dBm). Per a valors baixos de potència de senyal a l'entrada, la potència de senyal a la sortida respon proporcionalment al guany de l'amplificador, és a dir, hi ha

una relació lineal ideal entre les dues, però a partir de $P_{\text{in–1dB}}$ (dBm) podem dir que estem ja fora de la zona lineal i entrem en la zona de comportament no lineal i arribem, finalment, al nivell de saturació de l'amplificador.

A la dreta de la figura 54 presentem una altra interpretació d'aquest concepte: el guany de l'amplificador és constant per a qualsevol nivell de senyal a l'entrada (situació ideal), però a partir d'un cert nivell $P_{\text{in–1dB}}$ (dBm) veiem que el valor nominal del guany ha disminuït en 1 dB, i després continua caient a mesura que la potència a l'entrada continua augmentant.

Finalment, és important considerar si aquest paràmetre està especificat respecte a l'entrada $P_{\text{in–1dB}}$ (dBm) o a la sortida $P_{\text{out–1dB}}$ (dBm).

4.5. Linealitat: punt d'intercepció de tercer ordre

TOI (***third order intermodulation***) o bé IP_3 (**punt d'intercepció de tercer ordre**), són les denominacions més comunes amb què es quantifica el fenomen de la intermodulació en un dispositiu no lineal.

En aquest cas, ens centrem a mesurar el nivell d'intermodulació de tercer ordre, que és el degut al terme cúbic de la relació entrada-sortida de l'amplificador. Aquest paràmetre és important, perquè ens dóna un punt de referència comparatiu quant al grau de linealitat d'un amplificador i, de manera similar a com ho feia el $P_{\text{in–1dB}}$, permetrà valorar, d'entre diferents amplificadors, quin té un marge més ampli de potències en què el seu comportament es pugui considerar predominantment lineal.

Idealment, voldríem que l'amplificador fos perfectament lineal en la seva característica de potència a l'entrada respecte a la de la sortida, però l'amplificador perfecte no existeix i sempre tindrem comportaments no lineals que provocaran inevitablement intermodulacions.

Per a qualsevol dispositiu actiu real no lineal, podem escriure la seva funció de transferència en tensió (tensió a la sortida, v_o, en funció de la tensió a l'entrada, v_i) com una sèrie de Taylor:

$$v_o = k_0 + k_1 v_i + k_2 v_i^2 + k_3 v_i^3 + \dots \qquad 7.106$$

Podem apreciar-hi que l'aportació de cada terme v_i^n depèn del valor del seu coeficient k_n, que és específic per a cada dispositiu. Depenent de l'aplicació, ens interessarà que destaqui un terme o diversos d'entre la resta. Per exemple, per a un amplificador, interessa que k_1 (que és directament el seu valor de guany en tensió) predomini respecte a tots els altres; idealment voldríem tots els coeficients nuls excepte aquest, de manera que a la sortida tinguéssim una rèplica exacta de l'entrada però amplificada en un factor k_1:

$$v_o = k_1 v_i \qquad 7.107$$

En el cas d'un mesclador, però, no interessa en absolut tenir el terme lineal $k_1 v_i$, atès que provocaria un aïllament baix entre ports, sinó que, normalment, interessa només el terme quadràtic (en alguns casos, com en mescladors subharmònics, interessa el terme cúbic), és a dir, que k_2 predomini àmpliament sobre la resta de coeficients k_j ($j \neq 2$). Idealment interessaria també que la resta fossin nuls, inclòs k_1.

Vegeu també

Els mescladors s'expliquen en el mòdul "Mescladors, multiplicadors i oscil·ladors de microones" d'aquest material didàctic.

Tornant al cas que ens ocupa d'un amplificador, si suposem dos harmònics, f_1 y f_2, a la seva entrada amb un mateix nivell de potència, la no-linealitat de la seva resposta generarà infinites combinacions entre ells:

$$\pm m f_1 \pm n f_2 \qquad 7.108$$

degudes als infinits termes exponencials de l'equació 7.106, algunes de les quals poden caure en la banda d'operació de l'amplificador i, per tant, interferir i distorsionar el senyal útil; seran, concretament, els anomenats ***productes d'intermodulació de tercer ordre***, en les seves combinacions

$$2f_1 - f_2 \quad \text{y} \quad 2f_2 - f_2 \qquad 7.109$$

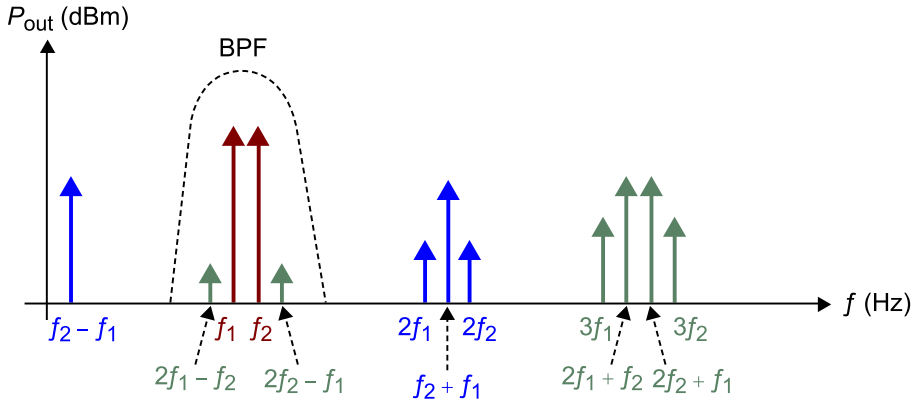
els que habitualment afectin amb més intensitat, gràcies al pes més gran que, en general, sol tenir el seu coeficient k_2 respecte a la resta. És per aquest motiu que s'estudia en detall el punt d'intercepció de tercer ordre i és el que s'acostuma a facilitar en les especificacions de qualsevol amplificador com a referent per a avaluar la linealitat del dispositiu.

A continuació, analitzarem els senyals que apareixeran a la sortida de l'amplificador a causa d'aquests dos tons injectats a la seva entrada, tal com es mostra en la figura 55.

D'una banda hi haurà un terme de contínua, k_0, que es podrà filtrar fàcilment amb un condensador en sèrie de desacoblament.

D'altra banda, apareixeran els **productes d'intermodulació de segon ordre**, que són els deguts al terme quadràtic de l'equació 7.106, $k_2 v_i^2$ (marcats en blau en la figura 55), i que seran, d'una banda, dos harmònics a freqüència doble, un a $2f_1$ i l'altre a $2f_2$, que també són fàcilment filtrables, ja que cauen prou lluny (una octava) del senyal útil, i dos harmònics deguts a la combinació d'ambdós tons, $f_1 + f_2$ i $f_2 - f_1$, que també són fàcilment filtrables ja que cauen prou lluny (gairebé una octava) del senyal útil (figura 55, també en blau).

Figura 55. Espectre de senyal a la sortida de l'amplificador que mostra els principals productes d'intermodulació generats per la seva no-linealitat



Analitzem ara el terme cúbic $k_3 v_i^3$. En aquest cas, els dos tons de l'entrada generaran els anomenats ***productes d'intermodulació de tercer ordre***. D'entre aquests, $3f_1$, $3f_2$, $2f_1 + f_2$, $f_1 + 2f_2$ es podran filtrar sense problemes (figura 55, de color verd), però els productes d'intermodulació $2f_1 - f_2$ i $2f_2 - f_1$ no es podran filtrar, ja que cauen al bell mig de la banda de treball. En la figura 55 s'ha dibuixat (en negre) la resposta d'un filtre passabanda, BPF, on es pot apreciar clarament que és possible eliminar la majoria d'intermodulaciones però aquestes dues últimes no, atès que cauen dins de la banda del filtre i són inevitables. Aquest fenomen rep el nom de ***distorsió d'intermodulació***.

Exemple 4

Suposem un amplificador que ha de treballar en la banda de freqüències de 2,4 a 2,5 GHz i volem amplificar dos canals dins d'aquesta banda, un centrat a f_1 = 2,45 GHz i l'altre a f_2 = 2,46 GHz. Avalueu la possibilitat de tenir distorsió en el nostre sistema.

Solució

A l'entrada de l'amplificador tindrem dues portadores. Tal com hem analitzat anteriorment, es generaran els productes d'intermodulació següents:

$$2f_1 = 4{,}9\text{ GHz}, 2f_2 = 4{,}92\text{ GHz}, 3f_1 = 7{,}35\text{ GHz}, 3f_2 = \\ = 7{,}38\text{ GHz}, 2f_1 + f_2 = 7{,}36\text{ GHz}, f_1 + 2f_2 = 7{,}37\text{ GHz} \qquad 7.110$$

Tots cauen fora de la banda, ja que el de freqüència més baixa està centrat a **4,9 GHz, gairebé una octava per sobre de la freqüència de pas màxima** (2,5 GHz), de manera que es podran eliminar fàcilment mitjançant un filtre passabaix.

No obstant això,

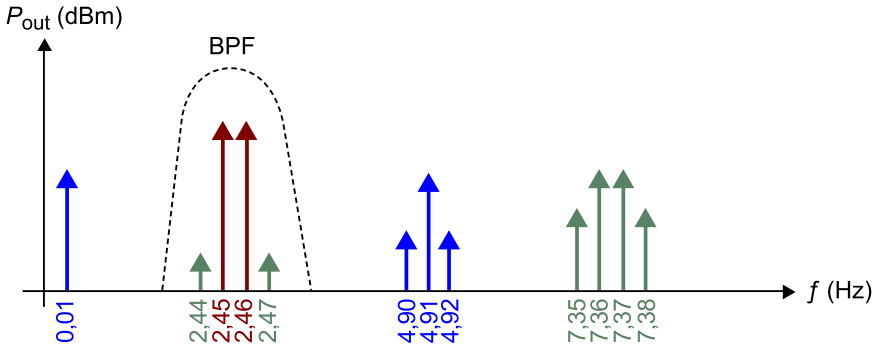
$$2f_1 - f_2 = 2 * 2{,}45 - 2{,}46 = 2{,}44\text{ GHz} \qquad 7.111$$

és un producte d'intermodulació que cau dins de la banda de l'amplificador i, per tant, pot provocar distorsió, igual que:

$$2f_2 - f_1 = 2{,}47\text{ GHz} \qquad 7.112$$

Per tant, el sistema sí és susceptible de tenir distorsió i caldrà utilitzar un amplificador amb un punt d'intercepció tan alt com sigui possible.

Figura 56. Espectre de senyal a la sortida de l'amplificador que mostra els principals productes d'intermodulació generats per la seva no-linealitat



En aquest exemple veiem, doncs, que el fenomen de la distorsió d'intermodulació és d'especial importància, ja que ens pot limitar el **marge dinàmic** i l'**amplada de banda** del nostre sistema.

Una mesura de la distorsió d'intermodulació ens la donen els anomenats ***punts d'intercepció*** d'ordre n.

Si dibuixem una gràfica que relacioni la potència en [dBm] de senyal útil a l'entrada en l'eix d'abscisses (potència de les dues portadores) i la potència a la sortida en [dBm] del producte d'intermodulació n en l'eix d'ordenades, obtindrem, per a petit senyal, una recta de pendent 1 per al terme lineal de l'equació 7.106, és a dir, per a $n = 1$. Tanmateix, aquesta recta és ideal, ja que en un dispositiu real no obtindrem una relació lineal perfecta, atès que a mesura que el nivell de senyal a l'entrada augmenta, entrem progressivament en l'anomenada ***zona de compressió***, tal com ja hem vist en l'apartat anterior.

Si fem el mateix per a $n = 2$, obtindrem una recta ideal de pendent 2, atès que en una relació quadràtica, en passar a logaritme, tindrem el 2 multiplicant. L'origen d'aquesta recta serà molt per sota de la recta de pendent 1, ja que habitualment $k_2 << k_1$, però, en tenir pendent $m = 2$, creixerà més ràpidament que la recta de pendent $m = 1$ i, per tant, arribarà sempre a tallar-la en un punt. Val a dir que aquest punt normalment no es produeix en la realitat, ja que les dues rectes representen el cas ideal, mentre que en la realitat ambdues comprimeixen, de manera que mai s'arriben a tallar, sinó que se saturen abans d'arribar a fer-ho. A aquest punt imaginari de tall de les dues rectes ideals de pendents $m = 1$ i $m = 2$ se l'anomena ***punt d'intercepció de segon ordre***.

Seguint el mateix raonament per a $n = 3$, obtindrem una recta ideal de pendent 3 (en passar el terme cúbic a dB) i el corresponent punt de tall amb la recta de pendent $m = 1$, que rep el nom de ***punt d'intercepció de tercer ordre***. En definitiva, doncs, podem definir aquesta figura de mèrit de la manera següent:

Es defineix el **punt d'intercepció de tercer ordre** com el punt d'intersecció ideal entre la recta ideal de pendent 1 que defineix el comportament lineal de l'amplificador entre el nivell de potència de senyal útil a l'entrada i el nivell de potència de senyal útil a la sortida, i la recta ideal de pendent 3, que defineix la relació entre el nivell de potència de senyal útil a l'entrada i el nivell de potència de senyal d'intermodulació de tercer ordre a la sortida.

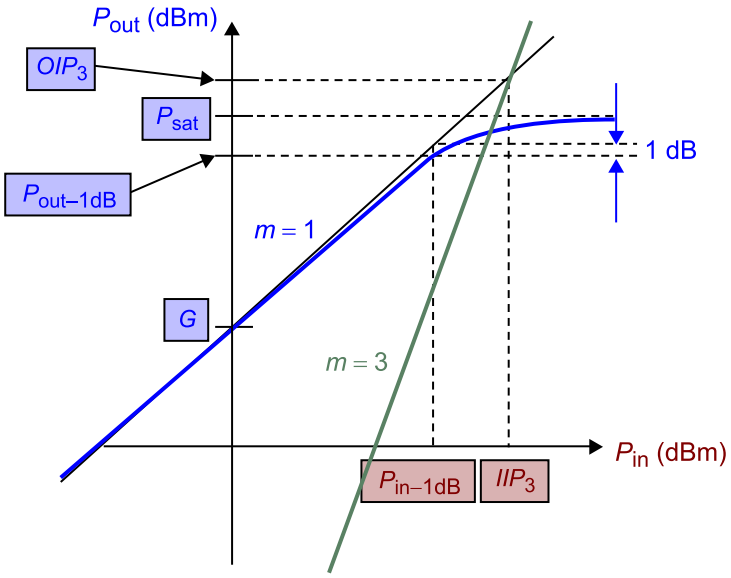
El mateix raonament faríem per a definir el punt d'intercepció d'ordre 4, el d'ordre 5, etc.

La figura 57 mostra la gràfica del punt d'intercepció de tercer ordre (IIP_3, OIP_3) d'un amplificador. Hi veiem les dues rectes ideals, degudes, una al terme lineal, de pendent 1, i l'altra al terme cúbic, de pendent 3, que són rectes ideals ja que en realitat, en un amplificador real ambdues respostes tendeixen a comprimir-se a mesura que augmenta la potència a l'entrada, de manera que el punt d'intersecció entre les dues (**punt d'intercepció**) és un punt ideal, que no es dóna en la realitat. No obstant això, és un concepte àmpliament reconegut com a referència per a comparar la linealitat entre diferents amplificadors.

De la mateixa manera que definim el punt d'intercepció de tercer ordre, també podrem definir el punt d'intercepció d'ordre 5, el d'ordre 7, etc. però, en general, a mesura que augmentem l'ordre, decreix la magnitud del fenomen, pel fet que el coeficient corresponent és, en general, cada vegada més petit: $k_3 > k_5 > k_7 >$ etc.

Per tant, la intermodulació que més ens afectarà habitualment, llevat de casos excepcionals, serà la de tercer ordre. Cal fer notar que tampoc no considerem els termes parells (ordre 2, 4, 6, etc.) perquè, com ja hem vist en la figura 55, les intermodulacions que produeixen cauran habitualment fora de la banda de treball, com a mínim a una octava de separació, de mode que seran fàcilment eliminables mitjançant un filtre i en les aplicacions més habituals no causaran problemes.

Figura 57. Punt d'intercepció de tercer ordre, IP_3



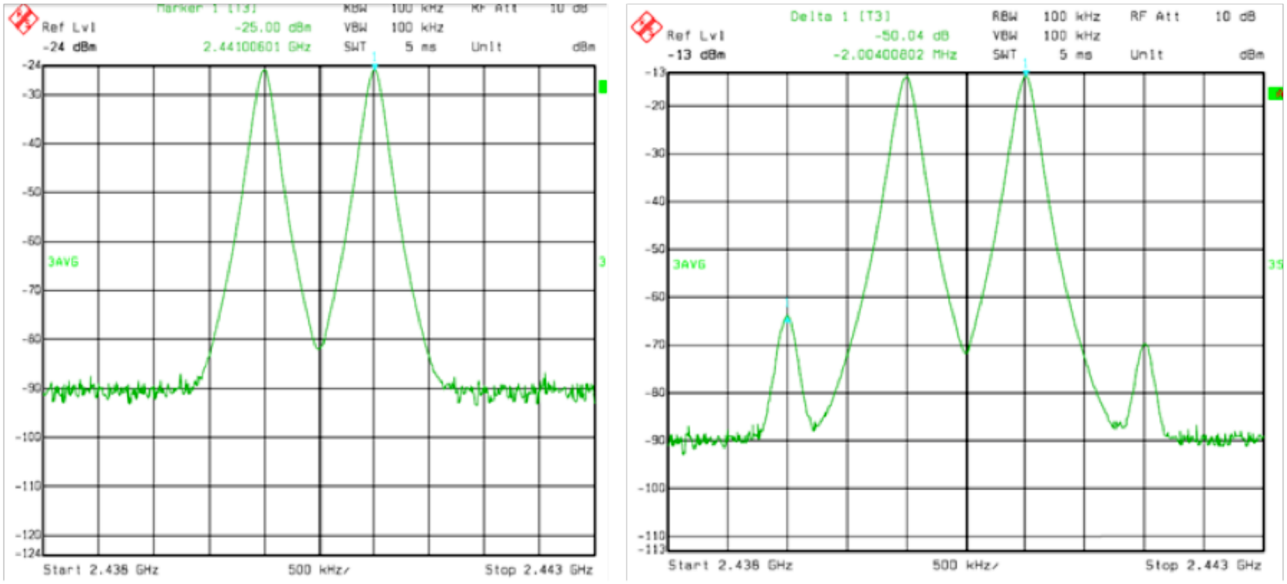
En la figura 57 es mostra qualitativament la gràfica que relaciona la potència en [dBm] a l'entrada i la potència en [dBm] a la sortida d'un amplificador, on s'ha representat la recta corresponent al terme lineal (recta de pendent m = 1) i la recta corresponent al terme d'ordre 3 (recta de pendent m = 3), i s'obté el punt d'intercepció de tercer ordre (IIP_3, OIP_3) **on es tallen les dues rectes. S'indica també el nivell de compressió a –1 dB, P_{-1dB}, i el nivell de saturació de l'amplificador a la sortida P_{sat}.**

El guany de l'amplificador G s'obté directament del punt de tall de la recta lineal de pendent 1 amb l'eix d'ordenades (on la potència a l'entrada és 0 dBm).

Una altra manera més visual d'entendre la importància d'aquest fenomen consisteix a observar l'espectre de senyal a la sortida de l'amplificador quan s'injecten dues portadores a l'entrada amb el mateix nivell de potència, segons es mostra en la figura 58. A l'esquerra es mostra l'espectre de les dues portadores, centrades en les freqüències f_1 y f_2, que injectem a l'entrada de l'amplificador. A la dreta, l'espectre de senyal mesurat a la sortida.

S'observa que les dues portadores de l'entrada s'han amplificat a la sortida, tal com volem d'un amplificador, però a banda i banda comencen a aparèixer els productes d'intermodulació de tercer ordre $2f_1 - f_2$ y $2f_2 - f_1$, els quals no és possible filtrar ja que cauen a la banda d'operació, ben bé al costat del senyal útil; així,aquest fenomen ens marcarà un límit superior de nivell de senyal a l'entrada amb el qual es podrà treballar sense aquest problema (com veurem en el següent apartat relatiu a l'*SFDR*).

Figura 58. Concepte d'intermodulació (IP_3). **a)** Espectre de senyals reals a l'entrada d'un amplificador. **b)** Espectre a la sortida d'un amplificador



a) b)

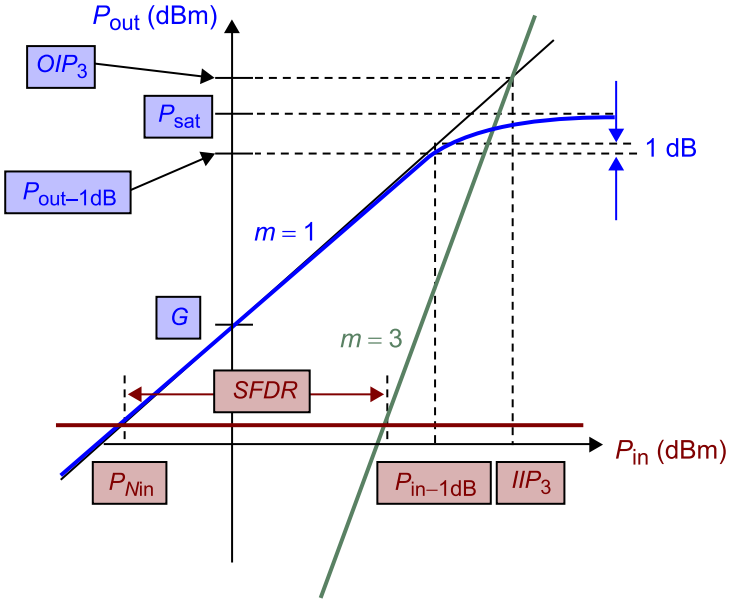
4.6. Marge dinàmic sense espuris (SFDR)

El **marge dinàmic sense espuris (SFDR**[1]**)**, es defineix com el marge de nivells de potència de senyal a l'entrada per als quals es compleix que el senyal útil a la sortida està per sobre del nivell de potència de soroll a la sortida i, alhora, el nivell de potència dels productes d'intermodulació a la sortida es manté per sota d'aquest nivell de potència de soroll.

(1) Sigles de l'anglès *spurious-free dynamic range*.

En la figura 59 es pot observar quin és aquest marge SFDR sobre la gràfica que relaciona els nivells de potència de senyal a l'entrada i a la sortida, per a l'amplificador genèric representat anteriorment en la figura 56. Aquest marge s'estén des del punt en què la recta de pendent 1 (en color blau) de la resposta lineal de l'amplificador talla el nivell de soroll a la sortida (és a dir, el valor en què el nivell de senyal a la sortida comença a ser més gran que el nivell de soroll, que està representat per la recta de color vermell), fins al punt de tall entre la recta d'intermodulació d'ordre 3 (de pendent 3, en color verd) amb aquest nivell de soroll a la sortida (és dir, quan el nivell de potència dels productes d'intermodulació d'ordre 3 comencen a emergir sobre el nivell de potència de soroll a la sortida).

Figura 59. Concepte de marge dinàmic sense espuris, SFDR



Exemple 5

Considerem un amplificador amb les característiques següents:

- Guany: G = 12 dB
- Punt d'intercepció de tercer ordre a l'entrada: IIP_3 = +28 dBm
- Nivell de soroll mesurat a la sortida: N_{out} = –55 dBm

Suposant dos tons a l'entrada de la mateixa magnitud, es demana representar el nivell de potència a la sortida, tant de senyal útil com del senyal interferent degut a la intermodulació d'ordre tres, en funció del nivell de potència de senyal útil a l'entrada.

També es demana representar les portadores a l'entrada i a la sortida per a tres valors diferents de potència de senyal a l'entrada: –5 dBm, +5 dBm i +15 dBm.

Finalment, es demana calcular l'SFDR.

Solució

En la figura 60 s'ha dibuixat la gràfica que relaciona la potència en [dBm] a l'entrada i la potència en [dBm] a la sortida de l'amplificador, i s'hi ha representat el terme lineal (recta ideal de pendent 1 en negre, en blau la gràfica real) i el terme d'intermodulació d'ordre 3 (recta de pendent 3, en verd), amb un punt d'intercepció (IIP_3, OIP_3).

Primer podem dibuixar la recta ideal de pendent 1, sabent que ha de tallar pel punt G = 12 dB de l'eix d'ordenades (guany).

Tot seguit, obtenim el punt d'intercepció a la sortida:

$$OIP_3 = IIP_3 + G = +28\text{ dBm} + 12\text{ dB} = +40\text{ dBm} \qquad 7.113$$

Finalment, ja podem dibuixar la recta de pendent 3 des del punt obtingut:

$$(IIP_3,\ OIP_3) = (+28\text{ dBm},\ +40\text{ dBm}) \qquad 7.114$$

Sobre la gràfica o analíticament, podem anar obtenint les tres ternes de punts de senyal útil a l'entrada, senyal útil a la sortida i senyal d'intermodulació de tercer ordre a la sortida, P_{in}, P_{out}, P_{Iout}.

Per simple trigonometria s'ha de complir que:

$$OIP_3 - P_{lout} = m * (IIP_3 - P_{in}) \qquad 7.115$$

Per a P_{in} = –5 dBm tindrem:

$$IIP_3 - P_{in} = +28\ \text{dBm} - (-5\ \text{dBm}) = 33\ \text{dB} \qquad 7.116$$

Atès que la intermodulació de tercer ordre té pendent m = 3, tindrem:

$$P_{lout}(P_{in} = -5\ \text{dBm}) = OIP_3 - 3 * 33 = +40\ \text{dBm} - 99\ \text{dB} = -59\ \text{dBm} \qquad 7.117$$

El valor de senyal útil a la sortida serà simplement el de l'entrada més el guany:

$$P_{out} = P_{in} + G = -5\ \text{dBm} + 12\ \text{dB} = +7\ \text{dBm} \qquad 7.118$$

Per tant, per a P_{in} = –5 dBm obtenim la primera terna:

$$(-5\ \text{dBm},\ +7\ \text{dBm},\ -59\ \text{dBm}) \qquad 7.119$$

Anàlogament podem calcular els altres dos casos, i obtindrem les ternes P_{in}, P_{out}, P_{lout} següents:

$$(-5\ \text{dBm},\ +7\ \text{dBm},\ -59\ \text{dBm}) \qquad 7.120$$

$$(+5\ \text{dBm},\ +17\ \text{dBm},\ -29\ \text{dBm}) \qquad 7.121$$

$$(+15\ \text{dBm},\ +27\ \text{dBm},\ +1\ \text{dBm}) \qquad 7.122$$

En la figura 60 s'ha dibuixat, a la dreta, l'espectre de dos tons a l'entrada (en vermell) i els dos tons amplificats a la sortida (en blau).

La diferència de nivells és sempre el guany de l'amplificador (12 dB), ja que ens estem movent per la zona lineal de l'amplificador, en la qual, el guany es manté al seu valor constant de 12 dB.

Per a P_{in} = –5 dBm el nivell de la intermodulació $2f_1 - f_2$ i $2f_2 - f_1$ a la sortida que obtenim és –59 dBm, encara per sota del nivell de soroll, de manera que per a aquest valor encara no apareixen els tons d'intermodulació a la sortida i, per tant, encara som a la zona de SFDR.

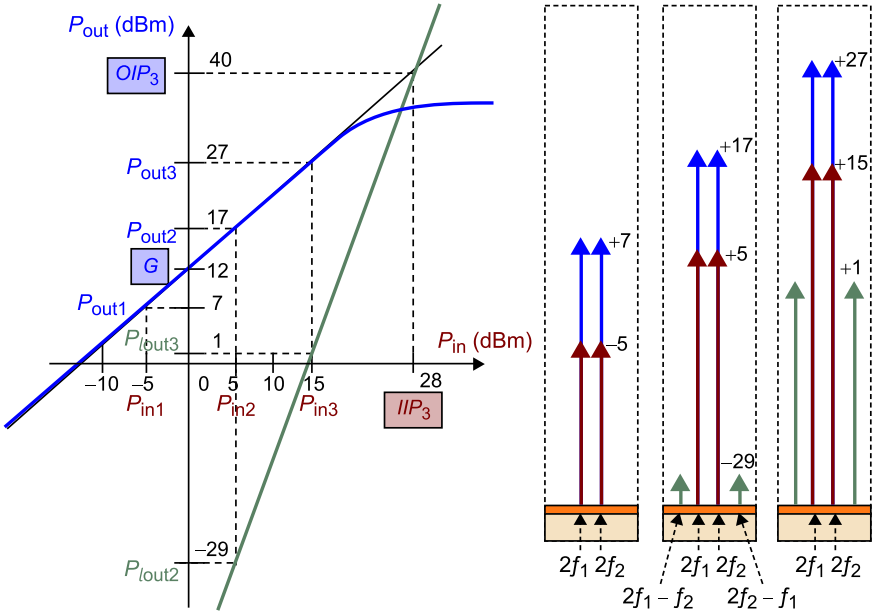
No obstant això, per a P_{in} = +5 dBm, veiem que a la sortida ja comencen a aparèixer els productes d'intermodulació per sobre del nivell de soroll (en verd).

Per a P_{in} = +15 dBm, comprovem que, efectivament, els productes d'intermodulació a la sortida creixen tres vegades més ràpidament (+30 dB) que el senyal útil (+10 dB) per a un mateix increment de potència de senyal útil a l'entrada (+10 dB).

Finalment, calculem l'SFDR.

Atès que N_{out} = –55 dBm, haurem de buscar quin és el nivell de senyal útil a l'entrada, P_{in}, que provoca aquest mateix nivell d'intermodulació a la sortida.

Figura 60. a) Gràfica del punt d'intercepció (*IP*3). b) Espectre de sortida per a tres nivells diferents (en dBm) de senyal a l'entrada (dos tons)



S'ha de complir:

$$OIP_3 - N_{out} = m * (IIP_3 - P_{in}) \quad \rightarrow \quad +40\ \text{dBm} - (-55\ \text{dBm}) = 3 * (+28\ \text{dBm} - P_{in}) \qquad 7.123$$

$$P_{in} = 3{,}67\ \text{dBm};\ \text{aquest és el límit superior de l'SFDR} \qquad 7.124$$

Calculem ara el límit inferior, que serà donat pel nivell de senyal útil a l'entrada que ens dóna un nivell de senyal útil a la sortida igual al nivell de soroll:

$$N_{out} = N_{in} + G \quad \rightarrow \quad N_{in} = -55\ \text{dBm} - 12\ \text{dB} = -67\ \text{dBm} \qquad 7.125$$

$$SFDR = P_{in} - N_{in} = 3{,}67\ \text{dBm} - (-67\ \text{dBm}) = 63{,}33\ \text{dB} \qquad 7.126$$

4.7. Figura de soroll

La figura de soroll d'un amplificador és un altre paràmetre clau per a completar la definició de les figures de mèrit d'un amplificador. És especialment important en el disseny d'amplificadors de baix soroll, **LNA**[2], que s'han d'integrar en les primeres etapes de la cadena d'un sistema de recepció de microones, ja que, tal com veurem en aquest apartat, la **fórmula de Friis** determina que la figura de soroll del receptor global depèn, en gran mesura, de la figura de soroll que tinguin les primeres etapes d'aquesta cadena, les quals fixaran la sensibilitat del receptor i, amb això, la qualitat i l'abast del sistema de telecomunicació.

(2)Sigla de l'anglès *low noise amplifier*.

La **figura de soroll** d'un dispositiu, quan a la seva entrada té una font de soroll amb potència $N_i = KT_0B$, es defineix com el quocient entre la relació senyal a soroll existent a la seva entrada $\frac{S_i}{N_i}$ i la relació senyal a soroll existent a la seva sortida $\frac{S_o}{N_o}$.

$$F = \frac{S_i}{N_i} \Big/ \frac{S_o}{N_o} \qquad 7.127$$

Expressat en logarítmic [dB], obtenim l'anomenat *factor de soroll*:

$$NF[\text{dB}] = 10 \log (F) \qquad 7.128$$

Considerant que:

- N_0 és la potència de soroll a la sortida,
- N_i és la potència de soroll a l'entrada,
- N_a és el soroll intern introduït pel dispositiu amplificador,
- G_A és el guany disponible de l'amplificador,
- K és la constant de Boltzmann,
- B és l'amplada de banda del sistema,
- T_0 és la temperatura d'operació,
- T_e és l'anomenada *temperatura equivalent del dispositiu*,
- S_O és el nivell de potència de senyal útil a la sortida de l'amplificador,

tindrem:

$$S_o = G_A S_i \qquad 7.129$$

$$N_a = KT_eB \qquad 7.130$$

$$N_i = KT_0B \qquad 7.131$$

Si substituïm 7.34 en 7.32:

$$F = \frac{N_o}{G_A N_i} \qquad 7.132$$

i utilitzem 7.35 i 7.36 en 7.37:

$$F = \frac{G_A(KT_0B + N_a)}{G_A KT_0 B} = 1 + \frac{T_e}{T_0} \qquad 7.133$$

Per acabar, recordem la fórmula de Friis, que ens dóna la figura de soroll per a un sistema amb *n* dispositius en sèrie:

$$F_T = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \ldots + \frac{F_n - 1}{G_1 G_2 \ldots G_{n-1}} \qquad 7.134$$

Vegeu també

La fórmula de Friis s'explica en l'apartat 3 del mòdul "Introducció als sistemes de comunicacions" de l'assignatura *Electrònica de Comunicacions*.

Ejemplo 6

Suposem un sistema de recepció consistent en dos amplificadors de baix soroll (LNA) en sèrie i un mesclador. Se'ns demana quin és el guany i la figura de soroll del sistema, tenint en compte que cada dispositiu té les característiques que es presenten a la taula 1.

Taula 1. Característiques del sistema receptor

		Stage 1	Stage 2	Stage 3
Stage Data	Units	A36	A36	
Stage Name:		Agilent ATF-360xx	Agilent ATF-36163	Active Mixer ATF-36163
Noise Figure	dB	1,25	1,4	5,9
Gain	dB	9,5	10	2,8

Solució

Utilitzant la fórmula de Friis podrem calcular l'*NF* [dB] de la cadena. Per a això passarem primer els paràmetres de [dB] a lineal:

$$G_1 = 10^{G_{dB1}/10} = 10^{9,5/10} = 8,912 \qquad 7.135$$

$$F_1 = 10^{NF_1/10} = 10^{1,25/10} = 1,333 \qquad 7.136$$

$$G_2 = 10^{G_{dB2}/10} = 10^{10/10} = 10 \qquad 7.137$$

$$F_2 = 10^{NF_2/10} = 10^{1,4/10} = 1,380 \qquad 7.138$$

$$F_3 = 10^{NF_3/10} = 10^{5,9/10} = 3,890 \qquad 7.139$$

$$F_T = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} = 1,333 + \frac{1,380 - 1}{8,912} + \frac{3,890 - 1}{8,912 * 10} = 1,333 + 0,043 + 0,032 = 1,408 \qquad 7.140$$

$$NF_T[\text{dB}] = 10 \log(F_T) = 1,486 \text{ dB} \qquad 7.141$$

$$G_T[\text{dB}] = G_1 + G_2 + G_3 = 9,5 + 10 + 2,8 = 22,3 \text{ dB} \qquad 7.142$$

Noteu que el guany de la primera etapa, G_1, minimitza l'efecte del soroll de les etapes posteriors, especialment de la tercera, que és molt més alt que el soroll del sistema final.

5. Modes TE i TM en una guia d'ones rectangular

Els modes TE i TM que es propaguen en una guia d'ones rectangular tenen infinites solucions, i cada una d'aquestes solucions es genera si es supera la seva freqüència de tall. En el cas del mode TE, la component longitudinal del camp magnètic és determinada per l'equació:

Vegeu també

En el mòdul "Guies d'ones" d'aquest material didàctic s'estudien els modes TE i TM que es propaguen en una guia d'ones rectangular.

$$\left(\nabla_t^2 + k_c^2\right)H_z = 0 \qquad 7.143$$

I per al cas del mode TM, la component longitudinal del camp elèctric és determinada per l'equació:

$$\left(\nabla_t^2 + k_c^2\right)E_z = 0 \qquad 7.144$$

Podem generalitzar aquestes dues expressions amb:

$$\left(\nabla_t^2 + k_c^2\right)\psi(x, y) = 0 \qquad 7.145$$

En aquest apartat es resoldrà aquesta equació, primer per a un cas general i després per als casos particulars dels modes TM i TE. Per a aquests dos últims casos utilitzarem les condicions de contorn entre un dielèctric (interior de la guia) i un conductor:

$$E_z\Big|_{\substack{\text{Superfície del}\\ \text{conductor}}} = 0 \qquad 7.146$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial n}\Big|_{\substack{\text{Superfície del}\\ \text{conductor}}} = 0 \qquad 7.147$$

5.1. Solució general dels camps

Si partim de l'equació 7.145 i desenvolupem:

$$\nabla_t^2\psi(x, y) + k_c^2\psi(x, y) = 0 \qquad 7.148$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x, y) + k_c^2\psi(x, y) = 0 \qquad 7.149$$

Aquesta última expressió la podem resoldre pel mètode de separació de variables. Això implica que la solució està formada per dues funcions, cada una de les quals depèn d'una variable diferent, del tipus:

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y) \qquad 7.150$$

Si ho substituïm en l'expressió anterior obtenim:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + k_c^2 = 0 \qquad 7.151$$

També podem expressar-ho com:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k_c^2 = 0 \qquad 7.152$$

Definim dues funcions:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{X''(x)}{X(x)} \\ f_2(y) &= \frac{Y''(y)}{Y(y)} \end{aligned} \qquad 7.153$$

Per tant, substituint, obtenim:

$$f_1(x) + f_2(y) = -k_c^2 \qquad 7.154$$

Aquesta expressió ens diu que la suma de les dues funcions és igual a una constant. Això només pot ser cert si la solució de cada una de les funcions és també una constant, és a dir, si:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \\ f_2(y) &= \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2 \end{aligned} \qquad 7.155$$

on:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \qquad 7.156$$

Per tant, hem de solucionar:

$$\begin{aligned} X''(x) + k_x^2 X(x) &= 0 \\ Y''(y) + k_y^2 Y(y) &= 0 \end{aligned} \qquad 7.157$$

Això són equacions diferencials senzilles, en les quals la solució pren la forma:

$$\begin{aligned} X &= A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x) \\ Y &= C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y) \end{aligned} \qquad 7.158$$

És a dir:

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y) = (A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x))(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)) \qquad 7.159$$

La forma de la solució final, és a dir, amb el valor de les constants A, B, C i D, dependrà de si l'ona que s'hi propaga és un mode TE o TM, ja que cada un introduirà unes condicions de contorn diferents, expressades en les equacions 7.146 i 7.147. Per tant, passem ara a tractar cada una de les solucions, començant pel mode TM i després amb el mode TE.

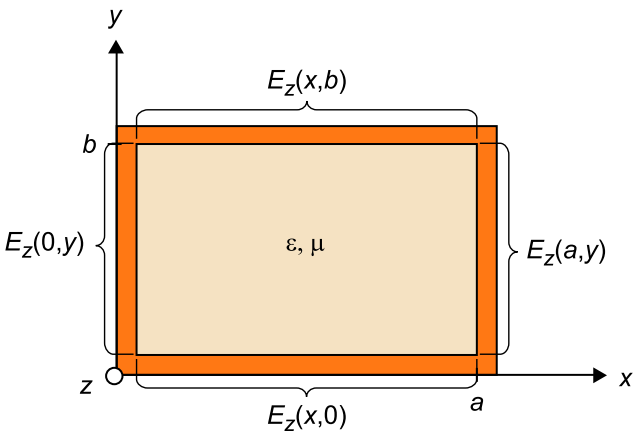
5.2. Mode TM en una guia d'ones rectangular

El mode TM es caracteritza per una $H_z(x, y) = 0$. Cal trobar, però, $E_z(x, y) \neq 0$. Ja hem vist que el primer que cal fer és resoldre l'equació 7.143, que, com hem vist a 7.159, pren una solució de la forma:

$$\begin{aligned} E_z(x, y) &= \psi(x, y) = X(x)Y(y) = \\ &= (A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x))(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)) \end{aligned} \qquad 7.160$$

El valor de les constants A, B, C i D el trobem aplicant les condiciones de contorn generals per als camps elèctrics. Segons l'equació 7.146, el camp elèctric longitudinal (E_z) és igual a 0 a la superfície del conductor. Això té sentit, ja que la component longitudinal és tangent a les parets del conductor, i la teoria electromagnètica expressada mitjançant les equacions de Maxwell estableix que no pot haver component tangencial de camp elèctric a la superfície d'un conductor. Per tant, si ho apliquem als camps a l'interior de la guia, on les quatre parets estan situades tal com s'expressa en la figura 61, podrem resoldre el sistema.

Figura 61. Camps elèctrics a les parets de la guia



1) $x = 0$, $y \in (0, b)$:

$$\begin{aligned} E_z(x, y) &= \psi(x, y) = X(x)Y(y) = \\ &= (A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x))(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)) \end{aligned} \qquad 7.161$$

Aquesta expressió només té solució si:

- $C = D = 0$ (solució trivial), o bé
- $B = 0$.

En el primer cas obtenim una solució trivial. Això vol dir que no hi haurà camp (totes les components donaran 0); per tant, no és una solució que ens interessi. Prendrem com a solució vàlida el segon cas, és a dir $B = 0$. Així, l'expressió general queda reduïda a:

$$E_z(x, y) = A\sin(k_x x)(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)) \qquad 7.162$$

2) $y = 0$, $x \in (0, a)$:

$$E_z(x,0) = A\sin(k_x x)D = 0 \qquad 7.163$$

Aquesta expressió té solució només si:

- $A = 0$ (solució trivial), o bé
- $D = 0$.

Novament, la primera solució és una solució trivial. Agafem la segona i obtenim que l'expressió general del camp queda:

$$E_z(x, y) = A\sin(k_x x)C\sin(k_y y) \qquad 7.164$$

3) $x = a$, $y \in (0, b)$:

$$E_z(a, y) = A\sin(k_x a)C\sin(k_y y) = 0 \qquad 7.165$$

Aquesta expressió només té solució si:

- $A = 0$ (solució trivial), o bé
- $C = 0$ (solució trivial), o bé
- $\sin(k_y y)$ (solució trivial), o bé
- $\sin(k_x a) = 0$.

Ens quedem amb l'única solució no trivial i obtenim que:

$$\sin(k_x a) = 0 \rightarrow k_x a = m\pi \rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a},\ m \in \mathbb{N} \qquad 7.166$$

Per tant:

$$E_z(x, y) = A\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)C\sin(k_y y) \qquad 7.167$$

4) $y = b$, $x \in (0, a)$:

$$E_z(x, b) = A\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)C\sin(k_y b) = 0 \qquad 7.168$$

Aquesta expressió només té solució si:

- $A = 0$ (solució trivial), o bé
- $C = 0$ (solució trivial), o bé
- $\sin(k_y b) = 0$.

Ens quedem amb l'única solució no trivial i obtenim que:

$$\sin(k_y b) = 0 \rightarrow k_y b = n\pi \rightarrow k_y = \frac{m\pi}{b},\ \mathrm{n} \in \mathbb{N} \qquad 7.169$$

Finalment, utilitzant els resultats de 7.164, 7.166 i 7.169, l'expressió del camp elèctric en la direcció z pren la forma:

$$E_z(x, y) = A\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)C\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad 7.170$$

Per a resoldre les últimes dues constants ens cal informació exacta del problema (amplitud inicial de l'ona TM, etc.). És a dir, que el camp pren la forma:

$$E_z(x, y) = E_{z0}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad 7.171$$

Es pot veure que els camps prendran solucions vàlides per a qualsevol valor de m i n, excepte quan $m = 0$ i/o $n = 0$ (ja que tornem a obtenir solucions trivials). Totes aquestes solucions de camps seran vàlides i es denoten a partir de les constants m i n. El mode $\mathrm{TM}_{m_0 n_0}$ denota la configuració de camps transversal elèctrica obtinguda escollint $m = m_0$ i $n = n_0$. El camp E_z total dins de la guia serà la suma de cada un dels modes que no estiguin en tall.

Recordem també que k_x i k_y formaven la constant k_c (equació 7.156):

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \rightarrow k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad 7.172$$

i k_c tenia una freqüència de tall associada, de manera que:

$$f_{c_{mn}} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2},\ \text{on } c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad 7.173$$

Aquesta c no és la velocitat de propagació de l'ona per la guia, sinó la velocitat de la llum en un medi il·limitat caracteritzat per μ i ϵ. Cada solució tindrà la seva freqüència de tall, que depèn de l'ordre del mode i de la geometria de la línia.

Un cop trobat el valor de E_z, l'últim pas seria trobar els valors dels camps $\vec{E}_t$ i $\vec{H}_t$ amb:

$$\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2}\vec{\nabla}_t E_z \qquad 7.174$$

$$\vec{H}_t = -j\frac{\omega\varepsilon}{k_c^2}\hat{z}\times\vec{\nabla}_t E_z \qquad 7.175$$

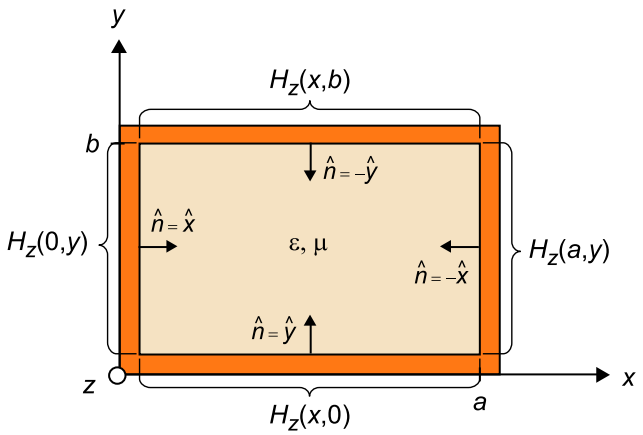
5.3. Mode TE en una guia d'ones rectangular

Anàlogament al mode TM, en un mode TE, $E_z(x, y) = 0$ i cal trobar $H_z(x, y) \neq 0$. Hem de resoldre l'equació 7.143, que novament pren la solució de la forma vista en l'equació 7.159:

$$\begin{aligned} H_z(x, y) &= \psi(x, y) = X(x)Y(y) = \\ &= \left(A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)\right)\left(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)\right) \end{aligned} \qquad 7.176$$

Per a trobar el valor de les constants, utilitzarem la condició de contorn del camp magnètic 7.147 a les parets de la guia, essent n el vector normal a la superfície de la guia (figura 62).

Figura 62. Camps magnètics a les parets de la guia



Operarem de la mateixa manera que per al cas del mode TM (tot i que ara, segons la condició de contorn, hem d'anar derivant el camp respecte a n):

1) $x = 0$, $y \in (0, b)$:

$$\frac{\partial H_z(0,y)}{\partial x} = Ak_x\left(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)\right) = 0 \qquad 7.177$$

Aquesta expressió només té solució si:

- $C = D = 0$ (solució trivial), o bé
- $k_x = 0$ (possible solució, tot i que elimina la dependència en x), o bé
- $A = 0$.

Prenem com a solució el tercer cas, és a dir $A = 0$. Per tant, l'expressió general queda reduïda a:

$$H_z(x, y) = B\cos(k_x x)\left(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)\right) \qquad 7.178$$

2) $y = 0$, $x \in (0, a)$:

$$\frac{\partial H_z(x,0)}{\partial y} = B\cos(k_x x)Ck_y = 0 \qquad 7.179$$

Aquesta expressió només té solució si:

- $B = 0$ (solució trivial), o bé
- $k_y = 0$ (possible solució, tot i que elimina la dependència en y), o bé
- $C = 0$.

Agafem la tercera i obtenim que l'expressió general del camp queda:

$$H_z(x, y) = B\cos(k_x x)D\cos(k_y y) \qquad 7.180$$

3) $x = a$, $y \in (0, b)$:

$$\frac{\partial H_z(a, y)}{\partial x} = Bk_x\sin(k_x a)D\cos(k_y y) = 0 \qquad 7.181$$

Aquesta expressió només té solució si:

- $B = 0$ (solució trivial), o bé
- $D = 0$ (solució trivial), o bé
- $\cos(k_y y) = 0$ (solució trivial), o bé
- $\sin(k_x a) = 0$.

Ens quedem amb l'única solució no trivial i obtenim que:

$$\sin(k_x a) = 0 \rightarrow k_x a = m\pi \rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a},\ m \in \mathbb{N} \qquad 7.182$$

Per tant:

$$H_z(x, y) = B\sin(\tfrac{m\pi}{a}x)D\sin(k_y y) \qquad 7.183$$

4) $y = b$, $x \in (0, a)$:

$$\frac{\partial H_z(x, b)}{\partial y} = B\cos(\tfrac{m\pi}{a}x)D\sin(k_y b) = 0 \qquad 7.184$$

Aquesta expressió només té solució si:

- $B = 0$ (solució trivial), o bé
- $D = 0$ (solució trivial), o bé
- $\sin(k_y b) = 0$.

Ens quedem amb l'única solució no trivial i obtenim que:

$$\sin(k_y b) = 0 \rightarrow k_y b = n\pi \rightarrow k_y = \frac{m\pi}{b},\ \mathrm{n} \in \mathbb{N} \qquad 7.185$$

Finalment, unificant els resultats de 7.180, 7.182 i 7.184, l'expressió del camp magnètic en la direcció z pren la forma:

$$H_z(x, y) = B\cos(\tfrac{m\pi}{a}x)D\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad 7.186$$

Fixeu-vos que les dues solucions que havíem descartat, tot i que eren vàlides ($k_x = 0$ i $k_y = 0$), eren solucions particulars de les que finalment hem trobat, agafant $n = 0$ i $m = 0$, respectivament. Per a resoldre les últimes dues constants necessitem informació exacta del problema (amplitud inicial de l'ona TE). És a dir, que el camp pren la forma:

$$H_z(x, y) = H_{z0}\cos(\tfrac{m\pi}{a}x)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad 7.187$$

Es continuen complint les mateixes equacions pel que fa a la freqüència de tall:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = (\tfrac{m\pi}{a})^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \rightarrow k_c = \sqrt{(\tfrac{m\pi}{a})^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad 7.188$$

$$f_{c_{mn}} = \frac{c}{2}\sqrt{(\tfrac{m}{a})^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2},\ \text{on } c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad 7.189$$

Un cop trobat el valor de H_z, l'últim pas seria trobar els valors dels camps $\vec{E}_t$ i $\vec{H}_t$ amb:

$$\vec{E}_t = j\frac{\omega\mu}{k_c^2}\hat{z}\times\vec{\nabla}_t H_z \qquad 7.190$$

$$\vec{H}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2}\vec{\nabla}_t H_z \qquad 7.191$$

Fixeu-vos que els modes $TE_{n,0}$ i $TE_{0,m}$ poden existir, però no els modes $TM_{n,0}$ i $TM_{0,m}$, ja que la configuració de camps en aquest cas és 0.

Glossari

AGC *m automatic gain control*

AM *f amplitude modulation*

BJT *m bipolar junction transistor*

BPF *m band-pass filter*

carta de Smith *f* Eina gràfica per a transformar impedàncies en coeficients de reflexió (i a l'inrevés), impedàncies en admitàncies (i a l'inrevés) o per a calcular la longitud volguda de línies de transmissió i *stubs* en un circuit.

coeficient de reflexió *m* Relació entre l'ona progressiva i l'ona regressiva en un punt dins d'una línia de transmissió.

equacions de Maxwell *f pl* Equacions que constitueixen el pilar fonamental de la teoria clàssica de l'electromagnetisme i es resumeixen en quatre expressions, que es poden presentar en forma diferencial, integral o fasorial.

fasor *m* Nombre complex constant expressat en forma exponencial que representa l'amplitud complexa (magnitud i fase) d'una funció de temps sinusoïdal.

FM *f frequency modulation*

HPF *m high-pass filter*

IF *f intermediate frequency*

IMPATT *m impact avalanche and transmit time*

impedància característica *f* Relació entre l'ona de tensió progressiva (o regressiva) i l'ona de corrent progressiva (o regressiva).

línia de transmissió *f* Guia d'ones formada per dos o més conductors amb secció recta constant que propaga ones TEM.

LNA *m low noise amplifier*

LO *m local oscillator*

LPF *m low-pass filter*

MESFET *m metal-semiconductor field effect transistor*

mode TE *m* Mode transversal elèctric, en què $E_z = 0$ i $H_z \neq 0$ i, per tant, el camp elèctric no té component en la direcció de propagació z. Pot propagar-se en guies d'ones d'un sol conductor.

mode TM *m* Mode transversal magnètic, en què $E_z \neq 0$ i $H_z = 0$ i, per tant, el el camp magnètic no té component en la direcció de propagació z. Pot propagar-se en guies d'ones d'un sol conductor.

paràmetres de dispersió *m pl* Vegeu paràmetres *S*.

paràmetres *S* *m pl* Paràmetres que relacionen les ones sortints (*b*) amb les ones entrants (*a*) que hi ha als ports d'una xarxa de microones.
sin. paràmetres de dispersió
en *scattering parameters*

PLL *m phase-locked loop*

règim permanent sinusoïdal *m* Sistema electromagnètic en què totes les excitacions i respostes tenen dependència harmònica amb el temps, i qualsevol transitori inicial ja fa temps que s'ha esvaït.

RF *f* Radiofreqüència

ROE *f* Relació d'ona estacionària

scattering parameters *m pl* Vegeu paràmetres *S*.

SFDR *m spurious-free dynamic range*

SNR *f signal-to-noise ratio*

stub *m* Línia de transmissió o guia d'ones connectada només per un dels seus extrems.

VSWR *f voltage standing wave ratio*

Bibliografia

Bibliografia bàsica

Bara Iniesta, M.; Escudero Quesada, A. M.; González Llobet, O.; Ibeas Hernández, A. (2012). *Tecnología electrónica*. Barcelona: UOC.

Carey, E.; Lidholm, S. (2005). *Millimeter-Wave Integrated Circuits*. Springer Science+Business Media, Inc.

Cheng, D. K. (1998). *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería* (1a ed.). Addison Wesley.

Collin, R. E. (2001). *Foundations for Microwave Engineering*. John Wiley & Sons.

Glover, I. A.; Pennock, S. R.; Shepherd, P. R. (2005). *Microwave devices, circuits and subsystems for communications engineering*. John Wiley & Sons.

López i Rocafiguera, E.; Martí i Puig, P. (2012). *Electrònica de comunicacions*. Barcelona: UOC.

Maas, S. A. (2003). *Nonlinear Microwave and RF Circuits*. Artech House.

Pozar, D. M. (2012). *Microwave engineering* (4a ed.). John Wiley.

Ribó M.; Pajares, F. J. (2008). *Circuits d'alta freqüència*. Enginyeria La Salle (Guia d'estudis Semipresencials).

Sweet, A. A. (1990). *MIC&MMIC Amplifier And Oscillator Circuit Design*. EUA: Artech House.

Bibliografia complementària

González, G. (2004). *Microwave Transistor Amplifier* (2a ed.). Prentice Hall.

Weber, R. J. (2001). "Introduction to Microwave Circuits, Radio Frequency and Design Applications". *IEEE Press Series on RF and Microwave Technology*.