

# Anexo

Carles Recasens i Aloy  
Albert-Miquel Sánchez Delgado

PID\_00200072



Los textos e imágenes publicados en esta obra están sujetos –excepto que se indique lo contrario– a una licencia de Reconocimiento-Compartir igual (BY-SA) v.3.0 España de Creative Commons. Se puede modificar la obra, reproducirla, distribuirla o comunicarla públicamente siempre que se cite el autor y la fuente (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), y siempre que la obra derivada quede sujeta a la misma licencia que el material original. La licencia completa se puede consultar en: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/es/legalcode.ca>

# Índice

<b>Introducción.....</b>	<b>5</b>
<b>Las ecuaciones de Maxwell.....</b>	<b>9</b>
<b>La carta de Smith.....</b>	<b>19</b>
<b>Unión P-N.....</b>	<b>43</b>
<b>Figuras de mérito de amplificadores.....</b>	<b>61</b>
<b>Modos TE y TM en una guía de ondas rectangular.....</b>	<b>77</b>
<b>Glosario.....</b>	<b>87</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>89</b>



## Introducción

En este anexo se tratarán cinco temas que pueden ayudar en la comprensión del contenido de los diferentes módulos: las ecuaciones de Maxwell, la carta de Smith, las uniones P-N, las figuras de mérito en amplificadores y el proceso de resolución de los modos transversales eléctricos (TE) y transversales magnéticos (TM) en una guía de ondas rectangular. A continuación se introducen estos temas con un poco más de detalle y se expone en qué módulos puede ser necesaria la información de cada uno.

Las ecuaciones de Maxwell se introducen en el apartado "Las ecuaciones de Maxwell". Estas ecuaciones conforman el pilar fundamental de la teoría clásica del electromagnetismo y se resumen en tan solo cuatro expresiones, que pueden ser presentadas en forma diferencial o integral. Alternativamente, si estamos en régimen permanente sinusoidal, las ecuaciones diferenciales se pueden expresar utilizando fasores, introducidos y completamente definidos en este mismo apartado, que reducen las ecuaciones diferenciales a ecuaciones ordinarias. Igualmente, se derivarán también las condiciones de contorno que deben cumplir los campos electromagnéticos en la interfaz entre dos medios materiales.

En esta asignatura, las ecuaciones de Maxwell se utilizan especialmente en el análisis de los campos electromagnéticos que se propagan en los diferentes tipos de guías de ondas y, en particular, en una guía de ondas rectangular, presentado en el módulo "Guías de ondas". Es recomendable conocerlas y entender su significado para poder seguir correctamente el hilo de este módulo. Estas ecuaciones también aparecen en el módulo "Las ecuaciones de Maxwell" de la asignatura *Física II*, o en el módulo 3 de la asignatura *Antenas*, donde se utilizan para encontrar las ecuaciones de radiación de una antena.

En el apartado "La carta de Smith" se expone la utilidad de la carta de Smith a la hora de trabajar con impedancias, admitancias y coeficientes de reflexión en una línea de transmisión, y se presentan algunos ejemplos prácticos. La carta de Smith es, de hecho, una herramienta gráfica que se puede utilizar para transformar impedancias en coeficientes de reflexión (y al revés), impedancias en admitancias (y al revés), o para calcular la longitud deseada de líneas de transmisión y *stubs* en un circuito, entre otras aplicaciones. La finalidad de este apartado es repasar las características más importantes de esta herramienta y comprobar su utilidad a través de una serie de ejemplos.

Esta herramienta resulta de gran utilidad a la hora de analizar y entender el comportamiento de una línea de transmisión, así como en el estudio de la estabilidad de un amplificador. Por este motivo, la carta de Smith aparece (o puede ser utilizada) en los módulos "Líneas de transmisión", "Análisis de circui-

tos de microondas", "Amplificadores lineales de microondas" y "Mezcladores, multiplicadores y osciladores de microondas". Por tanto, queda claro que es imprescindible entender y dominar su funcionamiento para la correcta comprensión de esta asignatura. Una introducción similar a esta herramienta se puede encontrar en el módulo 6 de la asignatura *Física II*, donde también se trabajan las líneas de transmisión.

El apartado "Unión P-N" se dedica a las uniones P-N. Además de dispositivos pasivos y lineales, para completar las posibilidades de un circuito de microondas es necesario incorporar dispositivos activos y no lineales, capaces de generar y transformar señales a estas frecuencias. En este apartado se presentan los fundamentos de los dispositivos activos básicos utilizados en los circuitos de microondas: el diodo y el transistor. A continuación se hace un recorrido sobre la estructura y el funcionamiento de los dispositivos semiconductores y, en particular, de la unión P-N. Finalmente, se analizaban las principales características de diferentes tipos de diodos según sea su estructura interna, y en particular, de los diodos Schottky y Pin.

Conocer cómo funcionan los dispositivos no lineales a través de las uniones P-N resulta de gran utilidad a la hora de seguir el módulo "Mezcladores, multiplicadores y osciladores de microondas" de esta asignatura, donde se estudian los diferentes elementos no lineales de microondas, como los diodos y transistores y sus características más importantes. Asimismo, esta información se puede encontrar también en el módulo 1 de la asignatura *Tecnología electrónica*, dedicado íntegramente a los diodos.

Las figuras de mérito que caracterizan el comportamiento de amplificadores se analizan en el apartado "Figuras de mérito de amplificadores". Los amplificadores son uno de los dispositivos avanzados más importantes en los circuitos de microondas. Su misión primordial es incrementar el nivel de potencia de señales de microondas de muy bajo nivel sin distorsionarlas, es decir, obtener a la salida una réplica exacta de la señal en la entrada pero con un mayor nivel de potencia. La realidad, sin embargo, es que los componentes básicos de los que está formado un amplificador, los transistores, no tienen una característica lineal perfecta, es decir, no son dispositivos ideales y presentan una respuesta que no es perfectamente lineal, además de tener su funcionamiento limitado a un rango determinado de niveles de señal en la entrada. Por ello se definen una serie de características, que denominamos figuras de mérito del amplificador, que nos servirán para tener una idea de lo que el dispositivo es capaz de hacer, cuáles son sus puntos fuertes y débiles, así como una referencia comparativa respecto a otros amplificadores. Estas figuras ayudan, por tanto, a compararlos y diferenciarlos, permitiendo así poder elegir el dispositivo más adecuado para una aplicación en concreto.

En los módulos "Amplificadores lineales de microondas" y "Mezcladores, multiplicadores y osciladores de microondas" de esta asignatura se utilizan muchas de estas figuras para definir el comportamiento no solo de amplificadores, sino

también de otros dispositivos que contienen elementos no lineales, como los mezcladores, los multiplicadores de frecuencia y los osciladores, por lo que es necesario conocerlos previamente. Algunas de estas figuras también están introducidas en los módulos "El transistor" y "El amplificador operacional" de la asignatura *Tecnología electrónica* y en el módulo "Introducción a los sistemas de comunicaciones" de la asignatura *Electrónica de comunicaciones*.

Finalmente, en el apartado "Modos TE y TM en una guía de ondas rectangular" se describe el procedimiento para solucionar la configuración de los campos para los infinitos modos TE y TM que se propagan en una guía de ondas rectangular. En el módulo "Guías de ondas" se da la solución directa de la forma que adquieren los vectores de campo  $E_z$  y  $H_z$  (ecuaciones 6.49 y 6.50 del subapartado "Modos TE y TM en una guía de ondas rectangular"), que conforman la configuración de campos para los modos TM y TE respectivamente. En este apartado se presenta la resolución completa de los vectores de campo en la dirección de las  $z$ .



# 1. Las ecuaciones de Maxwell

Las **ecuaciones de Maxwell** son un conjunto de ecuaciones que se pueden expresar de manera diferencial o, alternativamente, integral, que describen, de manera macroscópica, el comportamiento de cualquier sistema electromagnético. Por medio de estas ecuaciones se demuestra que electricidad, magnetismo y luz solo son manifestaciones del mismo fenómeno, el **campo electromagnético**.

## James Clerk Maxwell

James Clerk Maxwell (1831-1879) fue un físico y matemático escocés que dejó como herencia la formulación de la teoría electromagnética clásica.

En este apartado se presentarán las ecuaciones de Maxwell en tres formatos: en forma diferencial, en forma integral y en forma fasorial. El subapartado "Condiciones de contorno en la separación de dos medios materiales" se dedica a derivar las condiciones de contorno entre dos medios materiales.

## 1.1. Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial

Sea un medio material caracterizado por dos variables:

- La permitividad dieléctrica:  $\epsilon(\vec{r}, t)$ .
- La permeabilidad magnética:  $\mu(\vec{r}, t)$ .

Este medio material cumple las ecuaciones de Maxwell, expresadas como:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) &= \rho_f(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Ley de Gauss para campos eléctricos} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \rightarrow \text{Ley de Gauss para campos magnéticos} \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Ley de Faraday} \\
 \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{J}_f(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Ley de Ampere-Maxwell} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \rho_f(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Ecuación de conservación de la carga}
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

con:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}, t) &\rightarrow \text{Campo eléctrico} \\
 \vec{H}(\vec{r}, t) &\rightarrow \text{Campo magnético} \\
 \rho_f(\vec{r}, t) &\rightarrow \text{Densidad volumétrica de carga libre} \\
 \vec{J}(\vec{r}, t) &\rightarrow \text{Densidad volumétrica de corriente} \\
 \vec{D}(\vec{r}, t) &= \epsilon(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Vector desplazamiento o densidad de flujo eléctrico} \\
 \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \rightarrow \text{Vector inducción magnética o flujo de campo magnético}
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

### Conservación

Aunque la expresión de la conservación de la carga no es propiamente una de las ecuaciones de Maxwell (de hecho, esta información ya está contenida en ellas), es útil tenerla en cuenta en muchas situaciones, motivo por el que también se ha añadido aquí.

Las ecuaciones de Maxwell, por tanto, nos dicen que:

1) En cualquier punto del espacio se genera campo eléctrico si:

- Hay carga en ese punto.
- Hay una disminución temporal del campo magnético.

2) En cualquier punto del espacio se genera campo magnético si:

- Hay corriente eléctrica en aquel punto.
- Hay un aumento temporal del campo eléctrico.

### 1.2. Las ecuaciones de Maxwell en forma integral

Aplicando el teorema de la divergencia, expresado como:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad 7.3$$

a las expresiones que contienen divergencias, y el de Stokes, expresado como:

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad 7.4$$

a las expresiones que contienen rotacionales, obtenemos las ecuaciones de Maxwell en forma integral:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D}(\vec{r}, t) d\vec{s} &= \int_V \rho_f(\vec{r}, t) dv = Q_{\text{IN}} \\ \oint_S \vec{B}(\vec{r}, t) d\vec{s} &= 0 \\ \oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) d\vec{l} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) d\vec{s} \\ \oint_C \vec{H}(\vec{r}, t) d\vec{l} &= \int_S \vec{J}_f(\vec{r}, t) d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D}(\vec{r}, t) d\vec{s} \\ \oint_S \vec{J}(\vec{r}, t) d\vec{s} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_f(\vec{r}, t) dv = -\frac{\partial}{\partial t} Q_{\text{IN}} \end{aligned} \quad 7.5$$

Estas expresiones son igual de válidas que las ecuaciones en forma diferencial para expresar el comportamiento de los campos electromagnéticos. La diferencia, sin embargo, radica en que nos dan información de los campos en áreas o contornos de áreas, mientras que las ecuaciones en forma diferencial nos dan información de los campos en puntos discretos del espacio.

### 1.3. Condiciones de contorno en la separación de dos medios materiales

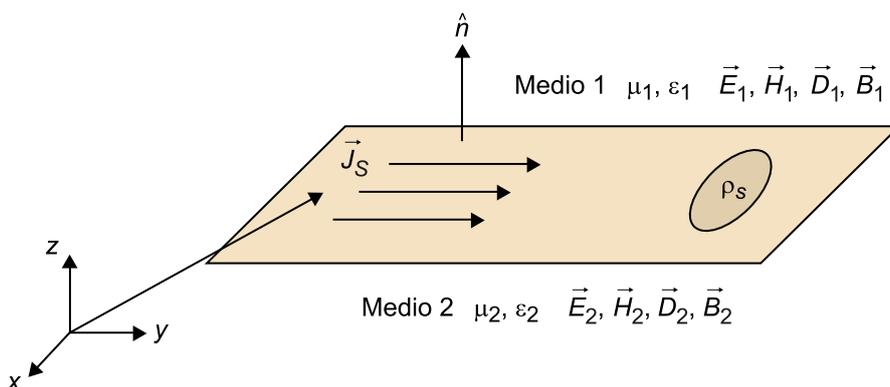
La interfaz entre dos medios materiales diferentes (por ejemplo, entre conductor y dieléctrico, entre agua y aire, etc.) genera una discontinuidad en el espacio. Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial representan derivadas de los campos eléctrico y magnético respecto a las coordenadas espaciales (divergencia y rotacional). Estas, sin embargo, no tienen sentido allí donde haya discontinuidades y, por tanto, no pueden utilizarse para definir el comportamiento de los campos en estos puntos. Para solucionar este problema se utilizarán las condiciones de contorno, obtenidas con la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en forma integral en zonas alrededor de la discontinuidad.

En el subpartado "Condiciones de contorno generales" se derivarán las condiciones que deben satisfacer los campos en la interfaz entre dos medios cualquiera. Y en los subpartados "Condiciones de contorno en la separación de dos medios dieléctricos" y "Condiciones de contorno en la separación entre un medio dieléctrico y un medio conductor perfecto" se verán los casos particulares de interfaz entre dieléctrico y dieléctrico y entre dieléctrico y conductor, respectivamente.

#### 1.3.1. Condiciones de contorno generales

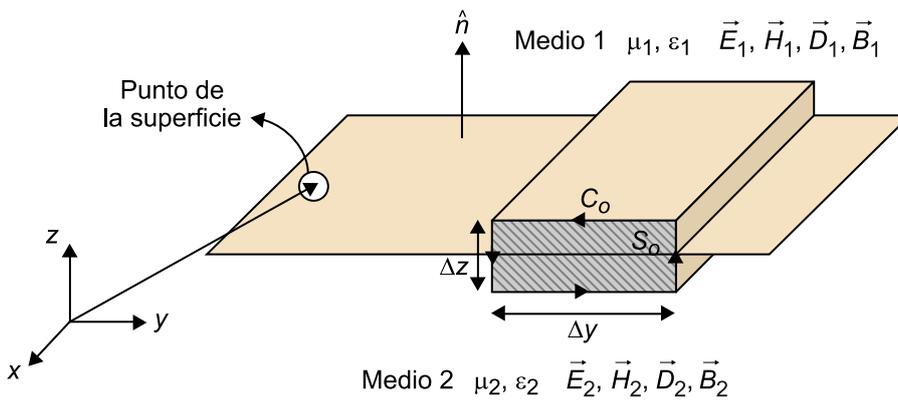
Sean dos medios materiales caracterizados por sus constantes dieléctricas y magnéticas  $\epsilon$  y  $\mu$ . Supongamos que en la interfaz entre los dos medios existe una corriente libre superficial  $\vec{J}_S(\vec{r}, t)$  y una distribución de carga libre  $\rho_f(\vec{r}, t)$  (figura 1):

Figura 1. Interfaz entre dos medios diferentes



En un punto de la interfaz se elige una caja rectangular con un contorno  $C_0$  y sección con una superficie  $S_0$  (figura 2):

Figura 2. Contorno  $C_0$  y sección con una superficie  $S_0$  sobre la interfaz entre dos medios materiales



Aplicando la ley de Faraday en forma integral sobre el rectángulo a lo largo del contorno  $C_0$  y sobre la superficie  $S_0$ , se obtiene:

$$\oint_{C_0} \vec{E}(\vec{r}, t) d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_0} \vec{B}(\vec{r}, t) d\vec{s} \quad 7.6$$

A medida que  $\Delta z$  se hace más pequeño, el área  $S_0$  tiende a 0, por lo que las contribuciones a la integral de superficie son negligibles. Además, las contribuciones a la integral de circulación respecto a  $y$  también son mínimas. En el límite ( $\Delta z \rightarrow 0$ ) se reduce a:

$$E_1 \hat{y} \Delta y - E_2 \hat{y} \Delta y = 0 \quad 7.7$$

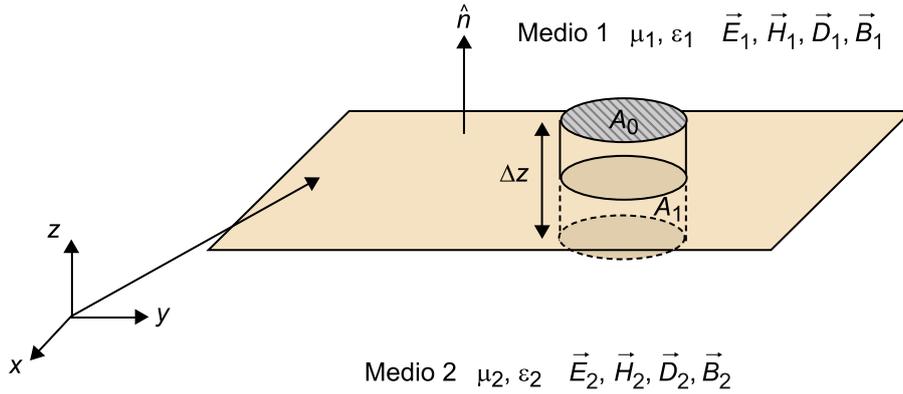
o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{t1} - \vec{E}_{t2} &= 0 \rightarrow \vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2} \\ n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= 0 \end{aligned} \quad 7.8$$

Utilizando el mismo procedimiento con la ley de Ampere-Maxwell se obtiene:

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t} = \vec{J}_s \quad 7.9$$

Si se considera ahora un cilindro como el de la figura 3:

Figura 3. Cilindro de altura  $\Delta z$  y área  $A_1 + A_2$  sobre la interfaz entre dos medios materiales

Y le aplicamos la ecuación de Gauss para campos eléctricos:

$$\oint_{A_0 A_1} \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \int_{\text{cilindro}} \rho_f(\vec{r}, t) dv \quad 7.10$$

A medida que  $\Delta z \rightarrow 0$  la contribución en la integral de superficie por parte de  $A_1 \rightarrow 0$ . Bajo estas condiciones:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_{\text{cilindro}} \rho_f(\vec{r}, t) dv = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} [(\rho_f \Delta z) A_0] = \rho_s A_0 \quad 7.11$$

Por tanto se puede escribir:

$$D_1 \hat{z} A_0 - D_2 \hat{z} A_0 = \rho_s A_0 \rightarrow D_1 \hat{z} - D_2 \hat{z} = \rho_s \quad 7.12$$

En general, se cumplirá que:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \quad 7.13$$

Utilizando un procedimiento similar con la ley de Gauss para campos magnéticos obtenemos:

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad 7.14$$

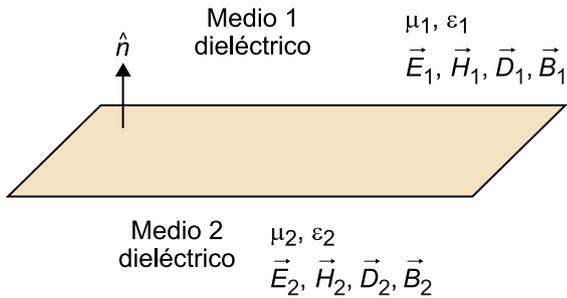
Resumiendo:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= 0 \rightarrow \vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2} \\ \hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) &= \rho_s \rightarrow D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \\ \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= \vec{J}_s \rightarrow \vec{H}_{t1} - \vec{H}_{t2} = \vec{J}_s \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) &= 0 \rightarrow B_{n1} = B_{n2} \end{aligned} \quad 7.15$$

### 1.3.2. Condiciones de contorno en la separación de dos medios dieléctricos

En la separación entre dos medios dieléctricos no tendremos acumulación de carga ni corrientes superficiales (figura 4):

Figura 4. Interfaz entre un dieléctrico (medio 1) y otro dieléctrico (medio 2)



Por tanto, en las mismas condiciones que antes, las condiciones de contorno nos quedarán:

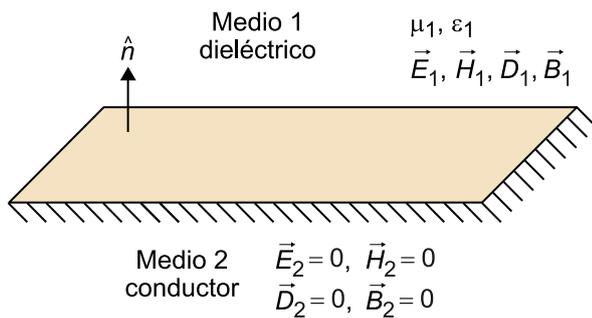
$$\begin{aligned} \vec{E}_{t1} &= \vec{E}_{t2} \\ D_{n1} &= D_{n2} \\ \vec{H}_{t1} &= \vec{H}_{t2} \\ B_{n1} &= B_{n2} \end{aligned} \quad 7.16$$

### 1.3.3. Condiciones de contorno en la separación entre un medio dieléctrico y un medio conductor perfecto

En un conductor perfecto se puede demostrar que:

- 1) Los campos eléctricos y magnéticos variables con el tiempo son nulos en su interior.
- 2) Cualquier corriente o carga variable con el tiempo en el conductor debe estar sobre la superficie del conductor en forma de densidad superficial.

Figura 5. Interfaz entre un dieléctrico (medio 1) y un conductor (medio 2)



Por tanto, en la interfaz conductor-dieléctrico:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{t1} = 0; \vec{E}_{t2} = 0 \\
 \hat{n} \times \vec{H}_1 = \vec{H}_{t1} = \vec{J}_s; \vec{H}_{t2} = 0 \\
 \vec{D}_1 \cdot \hat{n} = D_{n1} = \rho_s; D_{n2} = 0 \\
 B_{n1} = 0; B_{n2} = 0
 \end{aligned}
 \quad 7.17$$

#### 1.4. Ecuaciones de Maxwell en régimen permanente sinusoidal

Las ecuaciones de Maxwell vistas hasta ahora son válidas para campos electromagnéticos con una dependencia con el tiempo arbitraria. Las funciones temporales periódicas arbitrarias pueden descomponerse fácilmente en series de Fourier de componentes sinusoidales armónicas, y las funciones transitorias no periódicas pueden expresarse como integrales de Fourier. La suma de todos los resultados proporciona los campos totales.

En este apartado nos centraremos en los campos electromagnéticos que tienen únicamente dependencia sinusoidal con el tiempo, una vez alcanzado el régimen estacionario. Esta dependencia es la que denominamos **régimen permanente sinusoidal (RPS)**. Bajo estas condiciones podemos trabajar con las expresiones fasoriales de los campos en lugar de las expresiones temporales, dado que estas presentan algunas ventajas a la hora de calcular los campos.

A continuación se describirán los fasores, se verán sus propiedades más importantes y, finalmente, se presentarán las expresiones fasoriales de las ecuaciones de Maxwell.

##### 1.4.1. Introducción a los fasores

Las hipótesis de salida son las siguientes:

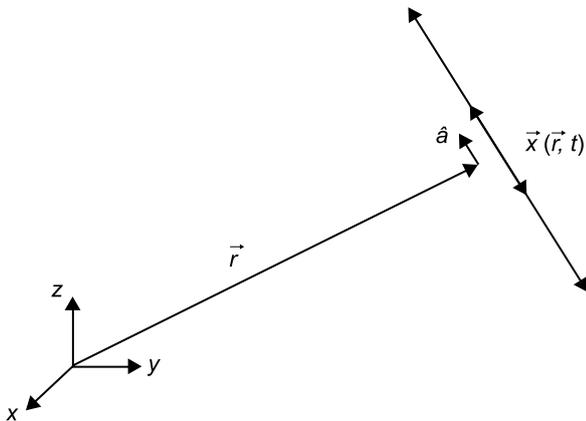
- 1) Todas las excitaciones del sistema son sinusoidales y en la misma frecuencia  $f_0$ .

2) El inicio de las excitaciones se produjo en un tiempo pasado muy lejano. Cualquier régimen transitorio ya ha desaparecido en el tiempo de interés y los valores de campo se van repitiendo periódicamente en cualquier punto del espacio.

3) Como consecuencia de todo esto, cualquier campo que tenga nuestro sistema también dependerá del tiempo sinusoidalmente.

Imaginaos por ejemplo un campo vectorial  $\vec{x}(\vec{r}, t)$  oscilante en el espacio (figura 6):

Figura 6. Campo vectorial  $\vec{x}(\vec{r}, t)$  oscilante en el espacio



Según las condiciones anteriores, la magnitud vectorial  $\vec{x}(\vec{r}, t)$  en cada punto del espacio deberá presentar la forma siguiente:

$$\vec{x}(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cos(\omega_0 t + \phi(\vec{r})) \cdot \hat{\alpha}(\vec{r}) \quad 7.18$$

donde  $\vec{x}(\vec{r}, t)$  es un vector de componentes reales,  $A(\vec{r})$  es la amplitud de la oscilación,  $\phi(\vec{r})$  es la fase inicial y  $\hat{\alpha}(\vec{r})$  es un vector unitario que indica la dirección y el sentido de la oscilación. La pulsación se define como:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad 7.19$$

donde  $f_0$  es la frecuencia a la que oscilan todas las excitaciones y cualquier variable del sistema. Por tanto, cualquier variable del sistema presentará el término  $\cos(\omega_0 t + \dots)$ . Dado que eso siempre es así, podemos representar estas variables mediante un término complejo que no incluya la información  $\cos(\omega_0 t + \dots)$ . Este término se expresará como  $\vec{X}(\vec{r})$ , y es el fasor de la variable vectorial  $\vec{x}(\vec{r}, t)$ . Este fasor lo definiremos como:

$$\vec{x}(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cdot \hat{\alpha}(\vec{r}) \cdot \cos(\omega_0 t + \phi(\vec{r})) \Rightarrow \vec{X}(\vec{r}) = A(\vec{r}) \cdot \hat{\alpha}(\vec{r}) \cdot e^{j\phi(\vec{r})} \quad 7.20$$

- $\vec{x}(\vec{r}, t)$  es un campo vectorial real.
- $\vec{X}(\vec{r})$  es un campo vectorial complejo. Contiene la misma información exceptuando la dependencia (conocida) con  $t$ .

A partir de un fasor recuperaremos la señal temporal con:

$$\begin{aligned}\vec{x}(\vec{r}, t) &= A(\vec{r}) \cdot \hat{\alpha}(\vec{r}) \cdot \cos(\omega_0 t + \phi(\vec{r})) = A(\vec{r}) \cdot \hat{\alpha}(\vec{r}) \Re\{e^{j(\omega_0 t + \phi(\vec{r}))}\} = \\ &= A(\vec{r}) \cdot \hat{\alpha}(\vec{r}) \Re\{e^{j\omega_0 t} e^{j\phi(\vec{r})}\} = \Re\{A(\vec{r}) \cdot \hat{\alpha}(\vec{r}) e^{j\phi(\vec{r})} e^{j\omega_0 t}\} = \Re\{\vec{X}(\vec{r}) e^{j\omega_0 t}\}\end{aligned}\quad 7.21$$

### 1.4.2. Propiedades de los fasores

Para operar con fasores necesitamos conocer sus propiedades. Sean  $\vec{x}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{y}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{z}(\vec{r}, t)$  tres magnitudes vectoriales reales con dependencia armónica con el tiempo, con los fasores asociados  $\vec{X}(\vec{r})$ ,  $\vec{Y}(\vec{r})$  y  $\vec{Z}(\vec{r})$ , se cumple que:

$$\begin{aligned}\vec{x}(\vec{r}, t) = \vec{y}(\vec{r}, t) &\quad \rightarrow \quad \vec{X}(\vec{r}) = \vec{Y}(\vec{r}) \\ \vec{z}(\vec{r}, t) = \vec{x}(\vec{r}, t) + \vec{y}(\vec{r}, t) &\quad \rightarrow \quad \vec{Z}(\vec{r}) = \vec{X}(\vec{r}) + \vec{Y}(\vec{r}) \\ \vec{y}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{x}(\vec{r}, t) &\quad \rightarrow \quad \vec{Y}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{X}(\vec{r}) \\ \vec{y}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{x}(\vec{r}, t) &\quad \rightarrow \quad \vec{Y}(\vec{r}) = j\omega \cdot \vec{X}(\vec{r}) \\ \vec{x}(\vec{r}, t) = \vec{y}(\vec{r}, t) \times \hat{a} &\quad \rightarrow \quad \vec{X}(\vec{r}) = \vec{Y}(\vec{r}) \times \hat{a} \\ x(\vec{r}, t) = \vec{y}(\vec{r}, t) \cdot \hat{a} &\quad \rightarrow \quad X(\vec{r}) = \vec{Y}(\vec{r}) \cdot \hat{a}\end{aligned}\quad 7.22$$

Una de las propiedades más importantes para el electromagnetismo (y de las que más se usan) es la de la derivada temporal, ya que esta aparece en las ecuaciones de Maxwell. Podemos observar cómo una derivada se convierte en un producto sencillo, por lo que las operaciones se verán muy simplificadas (ya no se deben resolver ecuaciones diferenciales).

### 1.4.3. Expresión fasorial de las ecuaciones de Maxwell

Sea un sistema electromagnético en el que todas las excitaciones y respuestas tienen dependencia armónica con el tiempo (por lo que estamos en RPS). Supongamos también que la geometría de nuestro sistema es fija (no depende del tiempo), es decir:

$$\epsilon(\vec{r}, t) = \epsilon(\vec{r}), \quad \mu(\vec{r}, t) = \mu(\vec{r}) \quad 7.23$$

Bajo estas hipótesis, las expresiones temporales de los campos pueden sustituirse por sus expresiones fasoriales. Aplicando las propiedades de los fasores, las ecuaciones de Maxwell para los fasores de los campos pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) &= \rho_f(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) &= -j\omega\vec{B}(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{J}_f(\vec{r}) + j\omega\vec{D}(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}) &= -j\omega\rho_f(\vec{r})\end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{aligned}\vec{D}(\vec{r}) &= \epsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \mu(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r})\end{aligned} \quad 7.24$$

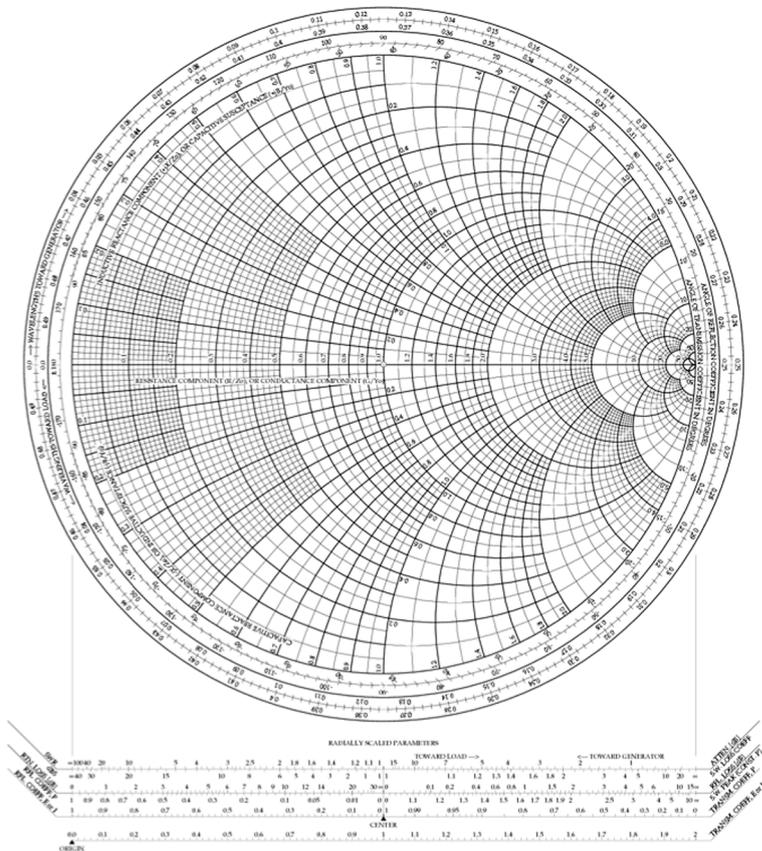
Las condiciones de contorno en fasores son idénticas a las de los campos totales.

## 2. La carta de Smith

La **carta de Smith** es una herramienta gráfica que fue desarrollada en 1939 por Phillip H. Smith en los Laboratorios Bell, y que actualmente sigue siendo muy utilizada en la resolución de problemas con líneas de transmisión. Su aplicación principal es la conversión directa entre coeficiente de reflexión y la impedancia o la admitancia, característica que permite analizar de manera sencilla e intuitiva el comportamiento y los problemas de adaptación de impedancias de una línea de transmisión, así como caracterizar los componentes de microondas. Asimismo, existen aplicaciones más avanzadas, como la representación de círculos de estabilidad para amplificadores/osciladores, círculos de ganancia, círculos de figura de ruido, etc. De hecho, todos los analizadores de redes permiten la representación de los parámetros  $S$  de reflexión ( $S_{ii}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ ) en una carta de Smith, ya que simultáneamente se puede visualizar la información del módulo y fase del coeficiente de reflexión y de la parte real e imaginaria de la impedancia o admitancia correspondiente, por lo que se convierte en una figura muy práctica para el ingeniero de microondas.

En la figura 7 se muestra cómo es una carta de Smith.

Figura 7. La carta de Smith



Vista por primera vez, una carta de Smith puede dar la impresión de no ser más que un lío de curvas, círculos y números, pero en realidad no es complicado entender su significado. La clave radica en saber representar adecuadamente el coeficiente de reflexión sobre la carta.

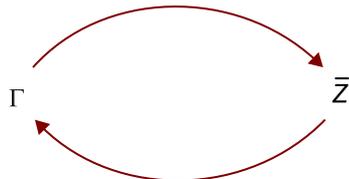
A continuación veremos cómo hacer esta representación y cómo se obtiene la impedancia asociada; también presentaremos algunos casos prácticos. Veremos también el proceso análogo para obtener la admitancia asociada. Se describe el proceso para pasar de una carta de Smith de impedancias a una de admitancias, lo que permite convertir una impedancia compleja en una admitancia compleja sin la necesidad de realizar ningún cálculo. Finalmente, se expone cómo representar en la carta de Smith un movimiento en una línea de transmisión.

## 2.1. La Carta de Smith de impedancias

La carta de Smith nace de la necesidad de realizar una conversión entre el coeficiente de reflexión (expresado como  $\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta}$ ) a una impedancia (expresada como  $Z = R + jX$ , siendo  $R$  la resistencia y  $X$  la reactancia), lo que implica realizar operaciones con números complejos.

En la figura 8 se muestran las operaciones utilizadas para realizar esta conversión.

Figura 8. Conversión matemática entre el coeficiente de reflexión y la impedancia normalizada asociada

$$\bar{Z} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$


$$\Gamma = \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1}$$

En esta figura  $\Gamma$  es el coeficiente de reflexión y  $\bar{Z}$  es la impedancia  $Z$  normalizada respecto a la impedancia característica de la línea de transmisión  $Z_0$  con:

$$\bar{Z} = \frac{Z}{Z_0} \quad 7.25$$

Aunque las calculadoras modernas permiten introducir operaciones complejas y resolverlas con cierta facilidad, con la carta de Smith se puede realizar esta conversión gráficamente sin necesidad de hacer ningún tipo de cálculo.

El origen de estos círculos y curvas viene dado precisamente por la relación entre el coeficiente de reflexión y el valor complejo de una impedancia. Si definimos:

$$Z = \bar{R} + j\bar{X} \quad 7.26$$

donde  $\bar{R}$  y  $\bar{X}$  son la resistencia normalizada y la reactancia normalizada, respectivamente, y:

$$\Gamma = \Gamma_R + \Gamma_I \quad 7.27$$

donde  $\Gamma_R$  y  $\Gamma_I$  son la parte real e imaginaria del coeficiente de reflexión, se cumple que:

$$\left(\Gamma_R - \frac{\bar{R}}{1+\bar{R}}\right)^2 + \Gamma_I^2 = \left(\frac{1}{1+\bar{R}}\right)^2 \quad 7.28$$

Si se representa esta ecuación en función de  $\bar{R}$ , se obtienen los círculos de parte real con radio  $1/(1+\bar{R})$  y centrados en:

$$\Gamma_R = \frac{\bar{R}}{1+\bar{R}} \quad 7.29$$

y

$$\Gamma_I = 0 \quad 7.30$$

Todos los círculos pasan por el punto (1, 0).

Las curvas que nos dan la parte imaginaria  $\bar{X}$  son en realidad arcos de circunferencia que tienen el centro fuera de la carta. La ecuación que describe estas circunferencias viene dada por:

$$(\Gamma_R - 1)^2 + \left(\Gamma_I - \frac{1}{\bar{X}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\bar{X}}\right)^2 \quad 7.31$$

Que nos representa círculos de radio  $1/|\bar{X}|$  y centrados en:

$$\Gamma_R = 1 \quad 7.32$$

y

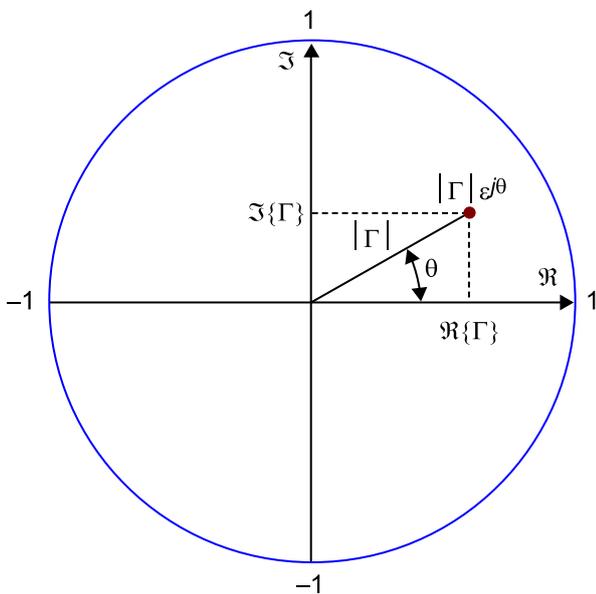
$$\Gamma_I = \frac{1}{\bar{X}} \quad 7.33$$

Los diferentes valores de  $\bar{X}$  generan círculos con diferentes radios y centros en diferentes posiciones de la línea  $\Gamma_R = 1$ . Todos los círculos pasan también por el punto (1, 0).

El procedimiento para encontrar la impedancia asociada a un coeficiente de reflexión dado es el siguiente:

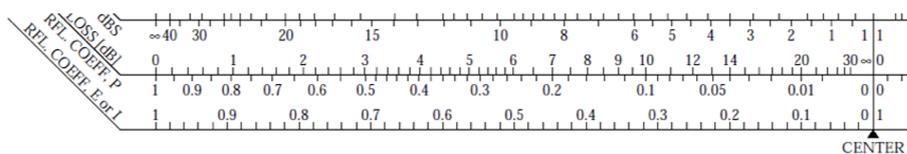
1) Lo primero que debemos hacer es representar el coeficiente de reflexión  $\Gamma$  en el plano complejo representado por el círculo unitario que proporciona la carta de Smith, donde el eje de abscisas corresponde al eje de parte real, y el eje de ordenadas corresponde al eje de la parte imaginaria, y el origen de coordenadas se sitúa en el centro de este círculo. En la figura 9 se muestra un ejemplo de ello.

Figura 9. Representación del coeficiente de reflexión en el plano complejo que proporciona la carta de impedancias



Para dibujar de manera adecuada el módulo y la fase del coeficiente de reflexión, se pueden utilizar las escalas graduadas adjuntas bajo la carta junto con un compás. La amplitud adecuada del módulo del coeficiente de reflexión la podemos obtener utilizando la escala situada en la parte inferior izquierda con el nombre "RFL. COEFF". Esta escala va del 0 al 1, tal y como se observa en la figura 10.

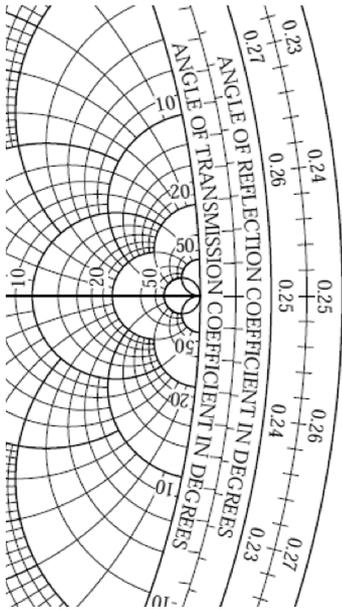
Figura 10. Escala graduada del módulo del coeficiente de reflexión



Por tanto, utilizando el compás, tomamos la amplitud adecuada pinchando en el 0 y el valor del módulo del coeficiente de reflexión. Este módulo lo representamos posteriormente en la carta utilizando el centro como origen de coordenadas (tal y como se observa en la figura 9).

Para conocer su fase, utilizaremos la escala "ANGLE OF REFLECTION COEFFICIENT IN DEGREES", situada en uno de los márgenes del círculo, como se observa en la figura 11.

Figura 11. Escala graduada de la fase del coeficiente de reflexión

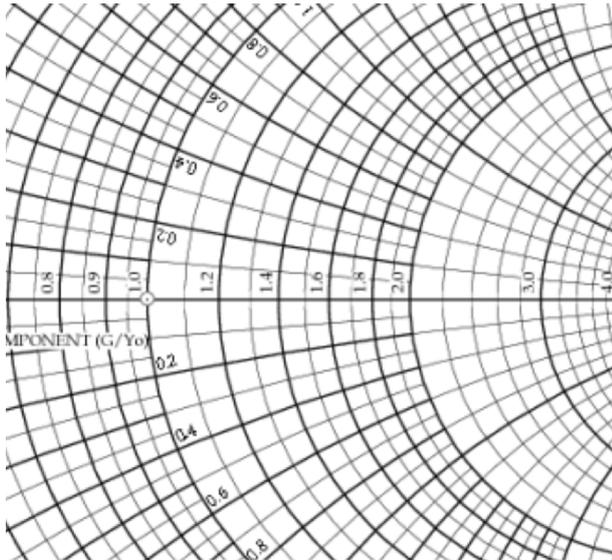


Esta fase tiene el origen ( $0^\circ$ ) en el eje de parte real positiva y, siguiendo el sentido antihorario, se incrementa hasta los  $180^\circ$  (justo en el otro extremo de la carta de Smith). De manera análoga, siguiendo el sentido horario esta fase se decrementa hasta los  $-180^\circ$ , llegando otra vez al otro extremo de la carta de Smith. De esta manera, cualquier fase puede ser representada adecuadamente.

2) Una vez hemos representado el coeficiente de reflexión en la carta de Smith, la conversión a su impedancia asociada se realiza utilizando los círculos y las curvas que tienen como origen el punto correspondiente a  $\Gamma = 1 + j0$ . El círculo completo que cruza el coeficiente de reflexión nos da la parte real de la impedancia normalizada  $\bar{Z}$  (es decir,  $\bar{R}$ ). Y la curva que finaliza en un extremo del círculo diferente a  $\Gamma = 1 + j0$  nos da la parte imaginaria de la impedancia normalizada  $\bar{Z}$  (es decir,  $\bar{X}$ ).

En la figura 12 se muestra cómo en el eje de abscisas tenemos los valores de la parte real de la impedancia, y la parte imaginaria la tenemos contenida en el contorno del círculo de parte real 1.

Figura 12. Parte real e imaginaria de la impedancia

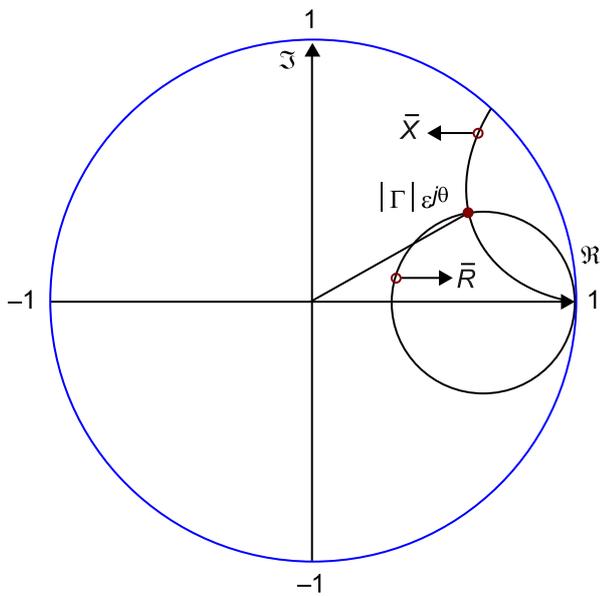


**Figura 12**

En el eje de abscisas tenemos los valores de la parte real de la impedancia, y la parte imaginaria la tenemos contenida en el contorno del círculo de parte real 1.

Siguiendo con el caso planteado en la figura 9, obtendremos un resultado similar al que se presenta en la figura 13.

Figura 13. Parte real e imaginaria de la impedancia asociada al coeficiente de reflexión



Por tanto, recuperamos el valor de la impedancia normalizada con:

$$\bar{Z} = \bar{R} + j\bar{X} \quad 7.34$$

Para desnormalizar solo es necesario multiplicar por la impedancia de normalización, en este caso  $Z_0$ :

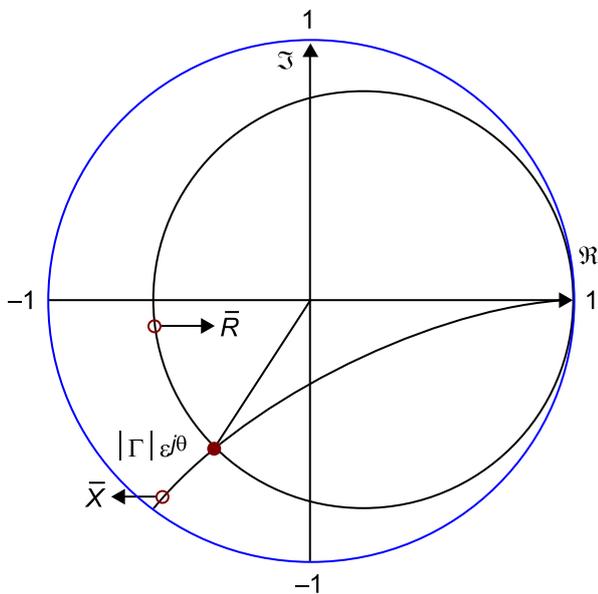
$$Z = \bar{Z} \cdot Z_0 \quad 7.35$$

Hay que tener en cuenta que si el coeficiente de reflexión tiene una fase entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  (es decir, si se encuentra por encima del eje de abscisas), el valor de la reactancia normalizada será positivo, es decir, tendrá un comportamiento inductivo. Pero si el coeficiente de reflexión tiene una fase inferior a  $0^\circ$  o superior a  $180^\circ$  (es decir, si se encuentra por debajo del eje de abscisas), el valor de la reactancia normalizada será negativo, esto es, tendrá un comportamiento capacitivo.

El punto  $\Gamma = 1$  representa una impedancia  $\bar{Z} = \infty$ , y el punto  $\Gamma = -1$  representa una impedancia  $\bar{Z} = 0$ .

En la figura 14 se muestra un ejemplo donde el valor de la fase del coeficiente de reflexión está por encima de los  $180^\circ$ .

Figura 14. Parte real e imaginaria de la impedancia asociada al coeficiente de reflexión



El procedimiento es análogo al caso anterior, teniendo ahora en cuenta que recuperamos el valor de la impedancia normalizada con:

$$\bar{Z} = \bar{R} - j\bar{X} \quad 7.36$$

Para desnormalizar seguimos utilizando la ecuación 7.35.

El procedimiento para realizar la operación inversa, es decir, obtener el coeficiente de reflexión a partir del valor de la impedancia es muy similar al procedimiento anterior siguiendo los pasos también al revés:

1) Normalizamos la impedancia utilizando la ecuación 7.25 y buscamos en la carta de Smith el punto donde se cruzan el círculo de parte real  $\bar{R}$  y la curva de parte imaginaria  $\bar{X}$ . Hay que tener en cuenta que si  $\bar{X}$  es negativa, debemos buscarla por debajo del eje de abscisas.

2) Una vez localizado este punto, obtenemos el módulo del coeficiente de reflexión midiendo la distancia del punto al centro de la carta de Smith y utilizando la escala graduada de la figura 10. Y su fase la obtenemos utilizando la escala graduada de la figura 11.

A continuación se presenta un ejemplo donde se utilizará la carta de Smith para realizar varias transformaciones entre coeficiente de reflexión e impedancia.

Una línea de transmisión con una impedancia característica de  $50 \Omega$  y de longitud  $0,3\lambda$  está cargada con una impedancia de valor  $Z_L = 40 - j75 \Omega$ . Encontrad el coeficiente de reflexión en la carga, en la entrada de la línea de transmisión y la impedancia de entrada de esta línea de transmisión.

### Solución

Lo primero que debemos hacer es normalizar la impedancia para poderla representar adecuadamente en la carta de Smith:

$$\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{40 - j75}{50} = 0,8 - j1,5 \quad 7.37$$

Una vez normalizada, buscamos el círculo de valor 0,8 (parte real) y la curva  $-1,5$  (parte imaginaria por debajo del eje de abscisas) y dibujamos el punto. El coeficiente de reflexión lo encontramos trazando una recta desde el centro de la carta al punto. Para conocer el módulo, utilizamos el compás y la escala de la figura 10; para conocer la fase alargamos la línea hasta cruzar la escala mostrada en la figura 11. Tal y como se observa en la figura 15, el coeficiente de reflexión obtenido adquiere un valor:

$$\rho_L = 0,644 \angle_{-57,7^\circ} = 0,644 \angle_{-1\text{rad}} = 0,644 e^{-j} \quad 7.38$$

Dado que estamos en una línea de transmisión sin pérdidas, el coeficiente de reflexión en la entrada de la línea de transmisión  $\rho_{IN}$  lo podemos obtener introduciendo un cambio de fase equivalente a una distancia de  $0,3\lambda$  en el coeficiente de reflexión en la carga  $\rho_L$ . Es decir:

$$\rho_{IN} = \rho_L e^{-2j\beta l} = \rho_L e^{-2j \frac{2\pi}{\lambda} 0,3\lambda} = 0,644 e^{-j} e^{-j1,2\pi} = 0,644 e^{-j(1,2\pi+1)} = 0,644 \angle_{86,7^\circ} \quad 7.39$$

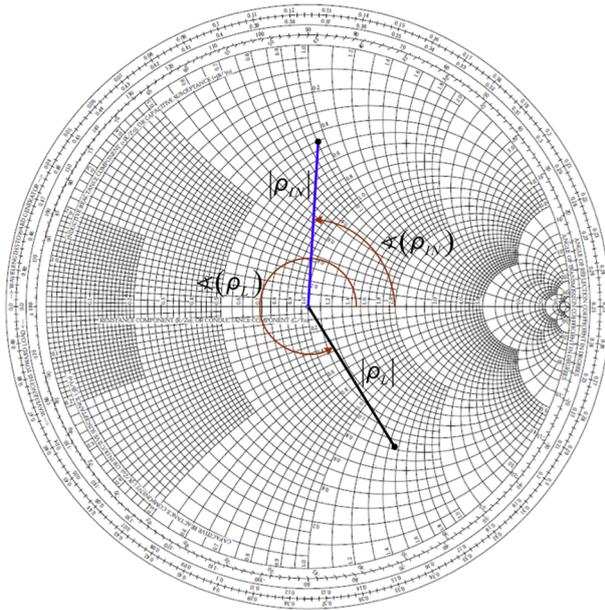
Para obtener la impedancia de entrada volvemos a dibujar el coeficiente de reflexión  $\rho_{IN}$  en la carta de Smith. El proceso es análogo al caso anterior para dibujar su módulo y su fase. Una vez dibujado, leemos el valor de la impedancia de entrada normalizada a través de los círculos y curvas de parte real e imaginaria, y obtenemos:

$$\bar{Z}_{IN} = 0,44 + j0,96 \quad 7.40$$

Finalmente, desnormalizamos el valor y obtenemos la impedancia de entrada:

$$Z_{IN} = \bar{Z}_{IN} \cdot Z_0 = (0,44 + j0,96) \cdot 50 = 22 + j48 \Omega \quad 7.41$$

Figura 15. Coeficiente de reflexión en la carga y en la entrada de la línea de transmisión para  $Z_L = 40 - j75 \Omega$



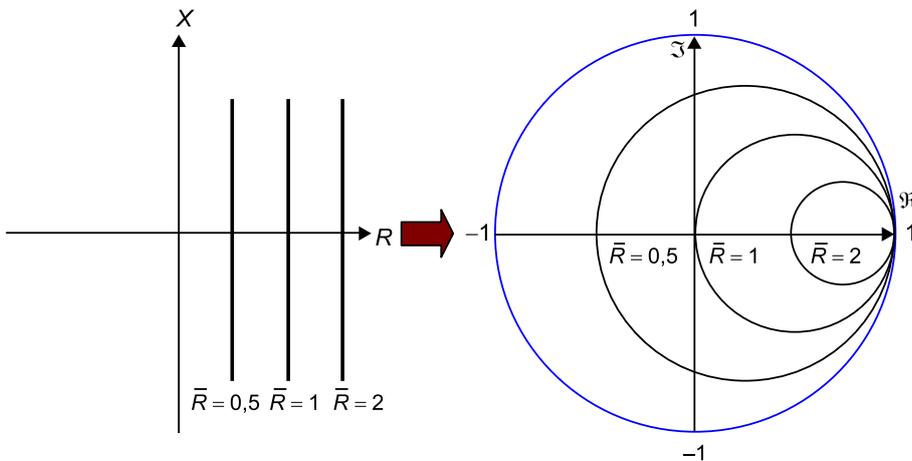
**2.2. Casos prácticos de la carta de Smith de impedancias**

Vamos a ver unos cuantos ejemplos prácticos que pueden ayudar a una comprensión más intuitiva de la relación entre la representación cartesiana de la impedancia y su representación en la carta de Smith.

**1) Parte real constante**

La representación de tres impedancias con parte real constante ( $\bar{R}=0,5, \bar{R}=1$  y  $\bar{R}=2$ ) y cualquier valor de parte imaginaria, en cartesianas y en la carta de Smith, se muestra en la figura 16.

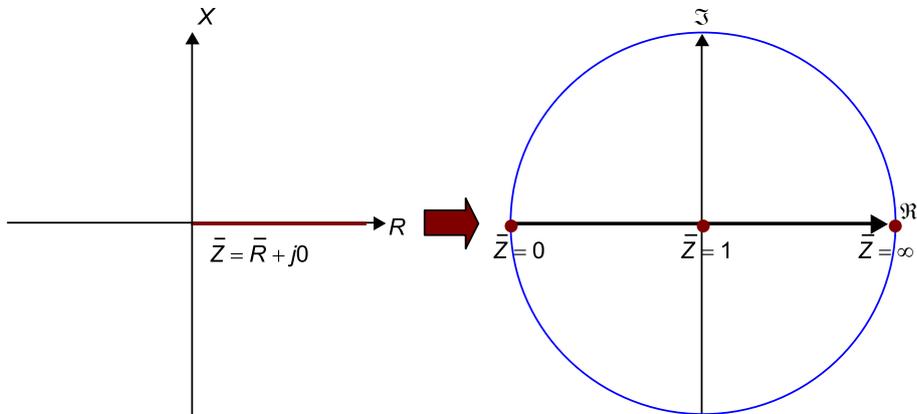
Figura 16. Representación en cartesianas y en la carta de Smith de una impedancia con parte real constante



**2) Parte imaginaria nula**

La representación de cualquier impedancia con parte imaginaria nula en cartesianas y en la carta de Smith se muestra en la figura 17.

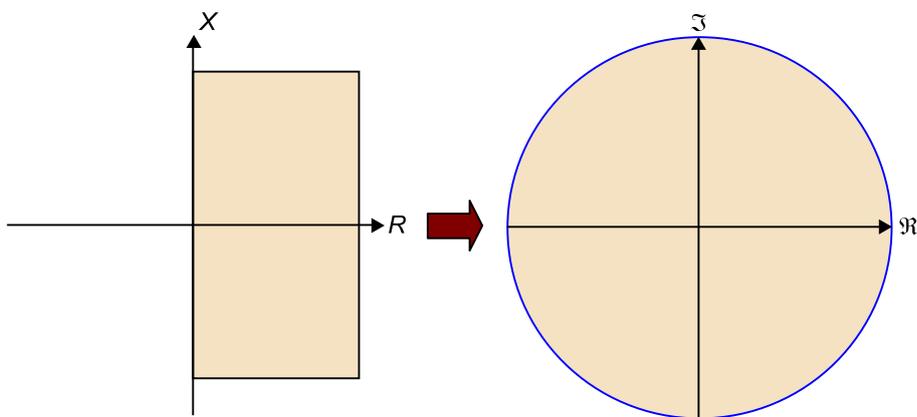
Figura 17. Representación en cartesianas y en la carta de Smith de una impedancia con parte imaginaria nula



### 3) Parte real positiva

La representación de cualquier impedancia con parte real positiva en cartesianas y en la carta de Smith se muestra en la figura 18.

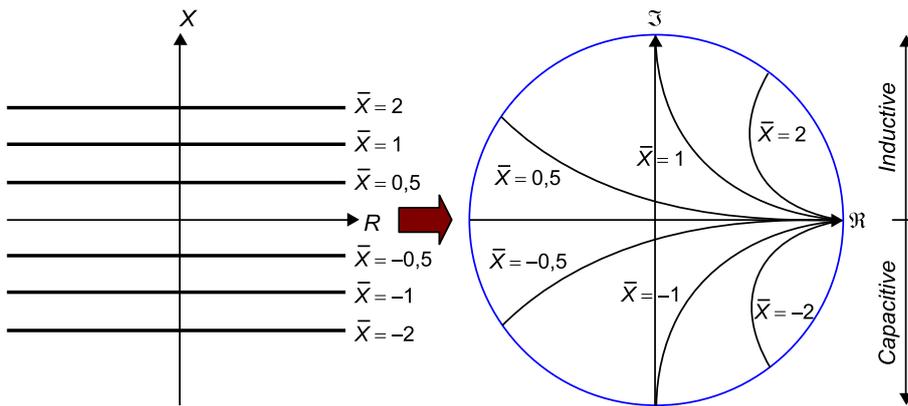
Figura 18. Representación en cartesianas y en la carta de Smith de una impedancia con parte real positiva



### 4) Parte imaginaria constante

La representación de seis impedancias con parte imaginaria constante ( $\bar{X} = \pm 0,5$ ,  $\bar{X} = \pm 1$  y  $\bar{X} = \pm 2$ ) y cualquier valor de parte real, en cartesianas y en la carta de Smith, se muestra en la figura 19.

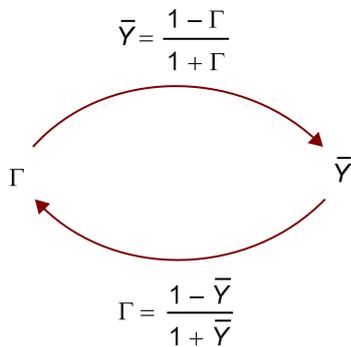
Figura 19. Representación en cartesianas y en la carta de Smith de una impedancia con parte imaginaria constante



### 2.3. La carta de Smith de admitancias

De la misma manera que en el caso anterior, existe una relación unívoca entre el coeficiente de reflexión y la admitancia en una línea de transmisión (expresada como  $Y = G + jB$ , siendo  $G$  la conductancia y  $B$  la susceptancia). Esta relación queda patente en la figura 20.

Figura 20. Conversión matemática entre el coeficiente de reflexión y la impedancia normalizada asociada



En esta figura  $\Gamma$  es el coeficiente de reflexión e  $\bar{Y}$  es la admitancia  $Y$  normalizada respecto a la admitancia característica de la línea de transmisión  $Y_0$  con:

$$\bar{Y} = \frac{Y}{Y_0} \quad 7.42$$

donde:

$$Y = \frac{1}{Z} \quad 7.43$$

e

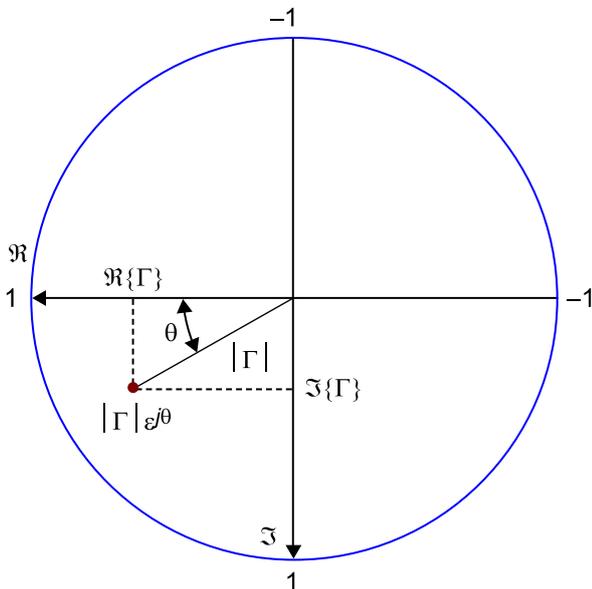
$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} \quad 7.44$$

De nuevo, la carta de Smith nos permitirá realizar esta conversión gráficamente sin necesidad de realizar ningún tipo de cálculo. El procedimiento para encontrar la admitancia asociada a un coeficiente de reflexión dada es el siguiente:

1) Lo primero que debemos hacer es representar el coeficiente de reflexión  $\Gamma$  en el plano complejo representado por el círculo unitario que proporciona la carta de Smith.

La diferencia con el caso de la carta de Smith de impedancias es que los ejes de parte real e imaginaria están girados  $180^\circ$ , tal y como se observa en la figura 21, donde se ha representado un valor ejemplo de coeficiente de reflexión:

Figura 21. Representación del coeficiente de reflexión en el plano complejo que proporciona la carta de Smith de admitancias

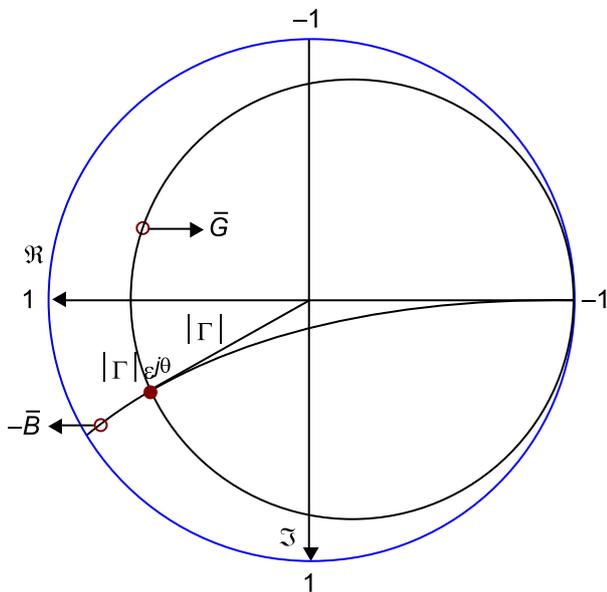


Se puede observar que la parte real positiva se encuentra a la izquierda del eje de ordenadas y la parte negativa a la derecha. La parte imaginaria positiva se encuentra bajo el eje de abscisas y la parte imaginaria negativa por encima. Por tanto, los  $0^\circ$  se encuentran situados a la izquierda de la carta y se incrementan en el sentido antihorario.

Para dibujar de manera adecuada el módulo y la fase del coeficiente de reflexión se utilizan de nuevo las escalas graduadas adjuntas en la carta y el compás. La amplitud adecuada del módulo del coeficiente de reflexión la obtenemos utilizando la escala situada en la parte inferior izquierda con el nombre "RFL. COEFF" (figura 10). Y para la fase utilizamos la escala "ANGLE OF REFLECTION COEFFICIENT IN DEGREES", teniendo en cuenta la definición de los ejes de la figura 21 y haciendo, por tanto, las correcciones necesarias.

2) Una vez hemos representado el coeficiente de reflexión en la carta de Smith, la conversión a la admitancia asociada se realiza utilizando los círculos y las curvas que tienen como origen el punto correspondiente a  $\Gamma = -1 + j0$ , exactamente igual que en el caso de la carta de Smith de impedancias. El círculo completo que cruza el coeficiente de reflexión nos da la parte real de la admitancia normalizada  $\bar{Y}$  (es decir,  $\bar{G}$ ). Y la curva que finaliza en un extremo del círculo diferente a  $\Gamma = -1 + j0$  nos da la parte imaginaria de la admitancia normalizada  $\bar{Y}$  (es decir,  $\bar{B}$ ). Hay que recordar que si el coeficiente de reflexión se encuentra por encima del eje de abscisas, el valor de la susceptancia normalizada será positivo. Pero si el coeficiente de reflexión se encuentra por debajo del eje de abscisas, el valor de la susceptancia normalizada será negativo. Para el caso planteado en la figura 21 obtendríamos un resultado similar al que se presenta en la figura 22.

Figura 22. Parte real e imaginaria de la admitancia asociada al coeficiente de reflexión



Recuperamos el valor de la admitancia normalizada con:

$$\bar{Y} = \bar{G} + j\bar{B} \quad 7.45$$

Para desnormalizar solo es necesario multiplicar por la admitancia de normalización, en este caso  $Y_0$ :

$$Y = \bar{Y} \cdot Y_0 = \frac{Y}{Z_0} \quad 7.46$$

El procedimiento para hacer la operación inversa, es decir, obtener el coeficiente de reflexión a partir del valor de la admitancia es:

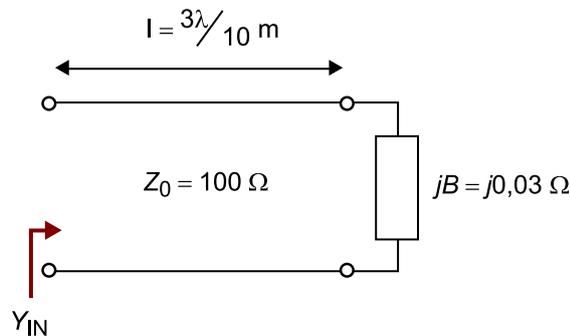
1) Normalizamos la admitancia utilizando la ecuación 7.42 y buscamos en la carta de Smith el punto donde se cruzan el círculo de parte real  $\bar{G}$  y la curva de parte imaginaria  $\bar{B}$ . Debemos tener en cuenta que si  $\bar{B}$  es negativa, debemos buscarla por debajo del eje de abscisas.

2) Una vez localizado este punto, obtenemos el módulo del coeficiente de reflexión midiendo la distancia del punto al centro de la carta de Smith y utilizando la escala graduada de la figura 10. Y su fase la obtenemos utilizando la escala graduada de la figura 11, teniendo en cuenta sin embargo la situación de los ejes, tal y como se muestra en la figura 21.

En el siguiente ejemplo utilizaremos la carta de Smith para realizar transformaciones entre admitancias y coeficientes de reflexión.

Se quiere calcular la admitancia de entrada de una línea de transmisión cargada con una susceptancia, tal y como se muestra en la figura 23.

Figura 23. Circuito ejemplo



### Solución

Lo primero que debemos hacer es normalizar la admitancia para poderla representar adecuadamente en la carta de Smith:

$$\bar{Y}_L = \frac{Y_L}{Y_0} = Y_L \cdot Z_0 = j0,03 \cdot 100 = j3S \quad 7.47$$

Una vez normalizado buscamos la curva de valor 3 (parte imaginaria por encima del eje de abscisas) y dibujamos el punto. El coeficiente de reflexión lo encontramos trazando una recta desde el centro de la carta al punto. Su módulo es directamente 1 (dado que estamos sobre el círculo unitario); para conocer la fase alargamos la línea hasta cruzar la escala mostrada en la figura 11. Tal y como se observa en la figura 24, el coeficiente de reflexión obtenido adquiere un valor:

$$\rho_L = \angle_{217^\circ} = \angle_{3,78rad} = ej^{3,78} \quad 7.48$$

El coeficiente de reflexión en la entrada de la línea de transmisión,  $\rho_{IN}$ , lo podemos obtener desplazando el coeficiente de reflexión en la carga,  $\rho_L$ ,  $6\lambda/5$  con:

$$\rho_{IN} = \rho_L e^{-2j\beta l} = ej^{3,78} e^{-2j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{3\lambda}{10}} = ej^{3,78} e^{-j\frac{6\pi}{5}} \simeq ej^0 = \angle_0 \quad 7.49$$

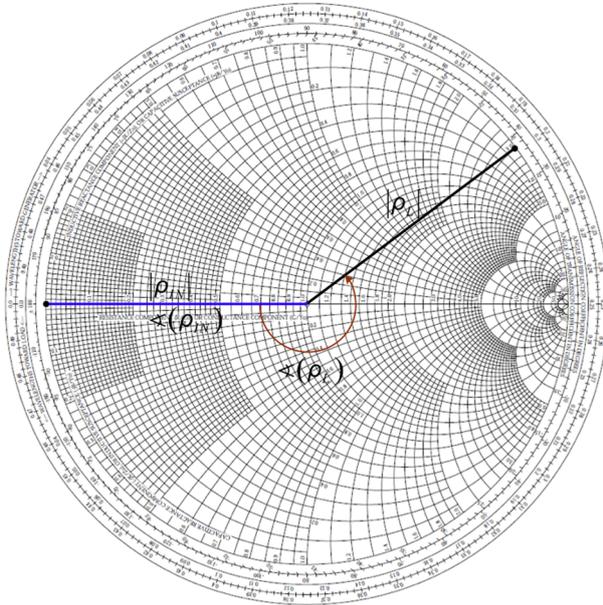
Para obtener la admitancia de entrada volvemos a dibujar el coeficiente de reflexión  $\rho_{IN}$  en la carta de Smith. El proceso es análogo al caso anterior para dibujar su módulo y su fase. Una vez dibujado leemos el valor de la admitancia, y obtenemos:

$$\tilde{Y}_{IN} = 0 \quad 7.50$$

Finalmente, desnormalizando:

$$Y_{IN} = \tilde{Y}_{IN} \cdot Y_0 = 0S \quad 7.51$$

Figura 24. Resolución del problema utilizando la carta de Smith



## 2.4. Movimientos en una línea de transmisión sin pérdidas

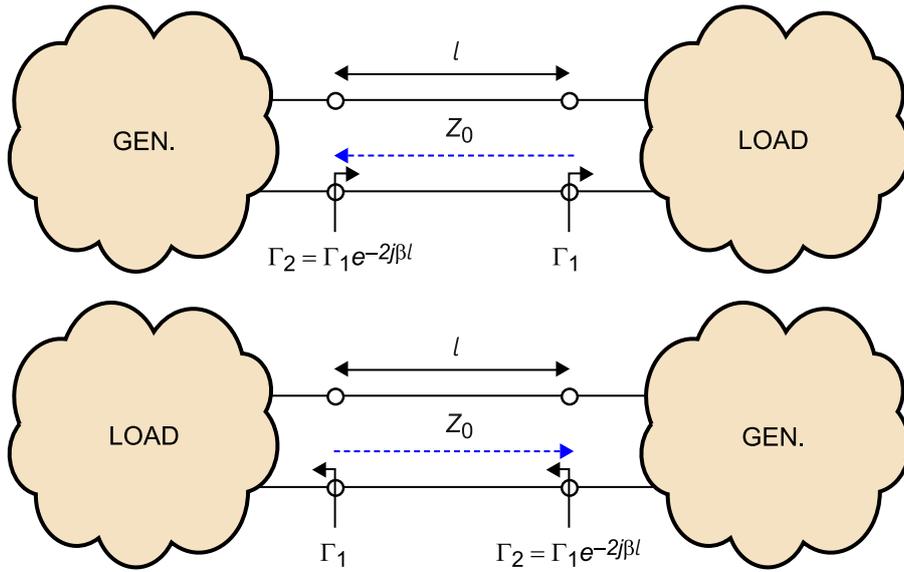
El valor del coeficiente de reflexión y el de la impedancia o admitancia sobre una línea de transmisión va variando en función del punto de la línea de transmisión donde nos situamos. De hecho, si nos movemos sobre la línea de transmisión estaremos generando un cierto tipo de movimiento en la carta de Smith. Hay dos tipos de movimientos, hacia generador y hacia carga, en función de hacia dónde nos movemos. Veámoslos con más detalle.

### 2.4.1. Movimiento hacia generador

El **movimiento hacia generador** es aquel movimiento contrario al sentido en el que miramos, independientemente de lo que haya conectado en los extremos de la línea de transmisión.

En la figura 25 se ilustra este movimiento.

Figura 25. Movimiento hacia generador



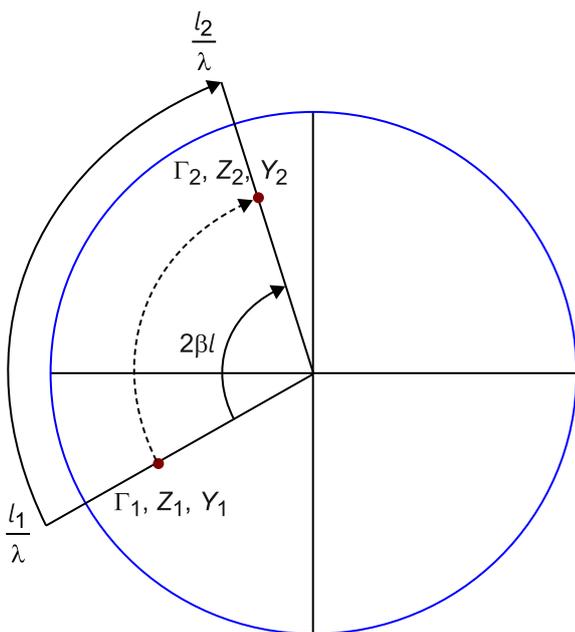
A medida que retrocedemos, el módulo del coeficiente de reflexión se mantiene constante, mientras que la fase del coeficiente de reflexión va disminuyendo a razón de:

$$|\rho_2| = |\rho_1| \tag{7.52}$$

$$\angle(\rho_2) = \angle(\rho_1) - 2\beta l = \angle(\rho_1) - 4\pi \frac{l}{\lambda}$$

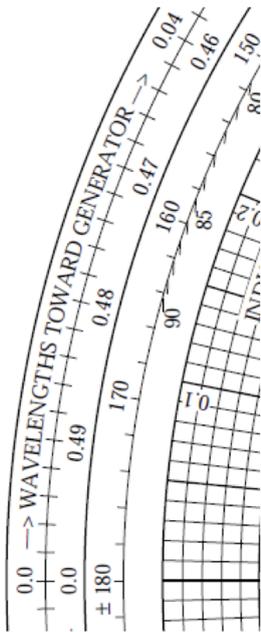
Sobre la carta de Smith, independientemente de que esta sea de admitancias o de impedancias, el movimiento que hacemos se produce en el sentido horario, tal y como se muestra en la figura 26.

Figura 26. Movimiento hacia generador representado en la carta de Smith



Para encontrar  $\Gamma_2$  no hay que calcular  $\beta l$ . Este desplazamiento se puede hacer utilizando una de las escalas en el extremo del círculo, concretamente la de "WAVELENGTH TOWARD GENERATOR" (la más externa al círculo, como se observa en la figura 27). En esta escala podemos representar el desplazamiento equivalente de la línea  $l$  normalizado respecto a la longitud de onda  $\lambda$ . Por tanto, solo es necesario calcular  $l/\lambda$  y moverse relativamente sobre la escala en el sentido horario.

Figura 27. Escala  
Wavelength toward  
generator

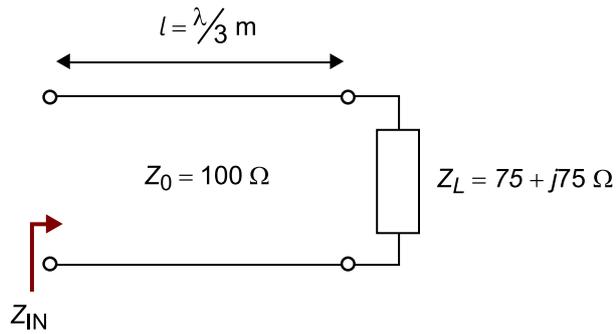


Se puede observar que al realizar un movimiento sobre la línea de transmisión equivalente a  $\lambda/2$ , volvemos al mismo punto. Por tanto, los valores de  $\Gamma$ ,  $\bar{Z}$  e  $\bar{Y}$  son periódicos con periodo  $\lambda/2$ .

Veamos un ejemplo donde necesitaremos el movimiento hacia generador para encontrar la solución. Este ejemplo es parecido al anterior, aunque ahora veremos cómo podemos resolverlo directamente con la carta de Smith sin necesidad de hacer ningún tipo de cálculo.

Se quiere calcular la impedancia de entrada de una línea de transmisión cargada con una impedancia compleja, tal y como se muestra en la figura 28.

Figura 28. Circuito ejemplo

**Solución**

Lo primero que hacemos es normalizar la impedancia para poderla representar adecuadamente en la carta de Smith:

$$\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{75 + j75 \Omega}{100 \Omega} = 0,75 + j0,75 \quad 7.53$$

Una vez normalizada, buscamos el círculo y la curva de valor 0,75 (parte imaginaria por encima del eje de abscisas) y dibujamos el punto. El coeficiente de reflexión lo encontramos trazando una recta desde el centro de la carta al punto. En este caso obtenemos (figura 29):

$$\rho_L = 0,4 \angle_{85,2^\circ} = 0,4 \angle_{1,48 \text{rad}} = e^{j1,48} \quad 7.54$$

El coeficiente de reflexión en la entrada de la línea de transmisión  $\rho_{IN}$  lo podemos obtener desplazando el coeficiente de reflexión en la carga,  $\rho_L$ , una distancia normalizada:

$$\bar{l} = \frac{l}{\lambda} = \frac{\lambda/3}{\lambda} = \frac{1}{3} \quad 7.55$$

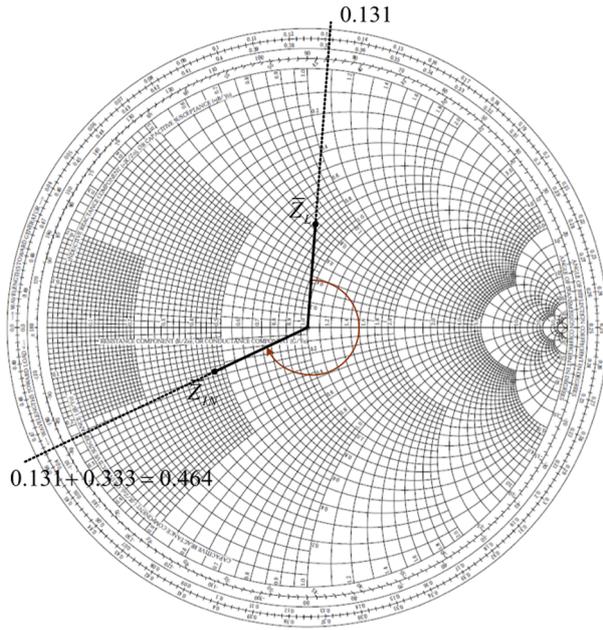
haciendo un movimiento hacia generador. Con esta finalidad alargamos la recta de  $\rho_L$  hasta cruzar la escala mostrada en la figura 27 y leemos el valor (0,131). A este valor le sumamos la longitud de la línea de transmisión normalizada, obteniendo un valor de 0,464. Con el mismo valor de módulo que  $\rho_L$  obtenemos el valor de  $\rho_{IN}$  sobre esta última recta. Para obtener la impedancia de entrada, leemos el valor del círculo (parte real) y de la curva (parte imaginaria) que cortan el punto donde hemos situado  $\rho_{IN}$ , y obtenemos:

$$\bar{Z}_{IN} = 0,44 + j0,19 \Omega \quad 7.56$$

Finalmente, desnormalizando:

$$Z_{IN} = \bar{Z}_{IN} \cdot Z_0 = 44 + j19 \Omega \quad 7.57$$

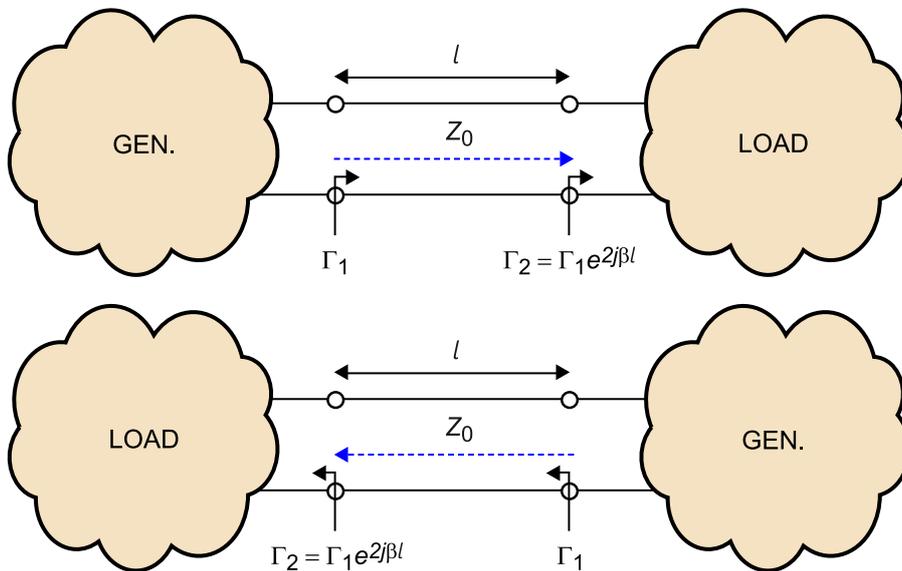
Figura 29. Movimiento hacia generador en una línea de transmisión terminada en una impedancia  $Z_L$



**2.4.2. Movimiento hacia carga**

El **movimiento hacia carga** es aquel movimiento en el mismo sentido en el que miramos, independientemente de lo que haya conectado en los extremos de la línea de transmisión. En la figura 30 se ilustra este movimiento.

Figura 30. Movimiento hacia carga



A medida que avanzamos, el módulo del coeficiente de reflexión se mantiene constante y la fase del coeficiente de reflexión va aumentando a razón de:

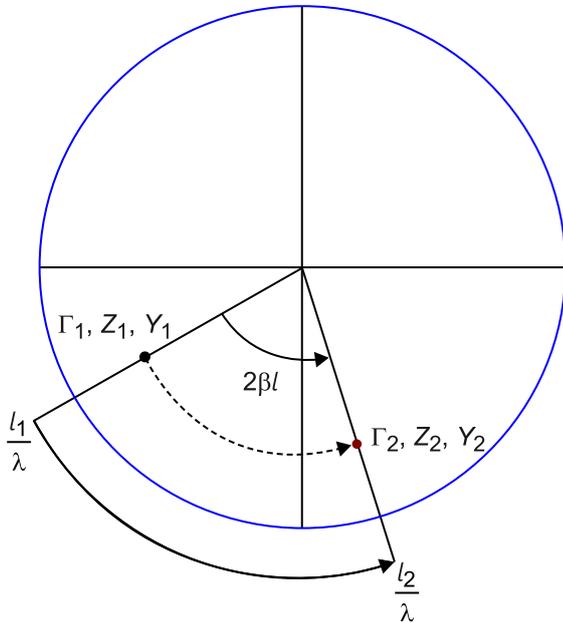
$$|\rho_2| = |\rho_1|$$

$$\angle(\rho_2) = \angle(\rho_1) + 2\beta l = \angle(\rho_1) + 4\pi \frac{l}{\lambda}$$

7.58

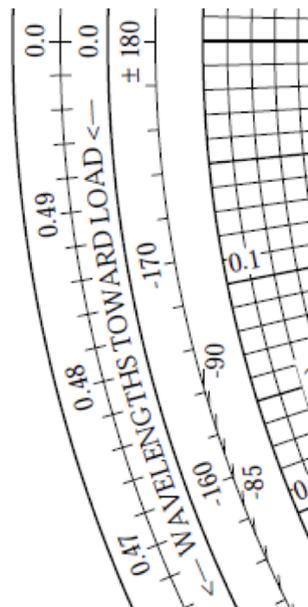
Sobre la carta de Smith, independientemente de que esta sea de admitancias o de impedancias, el movimiento que hacemos se produce en el sentido horario, tal y como se muestra en la figura 31.

Figura 31. Movimiento hacia carga representado en la carta de Smith



Para encontrar  $\Gamma_2$  podemos utilizar la escala "WAVELENGTH TOWARD LOAD" (figura 32). En esta escala tenemos el desplazamiento equivalente de la línea  $l$  normalizado respecto a la longitud de onda  $\lambda$ . Por tanto, solo hay que calcular  $l/\lambda$  y moverse relativamente sobre la escala en el sentido antihorario.

Figura 32. Escala Wavelength toward load

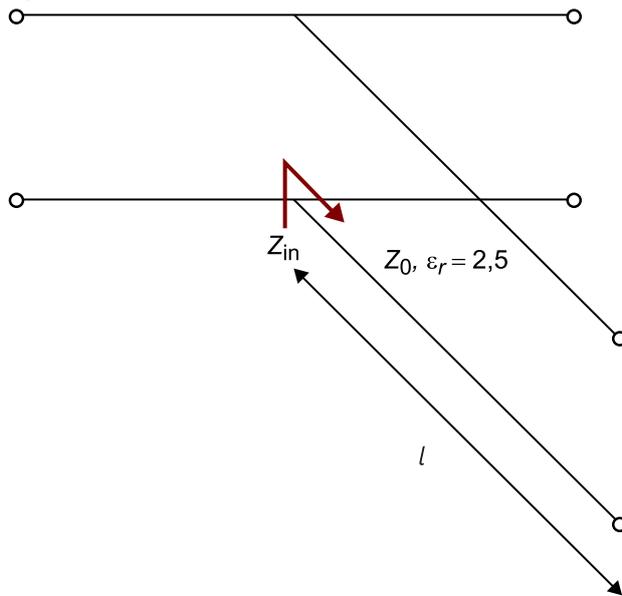


Igual que antes, podemos ver que los valores de  $\Gamma$ ,  $Z$  e  $Y$  son periódicos de periodo  $\lambda/2$ .

A continuación se presenta un ejemplo donde utilizaremos el movimiento hacia carga sobre la carta de Smith para resolverlo.

En un sistema de radiofrecuencia, se pretende eliminar la banda alrededor de 900 MHz con el filtro que se presenta en la figura 33.

Figura 33. Filtro de RF

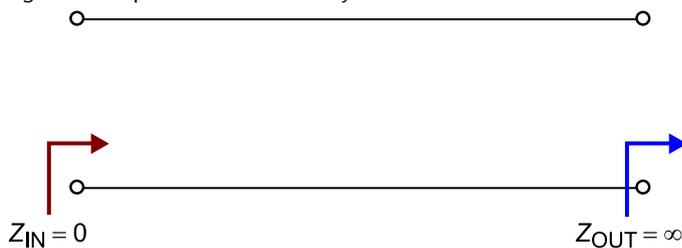


Calculad la longitud  $l$  del *stub* con permitividad dieléctrica  $\epsilon_r = 2,5$  para que impida totalmente el paso de señales en la frecuencia de 900 MHz.

### Solución

Para encontrar esta longitud nos centraremos en las impedancias de entrada y salida del *stub* que se presentan en la figura 34.

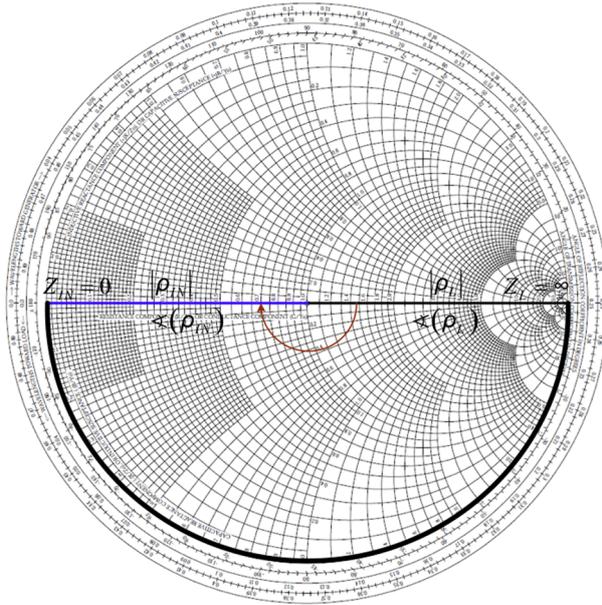
Figura 34. Impedancias de entrada y salida del *stub*



La impedancia de entrada debe ser de  $0 \Omega$  a 900 MHz, dado que de esta manera cortocircuitamos la línea de transmisión y filtramos esta frecuencia (ya que no podrá llegar al puerto opuesto). Dado que queremos resolver el problema haciendo un movimiento hacia carga, nos situamos en la entrada y la dibujamos en la carta de Smith (no es necesario normalizar, ya que obtenemos el mismo valor, tanto para la entrada como para la salida). Una vez situados en este punto (figura 35) nos movemos hacia carga (sentido antihorario) hasta cruzar el punto de impedancia  $\infty$ . Este está situado justo en el extremo opuesto de la carta, por lo que la longitud del *stub* es precisamente de  $\lambda/4$ , que en la frecuencia de 900 MHz y con un dieléctrico de permitividad  $\epsilon_r = 2,5$ , corresponde a:

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f} = \frac{c_0}{4f\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 900 \cdot 10^6 \sqrt{2,5}} = 5,27 \text{ cm} \quad 7.59$$

Figura 35. Movimiento hacia carga en un *stub* acabado en circuito abierto



## 2.5. Paso de la carta de Smith de impedancias a la carta de Smith de admitancias

Una línea de transmisión de longitud  $\lambda/4$  es un inversor de impedancias, ya que su impedancia de entrada será:

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)} \underset{\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}}{=} Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \infty}{Z_0 + jZ_L \infty} = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad 7.60$$

que, normalizada respecto a  $Z_0$ , es:

$$\bar{Z}_{IN} = \frac{1}{\bar{Z}_L} = \bar{Y}_L \quad 7.61$$

Por tanto, hemos convertido una impedancia normalizada en una admitancia normalizada.

Tal y como hemos visto en el apartado anterior, si nos movemos en una línea de transmisión una longitud equivalente a  $\lambda/4$  sobre la carta de Smith (independientemente de si el sentido del movimiento es hacia generador o hacia carga), acabamos en el punto simétrico opuesto de la carta (es decir, rotamos  $180^\circ$ ).

Así, para pasar de una carta de Smith de impedancias a una carta de Smith de admitancias solo debemos buscar el punto simétrico respecto al origen de todos los puntos de interés, y podemos utilizar la misma carta para resolver un problema donde necesitamos trabajar con dos definiciones.

Vamos a ver un ejemplo de cálculo de una admitancia a partir de una impedancia utilizando la carta de Smith.

Encontrad la admitancia equivalente de la impedancia:

$$Z = 50 + j75 \Omega \quad 7.62$$

Lo primero que podemos hacer es normalizar respecto a una impedancia. Ahora no es estrictamente necesario, dado que no nos estamos moviendo sobre una línea de transmisión ni buscamos el valor del coeficiente de reflexión. Pero si trabajamos con valores tan grandes de impedancia, la resolución que obtenemos es mucho menor. Por tanto, podemos utilizar, por ejemplo, los  $50 \Omega$  como impedancia de normalización. De esta manera, obtenemos:

$$\bar{Z} = \frac{Z}{50 \Omega} = 1 + j1,5 \quad 7.63$$

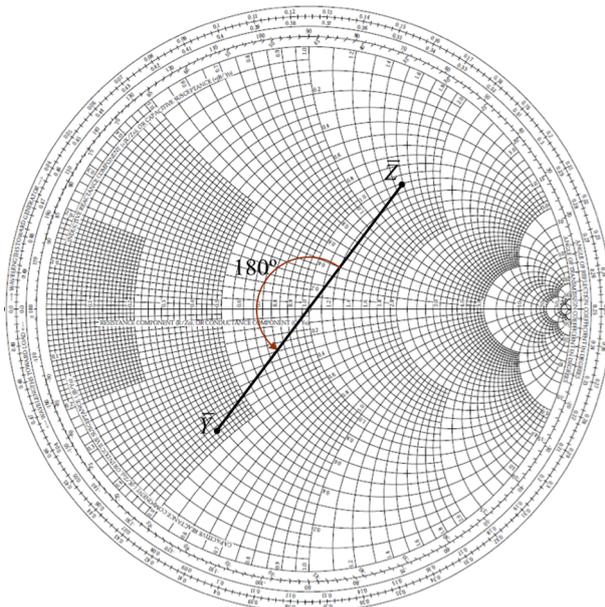
Una vez hemos normalizado, buscamos este valor en la carta de Smith, tomando el círculo de parte real 1 y la curva de parte imaginaria 1,5. El punto obtenido se muestra en la figura 36. Para encontrar la admitancia asociada, giramos el coeficiente de reflexión  $180^\circ$  y leemos el valor obtenido. En este caso obtenemos:

$$\bar{Y} = 0,3 - j0,46 \quad 7.64$$

Ahora ya solo falta desnormalizar con la misma impedancia utilizada para normalizar la impedancia. De esta manera, obtenemos:

$$Y = 0,006 - j0,009S \quad 7.65$$

Figura 36. Giro de  $180^\circ$  del coeficiente de reflexión para encontrar la admitancia asociada a la impedancia



Podéis comprobar que si utilizáis otros valores de impedancia de normalización, obtenéis el mismo resultado.

### 3. Unión P-N

En este apartado se presentan los fundamentos de los dispositivos activos básicos utilizados en los circuitos de microondas: el **diodo** y el **transistor**. A continuación se hace un recorrido sobre la estructura y el funcionamiento de los dispositivos semiconductores y, en particular, de la unión P-N. Finalmente, se analizan las principales características de diferentes tipos de diodos según sea su estructura interna y, en particular, de los diodos Schottky y Pin.

#### 3.1. Dispositivos semiconductores

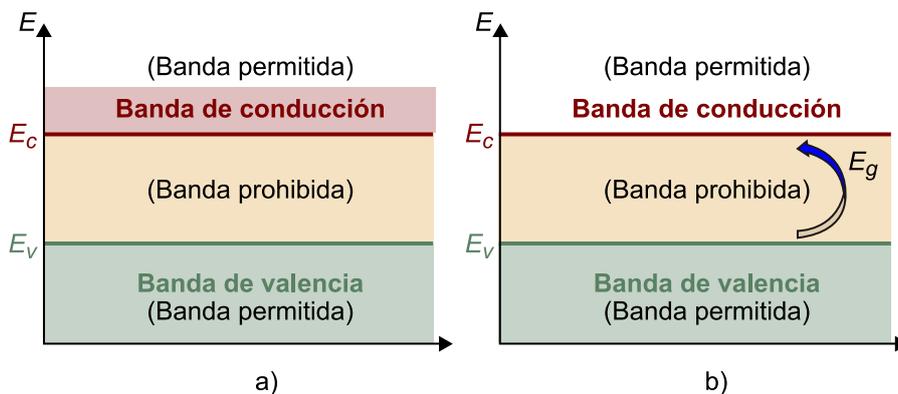
Para comprender las propiedades básicas de cualquier dispositivo activo semiconductor necesitamos repasar los conceptos físicos que modelan estos dispositivos.

##### 3.1.1. Teoría de las bandas de energía

En un semiconductor los electrones no pueden tener valores cualesquiera de energía, sino que solo pueden adoptar ciertos valores discretos. Además, existen ciertas bandas de energía en las que no es posible la existencia de electrones.

Los electrones ocupan niveles de energía discretos agrupados en bandas permitidas.

Figura 37. Gráfica de bandas de energía. a) En un material conductor. b) En un material aislante



En la figura 37 se puede apreciar, en la gráfica de la izquierda, las bandas de energía en un material conductor a 0 °K, donde se puede observar que la banda de conducción está parcialmente ocupada de electrones. En cambio, la gráfica de la derecha pertenece a la de un material aislante a 0 °K, y se puede apreciar que la banda de conducción está vacía de electrones.

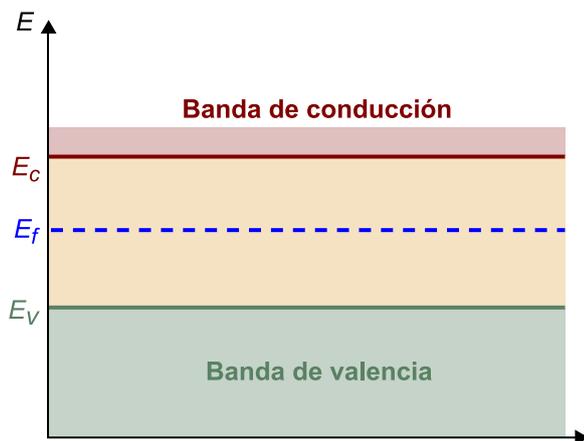
La diferencia de energía entre la banda de conducción y la de valencia se denomina **energía del gap** ( $E_g = E_c - E_v$ ) y en un semiconductor está en torno a 1 eV.

### Unidades

°K es una unidad de medida de temperatura y equivale a la temperatura medida en grados centígrados más 273.

eV (electronvolt) es una unidad de energía y representa la energía cinética que adquiere un electrón cuando es acelerado por una diferencia de potencial de 1 Volt. Equivale a  $1,602176462 \times 10^{-19}$  J, valor que se obtiene de multiplicar la carga del electrón ( $1,602176462 \times 10^{-19}$  C) por la unidad de potencial eléctrico (Volt).

Figura 38. Gráfica de bandas de energía en un material semiconductor



En la figura 38 vemos las bandas de energía típicas de un semiconductor a temperatura ambiente, donde se puede apreciar que la banda de conducción está parcialmente ocupada de electrones.

El **Nivel de Fermi**,  $E_f$ , se define como un nivel característico para cada material y nos permite calcular la densidad de electrones en la banda de conducción para cualquier material y temperatura.

La función de Fermi-Dirac nos da la probabilidad de que un nivel de energía  $E$  esté ocupado por un electrón.

Función de Fermi-Dirac:

$$P_{e^{-}}(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_f}{KT}}} \quad 7.66$$

donde:

- $K$  es la constante de Boltzmann:  $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ .
- $T$  es la temperatura en grados Kelvin.

Lógicamente, esta expresión tan solo es válida para energías,  $E$ , pertenecientes a bandas permitidas.

Por definición:

$$P_{e^{-}}(E_f) = \frac{1}{2} \quad 7.67$$

$$P_{h^{+}}(E) = 1 - P_{e^{-}}(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E_f-E}{KT}}} \quad 7.68$$

En equilibrio termodinámico el nivel de Fermi,  $E_f$ , es constante para cualquier material. Esto debe ser así, pues si hubiera zonas con  $E_f$  distintos, se produciría un flujo de electrones que rompería el equilibrio.

### Semiconductor intrínseco

Se define como **semiconductor intrínseco** aquel semiconductor sin impurezas cuyo nivel de Fermi está situado justo en medio entre las bandas de valencia y de conducción.

Según se puede observar en la figura 38:

$$E_{f_i} \approx \frac{1}{2}(E_c + E_v) \quad 7.69$$

Este nivel  $E_{f_i}$  se conoce como **nivel de Fermi intrínseco**.

Si definimos  $n$  como la densidad de electrones  $e^{-}$  en la banda de conducción y  $p$  como la densidad de huecos  $h^{+}$  en la banda de valencia, en un semiconductor intrínseco debe cumplirse:

$$n_i = p_i \quad 7.70$$

siendo  $n_i = n$  y  $p_i = p$  las densidades de  $e^{-}$  y  $h^{+}$  respectivamente del semiconductor.

## Semiconductor extrínseco

Cuando un semiconductor se dopa con impurezas, el nivel de Fermi varía para dar cuenta de la nueva probabilidad de ocupación de los niveles energéticos:

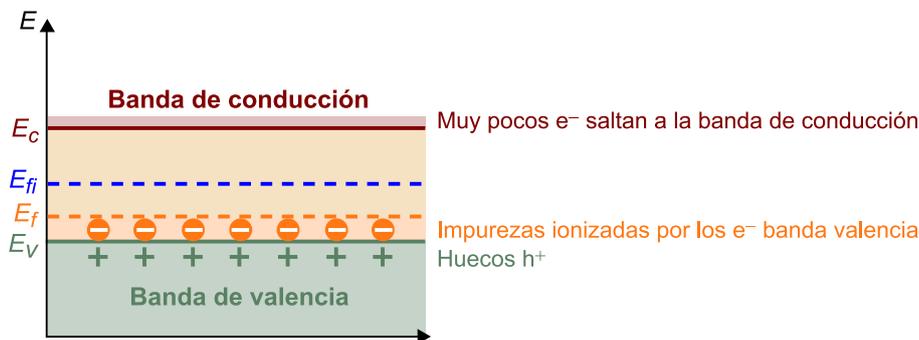
$$n = n_i e^{\frac{E_f - E_{fi}}{KT}} \quad p = p_i e^{\frac{E_{fi} - E_f}{KT}} \quad 7.71$$

$$np = n_i p_i = n_i^2 \quad 7.72$$

### 1) Semiconductor extrínseco Tipo P

Cuando se dopa con impurezas **aceptoras** en una concentración  $N_a \gg n_i$  (esto se considera dopaje normal). Estas impurezas podrían ser elementos del grupo III de la tabla periódica de elementos (como el boro), que poseen 3  $e^-$  en su banda de valencia y, por tanto, pueden aceptar un cuarto  $e^-$ .

Figura 39. Gráfica de bandas de energía en un material semiconductor tipo P



Gracias al dopaje con impurezas, que se fijan a la malla cristalina del semiconductor, se permite que los electrones de la banda de valencia puedan saltar a ionizarlas y, dado que la concentración de impurezas es elevada, la mayoría de los electrones se quedarán atrapados en ellas, pues les es más fácil que llegar a la banda de conducción (es más probable, según la función de probabilidad de Fermi-Dirac).

Por tanto, tendremos que:

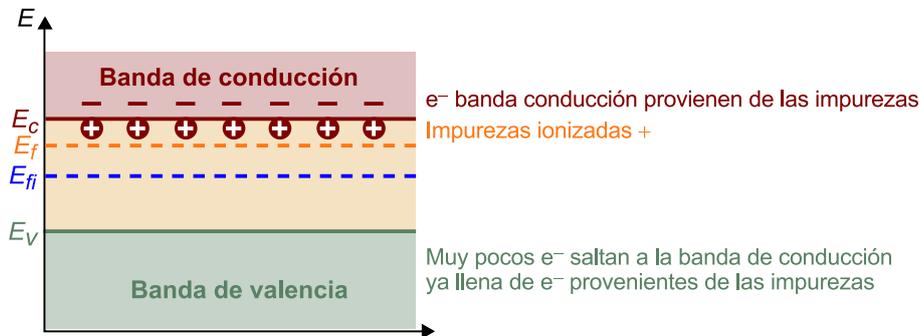
$$p \approx N_a \gg n_i \quad \rightarrow \quad n = \frac{n_i^2}{p} \approx \frac{n_i^2}{N_a} \ll n_i \quad 7.73$$

En semiconductores tipo P los huecos  $h^+$  son los denominados **portadores mayoritarios**, mientras que los electrones  $e^-$  son los denominados **portadores minoritarios n**.

### 2) Semiconductor extrínseco tipo N

Cuando se dopa con impurezas **donadoras** en una concentración  $N_d \gg n_i$  (considerado como dopaje normal). Estas impurezas podrían ser elementos del grupo V de la tabla periódica de elementos (como el fósforo), que poseen 5 e<sup>-</sup> en su banda de valencia y, por tanto, pueden donar fácilmente un e<sup>-</sup>.

Figura 40. Gráfica de bandas de energía en un material semiconductor tipo N



Gracias al dopaje con impurezas, que se fijan a la malla cristalina del semiconductor, se permite que los electrones de estas impurezas puedan saltar fácilmente a la banda de conducción y, dado que la concentración de impurezas es elevada, la mayoría de los electrones provendrán de ellas, mientras que los e<sup>-</sup> de la banda de valencia se quedarán en ella, pues les es más difícil (es menos probable, según la función de probabilidad de Fermi-Dirac).

Por tanto, tendremos que:

$$n \approx N_d \gg n_i \quad \rightarrow \quad p = \frac{n_i^2}{n} \approx \frac{n_i^2}{N_d} \ll p_i \quad 7.74$$

En semiconductores tipo N, los electrones e<sup>-</sup> son los denominados **portadores mayoritarios n**, mientras que los huecos h<sup>+</sup> son los **portadores minoritarios p**.

### 3.1.2. La unión P-N

Tanto un semiconductor de tipo P como uno de tipo N están en equilibrio y son neutros por sí solos. Al unir uno con el otro tendremos una zona N y otra zona P, y se producirá una difusión de e<sup>-</sup> y h<sup>+</sup> entre ellas (parecido a como ocurriría con los gases), de manera que al llegarse al equilibrio cada zona quedará cargada.

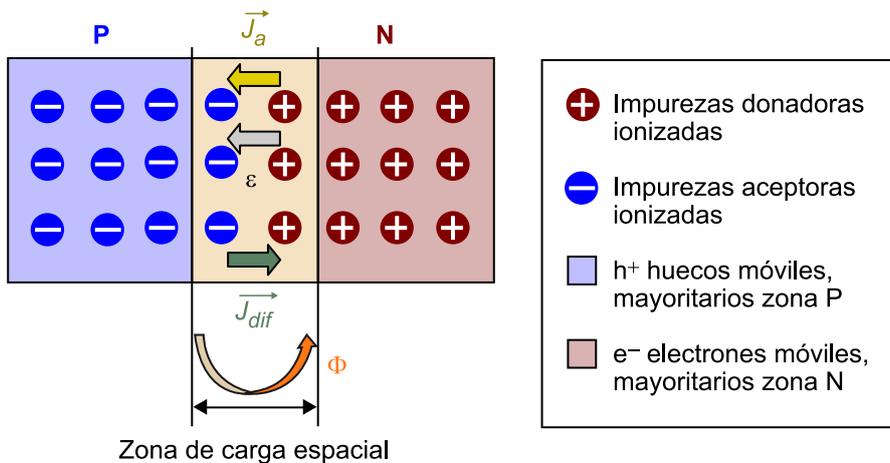
Tanto los iones negativos de la zona P como los iones positivos de la zona N están físicamente fijos en la estructura cristalina del semiconductor y no se pueden mover. Al unir ambas zonas se produce un campo eléctrico,  $E$ , debido al desequilibrio de cargas, lo que genera una corriente de arrastre  $\vec{J}_a$ . En respuesta a este campo eléctrico, los portadores mayoritarios de cada zona (h<sup>+</sup>

de la zona P y  $e^-$  de la zona N), al ser móviles, pueden generar una corriente inversa y del mismo valor llamada **corriente de difusión**,  $\vec{J}_{dif}$ , y se llega así a una situación de equilibrio:

$$\vec{J}_{dif} = \vec{J}_a \quad 7.75$$

Aparece, pues, un área denominada **zona de carga espacial (z.c.e.)** entre la zona N y la zona P y, debido al campo eléctrico y la distribución de cargas, existirá una diferencia de potencial  $\Phi$ .

Figura 41. Representación de iones y portadores en una unión P-N



### Distribución de carga y campo eléctrico

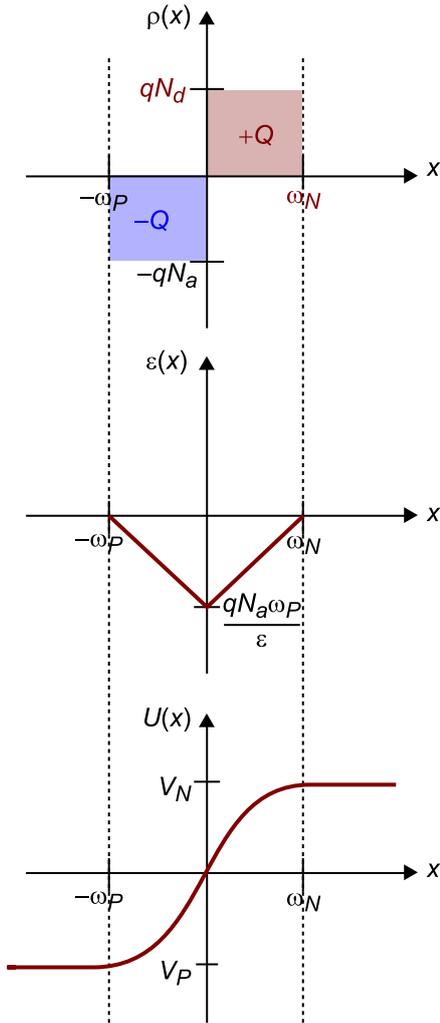
Una vez visto qué ocurre en el terreno de partículas en una unión P-N, vamos ahora a analizar con más detalle la distribución de cargas y el campo eléctrico que se forma.

Para ello, vamos a simplificar el modelo de la unión P-N haciendo dos suposiciones que se aproximan bastante a la realidad:

- Unión abrupta.
- La z.c.e. está barrida de portadores (no hay en ella cargas móviles).

En la figura 42 podemos observar en primer lugar la distribución de cargas en la zona de carga espacial delimitada entre  $-w_p$  y  $w_n$ .

Figura 42. Unión P-N



En la zona P hay una distribución de carga homogénea  $-Q$  de valor  $-qN_a$ , mientras que en la zona N tenemos la misma distribución pero de signo contrario, pues por la ley de conservación de la carga debe cumplirse:

$$qN_a = qN_d \quad 7.76$$

El campo eléctrico  $E$  generado por una distribución de cargas  $\rho$  cumple la ley de Maxwell:

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon} \rightarrow E = \frac{1}{\epsilon} \int \rho(x) dx \quad 7.77$$

siendo  $\epsilon$  la permitividad dieléctrica del medio.

Por tanto:

$$E_{m\acute{a}x} = \frac{qN_a\omega_P}{\epsilon} = \frac{qN_d\omega_N}{\epsilon} \quad 7.78$$

$$N_d \omega_P = N_a \omega_N \quad 7.79$$

$$U(x) = \int E(x) dx \quad 7.80$$

$$\Phi_0 = V_N - V_P = 1/2(\omega_N + \omega_P)E_{\text{máx}} = 0,7 \text{ V} \quad 7.81$$

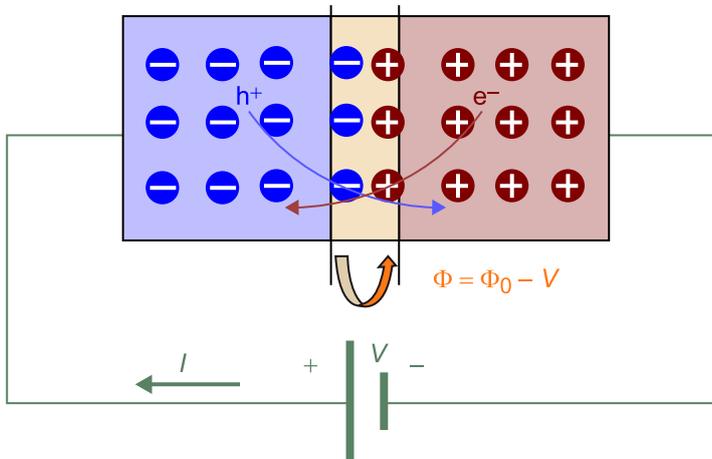
La diferencia de potencial entre zona N y zona P suele estar en torno a 0,7 Volts para el silicio. Advertid que el potencial se mantiene constante fuera de la zona de carga espacial.

### Diodo de unión P-N en polarización directa

Al polarizar una unión P-N con una tensión  $V > 0$  lo que ocurrirá es que reduciremos la diferencia de potencial de la unión  $\Phi = \Phi_0 - V$ , y de esta manera se reducirá la zona de carga espacial.

Al reducir la diferencia de potencial entre ambas zonas se facilitará el paso de  $e^-$  de la zona N a la zona P, así como de  $h^+$  de la zona P a la zona N. La figura 43 ilustra este efecto.

Figura 43. Unión P-N polarizada en directa



De esta manera, el circuito externo deberá suministrar  $h^+$  para contrarrestar el exceso, lo que generará una **corriente del diodo en continua**:

$$I(V) = I_S (e^{\frac{qV}{kT}} - 1) \quad 7.82$$

- $I_S$  es la corriente de saturación y suele valer entre  $10^{-6}$  y  $10^{-15}$  A.
- $q$  es la carga del electrón:  $1,602 \times 10^{-19}$  Coulombs.
- $k$  es la constante de Boltzmann:  $1,38 \times 10^{-23}$  JK $^{-1}$ .

- $T$  es la temperatura en grados Kelvin.

Se define:

$$\alpha = q/KT \quad 7.83$$

Para  $T = 298 \text{ °K} \rightarrow \alpha = 1/(25 \text{ mV})$ .

### Circuito equivalente en pequeña señal

Hasta este punto nos hemos limitado a estudiar los semiconductores a nivel físico, necesario para comprender su funcionamiento y características. A partir de ahora vamos a centrarnos más en sus características de pequeña señal para entender sus aplicaciones en circuitos de microondas. Para que podamos utilizar un diodo en un circuito de microondas, primero deberemos polarizarlo en continua en un punto de trabajo concreto ( $I_0$ ,  $V_0$ ) según la ecuación 7.82. Si nos interesa trabajar en zona lineal, intentaremos polarizarlo en un punto donde su característica  $I$ - $V$  se aproxime a un comportamiento lineal, tal como el indicado en la figura 44.

Alrededor de ese punto de polarización, si superponemos una pequeña tensión alterna  $v_i$  sumada a la tensión de polarización continua  $V_0$ , el comportamiento del diodo en pequeña señal se podrá aproximar en primer orden al de una conductancia de valor:

$$g_d = \left. \frac{\partial I}{\partial V} \right|_{V_0} \quad 7.84$$

Siguiendo otro razonamiento, podemos plantear la ecuación del diodo en directa 7.82 como una aproximación de Taylor de segundo orden alrededor de  $V_0$ :

$$I(V) = I_0 + v \left. \frac{\partial I}{\partial V} \right|_{V_0} + \frac{1}{2} v^2 \left. \frac{\partial^2 I}{\partial V^2} \right|_{V_0} + \dots \quad 7.85$$

$$I(V) = I_0 + i = I_0 + v g_d + \frac{v^2}{2} g'_d + \dots \quad 7.86$$

Esta última ecuación 7.86 es la llamada **aproximación de pequeña señal del diodo** y es válida para la mayoría de los análisis de circuitos con diodos, sin considerar los efectos del encapsulado.

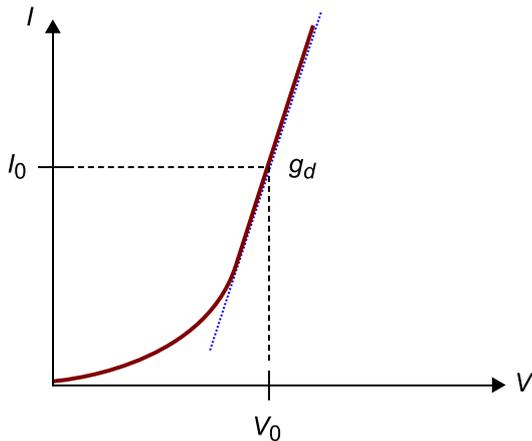
Según la relación entre la corriente y la tensión en el diodo dada por la ecuación 7.82 y, aplicando 7.83, tendremos que:

$$g_d = g(V_0) = \frac{q}{KT} I_0 \quad 7.87$$

Siendo  $g_d$  la **conductancia dinámica** del diodo y su inversa  $R_j$  la **resistencia dinámica** de la unión. Se las denomina dinámicas porque dependerán del punto de trabajo elegido.

$$g'_d = \left. \frac{\partial g_d}{\partial V} \right|_{V_0} = \frac{q}{kT} g_d \quad 7.88$$

Figura 44. Característica  $I$ - $V$  de un diodo polarizado en directa: polarización en el punto de trabajo  $(V_0, I_0)$



Sin embargo, este modelo no es suficiente para considerarlo válido en circuitos reales. Debemos tener en cuenta al menos tres efectos adicionales más:

- **Capacidad de difusión dinámica  $C_j$ :** Cuando polarizamos el diodo en continua este efecto no lo consideramos, pues suponemos que al aplicar una tensión fija  $V$  se ha llegado ya a un equilibrio de cargas en la unión P-N, pero cuando trabajamos con señales de microondas en pequeña señal, las cuales varían rápidamente de un valor a otro, deberemos considerar el hecho de que los portadores mayoritarios libres necesitan un cierto **tiempo de recombinación medio**,  $\tau_r$ , que dependerá del tipo de material y que va a limitar su funcionamiento en frecuencia. Este fenómeno se modela como una cierta capacidad  $C_j$  en paralelo cuyo valor depende de la frecuencia de trabajo  $\omega$  y del tiempo de recombinación medio  $\tau_r$ :

$$C_j(V_0) = \frac{1}{2} \omega \tau_r g_d(V_0) \quad 7.89$$

Las investigaciones se centran en encontrar materiales semiconductores que minimicen al máximo esta capacidad y permitan el funcionamiento del diodo a frecuencias elevadas.

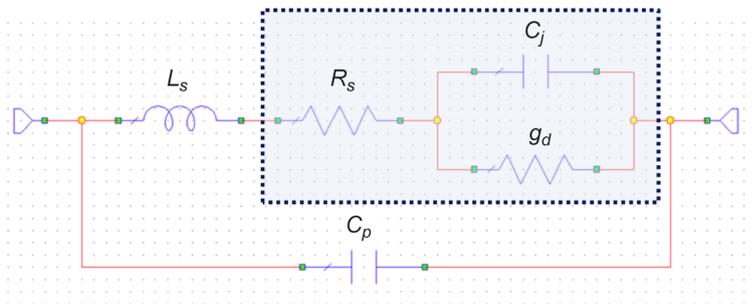
- **Efectos del encapsulado  $L_S$  y  $C_P$ :** A frecuencias de microondas los efectos del encapsulado del semiconductor empiezan a tener un impacto importante en el comportamiento del dispositivo, hasta el punto de limitar la frecuencia de funcionamiento, por lo que se hace necesario incluirlos en el modelo de pequeña señal del dispositivo. Básicamente se pueden modelar como una inductancia en serie de valor  $L_S$  y una capacidad en paralelo  $C_P$ .

Estos valores dependerán de la capacidad tecnológica de cada fabricante, que se esfuerza en minimizarlos todo lo posible para extender el uso del diodo a la máxima frecuencia posible, y son suministrados por este.

- **Efectos del contacto  $R_s$ :** Finalmente, no podemos tampoco obviar la resistencia óhmica debido a los contactos del encapsulado con el semiconductor y con la placa del circuito, que, si bien en continua se pueden despreciar, a frecuencias de microondas se convierten en importantes (recorad el efecto resistivo de la profundidad de penetración de las ondas electromagnéticas en un conductor). Este valor también es suministrado por cada fabricante en particular, que se esfuerza en fabricar el diodo con la mínima  $R_s$ .

Por tanto, el circuito equivalente en pequeña señal de un diodo polarizado en directa queda modelado del modo que se presenta en la figura 45.

Figura 45. Circuito equivalente del diodo en directa en pequeña señal



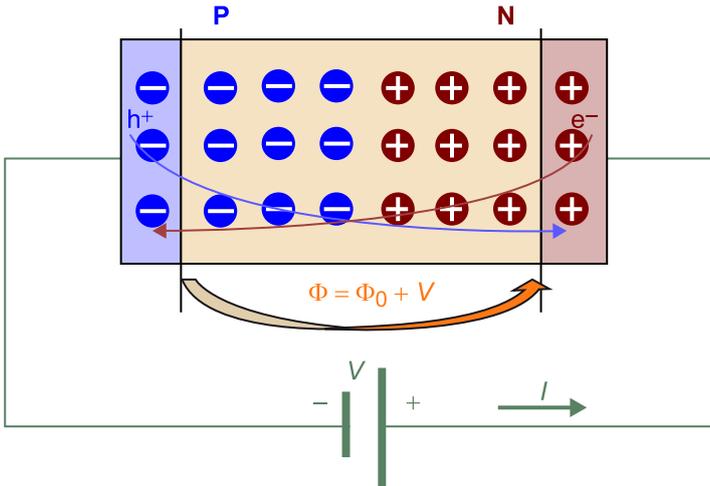
Advertid que para la unión semiconductor tan solo hemos tomado la aproximación de primer orden  $g_d$ , despreciando la de segundo orden  $g'_d$ . En la mayoría de las aplicaciones lineales esto será cierto. Tan solo en las aplicaciones no lineales del diodo habrá que considerar también el término de segundo orden.

### **Diodo de unión P-N en polarización inversa**

Al polarizar una unión P-N con una tensión  $V < 0$  lo que ocurrirá es que aumentaremos la diferencia de potencial de la unión  $\Phi = \Phi_0 + V$ , con lo que se aumenta de esta manera la zona de carga espacial y se incrementa el campo eléctrico entre la zona P y N.

Al aumentar la diferencia de potencial entre ambas zonas se limitará el paso de  $e^-$  de la zona N a la zona P, así como de  $h^+$  de la zona P a la zona N, de manera que muy pocos conseguirán atravesar la amplia zona de carga espacial por difusión. La figura 46 ilustra este efecto.

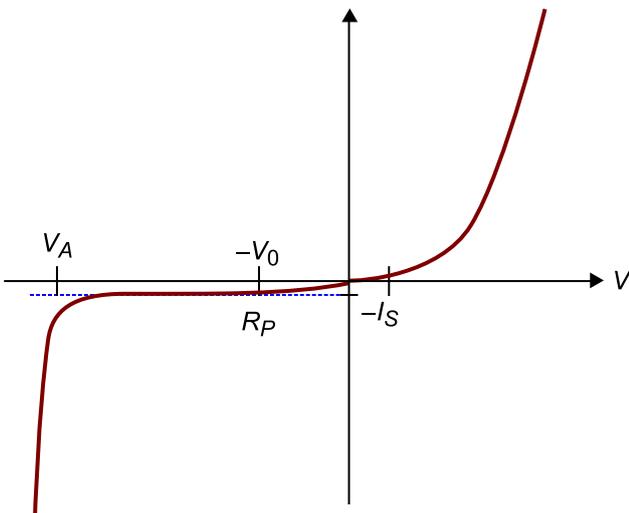
Figura 46. Unión P-N polarizada en inversa



De esta manera, la corriente generada será muy pequeña y de un valor prácticamente constante para cualquier valor de tensión inversa  $V$  aplicada, si bien a partir de un cierto valor  $V_A$ , el diodo entrará en lo que se denomina **zona de avalancha**, en la que puede llegarse a producir la **ruptura de la unión** debido al campo tan intenso generado que es capaz de arrancar los iones de su estructura cristalina.

La figura 47 completa la característica  $I$ - $V$  de un diodo incluyendo la polarización inversa.

Figura 47. Característica  $I$ - $V$  del diodo: polarización inversa ( $-V_0$ ,  $I_S$ )



### Circuito equivalente en pequeña señal

Una vez polarizado el diodo en continua con una tensión inversa en el punto de trabajo ( $-V_0$ ,  $I_S$ ), analizamos su comportamiento en pequeña señal para ver cómo se comportará a frecuencias de microondas.

Al igual que hicimos con el diodo en directa, ahora también se podrá aproximar su comportamiento como una resistencia de valor:

$$R_p = \left. \frac{1}{\frac{\partial I}{\partial V}} \right|_{V_0} \approx \text{cte.} \quad 7.90$$

Si nos fijamos en la zona de polarización inversa de la figura 47, vemos que en un amplio margen de tensiones negativas la  $R_p$  se mantiene prácticamente a un valor constante y de elevado valor (en la práctica, de varios  $M\Omega$ ), de modo que el diodo en inversa es casi un circuito abierto, por el que pasa una corriente muy pequeña casi despreciable  $-I_S$ . Esto será cierto en el margen  $0-V_A$ , más allá de la tensión de avalancha el diodo quedará dañado.

No obstante, para el circuito equivalente en pequeña señal deberemos tener en cuenta los tres mismos efectos que vimos en polarización directa, con el matiz de que ahora la capacidad  $C_j$  del diodo tiene otro significado:

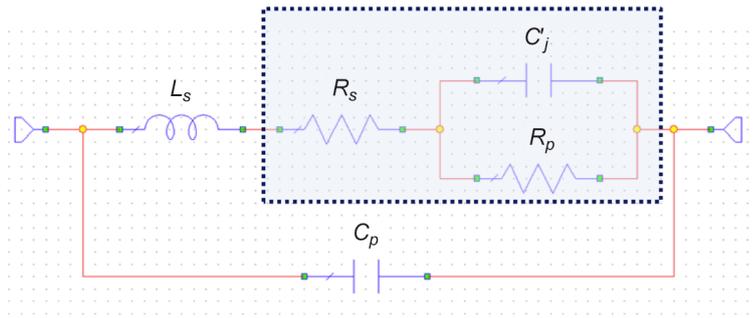
- **Capacidad de la zona de carga espacial (z.c.e.),  $C_j$ :** El diodo polarizado en inversa genera una capacidad que depende del ensanchamiento de la z.c.e. y este ensanchamiento es proporcional a la tensión inversa aplicada. Por tanto, el diodo en inversa se comporta como una capacidad controlada por tensión, y por ello se dice que presenta un **efecto varactor**:

$$C_j = \frac{C_{j0}}{\sqrt{1 - \frac{V}{\Phi_0}}} \quad 7.91$$

El diodo varactor es muy utilizado para diseñar osciladores controlados por tensión. La técnica consiste en ubicar el diodo como parte de su circuito resonante y, simplemente modificando la tensión de polarización  $V$ , conseguimos modificar la capacidad del circuito resonante y, con ello, la frecuencia de oscilación. Esto resulta muy útil en circuitos moduladores o demoduladores de frecuencia, PLL, etc. Respecto al resto de los componentes del circuito equivalente en pequeña señal en inversa,  $L_S$ ,  $C_P$  y  $R_S$ , tienen el mismo significado que en el caso de polarización directa.

La figura 48 muestra el circuito equivalente en pequeña señal del diodo polarizado en inversa.

Figura 48. Circuito equivalente del diodo en inversa en pequeña señal



### 3.2. Diodos

Una vez explicadas las bases del funcionamiento de la unión P-N semiconductor, en este apartado estaremos en disposición de analizar los diodos más comúnmente utilizados en los circuitos de microondas.

#### 3.2.1. Diodo de barrera Schottky

El diodo de barrera Schottky es una **unión metal-semiconductor**.

La zona semiconductor es de tipo N (GaAs suele ser muy utilizado), donde la movilidad de  $e^-$  es muy superior a la de  $h^+$ , por lo que las características de tiempo de recombinación  $\tau_r$  vendrán dadas principalmente por los portadores mayoritarios móviles de esta zona N, los  $e^-$ .

Las dos características principales de estos diodos son, por un lado, su baja tensión de codo o potencial de unión y, por otro, su baja capacidad de difusión en polarización directa  $C_{dif} \approx 0$ .

##### 1) Característica $I$ - $V$

La característica  $I$ - $V$  del diodo Schottky en polarización directa es muy similar a la de cualquier diodo:

$$I = I_S \left( e^{\frac{qV}{\eta kT}} - 1 \right) \quad 7.92$$

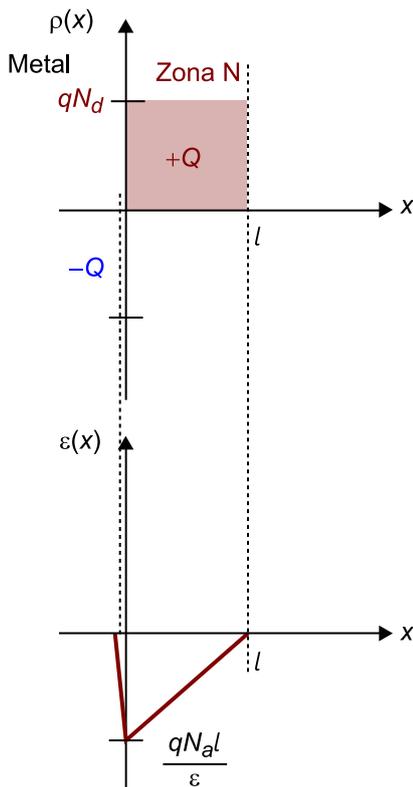
donde  $\eta$  es el factor de idealidad y posee un valor entre 1 y 2. Para diodos Schottky suele valer en torno a 1,2.

##### 2) Carga y campo eléctrico

#### Diodo de barrera Schottky

El diodo de barrera Schottky recibe su nombre del físico alemán Walter H. Schottky.

Figura 49. Distribución de carga y campo eléctrico en un diodo Schottky



La principal diferencia con la unión P-N la encontramos en que en este caso el metal tiene una distribución de cargas mucho más estrecha y concentrada, lo que provoca que el campo sea mucho más abrupto en el metal que en el semiconductor tipo N.

Podemos decir que el metal se comporta como una zona P con dopaje degenerado (zona P<sup>+</sup>) sin iones y por ello la z.c.e. es muy estrecha.

### 3) Característica C-V

Ya hemos visto que el diodo Schottky polarizado en directa presenta una capacidad muy baja debido a que cualquier portador móvil mayoritario e<sup>-</sup> de la zona N que atraviese la z.c.e. no quedará acumulado, pues la conductividad  $\sigma$  del metal es muy elevada. Tampoco habrá capacidad debida a h<sup>+</sup> que pasen del metal al semiconductor de la zona N, pues encuentran una gran barrera de potencial.

El diodo Schottky polarizado en inversa presenta un **efecto varactor** (ved el circuito equivalente en pequeña señal del diodo de unión P-N en polarización directa):

$$C_j = \frac{C_j(0)}{\sqrt{1 - \frac{V}{V_b}}} \quad 7.93$$

siendo  $V_b$  el potencial de la unión.

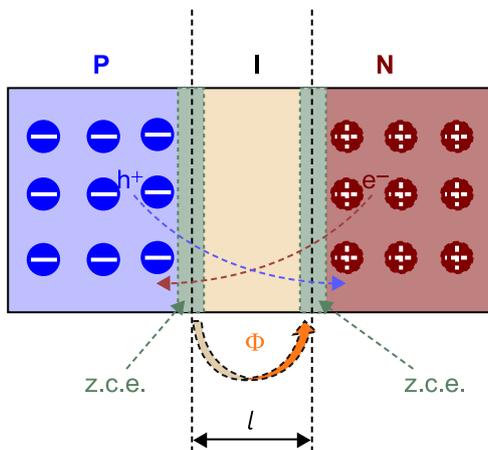
### 3.2.2. Diodo PIN

El diodo PIN debe su nombre a su estructura semiconductor interna, formada por una zona de tipo P, una zona semiconductor intrínseca en el centro y otra zona de tipo N. Esta sería la estructura del diodo PIN ideal, si bien normalmente suele hacerse una zona  $P^+$ , la zona intrínseca es una zona N poco dopada y finalmente la zona N es realmente una zona  $N^+$ .

Por tanto, la característica principal de este diodo es la existencia de una zona intrínseca intermedia que se caracteriza por estar libre de portadores debido al intenso campo eléctrico de valor constante existente en ella.

Esta zona intermedia provoca que, por un lado, se formen dos pequeñas áreas de z.c.e. que harán que el diodo presente una capacidad muy pequeña, lo que los convierte en muy indicados en aplicaciones de conmutación donde se requiera mucho aislamiento. Por otro lado, cuanto mayor sea esta área intermedia, para una misma tensión de polarización inversa menor será su campo eléctrico y, en consecuencia, se necesitarán tensiones de polarización mayores para provocar la ruptura de la unión, lo que los hace especialmente indicados como rectificadores de potencia a tensiones elevadas.

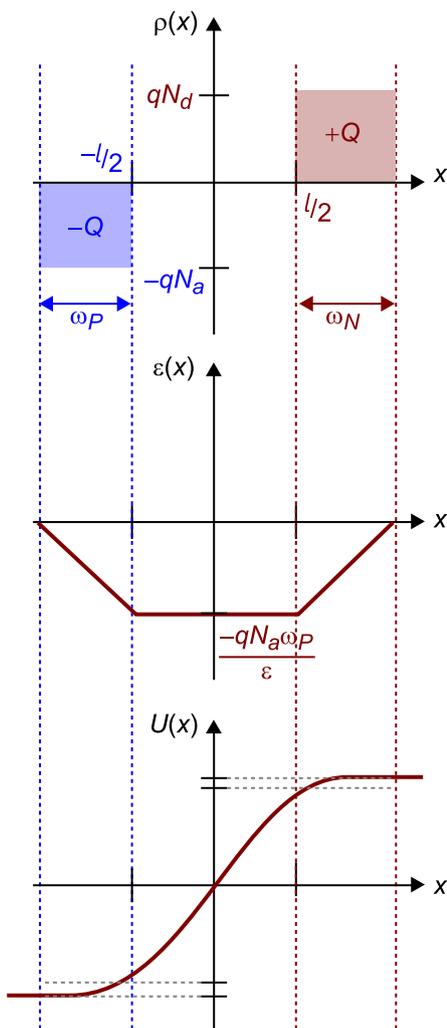
Figura 50. Estructura interna de un diodo PIN



#### Carga y campo eléctrico

En la figura 51 se puede observar que la principal característica diferenciadora del diodo PIN es la zona semiconductor intrínseca intermedia, que provoca la existencia de un campo máximo constante en ella, lo que provoca que se mantenga barrida de portadores y cuanto mayor sea su longitud  $l$ , mayor será su contribución a la diferencia de potencial  $\Phi$  de la unión.

Figura 51. Distribución de carga y campo eléctrico en un diodo PIN



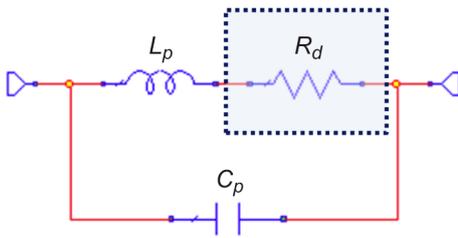
### Diodo PIN polarizado en directa

Cuando polarizamos un diodo PIN en directa, la z.c.e. prácticamente desaparece, se creará una gran concentración de portadores en la zona I y si su longitud  $l$  es menor a la longitud de difusión de los portadores, esta zona I será conductora.

### Efecto varistor del diodo PIN en directa

El diodo PIN en directa se comporta como una resistencia  $R_d$  controlada por tensión. La capacidad es tan baja que podemos despreciarla en el modelo. Sin embargo, deberemos seguir teniendo en cuenta los efectos parásitos del encapsulado, representados por  $L_p$  y  $C_p$ .

Figura 52 Circuito equivalente del diodo PIN polarizado en directa



Para calcular esta resistencia del diodo PIN en directa deberemos considerar la corriente que atraviesa el diodo,  $I_d$ , que vendrá determinada por la cantidad de portadores de la zona intrínseca y su capacidad para recombinarse, que se mide con el parámetro **tiempo de recombinación medio**  $\tau_r$ :

$$I_d = \frac{Q}{\tau_r} = \frac{qnsl}{\tau_r} \rightarrow qn = \frac{I_d \tau_r}{sl} \quad 7.94$$

donde  $l$  es la longitud de la zona intrínseca,  $s$  es su sección,  $q$  es la carga del electrón y  $n$  el número de portadores.

Si consideramos la **conductividad eléctrica**  $\sigma$  en función de la movilidad de los portadores  $\mu$  tal que  $\sigma = 2\mu qn$  tendremos:

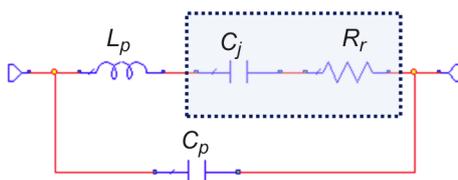
$$R_d = \rho \frac{l}{s} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{s} = \frac{1}{2\mu qn} \frac{l}{s} = \frac{1}{2\mu \frac{I_d \tau_r}{sl}} \frac{l}{s} = \frac{l^2}{2\mu I_d \tau_r} = \frac{\beta}{I_d} \quad 7.95$$

Es decir, la resistencia en directa depende de la corriente de polarización, que a su vez depende de la tensión de polarización aplicada.

### Diodo PIN polarizado en inversa

Cuando polarizamos un diodo PIN en inversa hacemos que aparezca una capacidad  $C_j$  de la unión muy pequeña, debido a la longitud de la zona intrínseca, lo que provoca que la impedancia del diodo sea muy elevada. Esta característica, unida a la baja resistencia que presenta en directa, hace que el diodo PIN sea especialmente indicado para conmutación entre circuitos de microondas. Se consiguen valores típicos de  $C_j$  del orden de 1 pF o menor. Valores típicos de  $R_r$  se sitúan por debajo de los 5  $\Omega$ .

Figura 53. Circuito equivalente del diodo PIN polarizado en inversa



## 4. Figuras de mérito de amplificadores

Entre las figuras de mérito más importantes de un amplificador se encuentran las que describimos en este apartado. En primer lugar, tenemos la característica principal, que es la **ganancia de potencia**. Normalmente tendremos un requisito mínimo de valor de ganancia, de manera que los amplificadores que estén por debajo de ese valor serán descartados.

Otro requisito es el **aislamiento entre la entrada y la salida**. Este requisito será importante en aplicaciones que requieran asegurar un buen nivel de estabilidad del dispositivo.

Las **pérdidas de retorno** nos dan una idea del nivel de adaptación de impedancias tanto a la entrada como a la salida del amplificador. Normalmente, interesará que sean lo más elevadas posibles con objeto de asegurar la máxima transferencia de potencia de señal posible entre la fuente y la carga y, al mismo tiempo, disminuir los efectos de las reflexiones de señal que pueden provocar interferencia y distorsión.

Las figuras de mérito que nos miden la linealidad del dispositivo son también muy importantes con objeto de saber cuál será el máximo nivel de señal que podremos amplificar a la entrada sin empezar a tener problemas de distorsión. Estas figuras son el **punto de compresión a menos 1 dB** y el **punto de intercepción de tercer orden**.

El **margen dinámico libre de espurios** nos define el margen de niveles de señal con los que podremos trabajar con el amplificador de manera que pueda distinguir la señal del ruido y no empiecen a aparecer espurios indeseados por encima del nivel de ruido.

Por último, debemos conocer el **nivel de ruido** que el amplificador introducirá al sistema. Como veremos, interesa que las primeras etapas de un sistema de microondas tengan un bajo nivel de ruido.

La elección final de un amplificador dependerá, pues, de la aplicación en la que deba utilizarse, primando más una figura de mérito sobre otra, dependiendo de las condiciones que deba soportar dentro de la estructura.

Es importante tener en cuenta cada una de ellas para un diseño específico y saber encontrar la solución óptima para cada aplicación en concreto. También debemos recordar la variación en función de la frecuencia que presenta cada una de estas características.

A continuación se exponen las principales figuras de mérito de un amplificador.

#### 4.1. Ganancia

Sin duda, la característica principal y que más nos va a interesar es la ganancia del amplificador, pues define la razón de ser misma del dispositivo.

La **ganancia en potencia** de un amplificador es una medida de la relación entre la potencia de señal a la salida y la potencia de señal a la entrada del dispositivo:

$$G = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \quad 7.96$$

Esta definición, que en un principio parece muy simple y sencilla, no lo es tanto cuando entramos en un análisis más sutil sobre cuál es la influencia de la impedancia de la fuente  $Z_S$  y la impedancia de la carga  $Z_L$  con las que se va a encontrar el amplificador y, precisamente, será este uno de los aspectos que se deberán tener más en cuenta en el diseño de amplificadores.

Con objeto de tener un punto de referencia común, la hoja de datos de un transistor suele dar la ganancia en el caso particular ideal en el que las impedancias de fuente  $Z_S$  y de carga  $Z_L$  estén perfectamente adaptadas al transistor. Entonces podemos afirmar que la ganancia en potencia es directamente:

$$G[\text{dB}] = 20 \log (|S_{21}|) \quad 7.97$$

##### Ejemplo 1

Los parámetros  $S$  de un transistor a 2 GHz son los siguientes:

$$S_{11} = |0,32|_{\angle -70^\circ}; \quad S_{21} = |5,56|_{\angle 60^\circ}; \quad S_{12} = |0,02|_{\angle 15^\circ}; \quad S_{22} = |0,71|_{\angle -31^\circ} \quad 7.98$$

Se pide calcular la ganancia de potencia de un amplificador implementado con este transistor a 2 GHz, considerando que las impedancias de fuente  $Z_S$  y de carga  $Z_L$  están perfectamente adaptadas al transistor.

##### Solución

No tenemos más que aplicar la ecuación 7.97:

$$G[\text{dB}] = 20 \log (|S_{21}|) = 20 \log (|5,56|_{\angle 60^\circ}) = 20 \log (5,56) = 14,9 \text{ dB} \quad 7.99$$

#### 4.2. Aislamiento

El **aislamiento** es una medida de la influencia del puerto de salida en el de la entrada y es un parámetro clave de cara a tener una primera valoración sobre la posibilidad de inestabilidad de un circuito amplificador. Para un sistema

adaptado a una impedancia de referencia de  $50 \Omega$  en el que las impedancias de fuente  $Z_S$  y de carga  $Z_L$  estén perfectamente adaptadas al transistor se define de la manera siguiente:

$$I[\text{dB}] = -20 \log(|S_{12}|) \quad 7.100$$

Por lo general, interesará que el amplificador tenga un elevado nivel de aislamiento, lo que equivale a decir que  $I$  sea del valor lo más pequeño posible.

### Ejemplo 2

Para el mismo transistor del ejemplo 1 se pide calcular el aislamiento de un amplificador implementado con este transistor a 2 GHz, en las mismas condiciones de adaptación de impedancias.

### Solución

Aplicando la ecuación 7.100:

$$I[\text{dB}] = -20 \log(|S_{12}|) = -20 \log(|0,02|_{Z_{13}}) = -20 \log(0,02) = 34 \text{ dB} \quad 7.101$$

## 4.3. Pérdidas de retorno

Este parámetro da una idea del nivel de adaptación de impedancias a la entrada y a la salida del amplificador cuando este está inmerso en un sistema adaptado a una impedancia de referencia de  $50 \Omega$ :

$$L_{\text{in}}[\text{dB}] = -20 \log(|\Gamma_{\text{in}}|) = -20 \log(|S_{11}|) \quad 7.102$$

Estas serían las pérdidas de retorno a la entrada; de la misma manera se pueden definir las pérdidas de retorno a la salida:

$$L_{\text{out}}[\text{dB}] = -20 \log(|\Gamma_{\text{out}}|) = -20 \log(|S_{22}|) \quad 7.103$$

En general, interesa que tanto la entrada como la salida del amplificador estén lo más adaptadas que sea posible a la impedancia de referencia de  $50 \Omega$ , por lo que interesará tener el mayor valor posible de pérdidas de retorno.

### Ejemplo 3

Para el mismo transistor del ejemplo 1 se pide calcular las pérdidas de retorno a la entrada y a la salida de un amplificador implementado con este transistor a 2 GHz, en las mismas condiciones de adaptación de impedancias.

#### Solución

Aplicando las ecuaciones 7.102 y 7.103:

$$L_{in}[\text{dB}] = -20 \log(|S_{11}|) = -20 \log(|0,32|_{Z=70}) = -20 \log(0,32) = 9,9 \text{ dB} \quad 7.104$$

$$L_{out}[\text{dB}] = -20 \log(|S_{22}|) = -20 \log(|0,71|_{Z=31}) = -20 \log(0,71) = 3 \text{ dB} \quad 7.105$$

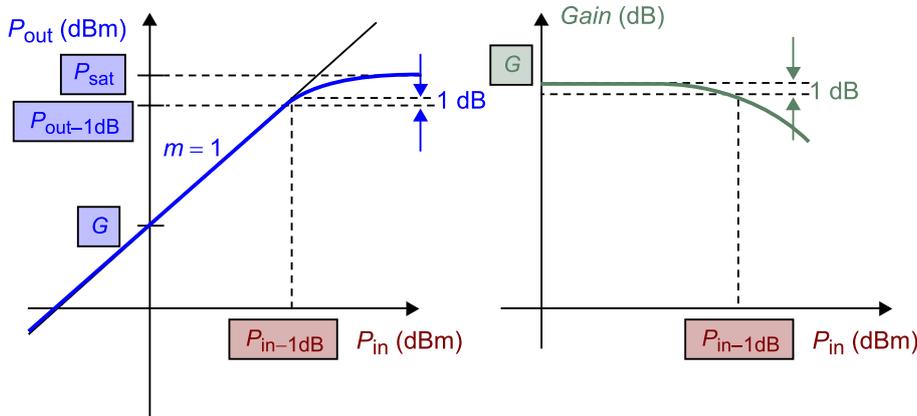
## 4.4. Nivel de compresión a -1dB

El nivel de compresión a -1 dB a la entrada,  $P_{in-1dB}$ , de un amplificador se define como el nivel de potencia de señal a la entrada para el que el nivel de potencia de señal a la salida está 1 dB por debajo de lo que cabría esperar si su comportamiento continuara siendo idealmente lineal.

Con este parámetro,  $P_{in-1dB}$  (dBm), tenemos una manera de valorar la máxima potencia que el amplificador es capaz de soportar en régimen lineal, a partir de la cual podemos considerar que empieza a entrar en zona no lineal y aproximándose a la potencia de saturación,  $P_{sat}$ , que es el límite máximo que el dispositivo es capaz de entregar. De alguna manera el  $P_{in-1dB}$  nos marca el límite superior de potencia de trabajo en zona lineal del amplificador.

La figura 54 ilustra de dos maneras diferentes el significado de esta figura de mérito.

Figura 54. Concepto de nivel de compresión a -1 dB,  $P_{in-1dB}$



A la izquierda de la figura 54 podemos ver la gráfica que relaciona la potencia de señal a la entrada,  $P_{in}$  (dBm), con la potencia de señal a la salida,  $P_{out}$  (dBm). Para niveles bajos de potencia de señal a la entrada, la potencia de señal a la salida responde proporcionalmente a la ganancia del amplificador, es decir, existe una relación lineal ideal entre ambas, pero a partir de  $P_{in-1dB}$  (dBm) po-

demos decir que estamos ya fuera de la zona lineal y entramos en la zona de comportamiento no lineal para finalmente llegar al nivel de saturación del amplificador.

A la derecha de la figura 54, otra interpretación de este concepto: la ganancia del amplificador es constante para cualquier nivel de señal a la entrada (situación ideal), pero a partir de un cierto nivel  $P_{in-1dB}$  (dBm) vemos que la ganancia ha disminuido su valor nominal en 1 dB, para seguir cayendo a medida que la potencia a la entrada sigue aumentando.

Finalmente, es importante atender a si este parámetro está especificado respecto a la entrada  $P_{in-1dB}$  (dBm), o a la salida  $P_{out-1dB}$  (dBm).

#### 4.5. Linealidad: punto de intercepción de tercer orden

*TOI (third order intermodulation)* o  $IP_3$  (punto de intercepción de tercer orden) son las acepciones más comunes con las que se cuantifica el fenómeno de la intermodulación en un dispositivo no lineal.

En este caso, nos centramos en medir el nivel de intermodulación de tercer orden, que es el debido al término cúbico de la relación entrada-salida del amplificador. Este parámetro es importante porque nos da un punto de referencia comparativo sobre el grado de linealidad de un amplificador y, de manera similar a como lo hacía el  $P_{in-1dB}$ , permitirá valorar de entre diferentes amplificadores cuál tiene un margen más amplio de potencias en el que su comportamiento se puede considerar predominantemente lineal.

Idealmente, quisiéramos que el amplificador fuera perfectamente lineal en su característica de potencia a la entrada respecto a la de la salida, pero no existe el amplificador perfecto y siempre tendremos comportamientos no lineales que provocarán inevitablemente intermodulaciones.

Para cualquier dispositivo activo real no lineal, podemos escribir su función de transferencia en tensión (tensión a la salida,  $v_o$ , en función de la tensión a la entrada,  $v_i$ ) como una serie de Taylor:

$$v_o = k_0 + k_1 v_i + k_2 v_i^2 + k_3 v_i^3 + \dots \quad 7.106$$

En ella podemos apreciar que la aportación de cada término  $v_i^n$  depende del valor de su coeficiente  $k_n$ , que es específico para cada dispositivo. Dependiendo de la aplicación, nos interesará que destaque un término o varios de entre el resto. Por ejemplo, para un amplificador, interesa que  $k_1$  (que es directamente su valor de ganancia en tensión) predomine respecto a todos los demás,

idealmente quisiéramos todos los coeficientes nulos excepto este, de manera que tuviéramos a la salida una réplica exacta de la entrada, amplificada por un valor  $k_1$ :

$$v_o = k_1 v_i \quad 7.107$$

En el caso de un mezclador, sin embargo, no interesa para nada tener el término lineal  $k_1 v_i$ , dado que provocaría un bajo aislamiento entre puertos, sino que, normalmente, interesa solamente el término cuadrático (en algunos casos, como en mezcladores subarmónicos, interesa el término cúbico), es decir, que  $k_2$  predomine ampliamente sobre el resto de los coeficientes  $k_j$  ( $j \neq 2$ ). Idealmente interesaría que el resto fueran nulos, incluido  $k_1$ .

Volviendo al caso que nos ocupa de un amplificador, si suponemos dos armónicos  $f_1$  y  $f_2$  a su entrada con un mismo nivel de potencia, la no linealidad de su respuesta generará infinitas combinaciones entre ellos:

$$\pm m f_1 \pm n f_2 \quad 7.108$$

debidas a los infinitos términos exponenciales de la ecuación 7.106, algunas de las cuales pueden caer en la banda de operación del amplificador y, por tanto, interferir y distorsionar la señal útil, y concretamente serán los llamados **productos de intermodulación de tercer orden**, en sus combinaciones:

$$2f_1 - f_2 \quad \text{y} \quad 2f_2 - f_1 \quad 7.109$$

los que habitualmente acaban afectando con mayor intensidad, debido al mayor peso que, en general, suele tener su coeficiente  $k_2$  respecto al resto. Por este motivo se estudia en detalle el punto de intercepción de tercer orden y es el que suele darse en las especificaciones de cualquier amplificador como referente para evaluar la linealidad del dispositivo.

A continuación, vamos a analizar las señales que aparecerán a la salida del amplificador debido a estos dos tonos inyectados a su entrada, según se ilustra en la figura 55.

Por un lado, habrá un término de continua,  $k_0$ , que será fácilmente filtrable con un condensador en serie de desacoplo.

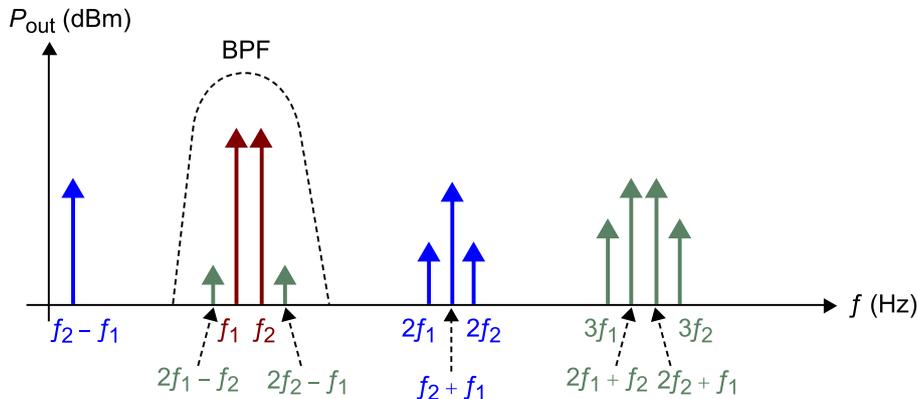
Por otro lado, aparecerán los **productos de intermodulación de segundo orden**, que son los debidos al término cuadrático de la ecuación 7.106,  $k_2 v_i^2$  (marcados en azul en la figura 55), y que serán, por un lado, dos armónicos a frecuencia doble, uno en  $2f_1$  y otro en  $2f_2$ , que también son fácilmente filtrables, pues caen suficientemente lejos (una octava) respecto a la señal útil, y otros

#### Ved también

Los mezcladores se explican en el módulo "Mezcladores, multiplicadores y osciladores de microondas" de este material didáctico.

dos armónicos debidos a la combinación de ambos tonos,  $f_1 + f_2$  y  $f_2 - f_1$ , los cuales también son fácilmente filtrables, pues caen también suficientemente lejos (casi una octava) de la señal útil (figura 55, también en azul).

Figura 55. Espectro de señal a la salida del amplificador mostrando los principales productos de intermodulación generados por su no linealidad



Analicemos ahora el término cúbico  $k_3 v_i^3$ . En este caso los dos tonos de la entrada generarán los llamados **productos de intermodulación de tercer orden**. De entre ellos,  $3f_1$ ,  $3f_2$ ,  $2f_1 + f_2$ ,  $f_1 + 2f_2$  podrán filtrarse sin problemas (figura 55, de color verde), pero los productos de intermodulación  $2f_1 - f_2$  y  $2f_2 - f_1$  no es posible filtrarlos, pues caen justo en la banda de trabajo. En la figura 55 se ha dibujado (en negro) la respuesta de un filtro paso banda, *BPF*, donde se puede apreciar claramente cómo es posible eliminar la mayoría de las intermodulaciones, pero estas dos últimas no, pues caen dentro de la banda del filtro y son inevitables. A este fenómeno inevitable se lo denomina **distorsión de intermodulación**.

#### Ejemplo 4

Supongamos un amplificador que debe trabajar en la banda de frecuencias de 2,4 a 2,5 GHz y queremos amplificar dos canales dentro de esta banda centrados uno a  $f_1 = 2,45$  y otro a  $f_2 = 2,46$  GHz. Evaluad la posibilidad de tener distorsión en nuestro sistema.

#### Solución

A la entrada del amplificador tendremos dos portadoras. Tal como hemos analizado anteriormente, se producirán los productos de intermodulación siguientes:

$$\begin{aligned} 2f_1 &= 4,9 \text{ GHz}, 2f_2 = 4,92 \text{ GHz}, 3f_1 = 7,35 \text{ GHz}, 3f_2 = \\ &= 7,38 \text{ GHz}, 2f_1 + f_2 = 7,36 \text{ GHz}, f_1 + 2f_2 = 7,37 \text{ GHz} \end{aligned} \quad 7.110$$

Todos ellos caen fuera de la banda, pues el de menor frecuencia está centrado en **4,9 GHz**, casi una octava por encima de la máxima frecuencia de paso (2,5 GHz), por lo que serán fácilmente eliminables mediante un filtro paso-bajo.

Sin embargo:

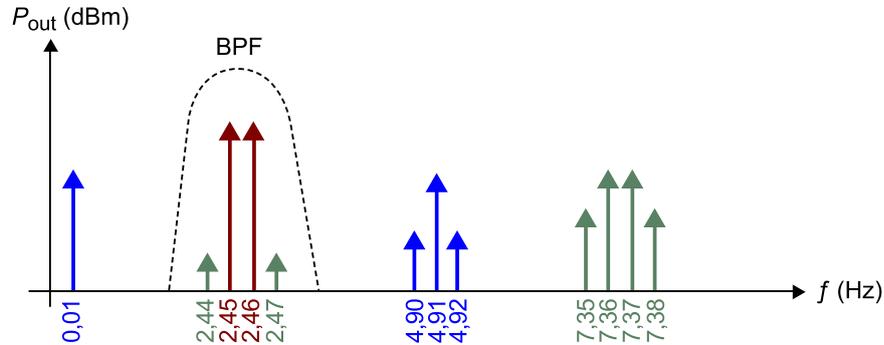
$$2f_1 - f_2 = 2 * 2,45 - 2,46 = 2,44 \text{ GHz} \quad 7.111$$

es un producto de intermodulación que cae en la banda del amplificador y, por tanto, puede provocar distorsión, al igual que:

$$2f_2 - f_1 = 2,47 \text{ GHz} \quad 7.112$$

Por lo tanto, el sistema sí es susceptible de tener distorsión y habrá que utilizar un amplificador con un punto de intercepción lo más elevado posible.

Figura 56. Espectro de señal a la salida del amplificador mostrando los principales productos de intermodulación generados por su no linealidad



En este ejemplo vemos, pues, que el fenómeno de la distorsión de intermodulación es de especial importancia, pues nos puede limitar tanto el **margen dinámico** como el **ancho de banda** de nuestro sistema.

Una medida de la distorsión de intermodulación nos la dan los llamados **puntos de intercepción** de orden  $n$ .

Si dibujamos una gráfica que relacione la potencia en [dBm] de señal útil a la entrada en el eje de abscisas (potencia de las dos portadoras) y la potencia a la salida en [dBm] del producto de intermodulación  $n$  en el eje de ordenadas, obtendremos, para pequeña señal, una recta de pendiente 1 para el término lineal de la ecuación 7.106, es decir, para  $n = 1$ . No obstante, esta recta es ideal, ya que en un dispositivo real no obtendremos una relación lineal perfecta, pues a medida que el nivel de señal a la entrada aumenta vamos entrando en lo que se denomina **zona de compresión**, tal y como ya hemos visto en el anterior apartado.

Si hacemos lo mismo para  $n = 2$ , obtendremos una recta ideal de pendiente 2, dado que en una relación cuadrática, al pasar a logaritmo, tendremos el 2 multiplicando. El origen de esa recta estará muy por debajo de la recta de pendiente 1, pues habitualmente  $k_2 \ll k_1$ , pero, al tener pendiente  $m = 2$ , crecerá más rápidamente que la recta de pendiente  $m = 1$  y, por lo tanto, llegará siempre a cortarla en un punto. Cabe decir que este punto normalmente no se produce en la realidad, pues ambas rectas representan el caso ideal y, en realidad, ambas comprimen, por lo que habitualmente nunca llegan a cortarse, sino que se saturan antes de llegar a hacerlo. Este punto imaginario de corte de ambas rectas ideales de pendientes  $m = 1$  y  $m = 2$  se conoce como **punto de intercepción de segundo orden**.

Siguiendo el mismo razonamiento para  $n = 3$ , obtendremos una recta ideal de pendiente 3 (al pasar el término cúbico a dB) y el correspondiente punto de corte con la recta de pendiente  $m = 1$ , al que llamamos **punto de intercepción de tercer orden**.

Por tanto, podemos definir esta figura de mérito de la manera siguiente:

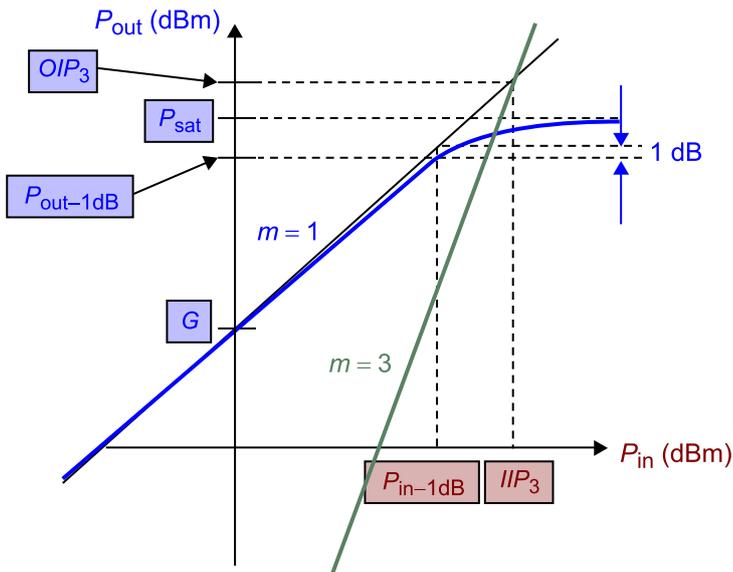
**Se define punto de intercepción de tercer orden** como el punto de intersección ideal entre la recta ideal de pendiente 1, que define el comportamiento lineal del amplificador entre el nivel de potencia de señal útil a la entrada y el nivel de potencia de señal útil a la salida, y la recta ideal de pendiente 3, que define la relación entre el nivel de potencia de señal útil a la entrada y el nivel de potencia de señal de intermodulación de tercer orden a la salida.

El mismo razonamiento haríamos para definir el punto de intercepción de orden 4, el de orden 5, etc.

La figura 57 muestra la gráfica del punto de intercepción de tercer orden ( $IIP_3$ ,  $OIP_3$ ) de un amplificador. En ella vemos las dos rectas ideales debidas una al término lineal, de pendiente 1, y la otra al término cúbico, de pendiente 3, las cuales son rectas ideales, ya que, en realidad, en un amplificador real ambas respuestas tienden a comprimirse a medida que la potencia a la entrada aumenta, de manera que el punto de intersección entre ambas (**punto de intercepción**) es un punto ideal, que no se da en la realidad. Sin embargo, es un concepto ampliamente reconocido como referencia para comparar la linealidad entre diferentes amplificadores.

Del mismo modo que definimos el punto de intercepción de tercer orden, también podremos definir el punto de intercepción de orden 5, el de orden 7, etc. pero en general, a medida que aumentamos el orden, decrece la magnitud del fenómeno, debido a que el coeficiente correspondiente es, normalmente, cada vez menor,  $k_3 > k_5 > k_7 >$ , etc.

Por tanto, la intermodulación que más nos va a afectar habitualmente, salvo casos excepcionales, será la de tercer orden. Advertid que tampoco consideramos los términos pares (orden 2, 4, 6, etc.) porque, como ya hemos visto en la figura 55, las intermodulaciones producidas por ellos caerán habitualmente fuera de la banda de trabajo, como mínimo a una octava de separación, por lo que serán fácilmente eliminables mediante filtrado y en las aplicaciones más habituales no causarán problemas.

Figura 57. Punto de intercepción de tercer orden,  $IP_3$ 

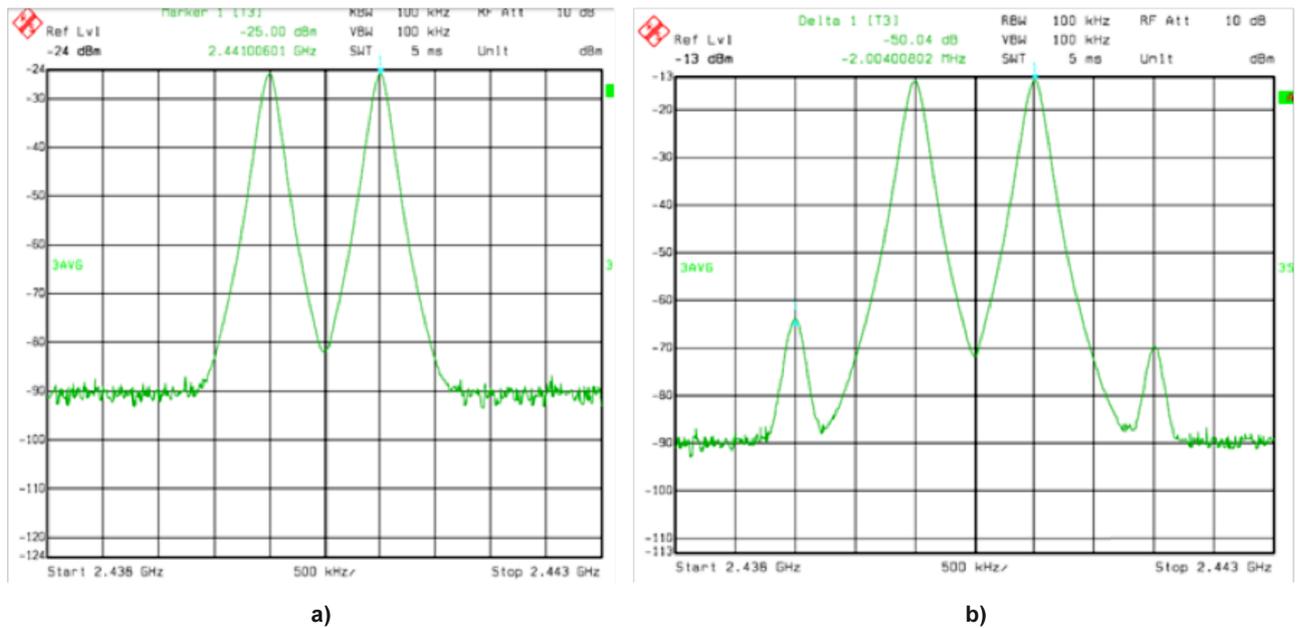
En la figura 57 se muestra cualitativamente la gráfica que relaciona la potencia en [dBm] a la entrada y la potencia en [dBm] a la salida de un amplificador, donde se ha representado la recta correspondiente al término lineal (recta de pendiente  $m = 1$ ) y la recta correspondiente al término de orden 3 (recta de pendiente  $m = 3$ ), obteniéndose el punto de intercepción de tercer orden ( $IIP_3$ ,  $OIP_3$ ), donde se cortan ambas rectas. Se indica también el nivel de compresión a  $-1$ dB,  $P_{-1dB}$ , así como el nivel de saturación del amplificador a la salida  $P_{sat}$ .

La ganancia del amplificador  $G$  se obtiene directamente del punto de corte de la recta lineal de pendiente 1 con el eje de ordenadas (donde la potencia a la entrada es 0 dBm).

Otra manera más visual de entender la importancia de este fenómeno consiste en observar el espectro de señal a la salida del amplificador cuando se inyectan dos portadoras a la entrada con el mismo nivel de potencia, según se muestra en la figura 58. A la izquierda se muestra el espectro de las dos portadoras, centradas en las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ , que inyectamos en la entrada del amplificador. A la derecha, el espectro de señal medido a la salida.

Se observa que las dos portadoras de la entrada han sido amplificadas a la salida, tal y como se requiere de un amplificador, pero justo a ambos lados empiezan a aparecer los productos de intermodulación de tercer orden  $2f_1 - f_2$  y  $2f_2 - f_1$ , que no es posible filtrar, pues caen en la banda de operación, justo al lado de la señal útil; así pues, este fenómeno nos marcará un límite superior de nivel de señal a la entrada con el que se podrá trabajar sin este problema (como veremos en el siguiente apartado relativo al *SFDR*).

Figura 58. Concepto de intermodulación ( $IP_3$ ). a) Espectro de señales reales a la entrada de un amplificador. b) Espectro a la salida de un amplificador



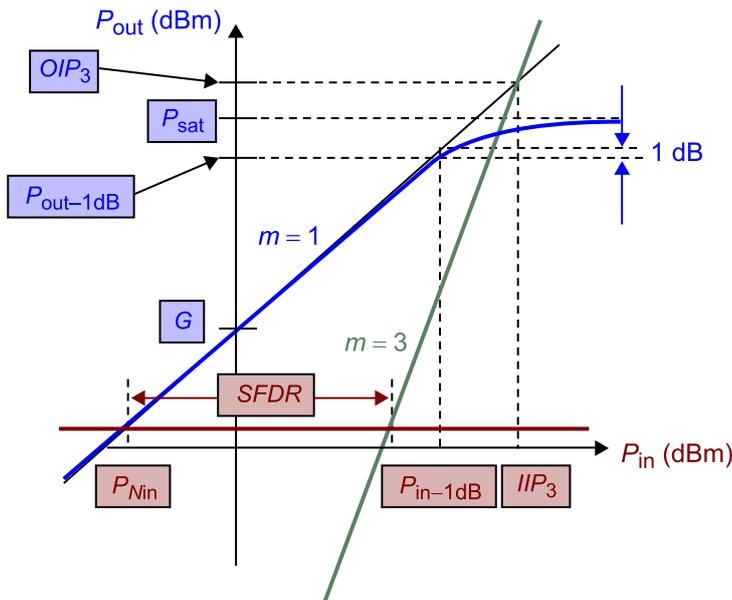
#### 4.6. Margen dinámico libre de espurios (SFDR)

El **margen dinámico libre de espurios (SFDR)**<sup>(1)</sup> se define como el margen de niveles de potencia de señal a la entrada para los que se cumple que la señal útil a la salida está por encima del nivel de potencia de ruido a la salida, y al mismo tiempo el nivel de potencia de los productos de intermodulación a la salida se mantiene por debajo de dicho nivel de potencia de ruido.

<sup>(1)</sup> Acrónimo del inglés *spurious free dynamic range*.

En la figura 59 puede observarse cuál es este margen *SFDR* sobre la gráfica que relaciona los niveles de potencia de señal a la entrada y a la salida, para el amplificador genérico representado anteriormente en la figura 56. Este margen se extiende desde el punto en el que la recta de pendiente 1 (en color azul) de la respuesta lineal del amplificador corta el nivel de ruido a la salida (es decir, el valor en el que el nivel de señal a la salida empieza a ser mayor al nivel de ruido, que está representado por la recta de color rojo), hasta el punto de corte entre la recta de intermodulación de orden 3 (de pendiente 3, en color verde) con este nivel de ruido a la salida (es decir, cuando el nivel de potencia de los productos de intermodulación de orden 3 empiezan a emerger sobre el nivel de potencia de ruido a la salida).

Figura 59. Concepto de margen dinámico libre de espurios, SFDR



**Ejemplo 5**

Sea un amplificador con las características siguientes:

- Ganancia:  $G = 12$  dB
- Punto de intercepción de tercer orden a la entrada:  $IIP_3 = +28$  dBm
- Nivel de ruido medido a la salida:  $N_{out} = -55$  dBm

Suponiendo dos tonos a la entrada de igual magnitud, se pide representar el nivel de potencia a la salida tanto de señal útil como de la señal interferente debida a la intermodulación de orden tres, en función del nivel de potencia de señal útil a la entrada.

También se pide representar las portadoras a la entrada y a la salida para tres valores distintos de potencia de señal en la entrada:  $-5$  dBm,  $+5$  dBm y  $+15$  dBm.

Por último, se pide calcular el SFDR.

**Solución**

En la figura 60 se ha dibujado la gráfica que relaciona la potencia en [dBm] a la entrada y la potencia en [dBm] a la salida del amplificador, donde se ha representado el término lineal (recta ideal de pendiente 1 en negro, en azul la gráfica real) y el término de intermodulación de orden 3 (recta de pendiente 3, en verde), con un punto de intercepción ( $IIP_3, OIP_3$ ).

Primero podemos dibujar la recta ideal de pendiente 1, sabiendo que debe cortar por el punto  $G = 12$  dB del eje de ordenadas (ganancia).

Seguidamente, obtenemos el punto de intercepción a la salida:

$$OIP_3 = IIP_3 + G = +28 \text{ dBm} + 12 \text{ dB} = +40 \text{ dBm} \quad 7.113$$

Finalmente, ya podemos dibujar la recta de pendiente 3 desde el punto obtenido:

$$(IIP_3, OIP_3) = (+28 \text{ dBm}, +40 \text{ dBm}) \quad 7.114$$

Bien sobre la misma gráfica o bien analíticamente, podemos ir obteniendo las tres ternas de puntos de señal útil a la entrada, señal útil a la salida y señal de intermodulación de tercer orden a la salida,  $P_{in}, P_{out}, P_{Iout}$ .

Por simple trigonometría se debe cumplir que:

$$OIP_3 - P_{\text{out}} = m * (IIP_3 - P_{\text{in}}) \quad 7.115$$

Para  $P_{\text{in}} = -5$  dBm tendremos que:

$$IIP_3 - P_{\text{in}} = +28 \text{ dBm} - (-5 \text{ dBm}) = 33 \text{ dB} \quad 7.116$$

Dado que la intermodulación de tercer orden tiene pendiente  $m = 3$ , tendremos:

$$P_{\text{out}}(P_{\text{in}} = -5 \text{ dBm}) = OIP_3 - 3 * 33 = +40 \text{ dBm} - 99 \text{ dB} = -59 \text{ dBm} \quad 7.117$$

El valor de señal útil a la salida no será más que el de la entrada más la ganancia:

$$P_{\text{out}} = P_{\text{in}} + G = -5 \text{ dBm} + 12 \text{ dB} = +7 \text{ dBm} \quad 7.118$$

Por tanto, para  $P_{\text{in}} = -5$  dBm obtenemos la primera terna:

$$(-5 \text{ dBm}, +7 \text{ dBm}, -59 \text{ dBm}) \quad 7.119$$

Análogamente podemos calcular los otros dos casos, obteniendo las ternas  $P_{\text{in}}$ ,  $P_{\text{out}}$ ,  $P_{\text{out}}$  siguientes:

$$(-5 \text{ dBm}, +7 \text{ dBm}, -59 \text{ dBm}) \quad 7.120$$

$$(+5 \text{ dBm}, +17 \text{ dBm}, -29 \text{ dBm}) \quad 7.121$$

$$(+15 \text{ dBm}, +27 \text{ dBm}, +1 \text{ dBm}) \quad 7.122$$

En la figura 60 se ha dibujado, a la derecha, el espectro de dos tonos a la entrada (en rojo) y los dos tonos amplificados a la salida (en azul).

La diferencia de niveles es siempre la ganancia del amplificador (12 dB), pues nos estamos moviendo por la zona lineal del amplificador, en la que la ganancia se mantiene en su valor constante de 12 dB.

Para  $P_{\text{in}} = -5$  dBm, el nivel de la intermodulación  $2f_1 - f_2$  y  $2f_2 - f_1$  a la salida que obtenemos es  $-59$  dBm, todavía por debajo del nivel de ruido, por lo que para este valor aún no aparecen los tonos de intermodulación a la salida y, por tanto, seguimos estando en la zona de *SFDR*.

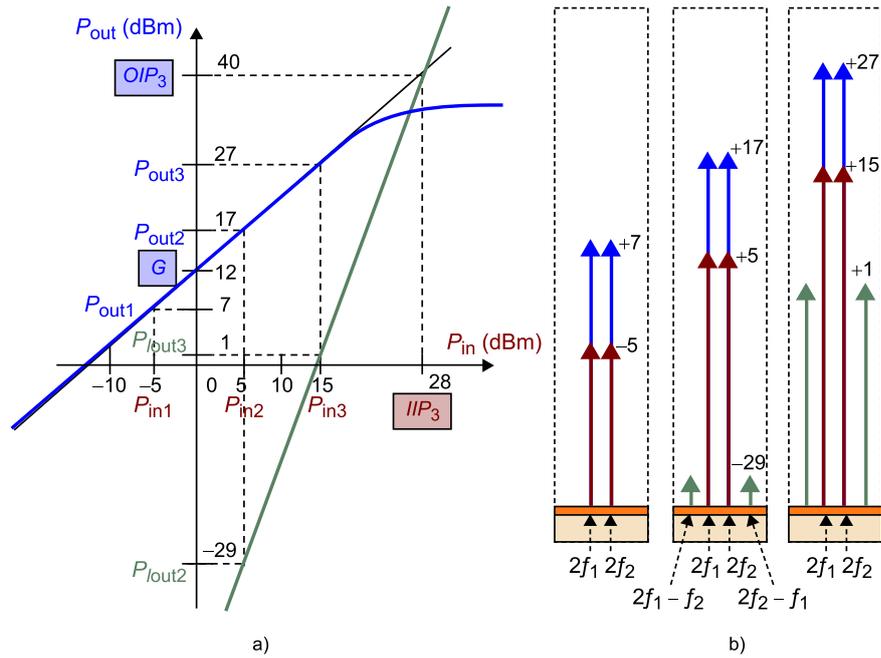
Sin embargo, para  $P_{\text{in}} = +5$  dBm, vemos ya a la salida cómo empiezan a emerger los productos de intermodulación por encima del nivel de ruido (en verde).

Para  $P_{\text{in}} = +15$  dBm, comprobamos que efectivamente los productos de intermodulación a la salida crecen tres veces más rápidamente (+30 dB) que la señal útil (+10 dB) para un mismo incremento de potencia de señal útil a la entrada (+10 dB).

Por último, calculamos ya el *SFDR*.

Dado que  $N_{\text{out}} = -55$  dBm deberemos buscar cuál es el nivel de señal útil a la entrada,  $P_{\text{in}}$ , que provoca ese mismo nivel de intermodulación a la salida.

Figura 60. a) Gráfica del punto de intercepción (IP3). b) Espectro de salida para 3 niveles distintos (en dBm) de señal a la entrada (dos tonos)



Debe cumplirse:

$$OIP_3 - N_{out} = m * (IIP_3 - P_{in}) \rightarrow +40 \text{ dBm} - (-55 \text{ dBm}) = 3 * (+28 \text{ dBm} - P_{in}) \quad 7.123$$

$$P_{in} = 3,67 \text{ dBm}; \text{ este es el límite superior del SFDR} \quad 7.124$$

Calculemos ahora el límite inferior, que vendrá dado por el nivel de señal útil a la entrada que nos da un nivel de señal útil a la salida igual al nivel de ruido:

$$N_{out} = N_{in} + G \rightarrow N_{in} = -55 \text{ dBm} - 12 \text{ dB} = -67 \text{ dBm} \quad 7.125$$

Por lo tanto:

$$SFDR = P_{in} - N_{in} = 3,67 \text{ dBm} - (-67 \text{ dBm}) = 63,33 \text{ dB} \quad 7.126$$

#### 4.7. Figura de ruido

La figura de ruido de un amplificador es otro parámetro clave para completar la definición de las figuras de mérito de un amplificador. Es especialmente importante en el diseño de amplificadores de bajo ruido, LNA<sup>2</sup>, que deben integrarse en las primeras etapas de la cadena de un sistema de recepción de microondas, pues, según veremos en este apartado, la **fórmula de Friis** determina que la figura de ruido del receptor global depende en gran medida de la figura de ruido que presenten las primeras etapas de esa cadena, que fijarán la sensibilidad del receptor y con ello la calidad y el alcance del sistema de telecomunicación.

<sup>(2)</sup>Acrónimo del inglés *low noise amplifiers*.

La **figura de ruido** de un dispositivo, cuando a su entrada tiene una fuente de ruido con potencia  $N_i = KT_0B$ , se define como el cociente entre la relación señal a ruido existente a su entrada  $\frac{S_i}{N_i}$  y la relación señal a ruido existente a su salida  $\frac{S_o}{N_o}$ .

$$F = \frac{S_i}{N_i} \bigg/ \frac{S_o}{N_o} \quad 7.127$$

Y, expresado en logarítmico [dB], obtenemos el denominado **factor de ruido**:

$$NF[\text{dB}] = 10 \log (F) \quad 7.128$$

Considerando que:

- $N_o$  es la potencia de ruido a la salida.
- $N_i$  es la potencia de ruido a la entrada.
- $N_a$  es el ruido interno introducido por el dispositivo amplificador.
- $G_A$  es la ganancia disponible del amplificador.
- $K$  es la constante de Boltzmann.
- $B$  es el ancho de banda del sistema.
- $T_0$  es la temperatura de operación.
- $T_e$  es la llamada *temperatura equivalente del dispositivo*.
- $S_o$  es el nivel de potencia de señal útil a la salida del amplificador.

tendremos que:

$$S_o = G_A S_i \quad 7.129$$

$$N_a = K T_e B \quad 7.130$$

$$N_i = K T_0 B \quad 7.131$$

Sustituyendo 7.34 en 7.32:

$$F = \frac{N_o}{G_A N_i} \quad 7.132$$

Y haciendo uso de 7.35 y 7.36 en 7.37:

$$F = \frac{G_A(KT_0B + N_a)}{G_A KT_0B} = 1 + \frac{T_e}{T_0} \quad 7.133$$

Por último, recordemos la fórmula de Friis, que nos da la figura de ruido para un sistema con  $n$  dispositivos en serie:

$$F_T = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots + \frac{F_n - 1}{G_1 G_2 \dots G_{n-1}} \quad 7.134$$

### Ejemplo 6

Supongamos un sistema de recepción consistente en dos amplificadores de bajo ruido (LNA) en serie y un mezclador. Se nos pide cuál es la ganancia y la figura de ruido del sistema, teniendo en cuenta que cada dispositivo tiene las características que se presentan en la tabla 1.

Tabla 1. Características del sistema receptor

		Stage 1	Stage 2	Stage 3
				
Stage Name:		Agilent ATF-360xx	Agilent ATF-36163	Active Mixer ATF-36163
Noise Figure	dB	1,25	1,4	5,9
Gain	dB	9,5	10	2,8

### Solución

Utilizando la fórmula de Friis podremos calcular el NF [dB] de la cadena. Para ello, pasaremos primero los parámetros de [dB] a lineal:

$$G_1 = 10^{G_{dB1}/10} = 10^{9,5/10} = 8,912 \quad 7.135$$

$$F_1 = 10^{NF_1/10} = 10^{1,25/10} = 1,333 \quad 7.136$$

$$G_2 = 10^{G_{dB2}/10} = 10^{10/10} = 10 \quad 7.137$$

$$F_2 = 10^{NF_2/10} = 10^{1,4/10} = 1,380 \quad 7.138$$

$$F_3 = 10^{NF_3/10} = 10^{5,9/10} = 3,890 \quad 7.139$$

$$F_T = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} = 1,333 + \frac{1,380 - 1}{8,912} + \frac{3,890 - 1}{8,912 \cdot 10} = 1,333 + 0,043 + 0,032 = 1,408 \quad 7.140$$

$$NF_T[\text{dB}] = 10 \log(F_T) = 1,486 \text{ dB} \quad 7.141$$

$$G_T[\text{dB}] = G_1 + G_2 + G_3 = 9,5 + 10 + 2,8 = 22,3 \text{ dB} \quad 7.142$$

Advertid que la ganancia de la primera etapa,  $G_1$ , minimiza el efecto del ruido de las etapas posteriores, en especial de la tercera, que es mucho más elevado que el ruido del sistema final.

### Ved también

La fórmula de Friis se explica en el apartado 3 del módulo "Introducción a los sistemas de comunicaciones" de la asignatura *Electrónica de comunicaciones*.

## 5. Modos TE y TM en una guía de ondas rectangular

Los modos TE y TM que se propagan en una guía de ondas rectangular presentan infinitas soluciones, y cada una de estas soluciones se genera si se supera su frecuencia de corte. En el caso del modo TE, la componente longitudinal del campo magnético viene determinada por la ecuación:

$$(\nabla_t^2 + k_c^2)H_z = 0 \quad 7.143$$

Y para el caso del modo TM, la componente longitudinal del campo eléctrico viene determinada por la ecuación:

$$(\nabla_t^2 + k_c^2)E_z = 0 \quad 7.144$$

Podemos generalizar estas dos expresiones con:

$$(\nabla_t^2 + k_c^2)\psi(x, y) = 0 \quad 7.145$$

En este apartado se resolverá esta ecuación, primero para un caso general y después para los casos particulares de los modos TM y TE. Para estos dos últimos casos utilizaremos las condiciones de contorno entre un dieléctrico (interior de la guía) y un conductor:

$$E_z \Big|_{\text{Superficie del conductor}} = 0 \quad 7.146$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_{\text{Superficie del conductor}} = 0 \quad 7.147$$

### 5.1. Solución general de los campos

Si partimos de la ecuación 7.145 y desarrollamos:

$$\nabla_t^2 \psi(x, y) + k_c^2 \psi(x, y) = 0 \quad 7.148$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) + k_c^2 \psi(x, y) = 0 \quad 7.149$$

Esta última expresión podemos resolverla por el método de separación de variables. Eso implica que la solución está formada por dos funciones, cada una dependiente de una variable diferente, tipo:

#### Ved también

En el módulo "Guías de ondas" de este material didáctico se estudian los modos TE y TM que se propagan en una guía de ondas rectangular.

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y) \quad 7.150$$

Si lo sustituimos en la expresión anterior obtenemos:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + k_c^2 = 0 \quad 7.151$$

También podemos expresarlo como:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k_c^2 = 0 \quad 7.152$$

Definimos dos funciones:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{X''(x)}{X(x)} \\ f_2(y) &= \frac{Y''(y)}{Y(y)} \end{aligned} \quad 7.153$$

Por tanto, sustituyendo obtenemos:

$$f_1(x) + f_2(y) = -k_c^2 \quad 7.154$$

Lo que nos dice esta expresión es que la suma de las dos funciones es igual a una constante. Eso solo puede ser cierto si la solución de cada una de las funciones es también una constante, es decir:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \\ f_2(y) &= \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2 \end{aligned} \quad 7.155$$

donde:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad 7.156$$

Por tanto debemos solucionar:

$$\begin{aligned} X''(x) + k_x^2 X(x) &= 0 \\ Y''(y) + k_y^2 Y(y) &= 0 \end{aligned} \quad 7.157$$

Estas son expresiones de ecuaciones diferenciales sencillas, donde la solución adquiere la forma de:

$$\begin{aligned} X &= A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x) \\ Y &= C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y) \end{aligned} \quad 7.158$$

Es decir:

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y) = (A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x))(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)) \quad 7.159$$

La forma de la solución final, es decir, con el valor de las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , dependerá de si la onda que se propaga ahí es un modo TE o TM, ya que cada uno introducirá unas condiciones de contorno diferentes, expresadas en las ecuaciones 7.146 y 7.147. Vamos a tratar por tanto cada una de las soluciones, comenzando por el modo TM y después con el modo TE.

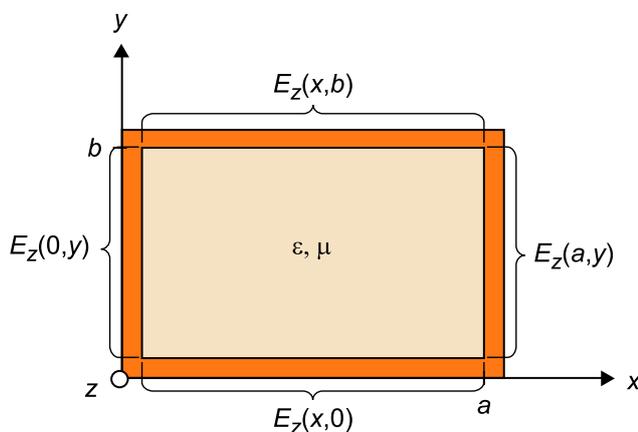
## 5.2. Modo TM en una guía de ondas rectangular

El modo TM se caracteriza por una  $H_z(x, y) = 0$ . Sin embargo, hay que encontrar  $E_z(x, y) \neq 0$ . Ya hemos visto que lo primero que hay que hacer es resolver la ecuación 7.144, que, como hemos visto en 7.159, adquiere una solución de la forma:

$$\begin{aligned} E_z(x, y) = \psi(x, y) = X(x)Y(y) = \\ = (A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x))(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)) \end{aligned} \quad 7.160$$

El valor de las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  lo encontramos aplicando las condiciones de contorno generales para los campos eléctricos. Según la ecuación 7.146, el campo eléctrico longitudinal ( $E_z$ ) es igual a 0 en la superficie del conductor. Esto tiene sentido, ya que la componente longitudinal es tangente a las paredes del conductor y la teoría electromagnética expresada mediante las ecuaciones de Maxwell establece que no puede existir componente tangencial de campo eléctrico en la superficie de un conductor. Por tanto, si lo aplicamos a los campos en el interior de la guía, donde las cuatro paredes están situadas tal y como se expresa en la figura 61, podremos resolver el sistema.

Figura 61. Campos eléctricos en las paredes de la guía



1)  $x = 0, y \in (0, b)$ :

$$E_z(x, y) = \psi(x, y) = X(x)Y(y) = (A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x))(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)) \quad 7.161$$

Esta expresión tiene solución solo si:

- $C = D = 0$  (solución trivial), o bien
- $B = 0$ .

En el primer caso obtenemos una solución trivial. Eso significa que no habrá campo (todas las componentes darán 0). Por tanto, no es una solución que nos interese. Tomaremos como solución válida el segundo caso, es decir,  $B = 0$ . Por tanto, la expresión general queda reducida a:

$$E_z(x, y) = A\sin(k_x x)(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)) \quad 7.162$$

2)  $y = 0, x \in (0, a)$ :

$$E_z(x, 0) = A\sin(k_x x)D = 0 \quad 7.163$$

Esta expresión tiene solución solo si:

- $A = 0$  (solución trivial), o bien
- $D = 0$ .

De nuevo, la primera solución es una solución trivial. Tomamos la segunda y obtenemos que la expresión general del campo queda:

$$E_z(x, y) = A\sin(k_x x)C\sin(k_y y) \quad 7.164$$

3)  $x = a, y \in (0, b)$ :

$$E_z(a, y) = A\sin(k_x a)C\sin(k_y y) = 0 \quad 7.165$$

Esta expresión tiene solución solo si:

- $A = 0$  (solución trivial), o bien
- $C = 0$  (solución trivial), o bien
- $\sin(k_y y)$  (solución trivial), o bien
- $\sin(k_x a) = 0$ .

Nos quedamos con la única solución no trivial y obtenemos que:

$$\sin(k_x a) = 0 \rightarrow k_x a = m\pi \rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}, m \in \mathbb{N} \quad 7.166$$

Por tanto:

$$E_z(x, y) = A \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) C \sin(k_y y) \quad 7.167$$

4)  $y = b, x \in (0, a)$ :

$$E_z(x, b) = A \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) C \sin(k_y b) = 0 \quad 7.168$$

Esta expresión tiene solución solo si:

- $A = 0$  (solución trivial), o bien
- $C = 0$  (solución trivial), o bien
- $\sin(k_y b) = 0$ .

Nos quedamos con la única solución no trivial y obtenemos que:

$$\sin(k_y b) = 0 \rightarrow k_y b = n\pi \rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}, n \in \mathbb{N} \quad 7.169$$

Finalmente, utilizando los resultados de 7.164, 7.166 y 7.169, la expresión del campo eléctrico en la dirección  $z$  toma la forma:

$$E_z(x, y) = A \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) C \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad 7.170$$

Para resolver las últimas dos constantes necesitamos información exacta del problema (amplitud inicial de la onda TM, etc.). Es decir, que el campo toma la forma:

$$E_z(x, y) = E_{z0} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad 7.171$$

Se puede ver que los campos adquirirán soluciones válidas para cualquier valor de  $m$  y  $n$ , excepto cuando  $m = 0$  y/o  $n = 0$  (ya que volvemos a obtener soluciones triviales). Todas estas soluciones de campos serán válidas y se denotan a partir de las constantes  $m$  y  $n$ . El modo  $TM_{m_0 n_0}$  denota la configuración de campos transversal eléctrica obtenida eligiendo  $m = m_0$  y  $n = n_0$ . El campo  $E_z$  total dentro de la guía será la suma de cada uno de los modos que no estén en corte.

Recordemos también que  $k_x$  y  $k_y$  formaban la constante  $k_c$  (ecuación 7.156):

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \rightarrow k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad 7.172$$

y  $k_c$  tenía una frecuencia de corte asociada, de manera que:

$$f_{c_{mn}} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \text{ donde } c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad 7.173$$

Esta  $c$  no es la velocidad de propagación de la onda en la guía, sino la velocidad de la luz en un medio ilimitado caracterizado por  $\mu$  y  $\epsilon$ . Cada solución tendrá su frecuencia de corte, que depende del orden del modo y de la geometría de la línea.

Una vez encontrado el valor de  $E_z$ , el último paso sería encontrar los valores de los campos  $\vec{E}_t$  y  $\vec{H}_t$  con:

$$\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \vec{\nabla}_t E_z \quad 7.174$$

$$\vec{H}_t = -j \frac{\omega\epsilon}{k_c^2} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z \quad 7.175$$

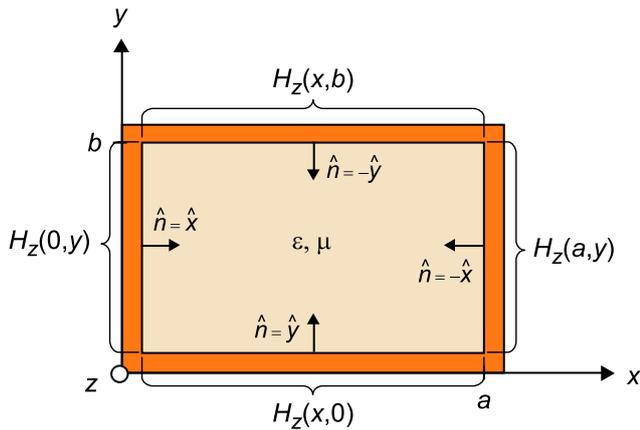
### 5.3. Modo TE en una guía de ondas rectangular

Análogamente al modo TM, en un modo TE,  $E_z(x, y) = 0$ , y es necesario encontrar  $H_z(x, y) \neq 0$ . Debemos resolver la ecuación 7.143, que de nuevo adquiere la solución de la forma vista en la ecuación 7.159:

$$\begin{aligned} H_z(x, y) &= \psi(x, y) = X(x)Y(y) = \\ &= (A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x))(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)) \end{aligned} \quad 7.176$$

Para encontrar el valor de las constantes, utilizaremos la condición de contorno del campo magnético 7.147 en las paredes de la guía, siendo  $n$  el vector normal en la superficie de la guía (figura 62).

Figura 62. Campos magnéticos en las paredes de la guía



Operaremos de la misma manera que para el caso del modo TM (aunque ahora, según la condición de contorno, debemos ir derivando el campo respecto a  $n$ ):

1)  $x = 0, y \in (0, b)$ :

$$\frac{\partial H_z(0,y)}{\partial x} = Ak_x(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)) = 0 \quad 7.177$$

Esta expresión tiene solución solo si:

- $C = D = 0$  (solución trivial), o bien
- $k_x = 0$  (posible solución, aunque elimina la dependencia de  $x$ ), o bien
- $A = 0$ .

Tomamos como solución el tercer caso, es decir  $A = 0$ . Por tanto, la expresión general queda reducida a:

$$H_z(x, y) = B\cos(k_x x)(C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)) \quad 7.178$$

2)  $y = 0, x \in (0, a)$ :

$$\frac{\partial H_z(x,0)}{\partial y} = B\cos(k_x x)Ck_y = 0 \quad 7.179$$

Esta expresión tiene solución solo si:

- $B = 0$  (solución trivial), o bien
- $k_y = 0$  (posible solución, aunque elimina la dependencia de  $y$ ), o bien
- $C = 0$ .

Tomamos la tercera y obtenemos que la expresión general del campo queda:

$$H_z(x, y) = B \cos(k_x x) D \cos(k_y y) \quad 7.180$$

3)  $x = a, y \in (0, b)$ :

$$\frac{\partial H_z(a, y)}{\partial x} = B k_x \sin(k_x a) D \cos(k_y y) = 0 \quad 7.181$$

Esta expresión tiene solución solo si:

- $B = 0$  (solución trivial), o bien
- $D = 0$  (solución trivial), o bien
- $\cos(k_y y) = 0$  (solución trivial), o bien
- $\sin(k_x a) = 0$ .

Nos quedamos con la única solución no trivial y obtenemos que:

$$\sin(k_x a) = 0 \rightarrow k_x a = m\pi \rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}, m \in \mathbb{N} \quad 7.182$$

Por tanto:

$$H_z(x, y) = B \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) D \sin(k_y y) \quad 7.183$$

4)  $y = b, x \in (0, a)$ :

$$\frac{\partial H_z(x, b)}{\partial y} = B \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) D \sin(k_y b) = 0 \quad 7.184$$

Esta expresión tiene solución solo si:

- $B = 0$  (solución trivial), o bien
- $D = 0$  (solución trivial), o bien
- $\sin(k_y b) = 0$ .

Nos quedamos con la única solución no trivial y obtenemos que:

$$\sin(k_y b) = 0 \rightarrow k_y b = n\pi \rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}, n \in \mathbb{N} \quad 7.185$$

Finalmente, unificando los resultados de 7.180, 7.182 y 7.184, la expresión del campo magnético en la dirección  $z$  adquiere la forma:

$$H_z(x, y) = B \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad 7.186$$

Fijaos en que las dos soluciones que habíamos descartado, aunque eran válidas ( $k_x = 0$  y  $k_y = 0$ ), eran soluciones particulares de las que hemos encontrado finalmente tomando  $n = 0$  y  $m = 0$  respectivamente. Para resolver las últimas dos constantes necesitamos información exacta del problema (amplitud inicial de la onda TE). Es decir, que el campo adquiere la forma:

$$H_z(x, y) = H_{z0} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad 7.187$$

Y se siguen cumpliendo las mismas ecuaciones respecto a frecuencia de corte:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \rightarrow k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad 7.188$$

$$f_{c_{mn}} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \text{ donde } c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad 7.189$$

Una vez encontrado el valor de  $H_z$ , el último paso sería encontrar los valores de los campos  $\vec{E}_t$  y  $\vec{H}_t$  con:

$$\vec{E}_t = j \frac{\omega\mu}{k_c^2} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t H_z \quad 7.190$$

$$\vec{H}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \vec{\nabla}_t H_z \quad 7.191$$

Fijaos en que los modos  $TE_{n,0}$   $TE_{0,m}$  pueden existir, pero no los modos  $TM_{n,0}$  y  $TM_{0,m}$ , ya que la configuración de campos en este caso es 0.



## Glosario

**AGC** *m* Automatic gain control

**AM** *f* Amplitude modulation

**BJT** *m* Bipolar junction transistor

**BPF** *m* Band pass filter

**carta de Smith** *f* Herramienta gráfica para transformar impedancias en coeficientes de reflexión (y al revés), impedancias en admitancias (y al revés), o para calcular la longitud deseada de líneas de transmisión y *stubs* en un circuito.

**coeficiente de reflexión** *m* Relación entre la onda progresiva y la onda regresiva en un punto dentro de una línea de transmisión.

**ecuaciones de Maxwell** *f pl* Ecuaciones que conforman el pilar fundamental de la teoría clásica del electromagnetismo, y se resumen en tan solo cuatro expresiones, que pueden ser presentadas en forma diferencial, integral o fasorial.

**fasor** *m* Número complejo constante expresado en forma exponencial que representa la amplitud compleja (magnitud y fase) de una función de tiempo sinusoidal.

**FM** *f* Frequency modulation

**HPF** *m* High pass filter

**IF** *f* Frecuencia intermedia (*intermediate frequency*)

**IMPATT** *m* Impact avalanche and transmit time

**impedancia característica** *f* Relación entre la onda de tensión progresiva (o regresiva) y la onda de corriente progresiva (o regresiva).

**línea de transmisión** *f* Guía de ondas formada por dos o más conductores con sección recta constante que propaga ondas TEM.

**LNA** *m* Low noise amplifier

**LO** *m* Oscilador local (*local oscillator*)

**LPF** *m* Low pass filter

**MESFET** *m* Metal semiconductor field effect transistor

**modo TE (transversal eléctrico)** *m*  $E_z = 0$  y  $H_z \neq 0 \rightarrow$  El campo eléctrico no tiene componente en la dirección de propagación  $z$ . Puede propagarse en guías de ondas de un solo conductor.

**modo TM (transversal magnético)** *m*  $E_z \neq 0$  y  $H_z = 0 \rightarrow$  El campo magnético no tiene componente en la dirección de propagación  $z$ . Puede propagarse en guías de ondas de un solo conductor.

**parámetros S (parámetros de dispersión, scattering parameters)** *m pl* Parámetros que relacionan las ondas salientes ( $b$ ) con las ondas entrantes ( $a$ ) presentes en los puertos de una red de microondas.

**PLL** *m* Phase locked loop

**régimen permanente sinusoidal** *m* Sistema electromagnético en el que todas las excitaciones y respuestas tienen dependencia armónica con el tiempo, y cualquier transitorio inicial ya hace tiempo que se ha desvanecido.

**RF** *f* Radiofrecuencia

**ROE** *f* Relación de onda estacionaria

**SFDR** *m* Spurious free dynamic range

**SNR** *m* Signal to noise ratio

**stub**  $f$  Línea de transmisión o guía de ondas conectada solo por uno de sus extremos.

**VSWR**  $m$  *Voltage standing wave ratio*

## Bibliografía

### Bibliografía básica

**Bara Iniesta, M.; Escudero Quesada, A. M.; González Llobet, O.; Ibeas Hernández, A.** (2012). *Tecnología electrónica*. Barcelona: UOC.

**Carey, E.; Lidholm, S.** (2005). *Millimeter-Wave Integrated Circuits*. Springer Science+Business Media, Inc.

**Cheng, D. K.** (1998). *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería* (1.ª ed.). Addison Wesley.

**Collin, R. E.** (2001). *Foundations for Microwave Engineering*. John Wiley & Sons.

**Glover, I. A.; Pennock, S. R.; Shepherd, P. R.** (2005). *Microwave devices, circuits and subsystems for communications engineering*. John Wiley & Sons.

**López i Rocafiguera, E.; Martí i Puig, P.** (2012). *Electrónica de comunicaciones*. Barcelona: UOC.

**Maas, S. A.** (2003). *Nonlinear Microwave and RF Circuits*. Artech House.

**Pozar, D. M.** (2012). *Microwave engineering* (4.ª ed). John Wiley.

**Ribó M.; Pajares, F. J.** (2008). *Circuits d'alta freqüència*. Enginyeria La Salle (Guia d'estudis Semipresencials).

**Sweet, A. A.** (1990). *MIC&MMIC Amplifier And Oscillator Circuit Design*. USA: Artech House.

### Bibliografía complementaria

**González, G.** (2004). *Microwave Transistor Amplifier* (2.ª ed.). Prentice Hall.

**Weber, R. J.** (2001). "Introduction to Microwave Circuits, Radio Frequency and Design Applications". *IEEE Press Series on RF and Microwave Technology*.

