Mecànica

Cinemàtica i dinàmica

Albert Gras Martí

Amb la col·laboració de:
Azalea Gras Velàzquez

Amb la col·laboració gràfica de:
Julio V. Santos Benito

PID_00166265

Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

Índex

Introducció

La física és la ciència que estudia els fenòmens naturals i intenta trobar les lleis que els regeixen. Per a facilitar l'anàlisi dels fenòmens i dels processos físics, aquests se solen dividir en mecànics, tèrmics, electromagnètics, òptics, nuclears, quàntics, etc.

Dins de la física, la mecànica és una part fonamental perquè estudia els moviments i les seves causes. Els conceptes i les lleis que formula la mecànica són bàsics en totes les altres branques de la física i també de l'enginyeria.

La mecànica se sol dividir en **cinemàtica** i en **dinàmica**. S'anomena *cinemàtica* la part de la mecànica que estudia com analitzar i descriure els moviments dels objectes. S'anomena *dinàmica* la part que estudia les causes que produeixen els moviments i les lleis que els regeixen.

Des d'èpoques remotes la humanitat es va interessar en com podia descriure els moviments dels astres i els moviments dels objectes sobre la Terra. Avui dia estem acostumats al fet que els moviments es puguin mesurar o controlar, per exemple amb radars en carreteres, amb sistemes de posicionament global (GPS) per a orientar-nos o amb el comptaquilòmetres dels cotxes. Potser no sabeu, però, que l'ús de GPS fa servir conceptes de física ben sofisticats, de l'anomenada *física relativista*, que la humanitat ha trigat molts segles a desenvolupar i entendre.

En l'estudi de la mecànica començarem proposant qüestions qualitatives sobre fenòmens i conceptes més o menys propers a l'experiència diària de tots nosaltres. Posteriorment, formalitzarem els conceptes i enunciarem les lleis de la mecànica. Tot seguit les farem servir en la descripció de diferents fenòmens o processos. La primera aproximació serà, doncs, purament qualitativa (descriptiva, no formal), per a arribar a poc a poc a l'aproximació científica formal.

En el primer apartat abordem l'estudi de la cinemàtica des d'un punt de vista qualitatiu i en el segon apartat formalitzarem conceptes bàsics com ara velocitat i acceleració.

Els apartats 3 i 4 els dedicarem a la dinàmica: el 3r l'abordarem en termes descriptius i en el 4t enunciarem les tres lleis de moviment de Newton.

En l'apartat 5 introduirem conceptes d'ús en la mecànica i en tota la física, com ara el moment lineal i l'energia en les distintes formes (cinètica, potencial, mecànica), i en l'apartat 6 estudiarem un tipus de moviment concret, el moviment oscil·latori, i l'aprofitarem per a aplicar-hi els conceptes i les lleis que veurem al llarg del mòdul de mecànica.

Estructura d'aquests materials de treball

Al llarg dels apartats d'aquest mòdul de mecànica es proposen *activitats* que haureu de fer. Es tracta tant d'exemples d'aplicació de la teoria com d'elements necessaris per a desenvolupar la pròpia matèria. Són activitats dissenyades per a tenir-vos actius mentre estudieu i són essencials per a poder continuar treballant els materials amb profit. Les solucions a totes les activitats estan just a continuació de cada enunciat, però el procés d'ensenyament-aprenentatge és molt més eficient si treballeu a fons aquestes activitats (i per escrit) abans de comparar la vostra solució amb la del text. En repassos posteriors de la matèria veureu que podeu respondre les qüestions plantejades en les activitats sense necessitat de llegir-ne les solucions.

Al final de cada apartat es proposen també problemes d'ampliació que permeten millorar la comprensió dels principis bàsics i desenvolupar habilitats d'anàlisi i de resolució de problemes. En teniu les respostes al final del mòdul de mecànica. En una primera lectura no convé que els abordeu, si no disposeu de prou temps, però sí en el repassos posteriors.

I, a més, al final del mòdul hi ha exercicis qualitatius d'autoavaluació que us ajudaran a comprovar els vostres avenços.

Objectius

Del treball d'aquest mòdul els estudiants haureu de ser capaços de:

1. Saber aplicar els llenguatges de la ciència (verbal, algebraic, gràfic, tabular, etc.) per a descriure i abordar problemes de moviments i les seves causes.

2. Saber fer servir les eines del càlcul integrodiferencial per a la resolució de problemes de mecànica.

3. Saber aplicar el càlcul vectorial per a la descripció de magnituds cinemàtiques i dinàmiques.

4. Conèixer i saber aplicar els conceptes físics bàsics de mecànica: velocitat, acceleració, força, treball, energia, moment lineal, etc.

5. Conèixer les lleis de Newton de la mecànica, i saber-les aplicar en situacions d'interès en enginyeria.

6. Saber descriure la cinemàtica i la dinàmica del moviment oscil·latori.

7. Saber interpretar gràfiques qualitatives de moviments i generar gràfiques quantitatives de moviments a partir de les equacions corresponents.

1. Descripció dels moviments. Els llenguatges de la ciència

L'objectiu principal d'aquest apartat és fer un tractament qualitatiu dels moviments que observem o que es poden provocar.

> La mecànica és la part de la física que estudia els moviments, tant la seva descripció, la cinemàtica, com les causes que els produeixen, la dinàmica.

Ens introduirem en la cinemàtica a partir de descripcions qualitatives dels moviments, per a endinsar-nos a poc a poc en qüestions quantitatives. Són tan importants, però, les descripcions qualitatives dels fenòmens de la natura com les quantitatives.

Què aprendrem?

- Aprendre ciència és aprendre els llenguatges de la ciència.
- Plantejarem problemes i en farem anàlisis que formalitzarem en apartats posteriors.
- Veurem la utilitat de quatre tipus de llenguatges en la descripció de moviments: el verbal, l'algebraic, el gràfic i el tabular.
- Classificarem els moviments segons criteris diversos.
- Esmentarem les simulacions per ordinador, com a eina que permet investigar processos físics.

Qualitatiu i quantitatiu

Una descripció **qualitativa** fa servir el llenguatge verbal i esquemes que mostren tendències de les variables que hi intervenen.

En una descripció **quantitativa** es fan servir amb precisió conceptes i també expressions matemàtiques (fórmules, equacions) i taules o gràfiques amb valors numèrics de les magnituds involucrades.

Què suposarem?

Els conceptes matemàtics bàsics que necessitarem per a estudiar els moviments els recordarem breument a mesura que es vagin necessitant. Així, per exemple, repassarem els conceptes matemàtics de divisió, proporcionalitat i valor mitjà.

1.1. Llenguatge verbal

Comencem amb un exemple senzill i quotidià: descriurem en termes físics una tasca habitual, un moviment amunt i avall per una escala. Imaginem una persona que viu al segon pis d'un edifici sense ascensor, i que puja en diversos viatges les bosses que ha dut del mercat i que té al cotxe. En acabar la tasca haurà pujat i baixat unes quantes vegades les escales de casa seva. Des del punt de vista dels moviments que s'han fet en aquesta tasca podem dir que:

- ha fet força per a alçar les bosses;
- ha recorregut una determinada distància;
- quan ha pujat i baixat l'escala ha acabat en la mateixa posició: al cotxe;

- ha baixat l'escala més ràpidament (habitualment) que l'ha pujada;
- s'ha cansat: ha consumit energia;
- ha fet un "esforç" (pujar coses, pujar i baixar el seu cos);
- ha trigat un temps a fer tot el procés.

A més a més, si comparem la tasca que ha fet aquesta persona amb la d'una altra que hagi fet una tasca semblant podrem comparar, per exemple, el temps total que cadascú ha trigat a fer la tasca o la velocitat amb què pujaven o baixaven les escales.

Per tant, la descripció d'un moviment qualsevol pot involucrar molts termes, com ara la velocitat, la posició, la distància recorreguda, l'energia o la força. Tots aquests termes designen magnituds.

Les magnituds són propietats dels sistemes físics que es poden *mesurar*.

Les magnituds es poden quantificar mitjançant un número i una unitat específica, una vegada s'hagi acordat l'escala de mesura respectiva. Per exemple, podem mesurar una velocitat en quilòmetres per hora, o en metres per segon.

Recordeu

No es pot aprendre física si només es llegeixen aquests materials. Convé tractar de resoldre, i per escrit, cada activitat que s'hi plantegi. Aquestes activitats no són només exercicis d'aplicació sinó que sovint són part fonamental del procés de construcció del tema que s'està estudiant en cada cas, i no es pot avançar sense entendre-les.

Conceptes com els esmentats –força, energia, velocitat, etc.– es fan servir tant en la vida quotidiana, de manera col·loquial, com en usos científics; hem d'aprendre a fer-los servir amb precisió en contexts cientifico-tècnics. Ens haurem d'inventar altres conceptes per a poder descriure de forma més completa un moviment i, així, parlarem d'acceleracions, de treball, de potència, etc. Els definirem a poc a poc.

Activitat 1.1. Fem una altra descripció

Una persona munta en un cotxe i el condueix, fins que en algun moment l'aparca. Quins conceptes dels que hem esmentat en l'activitat anterior s'aplicaran per a descriure aquest moviment? Quins altres conceptes s'hi poden aplicar?

Solució

Es poden fer servir alguns termes que hem emprat en la descripció anterior i, a més a més, els següents:

- l'acceleració del cotxe que provoquem amb el pedal accelerador;
- la frenada del vehicle;
- la fricció de les rodes.

De ben segur que alguns de vosaltres tindreu llistes més llargues, potser incloent-hi l'efecte del vent sobre el moviment del cotxe. Una de les tasques de la ciència és definir bé i delimitar el problema que es vol abordar, perquè en cas contrari no es pot avançar en la resolució del problema plantejat. En cada cas haurem de precisar en quins aspectes del procés volem fixar-nos.

1.1.1. Què hem après?

Veiem que un parell d'exemples d'accions quotidianes, com ara pujar bosses a casa o conduir un vehicle, han fet aparèixer ja molts conceptes que caldrà precisar si volem descriure aquests moviments en termes científics.

Com hem vist, els moviments o els processos es poden descriure qualitativament. La descripció quantitativa d'aquests moviments o processos sovint es fa mitjançant fórmules que expressen relacions entre les magnituds involucrades. En el subapartat següent en veurem un exemple.

1.2. Llenguatge algebraic: equacions del moviment

Ara veurem un exemple concret de moviment, el **moviment de caiguda lliure**, el que es produeix quan un objecte cau a terra. El coneixement de l'equació que descriu la caiguda lliure ens permetrà discutir conseqüències interessants d'aquest moviment.

Podeu fer l'experiment següent: una persona A agafa entre els dits polze i índex un bitllet de 10 euros per un extrem i el penja verticalment entre els dits polze i índex d'una altra persona, B, que els té ben oberts. L'extrem inferior del bitllet està a l'altura dels dits oberts de B (figura 1). Es tracta que A deixi anar el bitllet i que B intenti atrapar-lo tancant els dos dits, però sense moure la mà amunt i avall: només pot tancar polze i índex, una vegada A hagi deixat anar el bitllet. Es pot apostar que si B atrapa el bitllet, se'l queda, i en perd un si no és així.

Si feu l'experiment de manera que A deixi anar el bitllet sense mirar a B (així B no pot intuir quan el deixarà anar), quasi sempre ocorre que B no és capaç d'atrapar-lo.

Figura 1

Es deixa anar un bitllet, sense avisar, entre els dits polze i índex de la mà d'una altra persona, que intentarà atrapar-lo.

L'anàlisi d'aquest experiment es pot fer en dues parts: el moviment de caiguda del bitllet i la resposta de la persona que intenta atrapar-lo. La segona part és més difícil d'analitzar, perquè involucra conceptes fisiològics i físics complexos de B, que ha de veure quan A deixa anar el bitllet, donar al seu cervell l'ordre que cal tancar els dits, enviar un impuls nerviós als dits perquè es tanquin, etc.

Suposem que tots els processos fisiològics anteriors es poden fer, típicament, en un interval de temps t_B. Suposem també que el temps de caiguda del bitllet entre els dits de B és t_A.

Si $t_B > t_A$, B no atraparà el bitllet. És a dir, si la reacció d'una persona és més lenta que el temps que triga el bitllet a caure entre els dits de la mà de B, aquesta no podrà atrapar-lo. Si repetiu l'experiment unes quantes vegades i amb diverses persones, comprovareu que (si no fan trampa, com ara tancar els dits abans que s'amolli el bitllet) gairebé mai no l'atrapen. Poques persones, que tinguin molt bons reflexos, l'atraparan.

$t_B > t_A$ vol dir que t_B és més gran que t_A.

De què depèn el temps de caiguda del bitllet t_A? Aquest temps el determinen processos físics, no fisiològics. El temps t_A depèn de:

- l'acció de la gravetat, que fa caure el bitllet;
- la seva llargària (un bitllet gran trigarà més a passar entre els dits).

Vegem com podem calcular el temps t_A.

1.2.1. Temps de caiguda lliure

Hi ha una expressió que facilita la discussió quantitativa de l'experiment que mostra la figura 1. Resulta que el temps t_A que tarda un bitllet de longitud L, que cau lliurement, a passar entre els dits d'una mà es pot calcular mitjançant l'expressió següent:

$$t_A = \sqrt{\frac{2L}{g}} \qquad (1)$$

on L és la longitud del bitllet i la constant g = 9,81 m/s^2 és *l'acceleració de la gravetat*. En l'apartat 2 aprendrem a deduir equacions com aquesta, que s'anomena equació de moviment. És l'equació de moviment d'un objecte que cau lliurement.

Per a un bitllet de 10 euros (L = 12,7 cm), obtenim:

$$t_A = 0{,}16 \text{ s} \qquad (2)$$

és a dir, el temps de caiguda del bitllet entre els dits de B és de menys de dues dècimes de segon; exactament, 1,6 dècimes de segon, o 16 centèsimes de segon.

Com que si fem l'experiment observem que t_B és superior a t_A en la major part dels casos, $t_B > t_A$, podem concloure, doncs, que per a la majoria de les persones el temps de resposta davant d'un estímul, o *temps de reacció*, és d'algunes dècimes de segon i superior a 0,16 s; també podem dir que aquest és el temps mínim que triguem a reaccionar si, per exemple, estem conduint i sobtadament ens veiem obligats a frenar, o per a arrencar a córrer quan algú ens fa un senyal.

Vegem quines conseqüències té el temps de reacció amb un exemple.

Activitat 1.2. Reflexos d'un conductor

Aneu conduint per la ciutat a 36 km/h i es creua una persona per davant del cotxe. A quina distància mínima s'ha de creuar perquè no l'atropelleu inevitablement, tot i que freneu ràpidament?

Suposeu que el temps de resposta és 0,16 s.

La distància *d* recorreguda per un vehicle que va a velocitat *v* durant un temps *t* és $d = v \cdot t$. Per exemple, a 30 km/h, en 4 h recorreríem 4h × 30 km/h = 120 km.

Solució

Per a analitzar aquesta situació podem suposar que la nostra resposta és "instantània", és a dir, que no anem xerrant amb el copilot o parlant pel mòbil, i que el cotxe també respon instantàniament, de manera que quan frenem s'aturarà en sec, sense lliscar.

Calculem quina distància recorre el cotxe durant el temps que una persona necessita per a respondre a l'estímul. Si circulem a una velocitat *v*, l'espai que recorrem en aquest temps és:

$$Distància = Velocitat \times Temps = v \cdot t \tag{3}$$

Com que el temps de resposta el prenem com 0,16 s, convé convertir la velocitat del vehicle a metres per segon:

$$36\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 36\,\frac{1.000\ \text{m}}{60\ \text{min} \times 60\ \frac{\text{segons}}{\text{min}}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{4}$$

Fixem-nos que en la conversió d'unitats hem operat amb les unitats (m, min, s) de la mateixa manera que amb les xifres: es poden dividir, multiplicar, simplificar, etc. A més a més, hem fet intervenir factors de conversió per a passar de km a m, d'hores a minuts i de minuts a segons: això permet saber què estem fent en cada pas i no equivocar-nos.

A 10 m/s, la distància recorreguda en el temps t_A = 0,16 s és, segons l'equació (3):

$$Distància = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}16\ \text{s} = 1{,}6\ \text{m} \tag{5}$$

És a dir, el cotxe es desplaçarà uns 2 metres des del moment en què advertim que hem d'accionar el fre fins que el cotxe s'atura. Cal tenir present aquest fet, que és indefugible per més bons reflexos que tinguem. Si el vianant apareix davant del cotxe a menys de 2 m i circulem a 36 km/h o més, no podrem evitar l'atropellament.

Ara podem analitzar la dependència del temps de caiguda del bitllet en funció de la seva longitud.

Activitat 1.3. Un bitllet diferent

a) Comproveu el càlcul de t_A per al bitllet de 10 euros, equació (2).

b) Una persona diu que si el bitllet tingués longitud doble, el temps de caiguda seria doble. És cert això?

Solució

a) Per a un bitllet de 10 euros (*L* = 12,7 cm), obtenim, de l'equació (1):

$$t_A = \sqrt{\frac{2 \times 12{,}7\ \text{cm}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{\frac{2 \times 12{,}7\ \text{cm}}{981\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}} = 0{,}16\ \text{s} \tag{6}$$

Fixem-nos, de nou, que hem hagut de convertir els metres a centímetres i que en la segona arrel hem simplificat cm/cm = 1 i $\sqrt{\text{s}^2} = \text{s}$. Operem amb les unitats de la mateixa manera que amb els nombres.

b) Si el bitllet té llargària doble, *L* = 2 × 12,7 cm, obtenim $t_A = 0{,}226$ s, que no és el doble de temps que en el cas anterior. Doble longitud del bitllet no es tradueix en doble temps de caiguda. En el subapartat 1.6.3 analitzarem en quines condicions es compleix que si la variable independent es duplica, la funció també es duplica.

Variables dependents i independents

En una funció $y = f(x)$, *x* és la variable independent, perquè pot prendre qualsevol valor dins de l'interval de definició de la funció. *y* és la variable dependent, que prendrà els valors que doni la funció *f*(*x*).

1.2.2. Què hem après?

En aquesta discussió hem introduït els termes següents:

- temps de reacció;
- acceleració de la gravetat, *g*;
- equació de moviment.

Per a analitzar els moviments resulta útil conèixer la relació entre l'espai recorregut i el temps que es tarda en recorre'l. Aquesta relació s'anomena *llei o equació de moviment*.

Hem descrit moviments fent servir llenguatges verbals i algebraics (en forma d'equacions). Vegem ara alguns usos del llenguatge gràfic.

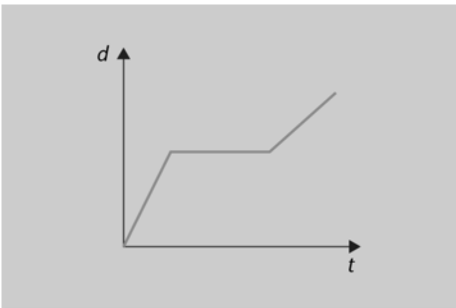
Magnituds

Les equacions relacionen *magnituds*, és a dir, propietats dels objectes o dels processos que es poden mesurar, com ara temps, longitud, velocitat, acceleració, etc.

1.3. Llenguatge gràfic: representacions de moviments

Els fenòmens físics o naturals es poden descriure amb l'ajuda d'esquemes i gràfiques. Les gràfiques representen variacions de determinades magnituds i poden ser qualitatives o quantitatives. En una representació qualitativa es mostren tendències sense necessitat de precisar els valors de les magnituds que s'hi representen. Observeu la figura 2.

Figura 2. Gràfica qualitativa del desplaçament d'un vehicle en funció del temps



La figura 2 és un exemple de gràfica qualitativa del desplaçament d'un vehicle en funció del temps. Indica que el vehicle es desplaça durant un temps, perquè la variable *d* augmenta a mesura que augmenta *t*; a partir d'un instant determinat el vehicle s'atura, és a dir, està en el mateix punt durant un interval de temps, perquè el desplaçament es manté constant i, de sobte, comença a desplaçar-se de nou, a partir del punt en què la recta passa de ser horitzontal a inclinada.

Com veiem en la figura 2, als extrems dels eixos de coordenades se sol dibuixar una fletxa, per tal d'indicar en quin sentit augmenten els valors de les variables.

Les gràfiques també poden ser quantitatives, quan l'abscissa i l'ordenada mostren valors de les magnituds que s'hi representen, com en la figura 3. La gràfica 3 correspon al moviment d'un vehicle que s'atura durant un interval de temps, com en la figura 2. Les transicions suaus entre les tres rectes de la figura 3 són més properes a allò que ocorre en la realitat que no pas els canvis bruscs de la figura 2.

Convé notar que, tot i que solem fer servir uns símbols específics per a referir-nos a magnituds concretes (com ara t per al temps o v per a la velocitat), això no sempre és possible perquè hi ha més magnituds que lletres; sovint, la notació que s'empra varia segons l'autor de la gràfica. Ens hem de fixar sempre en què diu el text o el peu de figura, per a saber de quines magnituds estem parlant. En les figures 2 i 3, per exemple, tant d com D representen un desplaçament.

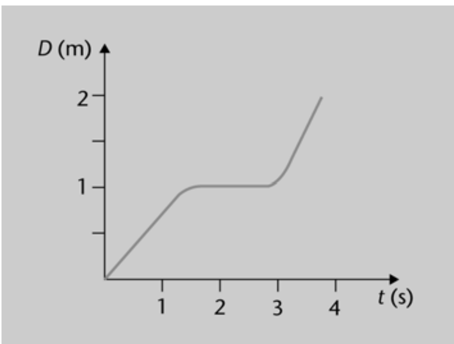
En general, hem de saber què es representa en una gràfica, quines **magnituds**, i quins valors tenen, i en quines **unitats** es mesuren aquestes magnituds.

En qualsevol representació gràfica, qualitativa o quantitativa, és fonamental que especifiquem les magnituds que s'hi representen. En una representació quantitativa hem d'especificar també les unitats en què mesurem les variables.

En la figura 3 el desplaçament es mesura en metres i el temps en segons.

L'anàlisi del moviment descrit per la gràfica de la figura 3 és semblant al de la figura 2, però ara podem especificar els valors de les magnituds: el moviment comença a comptar des de l'instant $t = 0$ i un desplaçament $D = 0$; durant un poc més d'1 s el vehicle ha recorregut al voltant d'1 m; el vehicle s'ha aturat a la distància d'1 m de la posició inicial, aproximadament entre els instants de temps 1,5 s i 3 s, i després s'ha començat a moure de nou i s'ha desplaçat fins a arribar a uns 2 m al cap de 4 s.

Figura 3. Gràfica quantitativa del desplaçament d'un vehicle en funció del temps



El segon tram inclinat de la figura 3 correspon a un moviment més ràpid perquè es recorre la mateixa distància que en el primer tram (aproximadament 1 m) en menys temps (menys d'un segon); el primer tram es fa en més d'un segon. Per tant, la velocitat del vehicle és major quan reinicia el moviment, després d'estar aturat entre $t \approx 1{,}5$ s i $t = 3$ s.

≈, aproximadament

L'expressió:

$t \approx 2{,}5$ s

es llegeix així:

"*t* és aproximadament igual a dos coma cinc segons."

En conclusió, podem dir que en una gràfica desplaçament-temps, **velocitat** i **pendent** de la recta estan relacionades i que una línia horitzontal correspon a una **velocitat nul·la**.

Una recta que té més pendent en una gràfica desplaçament-temps, per a un objecte en moviment, correspon a un moviment de l'objecte a una velocitat més gran. Una recta horitzontal en una gràfica desplaçament-temps correspon a un objecte que està aturat perquè la posició no varia amb el temps.

És molt important per a un enginyer aprendre a interpretar gràfiques. Les gràfiques són representacions de funcions matemàtiques i, a la inversa, una representació gràfica es pot expressar en termes d'una funció matemàtica més o menys complicada. Comencem per les gràfiques de les funcions que permeten descriure els moviments més bàsics.

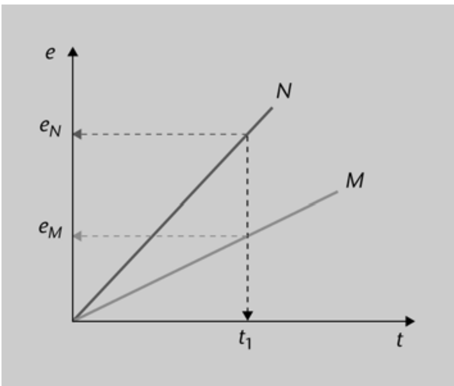
1.3.1. Gràfiques lineals

Per a un vehicle que es mou a la velocitat constant *v*, podem dir que l'espai *e* recorregut pel vehicle en un temps *t* és:

$$e = v \cdot t \tag{7}$$

Si representem qualitativament aquesta equació en uns eixos cartesians, *e*, *t*, obtenim una recta, el pendent de la qual està relacionat amb la velocitat de l'objecte (figura 4).

Figura 4. Gràfica espai-temps per a dos moviments a velocitat constant



En la gràfica de la figura 4 la velocitat de l'objecte en el cas N és major que en el cas M, perquè per a un mateix temps t_1 l'objecte ha recorregut en el cas M menys espai (e_M) que en el cas N (e_N). Com ja havíem vist en la discussió de la figura 3, **pendent i velocitat** estan lligades:

> En una gràfica espai-temps una línia recta indica una velocitat constant i un pendent major de la recta indica una velocitat major.

D'acord amb l'expressió (7), si $t = 0$, $e = v \cdot 0 = 0$. Per això les rectes de la figura 4 passen per l'origen de coordenades; en l'instant $t = 0$ l'espai recorregut és nul, és a dir, que comencem a mesurar els espais recorreguts des d'un instant $t = 0$ que anomenem *instant inicial*.

> L'**instant inicial** és el moment a partir del qual comencem a comptar el temps transcorregut en un moviment.

Posem en pràctica aquestes idees.

Activitat 1.4. Rectes en gràfiques desplaçament-temps

En quin moment es mou més ràpidament l'objecte que es desplaça segons la gràfica de la figura 2?

Solució

El desplaçament del mòbil de la figura 2 es fa a velocitat constant durant un temps perquè la representació $d(t)$ és inicialment una recta que té una inclinació determinada; després d'estar aturat un temps, l'objecte es torna a moure a una velocitat constant però menor, perquè el pendent de la segona recta inclinada és menor que el de la primera.

Les línies rectes són les funcions matemàtiques més senzilles. Recordem-ho.

Sabem que una equació com $e = v \cdot t$ o, en general:

$$y(x) = m \cdot x \tag{8}$$

representa una recta que passa per l'origen i respon a una proporcionalitat directa entre les magnituds y i x, com demostrarem tot seguit. És a dir, si multipliquem la variable independent per una constant c_1, per exemple, obtenim c_1x i la funció es multiplica pel mateix valor c_1:

$$y(c_1x) = c_1 \cdot y(x) \tag{9}$$

La notació $y(c_1x)$ significa que calculem la funció de l'equació (8) substituint-hi x per c_1x. L'expressió (9) es llegeix de la manera següent: "el valor de la funció y en el punt c_1 per x és igual a c_1 pel valor de la funció en x".

Variables, funcions, constants i paràmetres

En una funció $y(x)$ la variable independent, x, pot prendre qualsevol valor. La variable dependent y pren el valor que resulta de calcular la funció per a aquell valor de x.

En l'equació (8) m és un paràmetre, un valor constant per a cada recta, que no depèn de les variables x ni y.

Demostració

En efecte, si substituïm x per c_1x en l'expressió (8) obtenim:

$$y(c_1x) = m \cdot (c_1x) \tag{10}$$

i si tenim en compte que en un producte de diversos factors podem eliminar els parèntesis i reordenar els factors, gràcies a les propietats distributiva i commutativa del producte, obtenim:

$$y(c_1x) = c_1 \cdot (mx) = c_1y(x) \tag{11}$$

Així hem demostrat que l'expressió (9) és correcta.

Les funcions lineals o les representacions gràfiques en forma de línia recta apareixen sovint en ciència i en enginyeria. Les expressions (7) o (8) són matemàticament idèntiques, només hem canviat el nom de les variables dependent i independent.

Una expressió com la (7) o la (8) no serveix per a representar el darrer tram del moviment que s'indica a la figura 2 o la figura 3, perquè la recta corresponent no passa per l'origen. Recordem com es representen analíticament les rectes en la forma més general.

Activitat 1.5. Expressió general d'una recta

a) Si escrivim la funció $y(x)$ següent:

$$y = m \cdot x + n \tag{12}$$

què representen m i n? Són proporcionals les magnituds y i x? (és a dir, si, per exemple, es duplica la magnitud x, es duplicarà també la magnitud y?)

b) I si escrivim la funció $e(t)$ següent:

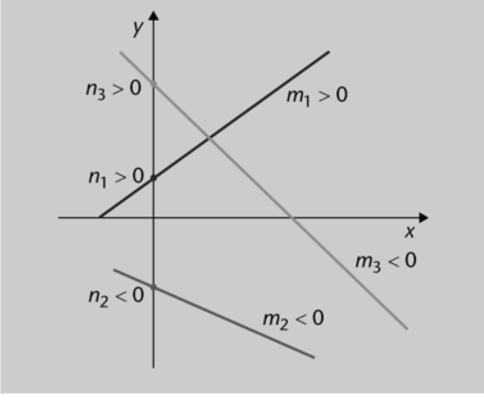
$$e = c \cdot t + d \tag{13}$$

on t és el temps i e la posició d'un vehicle, què representen c i d? Si tripliquem el temps, es triplica la distància recorreguda pels vehicles?

Solució

a) La funció (12) s'anomena funció lineal perquè la seva representació gràfica és una línia recta (figura 5).

Figura 5. Representació de funcions lineals per a valors diferents del pendent i de l'ordenada en l'origen



Pendent i ordenada en l'origen

L'expressió d'una funció lineal:

$$y = m \cdot x + n$$

gràficament representa una recta de pendent m i d'ordenada en l'origen n.

El paràmetre m s'anomena *pendent de la recta* i coincideix amb el valor de la derivada de la funció:

$$dy/dx = m \tag{14}$$

El paràmetre n s'anomena *ordenada en l'origen*, perquè és el valor de la funció $y(x)$ quan $x = 0$:

$$y(0) = m \cdot 0 + n = n \tag{15}$$

Les magnituds y i x no són proporcionals, perquè si per exemple dupliquem el valor de l'abscissa, no es duplica el valor de l'ordenada, $y(2x) \neq y(x)$. En efecte, el doble del valor de la funció per a x val:

$$2y(x) = 2mx + 2n \tag{16}$$

mentre que el valor de la funció per al doble de x és:

$$y(2x) = m(2x) + n = 2mx + n \tag{17}$$

Veiem que els resultats (16) i (17) són diferents, perquè el terme independent és diferent.

b) c és el pendent de la recta; en aquest cas és la velocitat del vehicle.

d és el valor de la posició quan $t = 0$, és a dir, la posició del vehicle en l'"instant inicial".

Les distàncies recorregudes no són proporcionals al temps que ha transcorregut: la distància recorreguda per a un temps $t = t_1$ és:

$$e(t_1) = ct_1 + d \tag{18}$$

i per a un temps $t = 3t_1$:

$$e(3t_1) = 3ct_1 + d \tag{19}$$

que *no* és el triple del valor (18):

$$3 \times e(t_1) = 3(ct_1 + d) = 3ct_1 + 3d \tag{20}$$

Fixeu-vos en el terme independent, $3d$, en l'expressió (20), diferent del valor d de l'equació (19).

Per tant, la presència de la constant n en l'expressió $y = m \cdot x + n$, o de d en $e = c \cdot t + d$, fa que les funcions lineals $y(x)$ o $e(t)$ no representin magnituds proporcionals.

Derivades

La derivada d'una funció $y(x)$ respecte de la variable x s'escriu:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

i la derivada segona s'escriu:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Les mateixes expressions valen per a funcions vectorials.

Vegem un altre exemple de construcció i d'interpretació de gràfiques. Representem en forma qualitativa la tasca analitzada en l'exemple del subapartat 1.1, la persona que puja i baixa l'escala. En termes del recorregut que ha fet la persona en funció del temps, obtindrem una gràfica com la indicada en la figura 6.

Què s'indica en la gràfica quantitativa de la figura 6? Podem veure-hi diverses coses:

1) comencem a comptar el temps i l'espai recorregut des dels valors 0, que corresponen a l'instant en què la persona és al peu de l'escala i l'espai recorregut és nul;

2) a mesura que passa el temps, l'espai recorregut és cada vegada més gran; matemàticament, diríem que la funció espai-temps $e(t)$ és monòtona creixent;

Funció monòtona

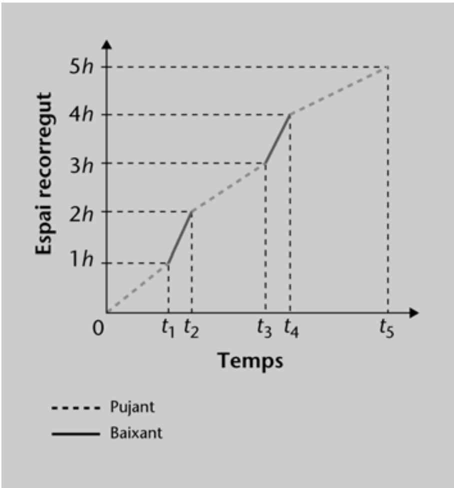
Diem que una funció és monòtona *creixent* quan per a valors creixents de la variable independent, la variable dependent també creix.

Però si $y(x)$ sempre decreix per a x creixents, la funció és monòtona *decreixent*.

3) els trams rectes de la gràfica tenen pendents diferents i, per tant, el moviment es fa a velocitats diferents;

4) els canvis de pendent sempre ocorren per als mateixos valors d'increment de distància recorreguda, i corresponen a la longitud h de l'escala;

Figura 6. Distància recorreguda per una persona que puja i baixa una escala, de longitud h, en funció del temps



5) els intervals de temps necessaris per a recórrer la mateixa longitud d'escala són diferents; per exemple, el temps t_1 que ha necessitat la persona per a pujar l'escala la primera vegada és major que el temps que ha trigat a baixar la primera vegada ($t_2 – t_1$); el segon temps de pujada ($t_3 – t_2$) és major que el temps que ha trigat la primera vegada, t_1;

6) a mesura que passa el temps, els trams de pujada es fan en més temps.

Aquestes observacions s'han d'explicar. Vegem com podem fer-ho.

Activitat 1.6. Interpretació de gràfiques

a) Com podem interpretar el que diu el punt 4 de la llista anterior?

b) Expliqueu les observacions 5 i 6 de la llista anterior.

Solució

a) Podem interpretar els canvis de pendent com els punts en què la persona és a baix o a dalt de l'escala.

b) El que diu el punt 5 és d'esperar, perquè baixar les escales sense dur pes a les mans sol fer-se més ràpidament que pujar-les amb un pes a les mans.

El mateix ocorre amb el punt 6 perquè, pel motiu que acabem de dir, les velocitats de pujada són menors que les de baixada. Com que probablement la persona s'està cansant, l'interval de temps que dura la tercera pujada, $t_5 – t_4$, és més llarg que l'interval de temps que dura la segona, $t_3 – t_2$, i aquest és més llarg que el temps que dura la primera pujada, t_1.

En la gràfica qualitativa de la figura 6 s'ha suposat, per a simplificar-la, que la persona puja i baixa l'escala a una velocitat constant i per això hi apareixen línies rectes en la gràfica desplaçament-temps. Aquesta és una simplificació perquè el moviment descrit és bastant més complicat: l'existència dels graons, per exemple, fa que no estiguem pujant l'escala de manera continuada sinó a cops.

En general, les gràfiques de moviments no sempre contenen només trams lineals. Vegem-ne un exemple.

Activitat 1.7. Descripció d'un moviment més complicat

Expliqueu quin tipus de moviment es representa qualitativament en la gràfica de la figura 6. En ordenades es representa la posició d'un objecte que es mou en línia recta. La posició en cada instant es mesura respecte al punt en què comença el moviment.

Quin tipus de funcions senzilles podrien descriure la part ascendent i la part descendent de la gràfica?

Figura 7. Gràfica posició-temps per al moviment d'un objecte al llarg d'una línia recta

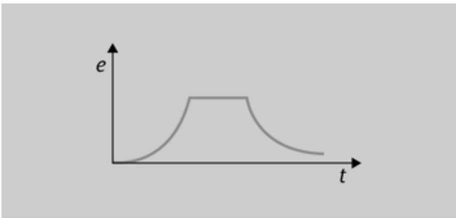


Figura 7

En la figura 7 es representen distàncies a un punt sobre una recta. Habitualment es designa la posició de l'objecte amb la lletra *x*, mesurada sobre una recta però, com s'ha dit abans, podem fer servir qualsevol símbol sempre que el definim explícitament.

Solució

El moviment que es representa la figura 7 és més complicat que el dels casos analitzats fins ara. Es compon d'una corba creixent que comença en $e = 0$; al cap d'un temps el desplaçament es manté constant fins que, finalment, es produeix un retrocés que no acaba en el punt de partida, $e = 0$.

Es tracta d'un moviment que s'inicia en un punt i es produeix a velocitat variable, no constant, fins que en arribar a un punt, l'objecte s'atura. Al cap d'un temps d'estar aturat, l'objecte s'acosta de nou a l'origen a una velocitat no constant; per això la posició de l'objecte pren valors cada vegada més propers a l'inicial, $e = 0$.

El mòbil està en repòs en el tram horitzontal de la gràfica. La part creixent podria ser una funció potencial (per exemple tipus, $e = a \cdot t^2$) i la decreixent una de tipus potencial d'exponent negatiu, com ara $e = bt^{-n}$; la pujada i la baixada també podrien ser funcions exponencials e^{ct}, e^{-dt}. En els dos casos correspon a moviments fets a velocitats variables, no constants.

1.3.2. Què hem après?

- És molt important per a l'enginyer saber fer i saber interpretar gràfiques. Interpretar gràfiques és un procés complicat que s'aprèn amb la pràctica.
- Habitualment simplifiquem els processos que volem estudiar i, si convé, després els podem sofisticar gradualment (per exemple, en el moviment per una escala podem tenir en compte els graons).
- Una gràfica lineal que passa per l'origen correspon a una proporcionalitat directa entre les magnituds que s'hi representen.
- El pendent de la recta $e(t)$ (espai recorregut en funció del temps) dóna la velocitat de l'objecte.

Ja hem vist diversos llenguatges que podem fer servir per a descriure els moviments: el llenguatge verbal, el gràfic i l'algebraic. Però, quants tipus de moviment hi ha?

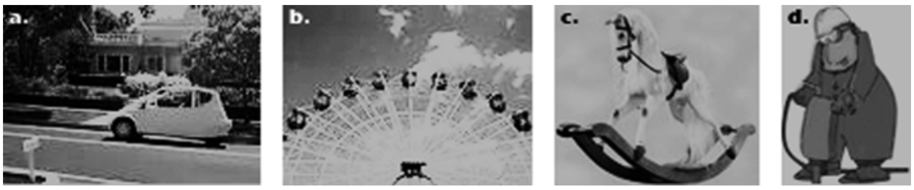
1.4. Tipus de moviments

Si ens fixem en els moviments que podem fer o els que podem observar en el nostre entorn, com ara caminar, volar, córrer, viatjar en algun vehicle, els diversos tipus de moviments que es fan en les atraccions d'un parc, el batec d'ales d'una au, etc., veurem que tots són d'un dels tres tipus següents, o bé una combinació d'ells:

1) Translacions
2) Rotacions
3) Vibracions

En la figura 8 veiem alguns exemples quotidians de moviments de translació (un vehicle que es desplaça), de rotació (una roda de fira) i de vibració o oscil·lació (un cavallet o un trepant).

Figura 8. Exemples de moviments bàsics



a. translació, **b.** rotació i **c.** i **d.** oscil·lació o vibració.

En una *translació* ens desplacem d'un punt de l'espai a un altre. El moviment de translació és ben habitual, i pot ser en línia recta o no i per la superfície de la Terra o en l'espai o en la mar.

Les *rotacions* són presents en moltes atraccions de fira (els cavallets, la roda gran, etc.) o en el moviment dels astres (el Sol, la Terra, la Lluna, etc.); el gir de la Terra sobre ella mateixa ens dóna el dia i la nit, i la rotació de la Terra al voltant del Sol i la inclinació de l'eix de rotació de la Terra ens dóna les estacions. De vegades fem girs parcials, com quan anem en bicicleta i doblem un cantó entre dos carrers.

I, finalment, hi ha *moviments cíclics* en què no hi ha desplaçaments arbitraris ni es fan cercles: és el moviment de vaivé de, per exemple, els troncs dels arbres o dels gratacels quan fa vent, el moviment pendular d'un rellotge antic o les oscil·lacions que fa un vehicle en moviment gràcies als amortidors. En aquests casos, l'objecte es mou a un costat i a un altre d'una posició inicial, sense que hi hagi translació ni rotació.

En un moviment de **translació** la partícula se separa del punt de partida i fa un recorregut qualsevol.

En un moviment de **rotació** la partícula fa voltes al voltant d'un punt central.

En un moviment de **vibració** o d'**oscil·lació** la partícula fa moviments repetitius de vaivé.

Tot es mou en la natura, tant a la nostra escala macroscòpica com a l'escala del microcosmos: les molècules vibren i fan rotacions, tant en els sòlids com en els gasos i els líquids, i es desplacen (si no estan en un medi sòlid).

1.4.1. Moviments en una o més dimensions

Una altra manera de classificar els moviments és segons el nombre de variables amb què els podem determinar. Per tal de descriure quantitativament els moviments hem de saber quantes variables caldrà fer servir en cada cas, a més de la variable temps. Imaginem un vehicle que:

a) Es mou en línia recta per una carretera.
b) Es mou per una carretera plena de revolts.
c) Entra en un ferri i el porten a una illa.
d) Entra en un avió i el porten a un altre lloc.

Quantes variables (a més del temps) necessitem per a:

1) Saber quina distància ha recorregut el vehicle fins a un instant determinat?
2) Poder localitzar el vehicle en cada instant (conèixer-ne la posició)?

Les dues preguntes anteriors són diferents i tenen respostes ben diferents, com veiem en la taula 1.

Taula 1. Nombre de variables necessàries per a descriure distàncies o posicions en les situacions *a*, *b*, *c* i *d* esmentades en el text

	Nombre de variables	
	Distància	**Posició**
a)	1	1
b)	1	2
c)	1	2
d)	1	3

Vegem per què! Primer haurem de parlar de com localitzem els punts per on passa l'objecte que es mou.

Activitat 1.8. Variables per a la localització d'un objecte

Quantes variables necessitem per a localitzar un punt en l'espai, en un pla o sobre una línia?

Solució

La determinació de la posició d'un punt en l'espai requereix 3 variables, les tres coordenades del vector de posició (figura 9):

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{21}$$

on $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ són tres vectors unitaris en la direcció dels tres eixos cartesians.

El vector de posició d'un punt *P* és el vector que uneix l'origen de coordenades amb aquest punt de l'espai. Per a saber-ne les coordenades, (*x,y,z*), projectem el punt *P* sobre l'eix *Z* i sobre el punt *P'* del pla *XY*, i després tornem a projectar P' sobre els eixos *X* i *Y*.

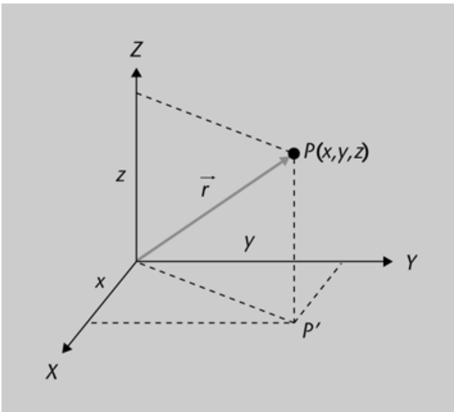
Quan la partícula es mou per l'espai, les coordenades del punt on és en cada instant de temps *t* són funció del temps i escrivim:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{22}$$

i anàlogament per a les tres components del vector de posició $\vec{r}$:

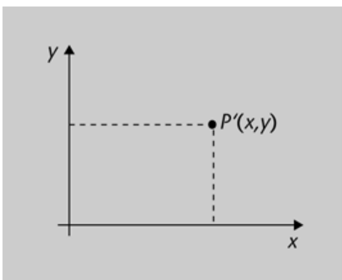
$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \tag{23}$$

Figura 9. Les tres coordenades cartesianes d'un punt en l'espai tridimensional.



La determinació de la posició d'un punt en un pla requereix 2 variables (figura 10); per exemple, si fem servir coordenades cartesianes, un punt com *P'* es descriu amb l'abscissa i l'ordenada corresponent: *P'*(*x*,*y*). El punt *P'* de la figura 10 pot ser el punt *P'* de la figura 9, és a dir, la projecció d'un punt P de l'espai sobre el pla XY.

Figura 10. Les coordenades cartesianes d'un punt *P'* en un pla són dues, *x* i *y*



Magnituds escalars i vectorials

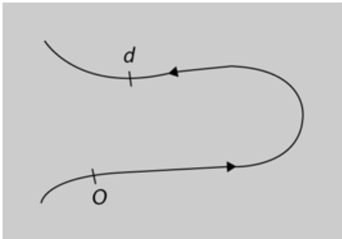
Recordem que quan una magnitud, com ara el temps, es pot determinar amb un sol nombre diem que és una magnitud *escalar*, i quan necessitem tres variables per a poder-la determinar parlem d'una magnitud vectorial.

Representació de vectors

Els vectors, com ara el vector de posició, es representen habitualment en negreta, **r** o amb una fletxa, $\vec{r}$. Aquest segon conveni és el que seguirem en aquest curs.

La determinació de la posició d'un punt sobre una línia (que no té per què ser recta!) requereix només 1 variable. Podem donar, per exemple, la distància mesurada sobre la *trajectòria* de l'objecte que es mou, és a dir, sobre la línia imaginària que segueix el vehicle (figura 11). Aquesta distància es mesura respecte a un punt concret, que prenem com a origen.

Figura 11



Com a cas particular, si el moviment d'un objecte és al llarg d'una recta, com l'eix X, la posició instantània de l'objecte la dóna la funció $x(t)$. Només necessitem una variable de posició.

Trajectòria

Anomenem *trajectòria* d'un punt que es desplaça a la línia imaginària per la qual passa durant el seu moviment.

Figura 11

Amb una variable, *d*, podem determinar la posició d'un punt que es mou per una corba, que és la trajectòria del moviment. La distància *d* es mesura sobre la trajectòria, i des de l'origen *O*.

Es parla de moviments unidimensionals, bidimensionals i tridimensionals.

Segons el nombre de variables que necessitem per a localitzar un objecte que es mou, parlem de moviments en una, dues o tres dimensions, respectivament.

Així, són moviments:

- En una dimensió: el moviment d'un objecte sobre una recta.
- En dues dimensions: el moviment d'un objecte sobre un pla, sobre una esfera o sobre un cercle, per exemple.
- En tres dimensions: el moviment d'un objecte en l'espai; per exemple el d'un avió.

Per a representar els moviments es fan servir diversos sistemes de coordenades, a banda de les coordenades cartesianes: les coordenades polars, les esfèriques, les cilíndriques, etc. Cada sistema de coordenades concret és més adequat per a descriure moviments o processos que ocorren sobre geometries particulars (un pla, una esfera, etc.).

Comptaquilòmetres

El comptaquilòmetres mesura els quilòmetres que hem fet des que vam comprar el vehicle (o des que vam posar el comptaquilòmetres a zero).

I ara ja podem explicar els valors de la taula 1.

Velocímetre

El velocímetre mesura el nombre de km/h a què viatgem en cada moment.

Activitat 1.9. Dimensions del moviment

Expliqueu els valors del nombre de variables que necessitem per a descriure distàncies i posicions en els moviments indicats en la taula 1.

Solució

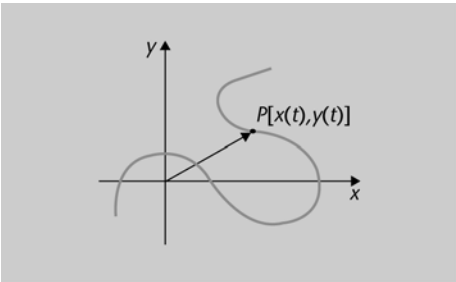
La columna "distància" de la taula 1 sempre té el valor 1 perquè amb una sola variable podem determinar la distància que ha recorregut un vehicle al llarg de la seva trajectòria, faci el recorregut que faci. És el que ocorre, per exemple, amb el comptaquilòmetres, quan és el mateix vehicle el que viatja; si el transporten en tren o en vaixell, per exemple, cal mirar el comptaquilòmetres del mitjà de transport per a saber la distància que ha recorregut el vehicle.

Pel que fa a les variables necessàries per a determinar la posició del vehicle que es mou...

- ... en línia recta cal una variable, per exemple la posició x sobre l'eix X;
- ... per una carretera es necessiten dues variables (longitud i latitud, com les que proporciona un GPS, o les posicions x i y en uns eixos cartesians bidimensionals);
- ... pel mar calen dues variables, com en el cas anterior;
- ... per l'aire necessitem tres variables, perquè a les dues variables dels dos casos anteriors cal afegir l'altura. Poden ser les tres variables x, y, z d'uns eixos cartesians tridimensionals en l'espai (figura 9).

Quan l'objecte es mou, les coordenades del punt que en descriuen la localització són funció del temps. Per exemple, un moviment bidimensional es pot representar amb dues funcions del temps, $x(t)$ i $y(t)$, que són les coordenades cartesianes del punt que permet localitzar en cada instant l'objecte que s'hi mou (figura 12).

Figura 12. Posició de la partícula sobre una trajectòria que es fa en dues dimensions (moviment en un pla)



1.4.2. Què hem après?

- La complexitat dels moviments de la natura es pot reduir a tres tipus bàsics: translacions, rotacions i vibracions.

- Els moviments són sobre una línia, sobre una superfície qualsevol, en particular un pla, o en l'espai, i parlem de moviments en una, dues o tres dimensions, respectivament.

Hem discutit alguns exemples de moviments més o menys senzills. Un exemple de moviment complicat és el d'un vagó per una muntanya russa. El discutirem breument i l'aprofitarem per a introduir l'eina anomenada *simulació per ordinador* i els conceptes de condicions inicials i paràmetres d'un moviment qualsevol.

1.5. Exemple. La muntanya russa

Hi ha muntanyes russes que tenen revolts i moviments molt complicats en l'espai, en 3 dimensions, com ara el Dragon Khan de Port Aventura (figura 13).

Figura 13. Muntanya russa (Dragon Khan de Port Aventura)

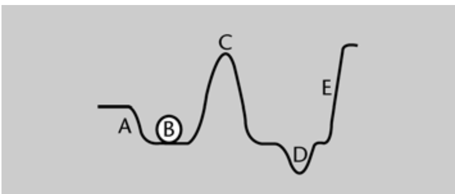
Font: http://es.wikipedia.org/

Si hom vol estudiar el moviment del vagó per la muntanya russa, en lloc de començar amb una situació tan complicada com la de la figura 13, pot seguir un mètode de la ciència que sol donar bons resultats: començar per problemes senzills que ajudin a entendre la situació més complicada. Es podria analitzar, per exemple, un model més senzill de muntanya russa, com el de la figura 15, en què el moviment ocorre en un sol pla, i que ens permetria també discutir els tipus de moviments bàsics que hem descrit en el subapartat anterior, 1.4. Fem-ho breument.

Activitat 1.10. Moviments en una muntanya russa

Si un vagó es mou per la muntanya russa de la figura 14 podem observar els tres tipus de moviments bàsics que hem esmentat en el subapartat 1.4: translacions, rotacions i vibracions. On s'hi poden veure?

Figura 14. Un model de muntanya russa en un pla (moviment en dues dimensions)



Solució

La muntanya russa té un pendent de caiguda inicial, A, un cercle, B, un turó, C, un pou, D, i una pujada final, E. El moviment de translació ocorre en la major part de la trajectòria; aquest moviment pot ser uniforme, en trams plans horitzontals, i també accelerat, en caigudes i pujades amb un augment o una reducció de la velocitat (és a dir, amb acceleració).

Hi veiem rotacions en el cercle B, rotacions parcials respecte a un centre de curvatura en remuntar el turó C i en el pou D. Fins i tot, si el vagó queda atrapat en el pou D, sense poderne sortir, pot descriure un moviment oscil·latori al voltant del punt més baix del pou.

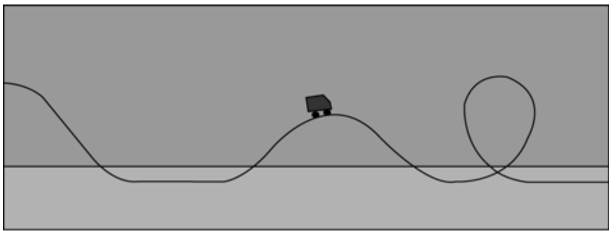
Tot i haver vist un cas molt senzill, val a dir que avui dia hi ha eines molt útils que pot fer servir un enginyer per a resoldre problemes de mecànica: les simulacions de processos per ordinador.

1.5.1. Simulacions per ordinador

El model de muntanya russa de la figura 14 és molt més senzill que el Dragon Khan, però l'estudi detallat del moviment que pot donar-s'hi pot ser complicat. De vegades costa imaginar què passaria si, per exemple, hi poséssim turons o cercles de dimensions diferents. Per a fer aquestes proves es poden fer servir simulacions per ordinador.

Una simulació per ordinador d'un procés físic és una recreació en la pantalla d'un ordinador dels trets essencials que descriuen el procés. Les simulacions són una eina d'estudi i de treball molt potent. Podeu fer una recerca en Internet amb termes com ara *simulation roller coaster* (simulacions muntanya russa) i trobareu, per exemple, una simulació molt completa de muntanya russa (http://www.download-free-games.com/simulation/rollercoaster_tycoon2.htm), o la simulació molt simplificada que mostra la figura 15, i que és molt didàctica. Amb simulacions com aquestes, i moltes altres que podeu trobar a Internet sobre temes de cinemàtica i de dinàmica, podeu treballar molts dels conceptes que estudiareu aquest curs.

Figura 15. Pantalla d'una simulació per ordinador d'una muntanya russa senzilla. Es poden modificar els paràmetres i estudiar-ne els efectes sobre el moviment



http://www.funderstanding.com/coaster

Activitat 1.11 (opcional). Simulacions

La simulació per ordinador referida en la figura 15 conté els moviments bàsics d'una muntanya russa. Si teniu temps, aneu a la pàgina d'Internet que s'hi esmenta i observeu els continguts i funcionament de la simulació.

Solució

Podeu modificar diversos paràmetres de la simulació, com ara la velocitat inicial del vagó, l'altura del turó, el radi del cercle, etc.

Per exemple, per a uns determinats valors dels paràmetres, el vagó pot sortir volant, perquè no pot mantenir-se sobre la trajectòria que defineix la muntanya russa. Podeu veure-ho si augmenteu la velocitat inicial o reduïu l'altura del turó, per exemple.

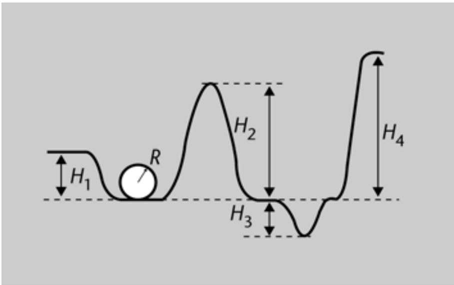
Malauradament no tenim temps d'endinsar-nos en el món de les simulacions de processos per ordinador.

En qualsevol cas, tant en els moviments reals com en els descrits mitjançant simulacions per ordinador s'han de tenir en compte les condicions inicials dels moviments i els paràmetres que els determinen.

1.5.2. Condicions inicials i paràmetres

La descripció completa d'un moviment inclou, habitualment, les condicions de partida, allò que s'anomena les condicions inicials del moviment. Per exemple, la posició i la velocitat inicials de l'objecte que s'hi mou. L'instant inicial sol ser l'instant $t = 0$.

Figura 16. Paràmetres en el model bidimensional de muntanya russa de la figura 14



Un altre concepte útil en l'anàlisi de moviments és el de *paràmetres* del problema. Els paràmetres són valors de determinades magnituds del moviment que es mantenen fixos per a un cas concret, però que varien d'un cas a un altre. Per exemple, si un vol estudiar quina és la màxima velocitat a què es pot prendre una revolta a una velocitat determinada sense bolcar, el radi de la corba de la carretera seria un paràmetre. Per al cas de la muntanya russa de la figura 14 hem marcat en la figura 16 alguns paràmetres: altures dels turons (H_1, H_2 i H_4), radi del cercle (R) i profunditat del pou (H_3). Però podrien haver-ne estat més, com ara la longitud dels trams horitzontals, la curvatura del cim del turó o la massa del carret.

En la simulació de la figura 15 podem modificar alguns paràmetres bàsics, com ara les altures dels turons i el radi del cercle i, així, podem investigar quin tipus de moviment s'esdevé en cada cas.

1.5.3. Què hem après?

- Les simulacions per ordinador són eines útils per a analitzar moviments complicats.

- En cada moviment particular, a banda de les variables posició i temps que defineixen la trajectòria, podem parlar de les condicions inicials del moviment i, en alguns problemes, dels paràmetres del moviment.

Amb les discussions que hem fet fins ara sobre moviments ja estem en condicions de formalitzar els conceptes bàsics que ens permetran caracteritzar-los. Això ho farem en el proper apartat.Ací recordarem breument alguns conceptes elementals de matemàtiques que ens seran necessaris.

1.6. Valors mitjans, quocients, proporcionalitats

Abans d'entrar en la formalització dels conceptes que fem servir per tal de descriure els moviments dels objectes, repassarem alguns conceptes matemàtics bàsics i, alhora, molt útils en aquest curs: el significat del valor mitjà, dels quocients i de la proporcionalitat.

1.6.1. Valors mitjans

Un vehicle en moviment té una determinada velocitat en cada instant, que pot ser o no constant. Parlem de vegades de velocitat mitjana del vehicle. Esbrinem què volem dir amb aquest concepte.

Un vehicle que va a una velocitat constant de 36 km/h recorre en 3 h una distància de 108 km perquè:

$$Distància = Velocitat \times Temps = 36 \text{ km/h} \times 3 \text{ h} \quad (24)$$

Però un vehicle habitualment no va a velocitat constant: s'atura, accelera, frena, etc. Si la velocitat *mitjana* durant 3 h d'un vehicle que té diferents velocitats en diferents moments, fóra també de 36 km/h, quin espai hauria recorregut durant 3 h? La resposta és que recorre també 108 km.

El concepte de valor mitjà és molt utilitzat en la ciència i en l'enginyeria, i en altres camps, com ara la sociologia, l'economia, etc. Per exemple, què vol dir que la mitjana de fills per parella catalana és d'1,2? O què vol dir que la mitjana de les qualificacions d'un alumne és 7,3? O que la velocitat mitjana d'un vehicle és de 72 km/h?

No és correcta la resposta típica següent: "El valor mitjà d'un conjunt de valors és la suma de valors dividida pel nombre d'aquests". Això és el procediment per a calcular el valor mitjà d'un conjunt de valors numèrics, és la *definició operativa*, però no és la definició de la magnitud ni ens en dóna el significat ni la utilitat.

Fixem-nos que el valor mitjà d'una magnitud no té perquè ser un valor del conjunt de valors de la magnitud. Cap família no té 1,2 fills, ni és necessari que la qualificació 7,3 figuri entre les qualificacions d'un alumne, que poden ben bé ser valors com ara 5, 6,5, 7,5, 9, etc., i no n'hi hagi cap de 7,3.

Penseu en la definició següent: "El valor mitjà d'un conjunt de valors d'una magnitud és un nombre que permet caracteritzar el conjunt, i és el valor que tindria cada element del conjunt si tots tinguessin el mateix valor numèric".

D'aquesta definició podem extraure que el **valor mitjà** és un valor que permet caracteritzar un conjunt, i que el significat que té és el d'assignar un mateix valor a tots els elements del conjunt.

O sigui, el valor mitjà és el resultat de distribuir per igual el valor total de la magnitud entre els elements del conjunt.

Com a exemple del significat de valor mitjà que acabem de donar tornem al vehicle en moviment. Un vehicle pot tenir una velocitat mitjana de 100 km/h, per exemple, i la velocitat en cada instant, que s'anomena *velocitat instantània*, pot ser 0 km/h (quan està parat), 92 km/h, 117 km/h, etc. Si aquest vehicle viatja 2 h a la velocitat mitjana de 100 km/h recorrerà 200 km en 2 h, i aquesta seria la mateixa distància que recorreria si sempre viatgés a 100 km/h, és a dir, si assignem un valor a la magnitud velocitat que sigui idèntic en tot moment.

Fem un altre exemple.

Activitat 1.12. Repartiments

En una família, un membre es menja un pollastre i els altres tres membres no en mengen cap. Quin és el tant per cent de pollastre que menja cada membre de la família, de mitjana? Què significa el resultat que obteniu?

Solució

Cada membre menja, de mitjana, un 25% del pollastre:

$$\frac{1 \text{ pollastre}}{4 \text{ persones}} = 0,25 \frac{\text{pollastre}}{\text{persona}} \tag{25}$$

I expressem el resultat en tant per cent multiplicant numerador i denominador per 100:

$$0,25 = \frac{0,25}{100}100 = \frac{25}{100} = 25\% \tag{26}$$

Si els quatre membres de la família haguessin menjat la mateixa quantitat de pollastre, cadascun d'ells n'hauria menjat 1/4 (un 25%).

En conclusió, per a cada **magnitud** que representa un concepte cal distingir entre la seva definició, el significat que té, i la definició operativa, o sigui, la manera de calcular-la o mesurar-la.

Per exemple, quan hem definit el concepte de valor mitjà, n'hem donat el significat i hem esmentat com es calcula. El mateix podem dir de qualsevol magnitud científica: hem d'aprendre'n la definició, el seu significat i la manera de calcular-la.

El càlcul d'un valor mitjà implica fer una divisió. Repassem ara el concepte de divisió, que apareix també en la definició de moltes magnituds físiques.

1.6.2. Relacions entre variables: quocients

En ciències i en enginyeria es defineixen moltes magnituds com a quocients i, per tant, convé que tinguem clar què és una divisió. Acabem de veure'n exemples: la velocitat mitjana o el tant per cent mitjà de pollastre que menja cada membre d'una família es calcula mitjançant una divisió.

Potser recordeu que ens deien de petits que "dividir és repartir". Això té sentit en alguns casos, per exemple si tenim 8 regals que volem repartir entre 4 criatures. Si fem el quocient següent:

$$\frac{8 \text{ regals}}{4 \text{ criatures}} = 2\frac{\text{regals}}{\text{criatura}} \tag{27}$$

el resultat de la divisió és que corresponen "2 regals per (unitat de) criatura". Tanmateix, si ara fem la divisió a l'inrevés, obtenim mitja criatura per cada regal:

$$\frac{4 \text{ criatures}}{8 \text{ regals}} = 0{,}5\frac{\text{criatures}}{\text{regal}} \tag{28}$$

El resultat, potser, us sorprèn: no pot haver mitja criatura! Veiem que quan fem una divisió no sempre estem "repartint". Tanmateix, la divisió entre les dues magnituds, sigui criatures dividit per regals, o regals dividit per criatures, dóna el mateix resultat en termes de criatures i regals: si tenim en el segon cas 0,5 criatures/regal i volem saber què correspon a cada criatura (no a cada regal!), multipliquem numerador i denominador del resultat (28) per 2 i obtenim:

$$0{,}5\frac{\text{criatures}}{\text{regal}} = \frac{2 \times 0{,}5 \times \text{criatures}}{2 \times \text{regal}} = \frac{1 \text{ criatures}}{2 \text{ regals}} \tag{29}$$

és a dir, 1 criatura per cada 2 regals, cosa que ja sabem: a cada criatura li corresponen dos regals.

La conclusió que traiem d'aquest exemple és que una divisió entre dues magnituds qualsevol A i B:

$$\frac{A}{B} \tag{30}$$

dóna la quantitat d'A que correspon a la unitat de B. Aquest és el sentit general d'una divisió, i que cal tenir ben present:

> En fer un quocient entre dues magnituds obtenim quant de la magnitud del numerador correspon a cada unitat de la magnitud del denominador.

Practiquem el significat de les divisions.

Activitat 1.13. Exemples de quocients

Interpreteu els quocients següents i doneu-li nom a la magnitud que obtingueu, si el coneixeu:

a) $\dfrac{3/5}{4/9}$ (31)

b) $\dfrac{F}{m}$ (on F és una força i m una massa) (32)

c) $\dfrac{F}{q}$ (on F és una força i q una càrrega elèctrica) (33)

d) $\dfrac{8\text{ EUR}}{4\text{ kg}}$ (34)

e) $d = \dfrac{m}{V}$ (on m és una massa i V un volum) (35)

f) $p = \dfrac{F}{S}$ (on F és una força i S una superfície perpendicular a la força) (36)

g) $\dfrac{12\,\text{cm}}{4\,\text{cm}}$ (37)

Solució

a) És la quantitat del numerador (de la magnitud de la qual tenim 3/5) que correspondria a una unitat de la magnitud del denominador (de la qual en tenim 4/9). Resulta:

$$\frac{3/5}{4/9} = \frac{27}{20} = \frac{27/20}{1} \tag{38}$$

Corresponen vint-i-set vintens (de la magnitud) del numerador a cada unitat (de la magnitud) del denominador.

b) Veureu en l'apartat 3 que es tracta de la magnitud *acceleració*, o força que actua per unitat de massa.

c) Veureu en la segona part del curs que es tracta de la magnitud *intensitat del camp elèctric*, o força que actua per unitat de càrrega elèctrica.

d) El quocient és el preu, o valor en euros, per cada quilogram.

e) La magnitud *densitat* és la massa que té la unitat de volum.

f) La magnitud *pressió* es defineix com la força que actua per unitat de superfície perpendicular a la direcció de la força.

g) El quocient dóna 3, el nombre de vegades que la magnitud del numerador conté la unitat de la magnitud del denominador: en 12 cm hi cap 3 vegades la longitud 4 cm.

El darrer és un exemple de quocient de magnituds *homogènies*, és a dir, de magnituds que es mesuren en les mateixes unitats. Diem que les dues magnituds tenen les mateixes dimensions o que són commensurables.

Com veieu, en tots els exemples anteriors, quan calculem el quocient de dues magnituds obtenim una magnitud nova, que té unitats i un significat ben diferent de les magnituds que dividim. Per exemple, en el cas d) anterior el resultat de dividir cost i massa és allò que anomenem *preu* (o preu unitari), i que mesurem en EUR/kg. Aquesta magnitud és ben diferent de la magnitud massa (que mesurem en kg) i de la magnitud cost (que mesurem en euros).

Així, sobre la **divisió *A*/*B*** podem dir que el resultat de dividir *A* per *B*, *A*/*B*, és tant de *A* per unitat de *B*.

I la magnitud resultant de la divisió té **unitats**: les unitats de la magnitud quocient són el resultat de dividir les unitats de les magnituds *A* i *B*.

Alguns quocients entre dues magnituds tenen la propietat particular que el resultat numèric que obtenim és independent del valor concret que tinguin les magnituds que dividim; això indica que hi ha una relació especial entre aquestes magnituds, anomenada de proporcionalitat directa. Tot seguit recordarem aquest concepte.

1.6.3. Proporcionalitats

Parlem ara de proporcionalitats, un altre concepte molt útil en el món de la ciència i l'enginyeria. L'hem trobat en discutir el significat geomètric de rectes que passen per l'origen (figura 4). Com ja hem vist, si un vehicle circula a la velocitat constant de 36 km/h o a una velocitat mitjana de 36 km/h durant 3 hores, aleshores el recorregut *d* que farà el vehicle en aquest interval de temps, és:

$$Distància = v \cdot t = 36 \frac{\text{km}}{\cancel{\text{h}}} \times 3\ \cancel{\text{h}} = 108\ \text{km} \qquad (39)$$

Recordeu que, com ja hem dit en la solució de l'activitat 1.3, hem d'operar amb les magnituds i les seves unitats de la mateixa manera que amb les xifres: la unitat "hora" de numerador i denominador de l'expressió anterior se simplifica i desapareix del resultat.

Si ara dupliquem el temps en què es mou el vehicle, 2×3 h = 6 h, i aquest continua a la mateixa velocitat constant, l'espai recorregut també es duplica i farà 2×108 km = 216 km. Això ocorre perquè, si la velocitat és constant, l'espai recorregut i el temps que dura el moviment són *proporcionals*; simbòlicament:

$$Distància \propto t \qquad (40)$$

o bé, si introduïm la constant de proporcionalitat, que en aquest cas és la magnitud que anomenem velocitat, escriurem:

$$d = v \cdot t \qquad (41)$$

Aquesta expressió és la mateixa que hem escrit abans, equació 3.

Símbol de proporcionalitat, $\propto$

$a \propto b$

significa que la magnitud *a* és proporcional a la magnitud *b*, és a dir, que el quocient *a*/*b* és constant.

Fixeu-vos que quan diem que *d/t* és constant volem dir que el resultat de la divisió, v, no depèn de les magnituds que dividim d i t.

L'equació (41) ens diu que hi ha proporcionalitat directa entre l'espai recorregut i el temps que s'ha trigat a fer-lo. Això no passa amb el bitllet que cau (vegeu el subapartat 1.2 i l'activitat 1.3): la longitud de l'objecte que cau i el temps que triga a caure *no* són proporcionals. Si agafem un bitllet més gran, per exemple un bitllet imaginari (o un tros de cartró) que mesuri el doble que el bitllet de 10 euros, 25,4 cm, el temps que trigaria a caure entre els dits d'una persona no seria el doble que el temps que triga a caure un sol bitllet, sinó només un 41% més de temps. Aquest càlcul ja l'hem fet en l'activitat 1.3, a partir de la relació (1):

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} \tag{42}$$

Analitzem aquest exemple.

Activitat 1.14. Manca de proporcionalitat

Feu una gràfica del temps de caiguda, equació (42), en funció de la longitud del bitllet. Per a simplificar els càlculs, suposeu que la relació és:

$$t\ (\mathrm{s}) = 0{,}1\sqrt{L\ (\mathrm{cm})} \tag{43}$$

Feu una taula per a uns pocs valors de L i la gràfica corresponent. Surt una funció lineal, és a dir, una recta?

Fixeu-vos en l'equació (43): quan escrivim t(s) o L(cm) és una manera d'indicar en quines unitats s'han de mesurar les magnituds, sense haver d'especificar les unitats en què es mesuren els coeficients numèrics que tingui l'expressió, com ara el factor 0,1, perquè les unitats en què ve donat aquest factor es poden decidir del context. Quines unitats són?

Solució

Si substituïm en l'equació (42) el valor de g = 9,81 m/s^2 = 981 cm/s^2, obtenim:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot L}{981\ \mathrm{cm/s^2}}} \tag{44}$$

Si suposeu que la longitud del bitllet la donarem en cm, i això ho indiquem amb els símbols L(cm), i calculem els factors numèrics, obtenim:

$$t = 0{,}045\sqrt{L\ (\mathrm{cm})} \tag{45}$$

En l'expressió anterior, les unitats en què es mesura el factor numèric 0,045 són segons partit per l'arrel de cm. S'han obtingut de calcular l'arrel quadrada del quocient d'unitats de $2/g$.

Farem servir l'expressió (43) en lloc de la (45) per tal de treballar amb nombres més senzills.

Per fer una taula i la gràfica de la funció $t(L)$ hem de donar valors a la variable L. En principi, la fórmula matemàtica (43) val per a qualsevol valor de L, sigui gran o petit, sempre que no sigui negatiu. Podríem prendre valors com ara L = 10 cm, 3.500 cm, $2{,}3 \times 10^6$ cm, etc. Segons el context de cada problema, caldrà triar un interval de valors determinats de la magnitud que volem representar.

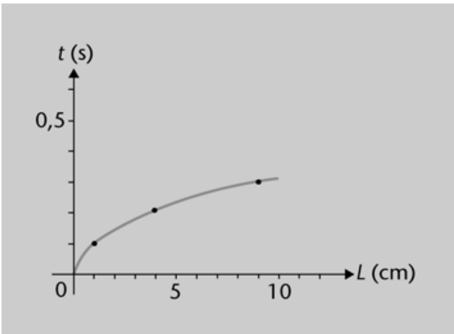
En aquest cas, com que estem parlant de caiguda lliure de bitllets, els valors típics de la llargària d'un bitllet és d'alguns centímetres. Si, a més a més, volem saber com es comporta la funció des de valors petits de la variable, per a trobar tendències de la funció, podem prendre L en l'interval $0 < L < 10$ cm, per exemple. Així, fem la taula 2 per a uns quants valors de L, que substituïm en l'expressió (43). Podem prendre valors senzills que permetin fer els càlculs mentalment. En general, simplement fem servir la calculadora per a obtenir els valors.

Taula 2. Alguns valors de la funció $t(L)$, equació (43)

L (cm)	*t* (s)
0	0,0
1	0,1
4	0,2
9	0,3

La representació dels valors de la taula 2 dóna una gràfica no lineal, com veiem en la figura 17; és a dir, la gràfica no és una línia recta. La corba que hi hem traçat i que uneix els punts de la gràfica de la figura 17 permet interpolar, és a dir, determinar valors de L per a valors de t que no són a la taula 2. Fixem-nos també que hem dibuixat la funció per a valors més grans que els de la taula: aquest procediment s'anomena extrapolació.

Figura 17Figura 17



Figura

Representació gràfica de la funció donada per l'equació $t = 0,1\sqrt{L}$ per als valors de la taula 2. S'hi ha dibuixat una corba que passa pels punts de la gràfica.

A la vista de la funció representada en la figura 17 podem concloure també que la funció $t(L)$ creix suaument amb la llargària del bitllet, perquè la potència a què està elevada la magnitud L és fraccionària i menor que la unitat, $t = 0,1\ L^{1/2}$, equació (43).

Recordeu

$a^{b/c}$ és una notació abreujada per tal d'escriure una arrel i una potència:

$$a^{b/c} = \sqrt[c]{a^b}$$

Per què ocorre això? Per què no triga a caure un bitllet com el de la figura 1 el doble de temps si té doble longitud? Perquè la relació que lliga les magnituds "temps de caiguda" i "llargària" del bitllet no és lineal. També diem que no es tracta d'una proporcionalitat directa entre t i L, perquè no tenim una potència unitària de L. Segons l'equació (42), en el cas de la caiguda lliure d'un bitllet, la potència de L és $^1/_2$, és a dir:

$$t \propto \sqrt{L} \qquad (46)$$

O també:

$$t \propto L^{1/2} \qquad (47)$$

Per tant, sí que hi ha proporcionalitat entre el temps i l'arrel quadrada de la longitud de l'objecte que cau: temps i longitud no són proporcionals, però t i $\sqrt{L}$ sí. En altres paraules, si convertiu la relació de proporcionalitat (47) en una equació, la relació entre temps i longitud s'escriurà així:

$$t = \text{constant} \cdot \sqrt{L} \qquad (48)$$

La "constant" que apareix en l'expressió anterior només és "constant" en el sentit que no depèn de les magnituds t i L, però pot dependre d'altres magnituds. Ara en veureu un exemple.

Activitat 1.15. Gravetats diferents

Ens diuen que l'acceleració de la gravetat a la Lluna és 5/9 del valor de la gravetat terrestre.

a) Seria més fàcil o més difícil atrapar un bitllet (en l'experiment de la figura 1) a la Lluna o a la Terra?

b) Calculeu també el tant per cent en què s'allarga o s'escurça el temps de caiguda dels bitllets en la Lluna, respecte a la Terra.

Solució

a) El temps de caiguda és inversament proporcional a l'arrel de g, segons l'equació (42); així, per a un bitllet donat de longitud L, la dependència $t(g)$ per a valors diferents de g seria:

$$t = \frac{constant}{\sqrt{g}} \qquad (49)$$

o bé:

$$t \propto g^{-1/2} \qquad (50)$$

Si la gravetat lunar és menor que la terrestre, l'acceleració de caiguda dels objectes que cauen lliurement en la Lluna és menor que l'acceleració amb què cauen en la Terra. Per tant, el temps de caiguda en la Lluna serà major que en la Terra. Aleshores, tindrem més temps per a atrapar el bitllet que cau. Serà més fàcil en la Lluna.

b) Si g_T i g_L són l'acceleració de la gravetat en la Terra i en la Lluna, respectivament, el quocient entre els temps de caiguda del mateix bitllet en els dos planetes, Terra i Lluna, és, a partir de l'equació (42):

$$\frac{t_{Lluna}}{t_{Terra}} = \frac{\sqrt{2L/g_L}}{\sqrt{2L/g_T}} \qquad (51)$$

i si simplifiquem i substituïm el valor relatiu de g_T i g_L:

$$\frac{t_{Lluna}}{t_{Terra}} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = \sqrt{\frac{9}{5}} \approx 1{,}34 \qquad (52)$$

A la Lluna el temps de caiguda és un 34% més llarg que en la Terra.

Tant per cent

Si una magnitud té, per exemple, el valor:

$$a = 1{,}34 \cdot b$$

aleshores a és "u coma trentaquatre" vegades major que b.

Podem expressar aquest resultat en tant per cent; multipliquem i dividim la igualtat anterior per 100:

$$a = \frac{134}{100} b$$

i fem:

$$a = \frac{100+34}{100} b = (1 + \frac{34}{100}) b$$

En la darrera expressió es veu que a és un 34/100 major que b.

Escrivim que a és un 34% major que b.

Recordem què significa la constant de proporcionalitat en una relació de proporcionalitat com ara:

$$a \propto b^n \qquad (53)$$

on n és un nombre enter o fraccionari. La relació anterior es pot escriure com una igualtat:

$$a = constant \cdot b^n \tag{54}$$

on la "constant" no depèn de les magnituds a ni b, però pot dependre d'altres magnituds diferents. En la igualtat (48) la "constant" no depèn de t ni de L, però sí que depèn de g. En la igualtat (49) la "constant" no depèn de t ni de g, però sí que depèn de L.

Aprofitarem la funció $t(L)$ no lineal que hem estat treballant en aquestes activitats, $t = \sqrt{2L/g}$, per a recordar que una mateixa relació entre variables pot tenir representacions gràfiques aparentment ben diferents, segons les magnituds que triem per a representar en cada eix.

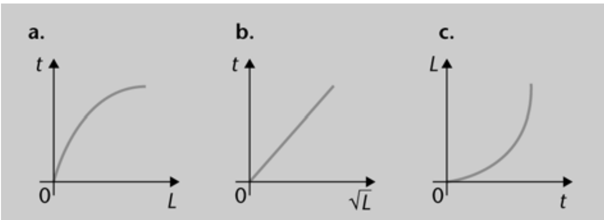
Activitat 1.16. Gràfiques de funcions

Feu gràfiques qualitatives de les relacions següents a partir de l'equació (42):

- representeu t en funció de L;
- representeu t en funció de la variable $\sqrt{L}$;
- representeu L en funció de t (és a dir, preneu L com a variable dependent i t com a independent).

Solució

Figura 18. Representació qualitativa de les funcions **a**. $t \propto L^{1/2}$, **b**. $t \propto \sqrt{L}$ i **c**. $L \propto t^2$



Les gràfiques qualitatives com les de la figura 18 es poden fer a partir d'alguns valors que donem a la variable independent en la funció analítica corresponent, o bé es pot recordar el que ja se sap de l'assignatura de matemàtiques.

La funció de la figura 18a és la mateixa que hem vist en la figura 17. La funció representada en la figura 18b és una representació lineal, com les que hem vist abans, però ara la variable independent està elevada a una potència diferent de la unitat.

El cas **c** és el de la funció:

$$L = \frac{1}{2} g t^2 \tag{55}$$

que s'obté de l'equació (42) en aïllar L i representa una paràbola. El significat d'aquesta gràfica és el mateix que el de la figura 18a: a mesura que augmenta la variable L, la variable t creix a un ritme més lent que si la relació fos lineal. Les dues funcions **a** i **c** són funcions inverses una de l'altra (vegeu el quadre de la dreta).

Quan fem la gràfica 18c prenent t com a variable independent, d'acord amb l'equació (55), observem que la magnitud L creix més ràpidament amb el temps que si la relació $L(t)$ fos lineal. El creixement és quadràtic, és a dir, amb una potència 2:

$$L \propto t^2 \tag{56}$$

Funcions inverses

En una funció elemental qualsevol:

$$y = y(x)$$

podem aïllar la variable x i escriure:

$$x = x(y)$$

Aquesta funció és la funció inversa de la primera.

Per exemple, si:

$$t = \sqrt{L}$$

aïllem x i obtenim:

$$L = t^2$$

Les funcions $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$ són funcions inverses una de l'altra, com ho són la funció exponencial i la funció logarítmica, entre altres.

1.6.4. Què hem après?

- Hem recordat el significat del concepte de valor mitjà.
- Hem recordat què és una divisió (o un quocient) i com es llegeix.
- Hem vist que les relacions entre les magnituds poden ser lineals, o de proporcionalitat directa, o no lineals, quan la variable independent està elevada a qualsevol potència diferent de la unitat.

Acabarem aquest subapartat amb unes idees bàsiques sobre el sistema d'unitats que es fa servir en ciències i enginyeria.

1.7. El Sistema Internacional d'unitats, SI

Hem dit en el subapartat 1.2.1 que una magnitud és una propietat d'un cos, d'un sistema o d'un procés físic que es pot mesurar.

Cada magnitud té unes unitats de mesura associades en el Sistema Internacional d'unitats (SI), que és un sistema d'unitats acceptat per la majoria dels països del món.

En aquest sistema es prenen determinades magnituds com a fonamentals i també s'acorden les seves unitats. Aleshores, les unitats de totes les magnituds que no són fonamentals, sinó derivades, resulten de la definició de cada magnitud i es poden expressar en termes de les unitats de les magnituds fonamentals.

Magnituds derivades

Són magnituds definides a partir de les magnituds fonamentals SI.

Hem parlat en l'activitat 1.13 de la magnitud massa i de la unitat en què es mesura, el quilogram, que se simbolitza kg. Ja han aparegut en aquest mòdul tres de les set magnituds fonamentals del SI i les corresponents unitats, que es mostren en la taula 3.

Taula 3. Magnituds fonamentals del SI d'interès en mecànica

Magnitud fonamental SI	Unitat SI	Símbol
Espai, distància, longitud	metre	m
Temps	segon	s
Massa	quilogram	kg

Per als problemes que abordarem en mecànica, les magnituds derivades que convindrà introduir seran magnituds derivades de les tres anteriors, longitud, massa i temps. En l'activitat 1.13 ja hem parlat d'algunes magnituds derivades: superfície (que es mesura en m^2), volum (m^3) i densitat (kg/m^3). En l'apartat 4 veurem com es mesura la magnitud força.

1.8. Recapitulació

Què hem après a fer en aquest apartat? En cada subapartat hem tret unes conclusions breus i hem ressaltat què hi hem tractat. En aquesta revisió general, recordarem les més essencials.

Hem vist exemples de llenguatges verbal, algebraic, gràfic i tabular que fa servir la ciència per a fer descripcions de moviments o, en general, per a descriure els processos d'interès. Es poden fer servir tots alhora per a fer-ne una descripció més completa.

Hem introduït el concepte de model per a parlar de simuladors de processos físics per ordinador. En l'apartat següent parlarem del model de partícula puntual i d'altres models que fa servir la física.

Hem vist que hi ha magnituds físiques fonamentals, com ara el temps, la longitud i la massa, i magnituds derivades, com la velocitat, el volum o la densitat. Les magnituds es mesuren en unitats del Sistema Internacional d'unitats (SI) i les tres magnituds fonamentals que apareixen en mecànica, temps, longitud i massa, es mesuren en segons, metres i quilograms, respectivament.

L'experiment de caiguda lliure, amb l'expressió que permet calcular el temps que triga a caure un objecte, ens ha permès introduir el concepte d'equacions de moviment o lleis de moviment, i hem comentat els tres tipus de moviments bàsics que pot fer un cos: rotacional, translacional i vibracional. També hem vist que els moviments poden ser en una, dues o tres dimensions.

Hem encetat l'estudi de la cinemàtica. Hem introduït alguns conceptes, com ara velocitat i acceleració, que encara hem de definir de manera precisa. Ho farem en l'apartat següent, on tractarem els moviments de forma quantitativa. En l'apartat 3 començarem a abordar la dinàmica i ens plantejarem el problema de quines són les causes dels moviments.

1.9. Problemes d'ampliació

Problema 1.1. Descripció de moviments

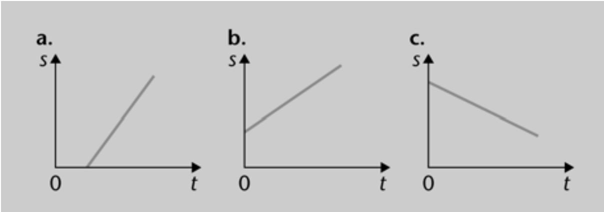
Anem conduint un cotxe per un pendent i llevem el peu de l'accelerador. El vehicle continua pujant. Per què? Pitgem el fre i el vehicle s'atura a poc a poc. Per què?

¿Es poden descriure aquests processos amb els conceptes que hem vist en aquest apartat? Nota: es tracta únicament d'un exercici d'ús del llenguatge verbal qualitatiu, descriptiu.

Problema 1.2. Gràfiques desplaçament-temps

Descriviu quin tipus de moviment indiquen les gràfiques següents.

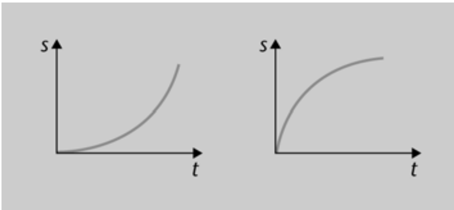
Figura 19. Gràfiques desplaçament-temps de tres moviments



Problema 1.3. Gràfiques desplaçament-temps

Quins moviments indiquen les gràfiques desplaçament-temps següents?

Figura 20. Gràfiques desplaçament-temps de dos moviments



Problema 1.4 (opcional). Paràmetres d'un problema de moviments

Si teniu temps, aneu a la pàgina d'Internet esmentada en la figura 15. Activeu la simulació i modifiqueu-ne els paràmetres. Investigueu per què en alguns casos el carret no acaba el trajecte i en altres casos fins i tot descarrila.

Problema 1.5. Dimensions dels moviments bàsics

Amb quantes variables podem descriure els moviments representats en la figura 8?

2. Conceptes de cinemàtica

L'objectiu principal d'aquest apartat és formalitzar els conceptes bàsics de cinemàtica que hem discutit en l'apartat anterior.

Com hem dit en l'apartat 1, la **cinemàtica** és la part de la **mecànica** que estudia com analitzar i descriure els moviments dels objectes, però sense tenir en compte quin n'és l'origen. En l'apartat 1 hem fet una aproximació qualitativa a la cinemàtica; ací començarem a definir conceptes bàsics que ens permetran descriure quantitativament els moviments. Precisarem conceptes d'ús corrent, com ara distància, desplaçament, espai recorregut, posició, velocitat, acceleració, etc., perquè no es puguin prestar a confusions quan s'utilitzin en contextos científics.

Hem vist també en l'apartat 1 exemples de descripcions de moviments basades en el llenguatge verbal, gràfic, algebraic i tabular. En aquest apartat insistirem en la importància d'aprendre a usar els diversos llenguatges.

Veurem com es poden deduir les lleis de moviment a partir del coneixement de l'acceleració d'un objecte. Com a exemple d'aplicació, tornarem al moviment de caiguda lliure que hem vist en l'apartat 1 i determinarem les lleis del moviment d'un objecte que cau.

Partícules i models

Quan parlem d'un objecte en moviment, sovint serà suficient pensar en termes d'una "partícula" que es mou. Una partícula ideal és un punt que concentra tota la massa de l'objecte.

> Físicament, i pel que fa a qüestions de cinemàtica, podem dir que una **partícula** o **punt material** pot ser qualsevol objecte, gran o menut, del qual se'n pot descriure la posició en l'espai mitjançant les coordenades d'un sol punt.
>
> La partícula o el punt material és un exemple de **model** físic. Un model és una representació idealitzada de la realitat.

Per exemple, una partícula puntual situada en el centre de la Terra, i que tingui tota la massa de la Terra, pot representar la Terra en el seu moviment al voltant del Sol. Un punt pot representar també una pilota que llancem a l'aire o un vehicle que es mou per una carretera. Normalment situem el punt en el centre de gravetat de l'objecte, en el punt on es pot imaginar que es concentra tota la seva massa. El concepte de partícula ens permet estudiar la cinemàtica dels objectes de manera més senzilla.

En aquest mòdul farem servir els termes *partícula*, *cos* i *objecte* com a sinònims.

Què aprendrem?

- Aprendrem a definir (verbalment i algebraicament) conceptes importants com els de velocitat i acceleració.
- Aprendrem a deduir les lleis del moviment per a situacions senzilles.

Què suposarem?

Farem servir els conceptes de derivada i integral, que s'estudien en l'assignatura de matemàtiques. També donarem per coneguda l'àlgebra vectorial bàsica, tot i que recordaremací allò que més ens interessi.

2.1. Distàncies i desplaçaments

Començarem comentant la distinció entre valors d'una magnitud i intervals de la mateixa magnitud. Exemplificarem, amb el cas del llançament vertical d'un objecte, que cal tenir cura de quines magnituds representem en una gràfica i amb quin objectiu.

2.1.1. Temps i interval de temps; posició i distància

Una cosa és dir que són les 11 hores i una altra dir que un vaixell ha trigat 11 hores a arribar. En el primer cas estem parlant d'un instant de temps concret (mesurat des de la mitjanit) i en el segon es tracta d'un interval de temps mesurat des de qualsevol origen de temps. Un interval de temps es representa així:

$$\Delta t = 11 \text{ h} \tag{57}$$

i es llegeix "delta de t igual a 11 hores", mentre que l'instant de temps s'escriu:

$$t = 11 \text{ h} \tag{58}$$

Un interval de temps es pot haver iniciat en qualsevol moment (per exemple, de matí o de vesprada).

> Un interval d'una magnitud és una variació d'aquesta magnitud entre dos punts, que no tenen perquè contenir l'origen.

El mateix podem dir de la posició d'un punt sobre una recta, per exemple l'eix X, i de la distància recorreguda: no és el mateix dir que estem en el punt quilomètric 74,5 km, que dir que hem recorregut 74,5 km. De manera anàloga al temps, ho representarem de la manera següent:

$$x = 74{,}5 \text{ km} \tag{59}$$

$$\Delta x = 74{,}5 \text{ km} \tag{60}$$

L'interval Δx = 74,5 km pot anar, per exemple, des del punt x = 3 km al punt x = 77,5 km o del punt x = –40,5 km al punt x = +34 km.

En una expressió matemàtica se solen distingir els símbols de les magnituds, que s'escriuen en cursiva, dels símbols de les seves unitats, que s'escriuen en lletra normal (rodona). Fixeu-vos en l'equació (57), per exemple, en què la magnitud temps s'escriu en cursiva, *t*, i el símbol d'hora, h, en lletra rodona, sense cursiva.

Per a una magnitud qualsevol s, direm que l'increment de la magnitud s entre els punts de l'espai 1 i 2, en els quals la magnitud pren els valors s_1 i s_2, és:

$$\Delta s = s^2 - s^1 \tag{61}$$

És a dir, un interval d'una magnitud és la diferència entre dos valors de la magnitud, el valor en l'extrem final de l'interval (on acaba l'interval) menys el valor en l'extrem inicial (on s'inicia l'interval). Un interval pot ser positiu o negatiu.

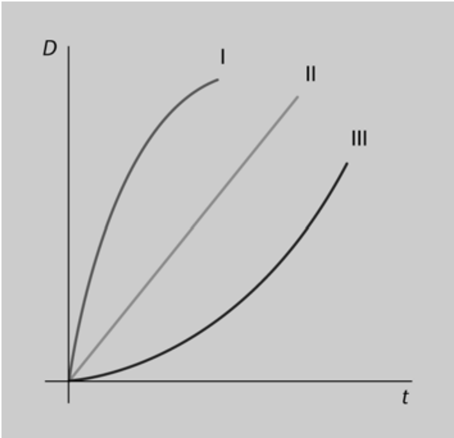
També és diferent el terme *posició* del terme *desplaçament*. Vegem-ho mitjançant l'exemple següent.

2.1.2. Llançament vertical

Un exemple en què es poden diferenciar clarament els conceptes de posició i de desplaçament és el llançament d'una pilota verticalment. Quan l'hem llançada cap amunt i al cap d'uns instants ens ha tornat a les mans, la pilota ha recorregut una distància de pujada i de baixada, però la posició inicial i final són la mateixa: en el procés no hi ha hagut un desplaçament net (o resultant) de la pilota, tot i que ha fet un recorregut.

Si fem una gràfica d'aquest moviment de llançament vertical de la pilota i de retorn a les mans, hem d'expressar que, a mesura que passa el temps (t), la distància recorreguda (D) va en augment. Quina de les 3 gràfiques de la figura 21 pot ser la correcta?

Figura 21. Tres exemples de corbes que representen una distància recorreguda que augmenta monòtonament amb el temps



Funció monòtona

Diem que una funció és monòtona *creixent* quan per a valors creixents de la variable independent, la variable dependent també creix.

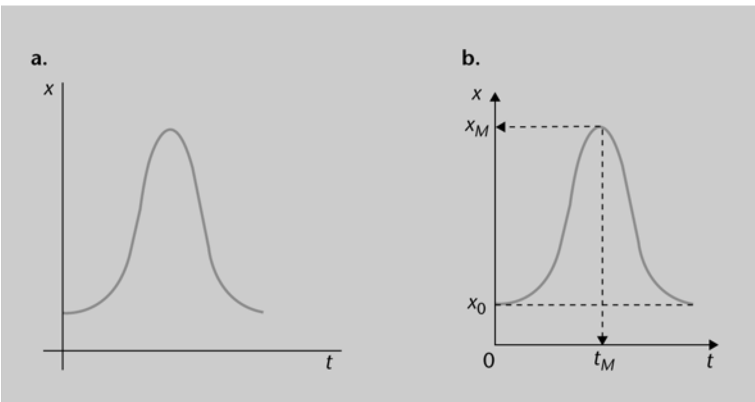
Sense més detalls sobre la teoria que descrigui el moviment de la pilota que llancem verticalment, qualsevol de les tres gràfiques de la figura 21 pot ser correcta, perquè només sabem que la distància recorreguda augmenta monòtonament amb el temps: conforme passa el temps la distància total que recorre la pilota en el moviment cap amunt i cap avall va en augment.

I què ocorre amb la funció que descriu la posició que ocupa la pilota en cada instant?

2.1.3. Posició en funció del temps en el llançament vertical

Si ara fem una gràfica que representi on és la pilota en cada moment, és a dir, la posició que ocupa en cada instant, i prenem l'eix X de manera que $x > 0$ en la direcció vertical i cap amunt, la gràfica posició-temps que representa el moviment d'ascens i de descens de la pilota pot ser com la de la figura 22a: la pilota està cada vegada més alta a mesura que passa el temps i, després d'arribar a l'altura màxima, comença a baixar.

Figura 22. Posició en cada instant de la pilota que puja i baixa



a. Gràfica qualitativa. **b.** Gràfica qualitativa en què s'indiquen alguns punts d'interès del procés i s'ha posat la fletxa a l'extrem de cada eix de coordenades.

A banda de mostrar el sentit en què augmenten els valors de l'abscissa i l'ordenada amb una fletxa a l'extrem de cada eix, en la figura 22b hem volgut mostrar determinats aspectes del procés que no apareixen en la figura 22a, com ara que:

1) comencem a comptar l'espai en $x = 0$ i el temps en $t = 0$; per tant, x_0 representa la posició inicial des de la qual es llança la pilota;

2) el punt de sortida i el d'arribada són el mateix (són a la mateixa altura), i això ho volem ressaltar amb la línia horitzontal de traços;

3) l'instant t_M és el moment en què la posició assoleix el valor màxim, x_M, i la velocitat de la pilota s'hi anul·la.

Si comparem les gràfiques de desplaçament, $D(t)$, a la figura 21, i de posició, $x(t)$, a la figura 22a, veurem que són ben diferents, tot i que representen el mateix procés físic de pujada i baixada d'una pilota. Mentre que la funció $D(t)$ és monòtona creixent, la funció $x(t)$ no ho és, sinó que té trams creixents i trams decreixents, i passa per un màxim.

Instantani

Instantàniament vol dir en un instant de temps donat, és a dir, per a un valor de t.

Per tant, hem de tenir cura amb què volem representar en una gràfica determinada i hem de saber interpretar què s'hi vol transmetre.

Hem de tenir en compte que hem fet la figura 22 sense basar-nos en cap consideració teòrica, i simplement tenint en compte el fet que la pilota puja i baixa. Més endavant veurem si la corba concreta que hem dibuixat en la figura 22 pot ser qualitativament correcta. Tornarem sobre la gràfica de la figura 22 i discutirem, per exemple, el pendent de la corba $x(t)$ i la seva curvatura. Veurem si representa bé el fet que coneixem que la pilota va frenant-se a mesura que puja, s'atura instantàniament en el punt més alt de la trajectòria i tot seguit torna a caure i augmenta la velocitat gradualment. Com s'ha dit abans pel que fa a la figura 21, fins que no tinguem una teoria vàlida sobre el moviment de la pilota (o si no fem un experiment en què mesurem posicions i velocitats de la pilota en cada instant) no podem dir si la gràfica qualitativa de la figura 22 és correcta o no.

Ara comentarem com varia la velocitat de la pilota en el moviment vertical.

Activitat 2.1. Gràfiques del llançament vertical

a) Doneu algun argument per a descartar la línia recta de la figura 21 com a corba distància-temps correcta (recordeu el que s'ha comentat respecte de la figura 22).

b) Feu un esquema de com podria ser la gràfica velocitat-temps per al moviment de llançament vertical.

Solució

a) Hem dit que la pilota llançada cap amunt es va frenant fins que s'atura en el punt més alt de la trajectòria. Per tant, la velocitat del moviment de pujada i de baixada no és constant i la distància recorreguda no pot ser proporcional al temps, no podem escriure que $D \propto t$. Només per a un moviment a velocitat constant correspondria una variació $D(t)$ lineal.

b) La pilota comença el moviment amb una velocitat inicial que es va reduint fins que en l'instant t_M i en el punt x_M s'anul·la i després torna a augmentar, però en sentit contrari. Qualitativament, podem fer la gràfica de la figura 23. Hem suposat que les velocitats cap a dalt són positives i que les velocitats de descens són negatives.

Figura 23

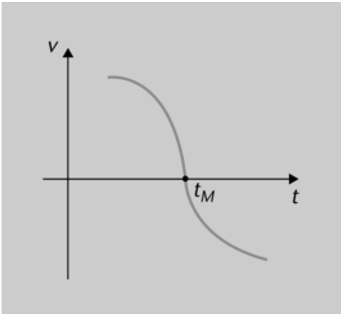


Figura 23

Velocitat d'una pilota que llancem verticalment i arrepleguem en el mateix punt quan cau. En l'instant $t = t_M$ la pilota està aturada en el punt més alt de la trajectòria.

2.1.4. Què hem après?

- Hem aclarit la diferència entre temps i interval de temps i entre posició i desplaçament.
- Hem vist que l'aspecte d'una gràfica corresponent a un procés físic pot ser ben diferent segons què s'hi representi.

El concepte cinemàtic més bàsic és el de velocitat, que es construeix a partir de posicions o desplaçaments que varien amb el temps. Vegem-ho.

2.2. La velocitat

D'un objecte que es mou, no només ens interessa la posició que ocupa sinó també amb quina velocitat es mou. Com definim la velocitat d'un objecte que es mou? Començarem parlant del concepte de velocitat mitjana per arribar tot seguit a la definició de velocitat instantània.

2.2.1. Velocitat mitjana

La velocitat d'un vehicle és l'espai que recorre per unitat de temps. Si recorrem una distància de 100 km en 4 h, podem dir que hem viatjat a una velocitat mitjana de 100 km / 4 h = 25 km/h.

En general, representem amb s l'espai recorregut per un objecte, amb t el temps que ha trigat a recorre'l i amb $\langle v \rangle$ la velocitat mitjana corresponent; Δt i Δs (que es llegeixen "delta te" i "delta essa") són, respectivament, l'increment

Valor mitjà $\langle f \rangle$

La notació $\langle f \rangle$ representa el valor mitjà de la magnitud f.

de temps i l'increment de desplaçament causat pel moviment. L'expressió següent *defineix* la velocitat mitjana:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{62}$$

> La velocitat mitjana d'un cos que s'ha desplaçat un interval delta essa durant un temps delta te es calcula com el quocient entre l'espai que ha recorregut i el temps que ha trigat a recorre'l.

Velocitat mitjana

De vegades es representa un valor mitjà amb una ratlla al damunt de la variable, $\bar{v}$, però per no induir a confusions amb el símbol de fletxa, que representa una magnitud vectorial, farem servir ací el símbol <*v*>.

És molt important que aprenguem a definir correctament les magnituds. Per exemple, seria incorrecte dir el següent, pel que fa a l'equació (62):

La velocitat mitjana d'un cos que s'ha desplaçat un interval delta essa durant un temps delta te és igual a l'espai que ha recorregut el cos en un temps (o en aquest temps).

L'única diferència essencial entre els dos enunciats és que s'ha substituït "per unitat" de temps per "en un" temps. No és correcte el segon enunciat perquè estaríem dient que una velocitat *és* un canvi de posició (o un desplaçament), i aleshores la velocitat seria una magnitud que es mesuraria amb les mateixes unitats que el desplaçament. No és el mateix dir "espai recorregut *en un* interval de temps" que "espai recorregut *per unitat* de temps". Amb "per" en la segona expressió s'indica que hi ha un quocient.

En conclusió, la magnitud *velocitat mitjana* té el significat següent.

> La velocitat mitjana d'un objecte que s'ha desplaçat Δs durant un temps Δt és l'espai que ha recorregut l'objecte per unitat de temps.

Per tant, la velocitat és una magnitud nova, obtinguda mitjançant un quocient a partir de les magnituds desplaçament i temps, i que té dimensions (i unitats de mesura) diferents de les d'espai i de les de temps. Diem que la magnitud velocitat és una *magnitud derivada*, mentre que l'espai i el temps són *magnituds fonamentals*.

Magnitud derivada i funció derivada

Una magnitud derivada és la que es defineix a partir de les magnituds fonamentals del SI.

Una funció derivada és la que es defineix com a quocient de diferencials.

La velocitat és una magnitud derivada i es defineix a partir de la funció derivada de l'espai recorregut respecte al temps, com veurem en el subapartat 2.2.2.

Com que desplaçaments i temps es mesuren en el SI en metres (m) i segons (s), respectivament, la unitat del SI de la velocitat serà metres per segon (m/s).

Veurem més endavant que la descripció completa de la magnitud velocitat és més complicada, perquè una velocitat sempre indica un moviment en alguna direcció.

Activitat 2.2. Significat del valor mitjà de la velocitat

a) En una carretera recta, un vehicle recorre 100 km cap a l'est en 2 h, i des d'aquell punt fa 200 km cap a l'oest en 2 h més. A quina velocitat mitjana ha fet els 300 km? A quina distància del punt original acaba el recorregut?

b) Quin significat té l'expressió (62)? (recordeu el concepte de valor mitjà del subapartat 1.6.1).

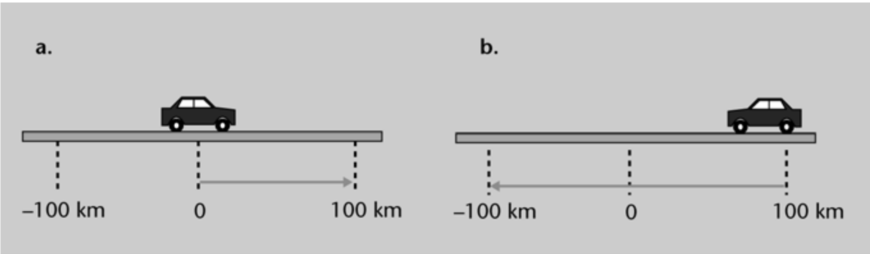
Solució

a) El vehicle ha recorregut 300 km en 4 h. Per tant, ha viatjat a una velocitat mitjana de 75 km/h:

$$< v >= \frac{300\,\text{km}}{4\,\text{h}} = 75\frac{\text{km}}{\text{h}} \tag{63}$$

Si representem el desplaçament en un eix, el vehicle acaba a 100 km a l'oest del punt de partida, com en la figura 24.

Figura 24. Desplaçament i posició del vehicle



a. Desplaçament inicial. **b.** Segon desplaçament.

b) La velocitat mitjana d'un objecte que recorre un trajecte determinat durant un temps determinat és la velocitat que hauria de tenir si aquesta fóra constant i recorregués el mateix trajecte total en el mateix temps total.

En un desplaçament donat, podeu calcular diverses velocitats mitjanes: si heu viatjat de Barcelona a Alacant (B-A, diguem-ne 600 km per a arrodonir) i heu trigat 6 h en fer els 600 km, podeu dir que la velocitat mitjana en aquest trajecte ha estat:

$$< v >_{\text{B-A}} = \frac{600\text{ km}}{6\text{ h}} = 100\frac{\text{km}}{\text{h}} \tag{64}$$

Però si el primer tram de 100 km del viatge, de Barcelona a Tarragona (B-T), l'heu fet en 75 minuts (5/4 d'hora), podeu dir que la velocitat mitjana d'aquesta part del trajecte ha estat:

$$< v >_{\text{B-T}} = \frac{100\text{ km}}{5/4\text{ h}} = 80\frac{\text{km}}{\text{h}} \tag{65}$$

Per tant, heu viatjat aquesta part del trajecte, B-T, a una velocitat mitjana inferior a la del trajecte B-A. I com que no és possible mantenir una velocitat idèntica en tot moment, és possible que en el trajecte inicial de 100 km hagueu conduït (almenys en alguns moments), per exemple, a 120 km/h. Igualment, podríeu trobar trajectes en què la velocitat mitjana durant alguns intervals de temps haja estat qualsevol valor entre 0 i 100 km/h, per exemple.

Amb aquestes idees ja tenim eines per a definir el concepte de velocitat instantània i per a discutir-ne el significat físic i geomètric.

2.2.2. Velocitat instantània

Quan ens referim a la velocitat d'un objecte podem estar parlant-ne de la velocitat mitjana, de la velocitat màxima, de la velocitat límit, de la velocitat mínima, etc. Però si no ho especifiquem, se sobreentén que parlem de la velocitat instantània. Com es defineix aquesta velocitat?

Velocitat límit i instantània

En alguns processos la velocitat d'una partícula arriba a un valor del qual no passa, com ara en la caiguda d'un paracaigudista. És el que es coneix com a *velocitat límit*.

Una velocitat instantània en un instant t és una velocitat mitjana calculada en un interval que fem cada vegada més petit al voltant de t.

Pensem, primer, en una partícula que es mou en una dimensió. La variable x és suficient per a descriure la posició de la partícula sobre una línia recta. Si una partícula puntual es mou de manera que està en la posició x en un instant de temps t, la posició instantània és donada per la funció matemàtica $x(t)$. Aleshores, la velocitat instantània d'aquesta partícula, és a dir, la velocitat que té la partícula en l'instant t, es defineix així:

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (66)$$

L'expressió anterior de la **velocitat instantània** es llegeix així:

La velocitat instantània d'un objecte és la derivada de la posició respecte al temps.

La velocitat instantània té, com tota velocitat, el significat d'espai recorregut per unitat de temps.

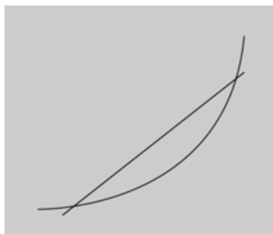
Recordeu que, matemàticament, una derivada es calcula com el pas al límit d'un quocient d'increments:

$$v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (67)$$

Secant

La recta de la figura és una secant a la línia corba perquè la talla en dos punts.

Figura 25. Recta secant a una corba



El quocient incremental $\Delta x/\Delta t$ no és més que una velocitat mitjana, equació (62). Per tant, per a calcular una velocitat instantània hem de calcular una velocitat mitjana en un trajecte molt i molt curt; matemàticament, a partir d'un trajecte que fem en un increment de temps que tendeix a zero!

Ara farem tres activitats per tal de reforçar el concepte de velocitat instantània. Primer recordarem el significat geomètric de la derivada i després aprendrem a representar la velocitat instantània i a calcular-la.

Activitat 2.3. Tangents a la trajectòria

A partir de la gràfica de la posició d'una partícula en funció del temps, expliqueu el significat geomètric de la funció derivada, és a dir, que la velocitat és el pendent de la recta tangent a la posició instantània de la partícula (figura 26).

Lletres gregues

Les lletres gregues α, β i φ es llegeixen *alfa*, *beta* i *fi*, respectivament.

Figura 26

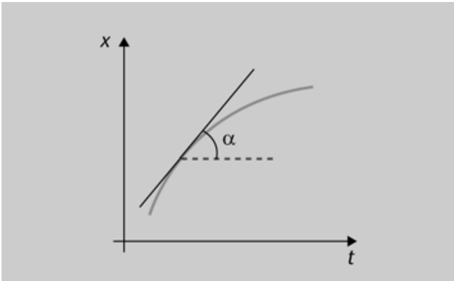


Figura 26

La recta tangent a la corba $x(t)$ en un punt fa un angle α amb l'horitzontal. La tangent trigonomètrica d'aquest angle és la derivada de la funció en aquest punt.

Solució

La figura 28 mostra la posició instantània de la partícula. En l'instant t ocupa la posició x i després d'un increment de temps Δt la partícula és a $x + \Delta x$. Els intervals Δx i Δt fan un triangle rectangle amb el segment de secant de la corba, figura 28. Recordem que la funció trigonomètrica *tangent* d'un angle, com l'angle β de la figura 28, és el quocient del catet oposat a l'angle pel catet contigu, és a dir, el quocient d'increments:

$$\tan \beta = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{68}$$

Aquest quocient és la velocitat mitjana de la partícula que recorre la distància Δx en el temps Δt.

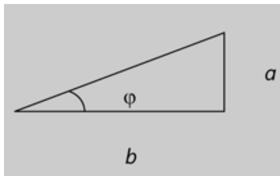
Però estem interessats en la velocitat instantània de la partícula en l'instant t. Aleshores cal fer l'increment Δt més i més menut. En el límit, aquest procés ens durà de les rectes secants a la corba de la figura 28 a la recta tangent a la corba en el punt x. I l'angle β tendeix a l'angle α.

Tangent trigonomètrica

En un triangle rectangle, la tangent de l'angle que forma la hipotenusa amb un dels catets és el quocient del segon catet pel primer catet,

$$\tan \varphi = a/b$$

Figura 27



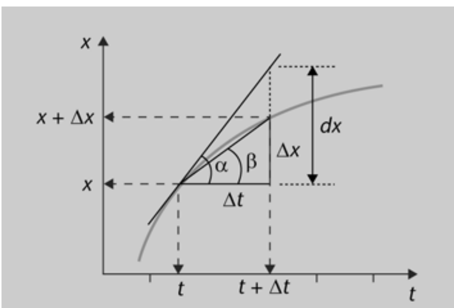
Definició de la tanget d'un angle.

En la figura 25 es mostra també que la recta tangent a la corba en el punt x fa un angle α amb l'horitzontal i la derivada de la funció en aquest punt és el valor de la tangent d'aquest angle:

$$\tan \alpha = \frac{dx}{dt} \tag{69}$$

El resultat anterior s'obté de fer el límit per a $\Delta t \to 0$ en l'expressió (68). El triangle rectangle està format pels catets dx i dt i la recta tangent a la corba.

Figura 28. Funció posició-temps i significat geomètric de la funció velocitat mitjana i velocitat instantània per a un moviment unidimensional



Per tant, pendent i velocitat instantània estan relacionades: el pendent de la recta tangent a la corba en la posició $x(t)$ indica el valor de la velocitat instantània de la partícula.

Vegem-ne un exemple.

Activitat 2.4. Representació de la velocitat

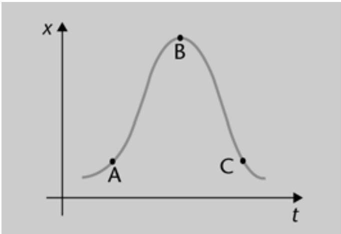
Per a una gràfica $x(t)$ com la de la figura 22:

a) Representeu gràficament la velocitat de la partícula en tres punts, com ara A, B i C en la figura 29. Expliqueu-ne el valor relatiu i el sentit de la velocitat (de pujada o de baixada).

b) Si ara pensem en el moviment d'una pilota que llancem verticalment i tornem a recuperar quan cau a la mà, podem dir si una gràfica $x(t)$ com la de la figura 29 és una bona descripció del moviment de la pilota? (penseu en la velocitat que té una pilota durant la pujada i la baixada).

c) Proposeu una funció $x(t)$ que representi millor la posició de la pilota que llancem verticalment i torna a les mans.

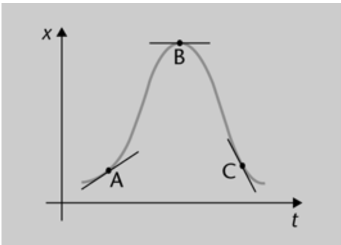
Figura 29. Tres instants en una corba posició-temps com la de la figura 22



Solució

a) En la figura 30 hem dibuixat la recta tangent a la corba de la figura 29 en els tres punts indicats.

Figura 30. Rectes tangents a la corba $x(t)$ en tres instants de temps



Veiem en la figura 30 que la velocitat en el punt superior B és nul·la (la recta tangent és horitzontal i tan 0° = 0) i que en el punt A la velocitat és menor (en valor absolut) que en el punt C (menor pendent de la recta tangent en A). En A la partícula està pujant (pendent positiu) i en C, baixant (pendent negatiu). Com sabem que la velocitat en C és en sentit descendent? Perquè la posició x disminueix a mesura que passa el temps, i això fa que els pendents de les rectes tangents a la funció $x(t)$ siguin negatius. Vegem-ho amb més detall.

Es pot veure en la definició de velocitat (equació 67) que velocitats negatives corresponen a moviments en el sentit descendent de l'eix X (figura 31). En efecte, si la partícula està en la posició x_1 en l'instant t_1, i en passar un interval de temps Δt positiu ($\Delta t > 0$) la partícula està en una posició més baixa, $x_2 = x_1 + \Delta x$, amb $\Delta x < 0$, (i per tant $x_2 < x_1$), aleshores el quocient $\Delta x/\Delta t$ serà negatiu per ser el quocient de dos nombres de signe contrari, $\Delta t > 0$ i $\Delta x < 0$. El mateix ocorrerà per a la velocitat instantània. Aquesta es calcula com el límit del quocient incremental $\Delta x/\Delta t$, el qual sempre és negatiu en el moviment descendent i, per tant, $v = dx/dt < 0$.

Figura 31. Moviment descendent

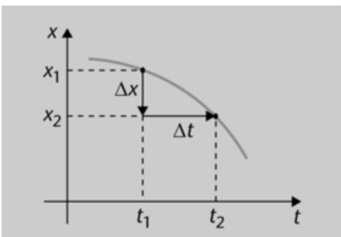


Figura 31

La posició decreix a mesura que passa el temps, i la velocitat és negativa.

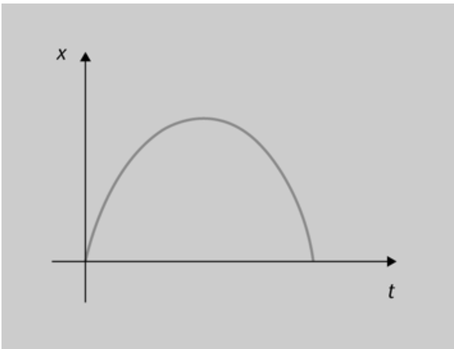
Tenim, doncs, un signe per a les components de la velocitat: la velocitat és negativa en un moviment descendent en què la direcció positiva de l'eix té el sentit cap amunt.

b) La pilota surt amb una velocitat determinada de la mà que la llança i es va frenant mentre puja, fins que s'atura instantàniament a una altura determinada, i tot seguit comença a caure a una velocitat cada vegada més gran. Podem suposar que la gràfica qualitativa de la velocitat de la pilota és com en la figura 23, però podem assegurar que una corba $x(t)$ com la de la figura 22 o la figura 29 no pot representar el moviment de pujada i baixada de la pilota, perquè entre els punts A i B de la figura 29 la velocitat comença amb un valor petit i va en augment: la funció té cada vegada més pendent fins que a prop del punt B la velocitat es redueix de nou.

Per tant, la gràfica qualitativa de la figura 22 o 29 no pot representar el moviment d'ascens i de descens de la pilota. Vegem quina podria ser la forma correcta.

c) La funció $x(t)$ que cerquem ha de tenir un màxim en la posició en què la pilota arriba al punt més alt. I el pendent de la corba ha de decrèixer monòtonament fins anul·lar-se en el mateix punt. Per tant, una gràfica qualitativa més correcta seria la de la figura 32. Hem suposat que la funció és simètrica (la pilota té el mateix comportament en pujar que en baixar) i hem situat l'origen de coordenades en el punt en què es llança la pilota.

Figura 32. Dependència amb el temps de la posició d'una pilota que puja i baixa en un llançament vertical



Si tracem rectes tangents a la corba de la figura 32 en punts creixents veurem que el pendent es va reduint des d'un valor inicial fins al valor nul en el pic de la corba; tot seguit el pendent comença a prendre valors negatius cada vegada majors, i idèntics en valor absolut als de la pujada (perquè la corba és simètrica).

Com veiem, a partir de l'anàlisi del pendent de la corba que dóna la posició instantània de la partícula, es pot descriure qualitativament el moviment en termes de la velocitat instantània. El càlcul quantitatiu de la velocitat implica calcular la funció derivada de la posició, equació (66). Vegem-ne un exemple senzill.

Activitat 2.5. Càlcul de la velocitat

La posició que ocupa una partícula en funció del temps transcorregut ve donada, per a $t \geq 0$, per la funció:

$$x(t) = 6 \cdot t^2 + 5 \qquad (70)$$

on x es mesura en metres i t en segons.

a) Calculeu la funció que dóna la velocitat de la partícula en qualsevol instant, i en l'instant particular $t = 5$ s.

b) En quines unitats es mesura la constant "6" de l'equació (70)? I la constant "5"?

c) Representeu esquemàticament les funcions $x(t)$ i $v(t)$.

d) Quin moviment representa aquesta funció $x(t)$?

Com es llegeix l'expressió $u'(t) = du/dt$?

$u'(t)$ es llegeix "u prima de te", i du/dt és la derivada de u respecte a t.

No és correcte dir que du/dt és la derivada de u partit per la derivada de t.

Però sí que és correcte dir que du/dt és el quocient de la diferencial de u per la diferencial de t, perquè du i dt es poden manipular com a funcions. Podem escriure, per exemple, que $du = u' \cdot dt$.

Solució

a) La velocitat instantània és la derivada de la posició respecte al temps (equació 67):

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 12t \tag{71}$$

i, per a l'instant $t = 5$ s:

$$v(5\,\mathrm{s}) = 12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{s} = 60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{72}$$

b) Com que el temps es mesura en segons i la posició en metres, la constant "6" en l'equació (70) s'ha de mesurar en m/s^2, de manera que en calcular el producte $6t^2$ per a un t donat obtinguem el resultat en metres. Anàlogament, "5" ha d'estar expressat en metres.

c) En la figura 33 es representen esquemàticament les funcions posició i velocitat, equacions (70) i (71).

La posició augmenta amb el temps de manera quadràtica i la velocitat augmenta linealment.

Figura 33

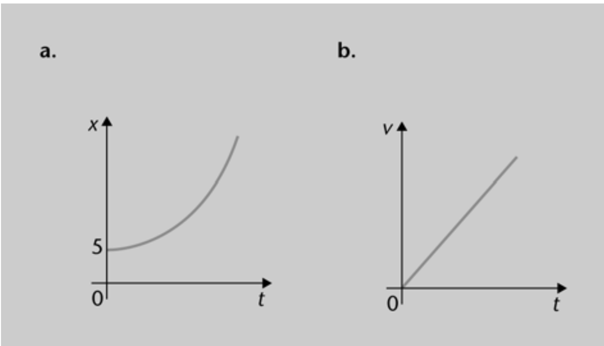


Figura 33

Diagrama qualitatiu de l'evolució temporal de: **a.** la posició $x(t) = 6 \cdot t^2+5$, equació 70, i **b.** la velocitat $v(t) = 12 \cdot t$, equació 71.

d) El moviment representat per la funció (70) és el d'una partícula que en l'instant inicial té velocitat nul·la i està en la posició $x = 5$ m; a mesura que passa el temps, augmenta la velocitat. Això fa que s'allunyi cada vegada més depressa del punt $x = 5$ m on era inicialment.

En el cas de funcions $x(t)$ més complicades el problema de calcular la velocitat de la partícula és un problema purament matemàtic de càlcul de derivades de funcions.

Fins ara hem parlat de moviments en una dimensió. Què ocorre en un moviment més general?

2.2.3. Vector velocitat

La velocitat és una magnitud vectorial, perquè per a determinar-la necessitem donar tres valors numèrics: per tal de determinar totalment la velocitat d'un objecte necessitem donar la direcció i el sentit del moviment i la distància que recorre per unitat de temps. O bé, podem donar les components del vector velocitat en algun sistema de referència.

Figura 34. Trajectòria d'una partícula i vectors de posició i velocitat en un instant de temps

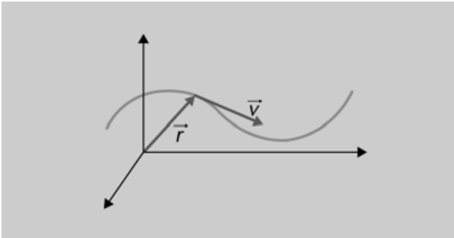


Figura 34

La velocitat instantània en un punt té la direcció de la tangent en aquest punt a la corba que representa la trajectòria.

En el cas general d'un moviment en tres dimensions, en què la posició de la partícula estigui donada per la funció $\vec{r}(t)$, figura 34, és a dir, pel vector de posició de la partícula respecte a un punt fix de l'espai, en realitat estem donant tres funcions del temps:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \tag{73}$$

com ja hem vist en l'activitat 1.8 de l'apartat 1. Vectorialment:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{74}$$

En cada situació podem triar les direccions *XYZ* de la manera que més convingui per a descriure el moviment. En l'apartat 3 en veurem un exemple.

Ja sabem que hi ha una relació entre el pendent de la corba posició-temps i la velocitat de la partícula. El mateix ocorre en una trajectòria tridimensional: hi ha una relació entre **pendent de la trajectòria** i **velocitat**.

La velocitat d'una partícula és la derivada del vector de posició respecte al temps.

Conèixer la velocitat de la partícula, definida com la derivada temporal del vector de posició $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{75}$$

equival, en la pràctica, a treballar amb tres derivades de funcions; les tres components del vector velocitat:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \tag{76}$$

Explícitament:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{77}$$

L'expressió (77) és la generalització a un moviment tridimensional de l'expressió (66), vàlida per a un moviment unidimensional. La figura 34 representa una trajectòria qualsevol en l'espai (en un sistema de coordenades cartesianes tridimensional) i el vector de posició i la velocitat de la partícula en un punt qualsevol. El vector velocitat instantània té la direcció de la recta tangent a la trajectòria de la partícula en cada punt.

El càlcul de la velocitat implica calcular la derivada del vector de posició. Vegem-ne un exemple.

Activitat 2.6. Velocitat

La posició instantània d'una partícula ve donada pel vector següent:

$$\vec{r}(t) = \left(4t^2, -t, 3\sin(5t)\right) = 4t^2\vec{i} - t\vec{j} + 3\sin(5t)\vec{k} \tag{78}$$

Fixeu-vos que en l'expressió 78 hem escrit el vector posició en dues notacions diferents, però heu de tenir present que ambdues volen dir el mateix.

on el temps t es mesura en segons, i la posició en metres.

a) Calculeu la velocitat de la partícula.

b) Calculeu també el mòdul del vector posició i del vector velocitat.

c) En quines unitats es mesuren les constants 4, –1, 3 i 5 que apareixen en l'expressió del vector de posició?

Solució

a) El vector velocitat s'obté de derivar cada component del vector de posició respecte al temps:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(8t, -1, 15\cos(5t)\right) = 8t\,\vec{i} - \vec{j} + 15\cos(5t)\vec{k} \tag{79}$$

b) El mòdul d'un vector qualsevol és l'arrel quadrada de la suma de les components del vector al quadrat. Així obtenim, per al vector de posició:

$$|\vec{r}| = \sqrt{16t^4 + t^2 + 9\sin^2(5t)} \tag{80}$$

i per a la velocitat:

$$|\vec{v}| = \sqrt{64t^2 + 1 + 225\cos^2(5t)} \tag{81}$$

c) La component primera de $\vec{r}$, $x = 4t^2$, ha de donar un valor en metres quan hi substituïm un valor de t en segons; aleshores 4 s'ha de mesurar en m/s^2. D'aquesta manera, la funció $x = 4t^2$ és, explícitament:

$$x(\mathrm{m}) = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t(\mathrm{s})^2 \tag{82}$$

i la derivada d'aquesta funció resulta:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \times 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t(\mathrm{s}) \tag{83}$$

Mòdul d'un vector i vectors unitaris $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

El mòdul del vector

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

és la "longitud" del vector,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

és a dir, la distància de l'origen a l'extrem del vector.

Els vectors unitaris $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tenen mòdul unitat.
Per exemple:

$$|\vec{i}| = 1$$

perquè

$$\vec{i} = (1,0,0)$$

que en l'equació (79) hem escrit abreujadament com $v_x = 8t$. Quan donem un valor a t en segons, per exemple $t = 3$ s, obtindrem les dimensions correctes de la component x de la velocitat:

$$v_x = 8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 3\,\text{s} = 24\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{84}$$

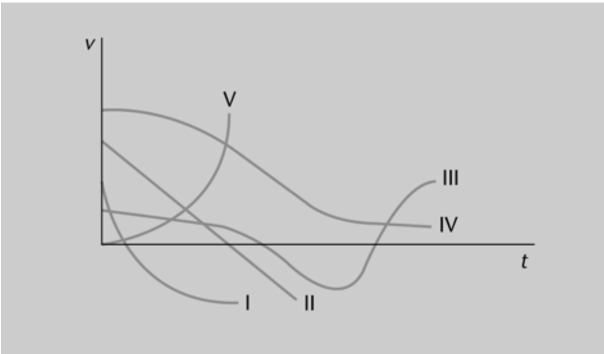
Anàlogament, el factor –1 en $y = -t$ es mesurarà en m/s. I pel que fa a la component z del vector de posició, com que les funcions trigonomètriques no tenen dimensions, el factor 3 en $z(t)$ s'ha de mesurar en metres. Finalment, com que l'argument de la funció trigonomètrica no pot tenir dimensions, és a dir, $5t$ no té dimensions per tractar-se d'un angle, aleshores el factor 5 s'ha de mesurar en s^{-1}.

Ara discutirem la velocitat en termes gràfics en un exemple.

Activitat 2.7. Gràfiques *v*(*t*)

Una partícula es mou al llarg de l'eix X. Descriviu verbalment el moviment que correspon a cada corba de la figura 35. Per exemple, en el cas V diríem que l'objecte surt des del repòs ($v = 0$), i constantment augmenta de velocitat, a un ritme cada vegada més gran.

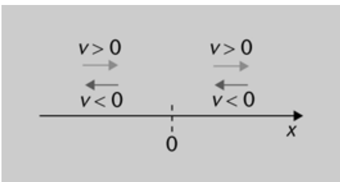
Figura 35. Velocitat de diferents partícules en funció del temps



Solució

Recordem que per a un moviment al llarg de l'eix X positiu, una velocitat positiva correspon a un moviment que s'allunya de l'origen. També és positiva la velocitat d'una partícula que es mou cap a l'origen des de valors negatius de la posició x (figura 36). La velocitat negativa es dóna quan la partícula s'acosta a l'origen des de valors positius de la posició. També és negativa la velocitat si la partícula s'allunya de l'origen des de valors negatius de la posició. Aquests resultats es poden explicar de la mateixa manera que hem fet en la figura 31, tenint en compte el signe del quocient dx/dt. També ho podeu veure perquè si el vector velocitat apunta en el sentit que hem pres positiu a l'eix, és positiva, i si apunta en el sentit contrari, és negativa.

Figura 36. Velocitats positives i negatives en una direcció determinada



En resum, les velocitats en el sentit creixent de la coordenada són positives, i negatives en sentit contrari. Ara ja podeu descriure qualitativament les funcions de la figura 35.

Corba I: La partícula inicia el moviment amb una velocitat determinada i positiva que va reduint-se fins que s'anul·la; a partir d'aquest moment la partícula es mou en direcció contrària, perquè la velocitat passa a ser negativa. A més a més, la corba té un pendent menor a mesura que passa el temps i, per tant, la velocitat negativa augmenta (en valor absolut) a un ritme menor que abans de canviar de signe.

Corba II: Aquesta és semblant al cas I, però ara la variació és lineal; la partícula inicia el seu moviment amb una velocitat determinada que es redueix linealment fins que s'anul·la. Tot seguit, continua movent-se cada vegada a major velocitat però en sentit contrari, sempre amb un augment lineal de la velocitat amb el temps.

Corba III: Fins que arriba al mínim de la corba, la descripció d'aquest moviment és com la del cas I. Una vegada arriba al mínim, és a dir, a la velocitat màxima de la partícula en direcció de coordenades decreixents, la velocitat es va reduint fins que s'anul·la de nou; a partir d'aquest moment el sentit del moviment és una altra vegada en el sentit de coordenades creixents i amb una velocitat en augment.

Corba IV: És com la I però sense que s'arribi a anul·lar la velocitat. La partícula té una velocitat positiva (en el sentit creixent de les coordenades) que es redueix amb el pas del temps; la reducció es fa més ràpida durant un interval de temps, fins que la velocitat esdevé gairebé constant.

Ara farem un altre exercici de càlcul quantitatiu de velocitats, tenint en compte el seu caràcter vectorial. Els resultats que obtindrem en l'exercici següent permetran deduir relacions generals entre la posició instantània d'una partícula i la velocitat amb què es mou. En particular, obtindrem relacions senzilles per al moviment circular. Al mateix temps, l'exercici ens servirà per a recordar conceptes com el de producte escalar de dos vectors i la derivació de productes de funcions.

Producte escalar de dos vectors

Si

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ i

$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$,

aleshores el producte escalar dels dos vectors és:

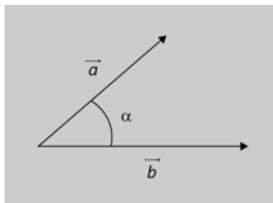
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

O, també:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

on α és l'angle que formen els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Figura 37. Angle entre dos vectors.



Activitat 2.8. Vector de posició i de velocitat

A partir del vector de posició per a un punt qualsevol de la trajectòria d'una partícula en l'espai:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) \tag{85}$$

a) Calculeu el producte escalar $\vec{r} \cdot \vec{r}$.

b) Demostreu que l'expressió anterior també es pot escriure així, $\vec{r} \cdot \vec{r} = r \cdot r$, on r és el mòdul del vector de posició.

c) Demostreu que si derivem respecte del temps l'expressió $\vec{r} \cdot \vec{r} = r \cdot r$ obtenim:

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = r \cdot \frac{dr}{dt} \tag{86}$$

d) Si ara suposem el cas particular que el moviment de la partícula és al voltant d'un cercle de radi *R*, quin resultat obteniu per als apartats b) i c)? Interpreteu gràficament el resultat c) per a aquest cas particular.

Solució

a) El producte escalar del vector de posició per ell mateix dóna:

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = x^2 + y^2 + z^2 \tag{87}$$

Derivada d'un producte

Si $y = u \cdot v$, i tant u com v són funcions d'una altra variable x, aleshores la derivada de y respecte de x és:

$$y' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

b) D'altra banda, el mòdul del vector de posició és:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{88}$$

Per tant, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, que coincideix amb $\vec{r} \cdot \vec{r}$.

Una altra forma d'arribar-hi és recordant l'expressió equivalent del producte escalar de dos vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ en terme del cosinus de l'angle α que formen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \tag{89}$$

Com que dos vectors idèntics formen un angle de 0°, tenim`:

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = |\vec{r}||\vec{r}| \cdot \cos 0° = r \cdot r \cdot 1 = r^2 \tag{90}$$

c) La derivada del producte dels dos vectors o dels dos escalars:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{r})=\frac{d}{dt}(r\cdot r) \tag{91}$$

dóna:

$$\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r}=r\frac{dr}{dt}+\frac{dr}{dt}\cdot r \tag{92}$$

i la commutativitat del producte escalar de dos vectors (1r membre de l'expressió anterior) o del producte de dues funcions (2n membre) permet escriure que:

$$2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=2r\frac{dr}{dt} \tag{93}$$

I si recordem l'expressió (75) del vector velocitat, $\vec{v}=d\vec{r}/dt$, escriurem:

$$\vec{r}\cdot\vec{v}=r\frac{dr}{dt} \tag{94}$$

d) Per a una partícula que es mou al voltant d'un cercle de radi R (figura 38), la distància al centre de gir és constant, $|\vec{r}|=R,$ i l'expressió (90) és:

$$\vec{r}\cdot\vec{r}=R^2 \tag{95}$$

Figura 38. Una partícula en moviment circular de radi *R*

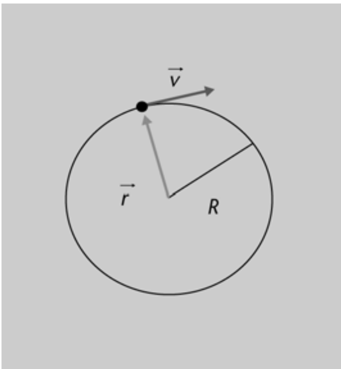


Figura 38

La direcció del vector velocitat en el cas de la figura indica que la partícula es mou en sentit horari (és a dir, en el sentit de les agulles d'un rellotge).

D'altra banda, l'expressió (94) dóna:

$$\vec{r}\cdot\vec{v}=0 \tag{96}$$

perquè el mòdul del vector de posició és constant i, per tant, la seva derivada és nul·la, *dR/dt* = 0. És a dir, si recordem l'expressió (89) del producte escalar de dos vectors, concloem del resultat (96) que els vectors de posició i velocitat són perpendiculars en tot instant en un moviment circular, perquè si els mòduls dels vectors no s'anul·len, el producte (89) només es pot anul·lar si cos α = 0, és a dir, si α = 90°. Això és també clar de la figura 38, perquè les rectes tangents a la trajectòria circular, que donen la direcció del vector velocitat, són perpendiculars als radis corresponents.

2.2.4. Què hem après?

La velocitat d'una partícula és una magnitud vectorial:

- És la derivada del vector de posició respecte del temps (definició).
- Expressa l'espai que recorre una partícula per unitat de temps (significat).

- Es mesura en metres per segon (unitats).
- Indica quina és la direcció i sentit del moviment de la partícula en cada instant, a través de la recta tangent a la trajectòria en cada punt (significat geomètric).

La descripció completa d'un moviment no es pot fer només en termes de posició i velocitat, cal fer servir també el concepte d'acceleració. Vegem-ho.

2.3. L'acceleració

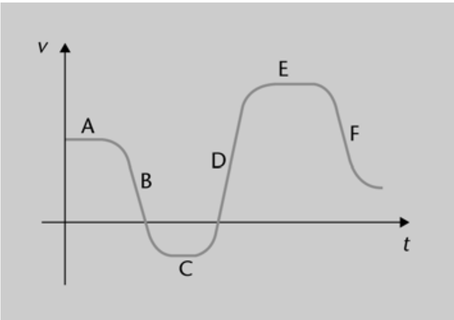
Tenim una idea intuïtiva de la magnitud **acceleració**: un vehicle s'accelera quan la seva velocitat canvia amb el temps.

Per exemple, quan engegueu la marxa estant aturats o aneu en cotxe a una velocitat determinada i premeu l'accelerador, el vehicle augmenta de velocitat. També s'accelera quan us moveu a una velocitat determinada i premeu el pedal del fre: la velocitat del vehicle es redueix, i aquest pot arribar a aturar-se si manteniu el peu al fre. En aquest darrer cas l'acceleració redueix la velocitat (també diem que el vehicle es desaccelera, o frena).

Per tant, una acceleració implica un canvi de velocitat.

En quin interval de temps s'està accelerant la partícula que té la velocitat representada en la figura 39?

Figura 39. Velocitat d'una partícula en funció del temps



La partícula s'està accelerant en tots els intervals de temps en què v no sigui constant. En els intervals en què la corba és paral·lela a l'eix t (A, C i E), la velocitat és constant; en tots els altres punts la partícula està accelerada. Si el pendent de la corba $v(t)$ és positiu, com en D, la partícula augmenta la velocitat, és a dir, s'accelera (acceleració positiva) i si el pendent és negatiu, com en B i F, la partícula s'està frenant (acceleració negativa).

Activitat 2.9. Acceleracions

En els moviments representats en la figura 35 de l'activitat 2.7 hi ha algun instant o interval de temps en què la partícula estigui accelerada?

Solució

La velocitat varia en tot instant per a qualsevol dels cinc moviments de la figura 35 i, per tant, la partícula sempre està accelerada.

En termes col·loquials anomenem acceleració al canvi de velocitat que es produeix en una partícula que es mou; per exemple, si viatgem a 50 km/h i passem a 60 km/h. Però una acceleració també és un canvi en la direcció de moviment. Molts dels moviments que observem són moviments accelerats (o han estat accelerats en algun moment, o ho seran). Així, si un vehicle està aturat i es comença a moure de manera que augmenta la seva velocitat fins a arribar a una velocitat v, el vehicle s'està accelerant durant tot aquest temps. Si el vehicle gira una cantonada a una velocitat constant de 20 km/h, també està accelerat en tot moment, perquè la direcció de la velocitat canvia constantment. Si un vehicle deixa d'accelerar-se, es mou a velocitat constant i en línia recta.

Vegem un altre exemple. La Terra, en el seu moviment al voltant del Sol, descriu una trajectòria quasi circular (lleugerament el·líptica). Està accelerada, la Terra?

Activitat 2.10. Vector de posició, velocitat i acceleració

Representeu el moviment de la Terra al voltant del Sol com una circumferència, amb el Sol en el centre, i representeu en diversos instants el moviment de la Terra mitjançant el seu vector de posició respecte al Sol. Representeu també el vector de velocitat de la Terra en un punt de la trajectòria. Està accelerada la Terra en el seu moviment?

Solució

La gràfica de l'activitat 2.8 (figura 38) ens serveix. El vector velocitat i el vector de posició són perpendiculars en tot instant. A més a més, com que el vector velocitat està canviant de direcció en tot moment, el moviment de la Terra està accelerat contínuament.

En definitiva, s'anomena **acceleració** al canvi en la velocitat d'un objecte, bé sigui en el mòdul de la velocitat, bé en la direcció del moviment, o bé en les dues magnituds alhora.

Ara que hem desenvolupat qualitativament el concepte d'acceleració, cal definir-lo. Seguirem el mateix procés que en la definició de la velocitat i començarem per la definició del valor mitjà de l'acceleració en un interval de temps.

2.3.1. Acceleració mitjana

Tenint en compte tot el que acabem de dir sobre acceleracions i del que sabem sobre la lectura de quocients, com es llegeix l'expressió següent?

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{97}$$

Si recordem el que vam dir en introduir la velocitat mitjana en el subapartat 2.2.1, el mateix s'aplica a l'**acceleració mitjana** (equació (97)).

L'acceleració mitjana d'un cos que canvia la seva velocitat en un interval (o en un increment) $\Delta\vec{v}$ durant un interval o increment de temps Δt és igual al quocient entre l'increment de velocitat i l'increment de temps corresponent. L'acceleració mitjana és el canvi de velocitat que ha experimentat el cos per unitat de temps.

L'acceleració mesura el ritme de canvi de la velocitat d'un cos. La velocitat mesura el ritme de canvi de la posició del cos.

El ritme de canvi d'una magnitud és el canvi que es produeix en aquesta magnitud per unitat de temps.

Analitzem la definició d'acceleració mitjana.

Activitat 2.11. Definició de $\langle\vec{a}\rangle$

Com ja hem insistit en l'apartat 1, és important que aprenguem a definir correctament les magnituds. Per exemple, seria incorrecte dir, pel que fa a l'equació (97), que "l'acceleració mitjana $\langle\vec{a}\rangle$ d'un cos que canvia la seva velocitat en Δv durant un temps Δt és igual al canvi de velocitat que ha patit el cos en aquest interval de temps."

a) Expliqueu per què.
b) Expliqueu quin significat té el concepte d'acceleració mitjana.
c) Com de petit ha de ser l'interval Δt perquè la definició sigui vàlida?

Solució

a) La definició és incorrecta, perquè aleshores estaríem dient que una acceleració és un canvi de velocitat. L'acceleració és el canvi de velocitat per unitat de temps. No és el mateix dir "en un interval de temps" que "per unitat de temps".

b) L'acceleració mitjana d'una partícula en un interval de temps donat és el canvi constant de velocitat que tindria la partícula per unitat de temps si la velocitat canviés al mateix ritme durant tot l'interval.

c) Quan calculem les mitjanes temporals d'una magnitud, sigui la velocitat o l'acceleració, l'increment de temps pot ser qualsevol, fins i tot molt gran o molt petit. No hi ha cap restricció. L'acceleració mitjana que calculem en cada cas tindrà significat en l'interval de temps en què l'hem calculada.

Ara ja estem en condicions de definir la magnitud acceleració instantània.

2.3.2. Acceleració instantània

Si una partícula es mou amb una velocitat $\vec{v}$ i aquesta velocitat varia amb el temps segons una funció $\vec{v}(t)$, l'acceleració instantània de la partícula es defineix com:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (98)$$

L'acceleració és una magnitud vectorial, igual que ho és la velocitat.

I de la mateixa manera que vam dir quan vam introduir la velocitat instantània en el subapartat 2.2.2, podem dir com es **calcula** i què **representa** l'**acceleració instantània**.

L'acceleració és una magnitud vectorial que es calcula com la derivada del vector velocitat respecte del temps. L'acceleració representa el canvi de velocitat de la partícula que es produeix per cada segon.

L'acceleració instantània s'obté mitjançant el pas al límit d'un quocient incremental que no és més que l'acceleració mitjana que té la partícula en l'interval Δt.

Si fem explícita la definició de derivada:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{99}$$

queda més clar que per tal d'arribar a la definició d'acceleració instantània com a quocient diferencial, hem de passar abans pel concepte d'acceleració mitjana com a quocient d'increments, igual que vam fer amb la magnitud velocitat en el subapartat 2.2 (i de la mateixa manera que es pot fer amb qualsevol magnitud que es defineixi com un quocient i en forma diferencial).

Derivades

La derivada d'una funció $y(x)$ respecte a la variable x s'escriu

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

i la derivada segona s'escriu

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Les mateixes expressions valen per a funcions vectorials.

Hem començat el subapartat amb una definició d'acceleració en termes verbals i qualitatius (és a dir, una definició que ens permet parlar-ne i saber quan n'hi ha): "anomenem acceleració al canvi de velocitat que es produeix en una partícula que es mou".

Una definició operativa d'acceleració (és a dir, una definició que ens permet calcular-la), es pot llegir així: "l'acceleració és la derivada de la velocitat respecte al temps".

També podem dir que el vector acceleració s'obté derivant el vector velocitat respecte al temps, equació (98): com que segons l'equació (75) la velocitat és la derivada del vector de posició respecte al temps,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{100}$$

aleshores si derivem aquesta expressió, veiem que l'acceleració d'una partícula també és la derivada segona del vector de posició respecte al temps dues vegades:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{101}$$

Com acabem de comentar, les magnituds que convé definir en ciències o en tecnologia sempre tenen definicions qualitatives i quantitatives (o operatives). Una altra qüestió, que no discutirem ací, és com podríem "determinar" o "mesurar" experimentalment les magnituds, com ara l'acceleració. I, finalment, hem de considerar sempre les unitats en què es mesura la magnitud física corresponent. En el cas de l'acceleració, a partir de l'expressió (98) veiem que:

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} \tag{102}$$

on hem representat entre claudàtors les magnituds, per a indicar que només volem saber les unitats en què es mesuren. Com que les velocitats es mesuren en m/s, obtenim:

$$[a] = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{103}$$

En l'expressió (102) hem tingut en compte que l'increment d'una magnitud té les mateixes dimensions que la magnitud, perquè un increment és una resta de dos valors de la mateixa magnitud.

Vegeu l'equació 61 i el requadre en què es troba per recordar què vol dir *increment*.

En el Sistema Internacional d'unitats, l'acceleració és una magnitud derivada, igual que la velocitat, i es defineix en termes de les magnituds fonamentals longitud i temps. La unitat del SI per a l'acceleració és (m/s)/s o m/s^2 i es llegeix, respectivament, metres per segon per cada segon o metres per segon al quadrat. Parlem, per exemple, d'una acceleració de 3 m/s^2, que llegim així: "una acceleració de 3 metres per segon per cada segon" (de manera que recordem l'origen d'aquesta magnitud com a quocient d'una velocitat i d'un temps), o bé "una acceleració de 3 metres per segon al quadrat", de manera que simplement llegim l'expressió m/s^2. El llenguatge verbal, però, té ambigüitats que no té el llenguatge matemàtic.

Ambigüitats del llenguatge

Si diem "3 per 4", sabem que ens referim a l'operació de multiplicar, "3 × 4". Però no oblidem que la preposició "per" té el significat de divisió quan llegim m/s^2, metres *per* segon al quadrat. En altres contextos pot tenir el significat de multiplicació, com ara en "a per t dóna v" (simbòlicament, $v = a \cdot t$). Per a evitar confusions se sol utilitzar "per" quan parlem d'unitats, com ara en els metres per segon (m/s) o en els newtons per gram (N/g). Però no s'esmenta l'operació de multiplicar quan es tracta d'unitats que es multipliquen: newton metre (N · m), quilogram segon (kg · s), etc.

2.3.3. Vector acceleració

A partir de la definició (98) o (101), les tres components cartesianes del vector acceleració,

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{104}$$

són, explícitament:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \qquad (105)$$

Vegem com determinem l'acceleració en un tipus de moviment important, el de rotació.

Activitat 2.12. Acceleració en la rotació uniforme

En el cas d'un moviment circular el vector de posició de la partícula respecte al centre de la trajectòria i el vector velocitat són perpendiculars en tot punt i, per això, el producte escalar del vector de posició de la partícula i el vector velocitat s'anul·la, com hem vist en l'activitat 2.8.

Què obtenim si tornem a derivar l'expressió $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$? (Suposeu que el mòdul de la velocitat és constant, és a dir, la partícula recorre el mateix nombre de metres cada segon en tot instant.)

Solució

Per al moviment circular, el producte escalar del radi vector i de la velocitat en tot instant és nul, equació (96):

Radi vector

Radi vector és el nom que rep el vector de posició en un moviment circular.

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \qquad (106)$$

Si derivem respecte al temps aquesta expressió, obtenim:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{r}\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \qquad (107)$$

I si reconeixem les expressions de la velocitat i de l'acceleració en l'expressió anterior podrem escriure:

$$\vec{v}^2 + \vec{r} \cdot \vec{a} = 0 \qquad (108)$$

Per tant, com que $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$ és una magnitud escalar, hem deduït que:

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = -v^2 \qquad (109)$$

i si escrivim explícitament l'expressió del producte escalar:

$$|\vec{r}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\theta = -v^2 \qquad (110)$$

Com que els mòduls dels vectors que apareixen en l'equació anterior i el quadrat de la velocitat són positius, concloem que $\cos\theta = -1$, i l'angle que formen els vectors de posició i l'acceleració és de 180° o π radians: $\vec{r}$ i $\vec{a}$ són antiparal·lels en tots els punts de la trajectòria.

En un moviment circular, el vector de posició i el vector velocitat són perpendiculars (figura 40a) i, per tant, també són perpendiculars els vectors velocitat i acceleració (figura 40b). L'acceleració és, per tant, centrípeta: dirigida cap al centre de la circumferència i de sentit contrari al vector de posició.

Figura 40. Moviment de rotació a velocitat constant

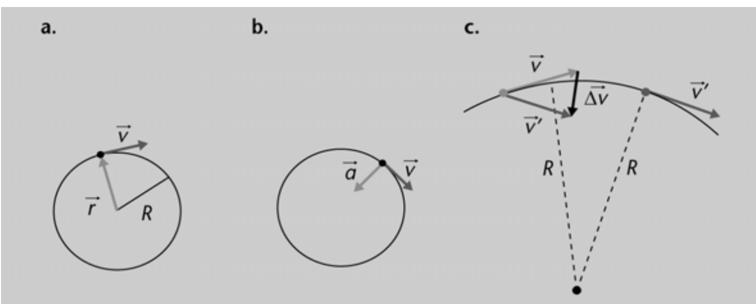


Figura 40

a. Vector de posició i velocitat.
b. Velocitat i acceleració.
c. Increment de velocitat per a un increment de temps petit.

Es parla d'**acceleració centrípeta**, doncs, quan en un moviment de rotació la partícula està contínuament sotmesa a una acceleració dirigida cap al centre de la trajectòria. El seu valor, en mòdul, és:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \tag{111}$$

Aquest resultat convé que el recordeu: s'obté de l'equació (110) si fem $\theta = \pi$ i anomenem a_c al mòdul de l'acceleració, $a_c = |\vec{a}| = a$ i $R = |\vec{r}| = r$.

La figura 40c mostra la velocitat $\vec{v}$ en un instant i la velocitat $\vec{v}'$ en un instant posterior. Es pot veure que l'acceleració és centrípeta perquè el canvi del vector velocitat entre dos punts de la trajectòria, $\Delta\vec{v}$, per a un increment de temps que tendeix a zero, té la direcció radial i dirigida al centre; i en dividir el canvi de velocitat per l'increment infinitesimal de temps obtenim el vector acceleració, que també estarà dirigit cap al centre.

En un moviment circular, el mòdul de l'acceleració dirigida cap al centre de la trajectòria és l'acceleració centrípeta:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

El càlcul analític d'una acceleració a partir de la posició o de la velocitat de l'objecte es redueix a fer la derivada corresponent respecte al temps. Fem un exercici.

Activitat 2.13. Acceleracions

Calculeu l'acceleració per als moviments que s'han discutit en les activitats 2.5 i 2.6.

Solució

En l'activitat 2.5 hem vist que la velocitat del cos varia linealment amb el temps:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 12t \tag{112}$$

i, per tant, l'acceleració de la partícula és constant:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{113}$$

Fixem-nos que en l'expressió de la velocitat, $v = 12 \cdot t$, no cal especificar en quines unitats mesurem el factor 12 que multiplica el temps, sempre que sapiguem en quines unitats es mesuren v i t; per contra, en el cas que escrivim $a = 12$ sí que convé especificar les unitats corresponents, com hem fet.

En l'activitat 2.6 hem obtingut que:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(8t, -1, 15\cos(5t)\right) = 8t\,\vec{i} - \vec{j} + 15\cos(5t)\vec{k} \tag{114}$$

i, per tant:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(8, 0, -75\sin(5t)\right) = 8\vec{i} - 75\sin(5t)\vec{k} \tag{115}$$

En aquest cas només la tercera component de l'acceleració és funció del temps.

2.3.4. Què hem après?

Ens hem fet una idea qualitativa i hem aprés a calcular quantitativament la magnitud vectorial que anomenem acceleració, tant el valor mitjà com l'instantani.

A mesura que avancem en l'estudi de la cinemàtica podem analitzar situacions més i més complexes, i amb l'ajuda de les magnituds que s'introdueixen podem abordar també la resolució de problemes quantitatius, no sols de qualitatius. En veurem algun exemple en l'apartat següent, on serem capaços de trobar lleis de moviment de partícules en situacions concretes.

2.4. Deducció de les equacions de moviment

Una llei del moviment o una equació del moviment ens indica quina posició ocupa en cada instant l'objecte que es desplaça. La caracterització total d'un moviment en termes cinemàtics requereix conèixer les tres funcions posició, velocitat i acceleració, $\vec{r}(t), \vec{v}(t), \vec{a}(t)$. Però només necessitem conèixer una d'aquestes funcions per a tenir determinades les altres dues, perquè totes tres estan relacionades. Vegem-ho. Com que la discussió és semblant si tractem moviments en una, dues o tres dimensions, serà suficient si ens centrem en el cas més senzill del moviment unidimensional.

Per a un moviment en una dimensió al llarg d'una recta (l'eix *X*, per exemple) caldria conèixer la funció $x(t)$ per a tenir totalment determinat el moviment, perquè la velocitat i l'acceleració en tot instant s'obtenen per derivació d'aquesta funció, equacions (77) i (105):

$$v_x = \frac{dx}{dt} \tag{116}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{117}$$

Vectors que depenen del temps

Amb la notació $\vec{r}(t)$ per al vector de posició estem donant tres funcions del temps,

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

Vectorialment,

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

i anàlogament per als vectors velocitat i acceleració.

Però què ocorre si coneixem, per exemple, únicament la funció velocitat $v_x(t)$? Aleshores podrem determinar fàcilment l'acceleració per derivació, com en l'expressió (117) anterior.

I quina és la funció $x(t)$ que correspon a una velocitat $v_x(t)$ donada? La relació entre ambdues magnituds és l'equació (116). Una equació com la (116), en què la incògnita, *x*, està dins del signe de derivació, s'anomena *equació diferencial*. Per a obtenir la posició $x(t)$ es pot començar escrivint l'equació (116) en termes de diferencials, aïllant el diferencial de la posició, *dx*:

$$dx = v_x dt \tag{118}$$

Constant, uniforme, estàtic

Constant: que no varia. Pot ser constant en el temps, respecte a la posició, etc.

Uniforme: que té el mateix valor en tots els punts de l'espai.

Estacionari: que no depèn del temps. Pot ser estacionari però no uniforme, és a dir, tenir valors diferents en punts diferents de l'espai.

i integrar els dos membres de la igualtat (recordem que la integració és l'operació inversa de la derivació) per a obtenir la posició a partir de la velocitat.

La posició es calcula a partir de la velocitat amb la següent expressió:

$$x = \int v_x dt + \text{constant} \tag{119}$$

Aquesta expressió es llegeix així: "la posició d'una partícula s'obté mitjançant la integral respecte al temps de la velocitat de la partícula".

La constant indeterminada que apareix quan calculem una integral indefinida es pot determinar si coneixem el valor de la posició en algun instant concret de temps. En el subapartat 1.5.2 ja vam dir que en tot problema de cinemàtica calia conèixer les condicions inicials del problema, és a dir, l'estat del moviment en un instant determinat, que és l'instant inicial.

Per tant, per a conèixer la posició d'una partícula en tot moment només cal integrar l'expressió (119) per a un moviment unidimensional en què es conegui la velocitat. Tot seguit veurem el cas més senzill que es pot presentar, el d'una partícula que es mou a velocitat constant.

2.4.1. Velocitat constant

El cas més senzill de moviment és quan un cos es mou de manera que el vector velocitat sigui constant, $\vec{v} = \text{constant}$. Es tracta d'un moviment rectilini i uniforme. Aleshores, si triem l'eix *X* en la direcció del moviment, podem escriure la velocitat així, $\vec{v} = (v, 0, 0)$, és a dir:

$$v_x = v \tag{120}$$

on *v* és constant. En aquest cas la integral (119) és immediata, perquè la velocitat constant pot sortir de la integral:

$$x = v\int dt + constant \tag{121}$$

i les operacions de diferenciació i integració són inverses:

$$\int dt = t \tag{122}$$

L'equació de moviment que s'obté de l'equació (119) és, doncs:

$$x = vt + constant \tag{123}$$

Si la posició de la partícula és x_0 per a $t = 0$ (la posició inicial), tenim:

$$x(t = 0) = x_0 \tag{124}$$

I a partir de l'equació (123) veiem que la constant ha de ser el valor x_0, i la llei que dóna l'espai que recorre l'objecte en un temps determinat és:

$$x = x_0 + vt \tag{125}$$

Com ja sabem des de l'apartat 1, a un moviment a velocitat constant li correspon un desplaçament que augmenta linealment amb el temps i, per tant, la gràfica corresponent és una recta en el pla $x(t)$. Si el vehicle surt de l'origen, aleshores $x = v \cdot t$; l'espai que recorre coincideix amb la posició que ocupa en cada instant i és el producte de la velocitat pel temps.

Vegem ara un cas una mica més complex de determinació de la llei del moviment.

2.4.2. Acceleració constant

Fem ara la deducció de les equacions de moviment en un altre cas. Teníem pendent des del subapartat 1.2 la deducció de l'equació que dóna el temps necessari perquè un objecte (un bitllet, en aquell cas) caigui des d'una altura determinada quan el deixem anar. L'acceleració de caiguda del bitllet és constant, i l'anomenem *acceleració de la gravetat*. Per tant, estudiarem el cas particular, però ben freqüent, d'una partícula que es mou en una dimensió de manera que està sotmesa a una acceleració constant, a.

Bitllet en caiguda lliure

Heu d'anar amb compte amb l'experiment del bitllet. Si ho proveu, el bitllet, en caure, farà moltes giragonses i arribarà de seguida a una certa velocitat límit. Això és perquè el bitllet té molt poca massa i presenta molta superfície en contacte amb l'aire, de manera que es veu molt afectat pel fregament. Per a ignorar aquests efectes, que ara no ens interessen, podeu imaginar que el bitllet és una làmina de metall o bé que fem l'experiment sense aire.

Si la partícula surt des del repòs, quina serà l'equació de la trajectòria d'aquesta partícula? És a dir, quina funció dóna la posició de la partícula en funció del temps i també la velocitat de la partícula en funció del temps?

El problema físic ja l'hem enunciat, i la resta és "només" un problema matemàtic. Per tal de trobar l'equació de moviment hem de resoldre l'equació següent:

$$\frac{dv}{dt} = a \tag{126}$$

on l'acceleració a és una constant que se suposa coneguda. Es tracta de resoldre l'equació diferencial (126), en què la incògnita és la funció v que apareix dins del signe de derivació. Ja ens hem trobat abans amb un problema semblant, quan hem passat de l'equació (116) a la (118).

L'equació diferencial (126) té una solució senzilla, ja que estem cercant una funció $v(t)$ que tingui una derivada constant, i això només ocorre per a la funció lineal. Tanmateix, calculem la solució de l'equació diferencial pas a pas, com si es tractés d'una funció $a = a(t)$ qualsevol. Primer reescrivim l'equació diferencial així:

$$dv = a \cdot dt \tag{127}$$

i integrem els dos membres:

$$\int dv = \int a \cdot dt \tag{128}$$

Per tant, si coneixem la funció $a(t)$, la velocitat instantània $v(t)$ ve donada per:

$$v = \int a \cdot dt + constant \tag{129}$$

És a dir, com ens ensenyen en el curs de matemàtiques, necessitem trobar la funció primitiva de a, i el resultat sempre està afectat d'una constant que, com hem vist en el cas de la velocitat, equació (123), estarà determinada per la situació física concreta que estem resolent en cada cas.

En el cas senzill que l'acceleració a sigui constant, a pot sortir de la integral en l'equació (129) i, així:

$$v = a\int dt + constant \tag{130}$$

Com que la integració i la derivació són operacions inverses, equació (122), escriurem:

$$v = a \cdot t + constant \tag{131}$$

Com hem dit, la constant indeterminada que apareix en calcular una integral indefinida es pot determinar per consideracions sobre el problema físic que estem resolent. Necessitem conèixer les condicions inicials del moviment per tal de determinar-lo totalment. En el problema de caiguda d'un bitllet, la partícula surt del repòs i s'accelera; la velocitat en l'instant $t = 0$ (que podem prendre com a instant inicial) serà, per tant, nul·la. Aleshores, l'equació (131) ha de donar $v = 0$ per a $t = 0$. Aquesta condició, $v(t = 0) = 0$, determina la constant en l'equació (131), que en aquest cas serà nul·la:

$$v(t = 0) = 0 = a \cdot 0 + constant \Rightarrow constant = 0 \tag{132}$$

Per tant, per a un cos que s'accelera amb acceleració constant i surt des del repòs, la velocitat en l'instant t és:

$$v = a \cdot t \tag{133}$$

és a dir, surt del repòs i s'accelera linealment en el temps.

A algú de vosaltres us pot semblar que hem matat mosques a canonades, en resoldre aquest problema tan senzill amb tant de detall. Però el procediment i l'argumentació emprada en aquest tipus de problema sempre és semblant, i l'única dificultat amb què ens podem trobar és en fer la integral corresponent, $\int a\,dt$.

En què canvia el problema si la caiguda no és lliure? Si llancem un objecte cap a terra amb una determinada velocitat inicial v_0, el càlcul de la velocitat $v(t)$ és idèntic a l'anterior, tret del pas (132), en què farem:

$$v(t=0) = v_0 = a \cdot 0 + constant \Rightarrow constant = v_0 \tag{134}$$

i, per tant, la velocitat també varia linealment amb el temps, però ara tenim un terme independent en l'expressió de la recta $v(t)$:

$$v = v_0 + a \cdot t \tag{135}$$

en lloc del resultat (133). Ja no hi ha proporcionalitat entre t i v.

Per tal de determinar totalment el moviment necessitem calcular la posició de la partícula en tot instant, per al cas d'un moviment amb acceleració constant. Vegem-ho.

2.4.3. Espai recorregut en un moviment accelerat

El moviment de la partícula que s'accelera des del repòs està totalment caracteritzat quan, a més de la velocitat, en coneixem la posició en cada instant. El procés que hem de seguir és semblant al del subapartat anterior, però ara coneixem la funció $v(t) = a \cdot t$, equació (133), si suposem que el moviment comença des del repòs.

Per a un moviment $z(t)$ al llarg de la línia definida per l'eix Z, per exemple, la velocitat es defineix així:

$$v = \frac{dz}{dt} \tag{136}$$

De l'expressió anterior, que és la definició general de la component z del vector velocitat, coneixem el terme de l'esquerra, la velocitat (133), però no la funció $z(t)$.

L'expressió anterior és, per tant, una altra equació diferencial, que escriurem així (posant la part que no coneixem a l'esquerra):

$$\frac{dz}{dt} = a \cdot t \tag{137}$$

Per tal d'obtenir l'equació de la trajectòria, $z(t)$, passem la diferencial dt al membre de la dreta, com en les equacions (118) i (127):

$$dz = a \cdot t \cdot dt \tag{138}$$

i, en integrar, obtenim la funció de l'espai recorregut:

$$z = \int a \cdot t \cdot dt + C \tag{139}$$

on C és una altra constant indeterminada. En el cas particular que l'acceleració sigui constant podem traure-la de la integral i la integral resultant és immediata:

$$z = a\int t \cdot dt + C = \tfrac{1}{2}at^2 + C \tag{140}$$

Valors inicials

$z(0)$ és la posició de la partícula en l'instant $t = 0$,

$$z(t = 0) = z_0$$

Anàlogament podem definir la velocitat inicial,

$$v(t = 0) = v_0$$

La constant C es determina segons el problema que tractem. Per exemple, si la partícula està en el punt $z = z_0$ en l'instant $t = 0$, és a dir, $z(t = 0) = z_0$, obtindrem el següent resultat en substituir aquests valors en l'expressió (140):

$$z(t = 0) = z_0 = 0 + C \tag{141}$$

i, per tant, $C = z_0$. Escriurem, per fi, de les expressions (140) i (141):

$$z = \tfrac{1}{2}at^2 + z_0 \tag{142}$$

Les equacions (142) i (133) donen la posició i la velocitat, respectivament, per a un objecte que es mou amb acceleració constant, i poden servir per a resoldre un gran nombre de problemes. Vegem alguns exemples.

Activitat 2.14. Representació gràfica de magnituds relacionades amb el moviment

Prenem un eix de coordenades z vertical i que té el sentit positiu cap a dalt.

Representeu gràficament les funcions $z(t)$, $v(t)$ i $a(t)$ per al moviment d'un objecte que surt del repòs amb acceleració constant a i dirigida en el sentit de z creixent. Feu també el cas en què l'acceleració vaja en el sentit de les z decreixents, i igual en mòdul a la de la gravetat, $a = g$.

Solució

Les expressions (142), (133) i a = constant són, gràficament, les de la figura 41.

Figura 41

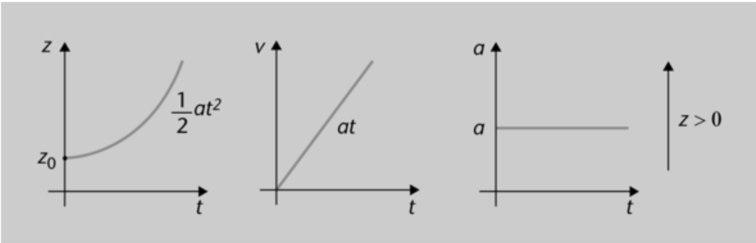


Figura 41

Eix z de coordenades i moviment amb acceleració constant i dirigida en el sentit positiu de l'eix z:
a. posició,
b. velocitat i
c. acceleració.

La posició instantània de la partícula que es mou amb acceleració constant i surt del repòs és, gràficament, una paràbola (figura 41a), una dependència quadràtica $z(t)$ en què z creix molt ràpidament en créixer el temps (equació 142). La segona representació (figura 41b), la de la velocitat instantània de la partícula, és una recta de pendent a (equació132). La tercera gràfica (figura 41c), representa l'acceleració, i és una recta horitzontal, un valor constant per a tot t.

Quan l'acceleració té el sentit negatiu de l'eix Z la paràbola és decreixent (figura 42a), perquè l'expressió (142) és ara:

$$z = z_0 - \tfrac{1}{2}at^2 \qquad (143)$$

D'altra banda, la recta $v(t)$ de l'equació (133) té ara pendent negatiu (figura 42b):

$$v = -a \cdot t \qquad (144)$$

i l'acceleració és una constant negativa (figura 42c).

Figura 42

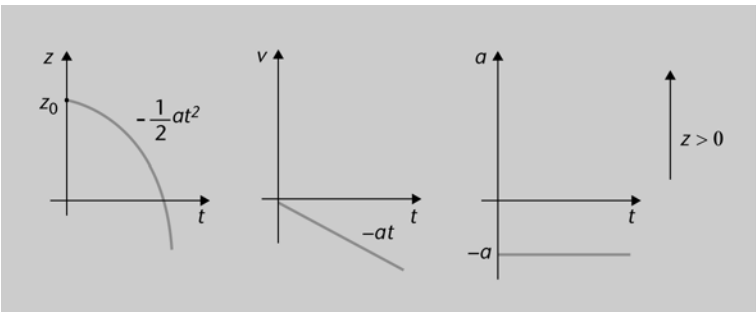


Figura 42

Eix z de coordenades i:
a. posició,
b. velocitat i
c. acceleració per a un moviment amb acceleració constant i dirigida en el sentit negatiu de l'eix z.

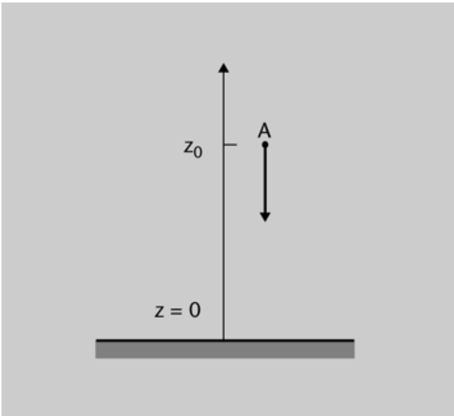
La representació gràfica que hem vist en l'activitat anterior potser facilitarà la discussió del problema següent de caiguda lliure.

2.4.4. Caiguda lliure: lleis del moviment

Un cas particular ben important dels moviments uniformement accelerats (o moviments que tenen una acceleració constant) és el dels objectes que es deixen caure o que es llancen en qualsevol direcció i cauen a terra. Com sabem, la Terra atrau tots els objectes cap a ella en un moviment de caiguda que és uniformement accelerat; l'acceleració que té un objecte que cau lliurement a terra és:

$$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \tag{145}$$

Figura 43. Un objecte A cau a terra ($z = 0$) des d'una altura z_0



Les equacions de moviment d'una partícula que cau a terra lliurement des d'una altura determinada, i sense velocitat inicial, són les equacions (143) o (144). Veiem en les expressions (142) o (143) que les distàncies que recorre l'objecte en caiguda lliure són proporcionals al quadrat del temps que transcorre; amb $\Delta z = z - z_0$ podem escriure aquesta proporcionalitat així:

$$\Delta z = \frac{1}{2}at^2 \tag{146}$$

és a dir:

$$\Delta z \propto t^2 \tag{147}$$

Es pot veure gràficament aquest resultat en les figures 41 i 42.

Ara ja podem tornar a l'experiment del bitllet que cau, de l'apartat 1.

Activitat 2.15. Relacionem situacions

a) Feu la correspondència entre els resultats anteriors per a un cos en caiguda lliure i el problema del bitllet que cau (subapartat 1.2).

b) Calculeu també la velocitat amb què cau a terra un objecte des d'una altura L.

Solució

El temps que triga a caure una partícula des de l'altura $z_0 = L$ fins a terra ($z = 0$) és, segons l'expressió (143), amb $a = g$, el següent:

$$0 = L - \frac{1}{2}gt^2 \tag{148}$$

i aïllem el temps:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} \tag{149}$$

Hem deduït, per tant, l'expressió (1) de l'apartat 1: el temps que dóna l'equació (149) és el que triga el punt superior d'un bitllet de longitud L a tocar terra. En altres paraules, és el temps que triga a passar verticalment tot el bitllet per un punt de l'espai en caiguda lliure. L'expressió (149) s'ha obtingut a partir del càlcul de la trajectòria d'una partícula que es mou amb acceleració constant.

De la mateixa manera que hem deduït l'expressió del temps de caiguda lliure d'un objecte qualsevol, podem deduir la velocitat amb què arribaria l'objecte a terra. Si en l'expressió (144), amb $a = g$, $v = -gt$, substituïm el temps de caiguda lliure, equació (149), obtenim:

$$v = -g \cdot \sqrt{\frac{2L}{g}} = -\sqrt{2gL} \tag{150}$$

Recordeu

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

La velocitat de caiguda depèn de l'arrel quadrada de l'altura inicial de l'objecte. El signe negatiu indica que és una velocitat que té el sentit negatiu de l'eix Z, és a dir, una velocitat descendent.

En l'expressió (150) no apareix la massa de l'objecte que cau. Per tant, tots els objectes que cauen des d'una altura L sota l'acció únicament de la gravetat terrestre, arriben a terra amb la mateixa velocitat en mòdul, $\sqrt{2gL}$. Per exemple, un objecte que cau d'una altura de 10 m arriba al terra a una velocitat aproximada de 14 m/s.

2.4.5. Altres exemples de moviments

Per a acabar l'apartat farem un parell d'activitats en què analitzarem un exemple de moviment fent servir els llenguatges gràfic, verbal i algebraic.

Activitat 2.16. Gràfiques de velocitat i acceleració

Un vehicle es mou sobre una recta. Des de l'instant $t = 0$ fins a l'instant t_1 el vehicle té una velocitat constant v_1, i en aquest instant comença a accelerar-se amb una acceleració constant negativa.

a) Quina funció ens donarà la velocitat del mòbil en cada instant posterior a t_1? Feu una gràfica qualitativa i calculeu també l'expressió matemàtica.

b) Expliqueu el moviment que resulta fins que el vehicle s'atura.

c) Si l'acceleració negativa la provoca el fre del vehicle, o si la provoca una ràfega de vent contrària al moviment, quina diferència hi ha en el moviment resultant?

Solució

a) La funció $v(t)$ està definida en dos intervals de temps; el primer va des de l'instant inicial fins a l'instant t_1:

$$v = v_1,\ 0 < t < t_1 \tag{151}$$

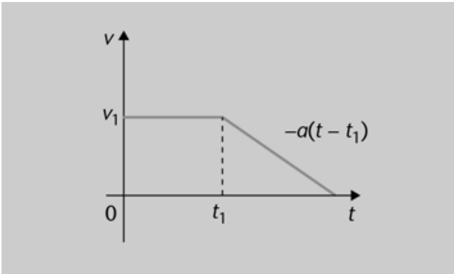
i el segon interval és per a temps superiors a t_1:

$$v = v_1 - a(t - t_1),\ t > t_1 \tag{152}$$

L'expressió per a $t > t_1$ l'obtenim de l'expressió (131); la constant surt d'imposar la condició $v(t_1) = v_1$ al resultat de la integració.

En la figura 44 es representa la funció $v(t)$, equacions (151) i (152).

Figura 44. Moviment descrit en l'enunciat de l'activitat 2.16, equacions 151 i 152



b) El moviment descrit és el d'una partícula que va a velocitat constant i en l'instant t_1 comença a reduir la velocitat de manera que en intervals iguals de temps redueix la velocitat en la mateixa quantitat (acceleració constant), fins que s'atura.

c) En el cas del fre, el vehicle acaba aturant-se, com hem comentat, i es mostra en la figura 44.

Però si és el vent qui frena el vehicle, aquest no es quedarà aturat quan la velocitat es redueixi a zero, sinó que continuarà movent-se en un sentit contrari a l'inicial, amb velocitat negativa. L'expressió (152) diu que $v < 0$ per a $a(t - t_1) > v_1$. Gràficament, la recta de la figura 44 continuarà per a valors negatius de v.

I ara calcularem l'equació de moviment de la partícula de l'activitat anterior.

Activitat 2.17. Posició en funció del temps

Calculeu la funció $x(t)$ per al moviment descrit en l'activitat 2.16. Feu el càlcul de manera analítica (a partir de les fórmules corresponents) i gràfica (a partir de la figura 44).

Solució

Com que la funció velocitat està definida en dos intervals, convé calcular l'espai recorregut en cadascun d'ells per separat. A més a més, farem el càlcul tant per via geomètrica com analítica, per veure dues maneres d'abordar el problema.

Per a la gràfica de la figura 44 tenim un moviment de velocitat constant v_1 des de l'instant 0 al t_1. Per tant, l'espai recorregut és:

$$x = v_1 \cdot t_1 \qquad (153)$$

Aquest resultat s'obté de forma analítica si recordem (subapartat 2.4.1) que per a un moviment uniforme (a velocitat constant) la distància recorreguda és el producte de la velocitat pel temps.

Una altra manera d'arribar al mateix resultat, però gràficament, és si recordem el concepte geomètric de l'operació d'integrar: una integració és l'operació inversa d'una derivació, és a dir, es tracta de trobar la funció primitiva de l'integrand. En el cas del càlcul de la distància recorreguda a partir de la velocitat, $v = dx/dt$, l'integrand és la funció velocitat, equació (119):

$$x = \int v \cdot dt + \text{constant} \qquad (154)$$

L'espai recorregut és la integral de la velocitat.

La integral definida de la funció velocitat entre dos instants de temps:

$$x = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt \qquad (155)$$

dóna l'espai recorregut per una partícula entre aquests dos instants de temps.

Geomètricament, el càlcul (155) equival a calcular l'àrea que defineix la corba $v(t)$ i l'eix X, entre les ordenades corresponents als dos instants de temps t_1 i t_2 (figura 45).

Figura 45

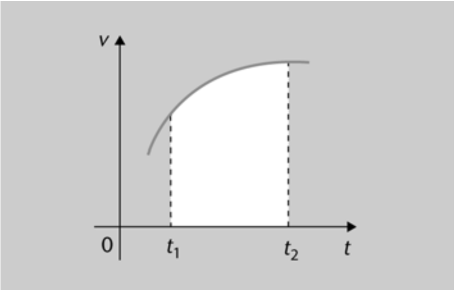


Figura 45

La integral definida d'una funció qualsevol $v(t)$ entre t_1 i t_2 dóna l'àrea sota la corba. L'àrea marcada en blanc és l'espai que recorre la partícula entre t_1 i t_2.

En el cas de la figura 46 (que és la situació de la figura 44), l'espai que recorre la partícula entre $t = 0$ i $t = t_1$ és l'àrea del rectangle que té base t_1 i l'altura v_1. Retrobem així l'expressió (153).

Ara hem de calcular l'espai que recorre la partícula a partir de l'instant t_1. A partir de t_1 el moviment és uniformement accelerat (amb acceleració negativa), fins que la velocitat s'anul·la. La velocitat instantània, segons l'activitat 2.16, equació (152), és:

$$v(t) = v_1 - a(t - t_1) \text{ per a } t > t_1 \tag{156}$$

Per a poder calcular analíticament l'espai recorregut en aquesta part del moviment hem de veure en quin instant t_2 s'anul·la la velocitat. Fem $v(t_2) = 0$ i obtenim:

$$v(t_2) = v_1 - a(t_2 - t_1) = 0 \tag{157}$$

És a dir, la partícula s'atura en l'instant de temps donat per:

$$t_2 = t_1 + \frac{v_1}{a} \tag{158}$$

Gràficament, l'espai total recorregut per la partícula és l'àrea del triangle rectangle indicat en la figura 46, que sumada a la del rectangle dóna l'espai total que recorre la partícula.

Figura 46

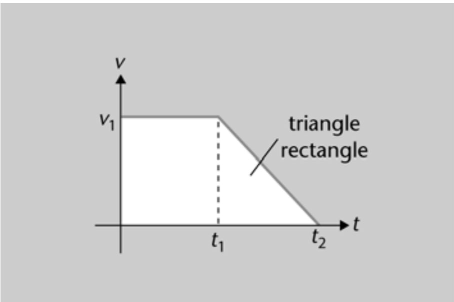


Figura 46

L'àrea marcada en blanc és l'espai que recorre la partícula des que inicia el moviment fins que s'atura en l'instant t_2.

Entre t_1 i t_2 la velocitat decreix linealment amb el temps i l'espai recorregut en aquest interval de temps es pot calcular com l'àrea del triangle de la figura 46, *àrea* = ½ *base* × *altura*. Si tenim en compte que la base del triangle és l'interval de temps en què la velocitat es redueix a zero i l'altura del triangle és la velocitat inicial, obtenim l'àrea total quan sumem la del rectangle, v_1t_1, i tenim en compte l'expressió (158):

$$t_1v_1 + \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1)v_1 = t_1v_1 + \frac{v_1^2}{2a} \tag{159}$$

en què hem fet servir 158.

Alternativament, es pot arribar al mateix resultat per integració de la funció velocitat, equació (156), entre els instants t_1 i t_2:

$$espai = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[v_1 - a(t - t_1) \right] \cdot dt \qquad (160)$$

La integral és immediata, i si fem les substitucions obtenim:

$$espai = \left[(v_1 + at_1)t \right] - a \frac{t^2}{2} \Bigg|_{t_1}^{t_2} = (v_1 + at_1)(t_2 - t_1) - a \frac{t_2^2}{2} + a \frac{t_1^2}{2} \qquad (161)$$

que coincideix amb l'expressió (159) si fem servir que $t_2 - t_1 = v_1/a$ (equació 158).

L'espai total recorregut pel vehicle seria, doncs, la suma de l'espai que recorre a velocitat constant i el que recorre amb un moviment accelerat:

$$x = v_1 t_1 + \frac{v_1^2}{2a} = v_1 (t_1 + \frac{v_1}{2a}) \qquad (162)$$

En aquest exemple hem comprovat que de vegades els càlculs gràfics són més simples que els analítics.

Com hem vist, de vegades convé separar un moviment en diferents parts per tal d'analitzar-lo més fàcilment. En el cas de la figura 46 el separem en els intervals $0 - t_1$ i $t_1 - t_2$. D'altra banda, de vegades no es pot fer el càlcul d'una integral definida de manera analítica, com en l'activitat anterior, però sempre se'n pot estimar el valor si determinem l'àrea sota la corba.

Recordeu

Una integral definida equival a l'àrea sota la corba de la funció integrada.

2.4.6. Què hem après?

- Hem deduït lleis del moviment de partícules a partir del coneixement de l'acceleració o de la velocitat a què es mouen.
- Hem vist que el càlcul implica fer derivacions o integracions i aplicar les condicions inicials del problema.

2.5. Recapitulació

Hem introduït el concepte de model i el concepte de partícula.

Com hem vist en aquest apartat, els conceptes es defineixen en un procés gradual. Prenguem l'exemple del concepte de velocitat (però el que direm és aplicable a tots els conceptes físics): habitualment comencem amb una definició inicial poc elaborada, temptativa, qualitativa, que es va refinant a mesura que aprenem a aplicar el concepte a contextos cada vegada més complexos. Finalment, donem una definició precisa de la magnitud.

Per tant, de les magnituds físiques cal tenir:

a) una idea qualitativa o descriptiva;
b) una expressió verbal precisa de la definició;

c) una definició operativa en forma algebraica;
d) les unitats corresponents;
e) alguna manera de mesurar-les.

Les equacions de moviment són equacions que descriuen el moviment d'una partícula en termes de posició, velocitat o acceleració, $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$. A partir de les expressions que defineixen els vectors velocitat i acceleració podem deduir les lleis del moviment per a una partícula qualsevol si en coneixem la trajectòria, $\vec{r}(t)$, la velocitat, $\vec{v}(t)$, o l'acceleració, $\vec{a}(t)$.

Com veurem en els propers dos temes, la dinàmica és la part de la mecànica que ens ensenya a calcular l'acceleració $a(t)$ a partir de les forces que actuen sobre el sistema. Una vegada coneguda l'acceleració, podem fer servir els mètodes que hem vist en aquest apartat per a obtenir les equacions del moviment. La deducció de les equacions de moviment d'una partícula a partir de l'acceleració que té és un problema d'integració; la deducció de la velocitat i l'acceleració que té una partícula en moviment, a partir de la funció que dóna la posició en cada instant, és un problema de derivació.

Hem estudiat un cas especialment important, el moviment uniformement accelerat i, en particular, el moviment de caiguda lliure.

Podem dir també, com a conclusió, que arribar a entendre els conceptes que hem estat introduint (i els que s'introdueixen en ciència, en general) és un procés lent i difícil, i per això cal tornar a veure'ls en diverses circumstàncies i des de punts de vista diferents. Només d'aquesta manera s'arribaran a "entendre", és a dir, arribarem a apropiar-nos-en el significat i sabrem emprar aquests conceptes per a fer-ne ús en la resolució de problemes.

2.6. Problemes d'ampliació

Problema 2.1. Velocitats típiques

És útil tenir idea d'algunes velocitats típiques.

a) Un vehicle es desplaça a una velocitat de 72 km/h; expresseu-la en m/s. (El resultat d'aquest càlcul permet fer càlculs mentals de velocitats típiques de la vida diària, i comparar velocitats de diferents objectes.)

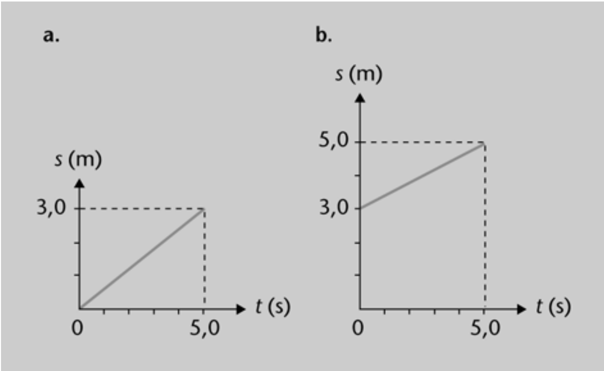
b) Una persona pot córrer 100 m, com a màxim, en uns 10 segons, és a dir, a uns 10 m/s. Quants km/h equivalen a 10 m/s? (Nota: no cal que feu els mateixos càlculs de canvi d'unitats que en el cas anterior. Podeu fer servir el resultat de l'apartat a) per a fer el càlcul mentalment.)

c) La Terra fa una volta gairebé circular al Sol, que és a uns $1{,}5 \cdot 10^8$ km, en un any. A quina velocitat (en m/s) ens movem al voltant del Sol?

Problema 2.2. Gràfiques distància-temps

Calculeu la velocitat del cos a partir de les dues gràfiques posició-temps següents.

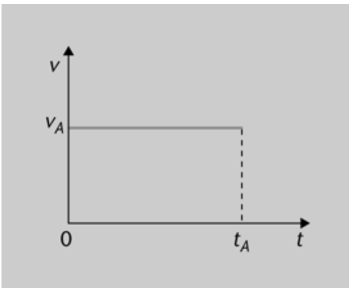
Figura 47. Dues gràfiques posició-temps



Problema 2.3. Distància recorreguda a partir de la gràfica *v*(*t*)

Quin moviment representa la gràfica següent? I què representa l'àrea del rectangle que defineixen els eixos de coordenades amb les rectes $v = v_A$ i $t = t_A$?

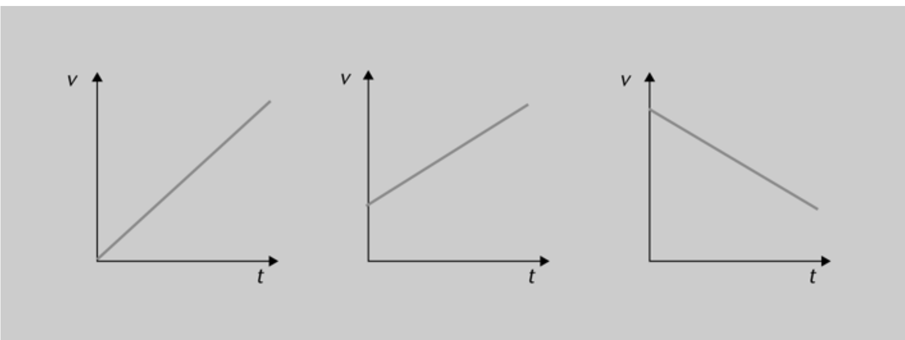
Figura 48. Gràfica velocitat-temps



Problema 2.4. Acceleracions

Quins moviments representen les gràfiques següents? Descriviu els moviments en termes de velocitats i acceleracions i digueu quines diferències hi ha entre les tres gràfiques.

Figura 49. Tres gràfiques velocitat-temps



3. Què causa els moviments?

L'objectiu principal d'aquest apartat és fer una introducció qualitativa a la dinàmica.

Hem estudiat en els dos apartats anteriors els tipus de moviments que hi ha i com es poden descriure en termes cinemàtics, és a dir, sense analitzar-ne les causes. L'objectiu d'aquest apartat i del següent és iniciar l'estudi de la **dinàmica**.

> S'anomena **dinàmica** la part de la mecànica que estudia com analitzar i descriure els moviments dels objectes a partir de les forces que hi actuen. A més, la dinàmica tracta d'esbrinar quines forces són les que provoquen un moviment concret.

Igual que vam fer amb la cinemàtica, començarem l'estudi de la dinàmica en aquest apartat amb una anàlisi qualitativa dels tipus de problemes que volem abordar. En el proper apartat farem una aproximació més quantitativa i enunciarem les tres lleis bàsiques de la dinàmica. Aquest apartat serà relativament breu, per a donar-nos un respir entre dos apartats bastant densos, el 2 i el 4.

Què aprendrem?

- Aprendrem que hi ha sistemes de referència privilegiats i que el concepte de moviment és relatiu, però no així l'acceleració.
- Ens aproximarem al concepte de força que actua sobre un cos i veurem que les forces sempre actuen en parelles.
- Veurem també com podem descriure els efectes dels moviments en termes de capacitat de fer treball.

Què suposarem?

Com que l'aproximació a les causes dels moviments que farem en aquest apartat serà qualitativa, no caldran com a punt de partida eines matemàtiques ni conceptes diferents dels que hem manejat en els apartats anteriors.

3.1. Sistemes de referència

Si hom no hi pensa, la resposta a la pregunta "Estem ara mateix aturats o estem en moviment?" sembla senzilla: si estem treballant aquesta assignatura asseguts davant d'una taula, o recolzats al sofà, direm que estem aturats. Però si la treballem mentre viatgem en tren, direm que estem en moviment. Tanmateix, la resposta correcta (des del punt de vista científic) és "depèn". Tant si estem asseguts en una cadira com si anem en tren, depenent de qui sigui l'observador, aquest dirà que estem en repòs o que estem en moviment.

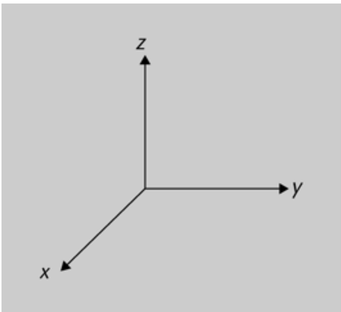
Així, per a una persona que va en cotxe, o en qualsevol vehicle amb velocitat constant i en línia recta, són la resta d'objectes (arbres, fanals, vaques) els que es mouen. I si estem asseguts a casa, per a un observador que ens mirés des de la Lluna certament ens mouríem nosaltres, i no ell, juntament amb la cadira on seiem.

Per a donar la posició d'un objecte que es mou fem servir un *sistema de referència*.

S'anomena **sistema de referència** al punt des del qual s'observa un moviment i a les tres direccions de l'espai que es fan servir per a localitzar-hi l'objecte que es mou.

Habitualment representem els sistemes de referència com tres eixos cartesians, dirigits segons tres direccions arbitràries de l'espai, XYZ, perpendiculars entre si (figura 50).

Figura 50. Sistema de referència cartesià tridimensional



En cada cas podem triar les direccions XYZ de la manera que més convingui per a descriure el moviment. Per exemple, una partícula que es mou en línia recta i a una velocitat constant, que en mòdul val v_0, es pot descriure amb el vector velocitat següent, referit a un determinat sistema de referència:

$$\vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{6}}(1,2,-1) = \frac{v_0}{\sqrt{6}}(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \qquad (163)$$

és a dir, mitjançant les tres equacions següents:

$$v_x = \frac{v_0}{\sqrt{6}}, \quad v_y = 2\frac{v_0}{\sqrt{6}}, \quad v_z = -\frac{v_0}{\sqrt{6}} \qquad (164)$$

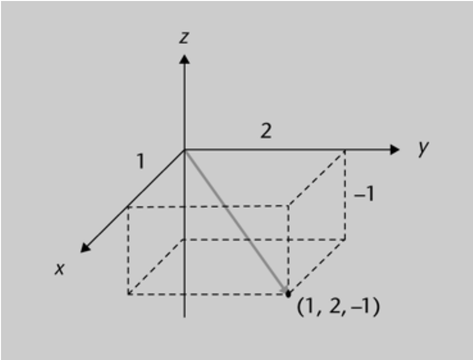
La direcció de l'espai $(1, 2, -1) = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ es representa en la figura 51 respecte a uns eixos de coordenades determinats. La direcció és la del vector que va des de l'origen de coordenades fins a l'extrem oposat del paral·lelepípede que té aquestes coordenades.

Direcció en l'espai

(*a*,*b*,*c*) = $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

La direcció en l'espai (*a, b, c*) és la mateixa que té un vector que va des de l'origen de coordenades fins al punt P de coordenades (*a, b, c*).

Figura 51. Direcció de l'espai definida pel vector $(1, 2, -1) = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$



Fixeu-vos que amb el factor $1/\sqrt{6}$ en l'expressió (164) ens assegurem que el mòdul del vector velocitat sigui v_0, perquè:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{v_0^2}{6}(1+4+1) = v_0^2 \tag{165}$$

La trajectòria d'aquesta partícula, que es mou a velocitat constant, serà, anàlogament al que hem vist en el subapartat 2.4, (equació 125), per al moviment unidimensional:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t \tag{166}$$

on $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és la posició de la partícula en l'instant $t = 0$ (figura 52).

Les coordenades del punt que es mou són, doncs:

$$x = x_0 + v_x \cdot t \tag{167a}$$

$$y = y_0 + v_y \cdot t \tag{167b}$$

$$z = z_0 + v_z \cdot t \tag{167c}$$

Però si triem convenientment el sistema de referència, el mateix moviment rectilini i uniforme es pot descriure de manera més senzilla. Per exemple, podem fer que l'eix *X'* del nou sistema de referència estigui dirigit segons la direcció (1,2,-1) del sistema de referència *XYZ* (figura 52). En aquest sistema *X'Y'Z'* el vector velocitat tindrà l'expressió següent:

$$\vec{v}\,' = v_0(1,0,0) = v_0\vec{i}\,' \tag{168}$$

és a dir:

$$v_{x'} = v_0,\ v_{y'} = 0,\ v_{z'} = 0 \qquad (169)$$

I la trajectòria de la partícula serà, ara:

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_0\,' + \vec{v}\,' \cdot t \qquad (170)$$

on $\vec{r}_0\,' = (x_0\,', y_0\,', z_0\,')$ és la posició inicial de la partícula referida al nou sistema de referència (figura 52).

Figura 52

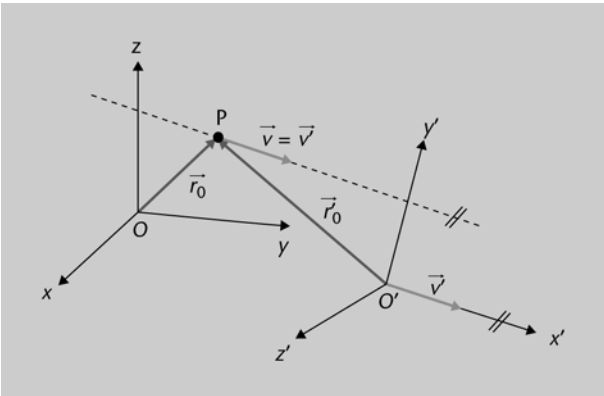


Figura 52

Representació del moviment del punt P expressat per les equacions (166) i (170) des de dos sistemes de referència, *O* i *O'*. El signe // indica que l'eix x' és paral·lel a la recta discontínua.

Per a qualsevol altre tipus de moviment, l'expressió de les variables cinemàtiques (posició, velocitat, acceleració) dependrà del sistema de referència des del qual l'analitzem.

En conclusió, quan descrivim un moviment hem d'especificar sempre des de quin sistema de referència ho fem; per exemple, podem dir que observem el moviment d'un tren des de l'estació (o des d'un sistema de referència fixat a l'estació), o que observem com pasturen les vaques des d'un sistema de referència lligat al vehicle en què som.

Les característiques d'un moviment, que són la trajectòria que descriu i la velocitat que té l'objecte que es mou, depenen del sistema de referència des del qual s'observa.

3.1.1. Sistemes de referència inercials

Hem dit en començar el subapartat 3.1 que a una persona que va en un vehicle i observa l'exterior, li pot semblar que és el món exterior allò que es mou i no pas ella. Aquesta sensació només és certa en el cas del moviment rectilini i uniforme, a velocitat constant; és l'únic cas en què es pot "confondre" el moviment amb l'estat de repòs.

Per contra, quan anem en un vehicle i aquest fa sacsejades, el nostre cos ho nota i, per tant, no dubtem que es tracta d'un canvi de l'estat de moviment del vehicle i no del món exterior al vehicle.

S'anomenen **sistemes de referència inercials** aquells que estan en repòs o bé es mouen amb velocitat rectilínia i uniforme.

Si un tren va en línia recta i a velocitat uniforme, dos sistemes de referència com el situat a l'estació i el situat sobre el tren són sistemes de referència inercials. Si passa un avió a velocitat rectilínia i uniforme, també és un sistema de referència inercial.

Activitat 3.1. La Terra, sistema inercial

El sistema de referència lligat a l'estació del tren està fixat a la Terra. Però la Terra es mou. És inercial un sistema de referència lligat a l'estació del tren, com hem suposat?

Solució

Ja hem vist en l'activitat 2.10 que la Terra és un cos accelerat, tant pel moviment de rotació al voltant del seu eix com pel moviment de rotació al voltant del Sol. Per tant, estrictament parlant, la Terra no és un sistema inercial.

Però si fem un experiment o si analitzem un moviment o un procés que dura relativament poc temps, podem considerar el moviment de la Terra com a rectilini i uniforme. Aleshores, a efectes pràctics, sí que podem considerar que un sistema de referència lligat a la Terra és inercial perquè l'òrbita de la Terra té un radi enorme i, per tant, el moviment orbital de la Terra és pràcticament rectilini per a intervals de temps petits en comparació amb la durada d'un any.

El moviment de rotació de la Terra sobre el propi eix també és pot ignorar en la major part dels fenòmens que ens interessaran.

Així, qualsevol sistema de referència que estigui en repòs sobre la Terra és un sistema de referència inercial, amb molt bona aproximació.

Els sistemes de referència inercials tenen una propietat molt important. Sabem, per experiència pròpia, que no podem distingir entre el moviment rectilini i uniforme i el repòs: quan estem asseguts al tren i passa pel costat un altre tren, si els dos viatgen amb moviment rectilini i uniforme (incloent-hi el cas de velocitat nul·la d'alguns dels dos trens!) no som capaços de distingir si ens estem movent nosaltres, l'altre tren, tots dos o cap dels dos. Encara hi ha una altra manera d'enunciar el fet experimental anterior: **l'estat de repòs absolut no existeix** (o no té sentit parlar-ne).

Repòs i velocitat constant

El cas $v = 0$ és un cas particular de v = constant.

Dos sistemes de referència inercials són indistingibles, en el sentit que no podem fer cap experiment que demostri que un sistema inercial està en repòs i l'altre no, o a l'inrevés.

Fixem-nos que si anem en tren (o en avió, en cotxe, etc.) i aquest es mou a velocitat rectilínia i constant en una direcció horitzontal, podem tenir una tassa de cafè damunt d'una superfície plana i la tassa estarà quieta i la superfície del líquid romandrà ben plana, de la mateixa manera que si estiguéssim asseguts a la terrassa d'un bar. El mateix podríem dir del fet de jugar a llançar una pilota a l'aire i arreplegar-la a la mà, o de tenir penjat un ornament del sostre del vehicle, etc. El comportament del cafè, de la pilota, del penjoll, etc., seria el mateix en qualsevol sistema de referència inercial.

Però si el vehicle s'atura en sec, o s'accelera, o agafa una corba de manera brusca, pot ser que el cafè es vessi, i de ben segur que la superfície del líquid i la tassa es mourà; fins i tot nosaltres mateixos patirem una sacsejada! Tampoc podríem arreplegar com abans la pilota que hem llançat a l'aire, i l'ornament ja no penjarà en direcció vertical.

En l'activitat següent continuarem comentant com es veu un moviment des de sistemes de referència inercials diferents.

Activitat 3.2. La descripció de la trajectòria d'un objecte en moviment és relativa

Aneu en un tren a una velocitat rectilínia i uniforme i deixeu caure una pedra per la finestra, sense velocitat inicial (no la llanceu: simplement obriu la mà i la pedra cau fora del vehicle). Descriviu i feu un esquema de com veuríeu el moviment de la pedra vosaltres i una persona que s'ho mirés des de terra. És a dir, representeu el moviment de la pedra des del sistema de referència vostre i des d'un sistema de referència situat a l'exterior del vehicle i lligat al terra.

Solució

Vist des del tren, la pedra cau a terra en línia recta, tant si el tren està en repòs com si es mou amb velocitat rectilínia i uniforme (figura 53a).

Vist des de l'exterior del tren, quan obrim la mà la pedra té una velocitat inicial horitzontal que coincideix amb la del tren i la trajectòria que es veurà des de fora del tren és parabòlica. Gràficament es mostra en la figura 53, en **a** el cas vist des del tren i en **b**, el cas vist des de fora.

Figura 53

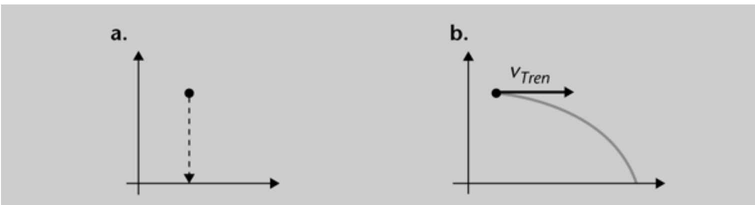


Figura 53

Trajectòria de caiguda d'un objecte vista **a.** des del tren o **b.** des de terra.

La trajectòria parabòlica de la pedra, vista des d'un punt en repòs exterior al tren, és la mateixa que té un projectil que llancem horitzontalment des d'un sistema de referència inercial.

En la figura 54 combinem els dos punts de vista, el de la persona que observa la caiguda de l'objecte des del tren i el de la persona que l'observa des de terra. La persona que deixa caure la pedra la veu sempre a sota de la finestra i cada vegada més a prop de terra.

Figura 54. Moviment de caiguda d'un objecte vist des del tren o des de terra

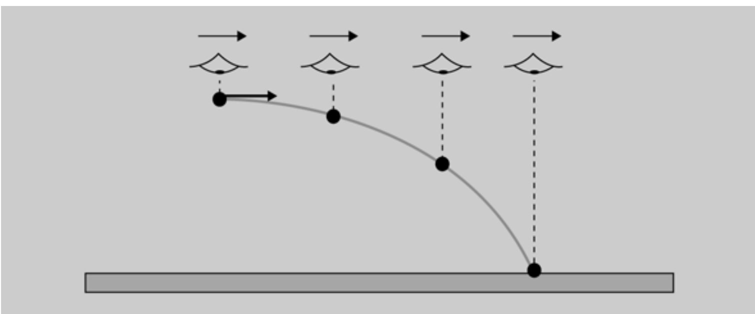


Figura 54

L'ull representa la finestra del tren. El viatger veu un moviment vertical de caiguda lliure. L'observador extern veu una trajectòria parabòlica.

D'altra banda, és ben possible que hàgiu tingut l'experiència de deixar caure objectes com ara un paper o una bossa des d'un tren o un cotxe, i heu vist com l'objecte es veu arrossegat en direcció contrària al vostre moviment. És a dir, no cau verticalment al terra fora la finestra. En aquest cas està fent un paper important el fregament causat per l'aire, i aquesta força és la que frena l'objecte i modifica la situació que hem comentat en les figures anteriors. (Un bon exercici és que us imagineu com seria ara la trajectòria de l'objecte vista des dels dos sistemes de referència esmentats.)

La discussió de les trajectòries de les partícules vistes des de sistemes de referència diferents és complicat. Però l'anàlisi dels moviments en termes de velocitats o d'acceleracions és més senzilla, com ara veurem.

3.1.2. Moviment relatiu i velocitat relativa

Segons el que acabem de dir, quan el moviment del vehicle (un vagó de metro, per exemple) és rectilini i uniforme, és equivalent dir que el metro s'aproxima a l'andana o que l'andana s'està apropant al vagó. En els casos anteriors, la velocitat *relativa* entre el vagó i l'andana serà $\vec{v}$ o $-\vec{v}$, segons si parlem des d'un sistema de referència inercial o des de l'altre. Podem fer l'esquema equivalent de la figura 55, en què un cotxe fa el paper del vagó, i un edifici el de l'andana.

Figura 55. Moviment relatiu entre dos sistemes de referència inercials

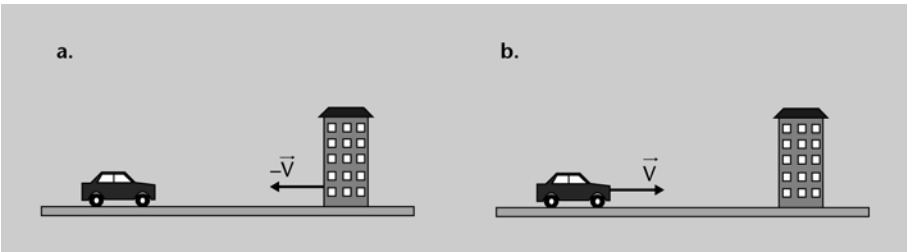


Figura 55

a. El moviment de l'edifici observat des del cotxe.

b. El moviment del vehicle vist des de l'edifici.

De la mateixa manera, suposem que vist des d'un sistema inercial extern, com ara un edifici, dos vehicles s'aproximen l'un a l'altre i tenen una velocitat $\vec{v}_1$ i $-\vec{v}_2$, respectivament. Aleshores cadascun dels vehicles pot dir que el seu sistema de referència està en repòs i dirà també que el sistema de referència extern, lligat a l'edifici, té una velocitat contrària a la del vehicle. El vehicle 1, per exemple, dirà que l'edifici se li acosta a una velocitat $-\vec{v}_1$, anàlogament a la situació de la figura 55a.

Activitat 3.3. Velocitat relativa

En l'exemple dels dos vehicles del paràgraf anterior, quina velocitat diria un observador d'un vehicle que té l'altre vehicle?

Solució

Cadascun d'ells diria que el seu sistema de referència està en repòs, però que l'altre vehicle se li acosta a una velocitat que és la suma de les dues velocitats, és a dir, $-(\vec{v}_1+\vec{v}_2)$, vist des del vehicle 1, o $\vec{v}_1+\vec{v}_2$ vist des del 2.

Per tant, les velocitats d'un objecte tenen valors diferents segons el sistema de referència des del qual es mesuren. I què ocorre amb les acceleracions?

3.1.3. Acceleracions i sistemes inercials

Com acabem de veure, si des dels dos sistemes inercials de la figura 55, el cotxe i l'edifici, observem un tercer cos, cadascun li assignarà una velocitat diferent. Si l'observador de l'edifici, *O*, diu que el tercer cos té una velocitat $\vec{v}$, aleshores el sistema inercial situat en el cotxe, *O'*, li assignarà al cos una velocitat diferent:

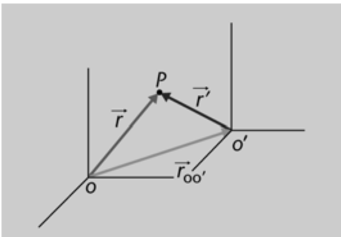
$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V} \tag{171}$$

on $\vec{V}$ és la velocitat del sistema lligat al vehicle, *O'*, mesurada des de l'edifici.

Aquest resultat s'obté de l'anàlisi de la figura 56, que mostra com determinem la posició del tercer cos, P, des dels sistemes de referència *O* i *O'*. La posició del cos és $\vec{r}$ des del sistema *O* i és $\vec{r}\,'$ des del sistema *O'*. Si el sistema *O'* és a la posició $\vec{r}_{OO'}$ referida al sistema *O*, podem escriure que $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{OO'}$ (suma de vectors); és a dir:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{OO'} \tag{172}$$

Figura 56. Localització d'una partícula *P* des de dos sistemes de referència *O* i *O'*



Si ara derivem els dos membres de l'expressió anterior respecte al temps, obtenim el resultat (171), perquè $d\vec{r}\,'/dt = \vec{v}\,'$ és la velocitat de P mesurada des de *O'*, $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ és la velocitat de *P* mesurada des de *O* i $d\vec{r}_{OO'}/dt = \vec{V}$ és la velocitat del sistema *O'* respecte al sistema *O*.

Però és important notar que si el primer sistema inercial (el situat a l'edifici) mesura l'acceleració següent per al tercer cos:

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \tag{173}$$

el sistema inercial lligat al cotxe li assignarà la mateixa acceleració. Això es pot demostrar a partir de la relació (171), si calculem l'acceleració que observaria el sistema *O'*:

$$\vec{a}\,' = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \frac{d(\vec{v} - \vec{V})}{dt} \tag{174}$$

Ara tenim en compte que la derivada d'una suma de funcions és la suma de derivades de cada funció, i obtindrem:

$$\vec{a}\,' = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{V}}{dt} \tag{175}$$

I, finalment, com que per a sistemes inercials la velocitat relativa, en aquest cas $\vec{V}$, és constant, aleshores $d\vec{V}/dt = 0$, i tenim:

$$\vec{a}\,' = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{176}$$

Però el membre de la dreta és l'acceleració que mesura el primer sistema inercial, $\vec{a}$. Hem demostrat així que els dos sistemes inercials assignaran la mateixa acceleració al tercer cos que es mou:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' \tag{177}$$

El resultat anterior és important, perquè indica que mentre que, segons l'equació (171) $\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V}$, les **velocitats són relatives**; les **acceleracions, en canvi, són absolutes** quan es mesuren des de sistemes inercials.

Així, doncs, tenim que:

Les velocitats dels objectes són magnituds relatives, el valor de les quals depèn del sistema de referència inercial en què es mesuren.

Dos sistemes de referència inercials obtindran la mateixa acceleració per a un objecte extern.

Veurem en l'apartat 4 que aquesta propietat dels sistemes de referència inercials és essencial per a poder enunciar les lleis de la dinàmica de manera senzilla.

3.1.4. Què hem après?

- L'estat de moviment rectilini i uniforme i l'estat de repòs són equivalents a efectes físics: no podem distingir-los, ni fer experiments que permetin detectar-los com a situacions diferents.
- Un sistema de referència inercial és un que es mou a velocitat constant (un que té un moviment rectilini i uniforme) o que està en repòs.
- Els sistemes de referència inercials són indistingibles i només podem parlar de la velocitat relativa d'un sistema inercial respecte a un altre. No té sentit parlar de velocitat absoluta de cap sistema de referència inercial.
- L'acceleració d'un objecte, per contra, sí que té el mateix valor quan es mesura des de sistemes de referència inercials diferents.

Els moviments en la natura rarament són rectilinis i uniformes, almenys durant intervals de temps llargs. Què fa que canviïn aquests moviments? Vegem-ho.

3.2. Canvis en l'estat de moviment. Forces

Moltes situacions de la vida diària involucren canvis en l'estat de repòs o de moviment dels objectes. En termes físics diem que sobre els objectes ha actuat una **força**. Una força aplicada a un objecte n'altera el moviment. Vegem-ne alguns exemples:

1) Quan anem en un cotxe i pitgem el fre, o simplement deixem de prémer l'accelerador, el vehicle acaba aturant-se.
2) Quan juguem a tennis o a ping-pong, i donem un cop a la pilota que ve cap a nosaltres, aquesta es mou en una altra direcció i sentit.
3) Quan juguem al billar i colpegem una bola, aquesta es posa en moviment en línia recta. I si volem que es mogui més ràpidament, li hem de donar un cop més fort amb el tac.
4) Quan llancem una pilota de bàsquet, o quan li donem un xut que l'alça de terra, la trajectòria de la pilota no és rectilínia, per l'acció de la Terra.
5) Quan cau un test de flors sobre el capot d'un cotxe, s'hi fa un bony, i pot ser que l'objecte s'hi aturi.
6) Quan cau una pilota a terra, hi rebota (es deforma la pilota quan toca terra?)

En els exemples anteriors diem que entren en joc diverses accions, o forces.

Activitat 3.4. Forces que actuen

Indiqueu molt breument quines forces actuen sobre els objectes anteriors just en el moment inicial en què fem l'acció corresponent (frenar, colpejar, etc.) i en moments posteriors.

Solució

Les forces que actuen són:

- les del fre (cas 1);
- les de fricció de les rodes del vehicle amb l'asfalt, o la fricció en una taula de billar (casos 1, 3) (també podríem parlar de la fricció de l'aire en el moviment de les pilotes de tennis, per exemple);
- les d'impacte de la raqueta o el tac amb la pilota o la bola (casos 2 a 6) o l'impacte del peu en el cas 4;
- la força gravitatòria de la Terra que fa caure els objectes en una trajectòria que és vertical o parabòlica (casos 2, 4, 5, 6);
- la força que fa el capot sobre el test, o la pilota sobre la raqueta (casos 2 a 6).

En el cas 5, el test pot deformar el capot, però també pot ser que la força que fa el capot sobre el test sigui una força elàstica: el pes del test deforma el capot, el qual, en recuperar la forma, fa rebotar el test. El mateix passa amb la xarxa de fils d'una raqueta de tennis: es deforma en rebre l'impacte de la pilota i en recuperar la forma llança la pilota en sentit contrari al de l'impacte.

Pel que fa al cas 6, quan una pilota cau a terra sempre es deforma més o menys, segons l'elasticitat que tingui la pilota i la velocitat amb què xoca amb el terra. Això és fàcil de veure amb una pilota gran de plàstic tou i plena d'aire o d'aigua. També es deforma de manera anàloga la pilota de tennis o la de futbol.

Hem parlat en l'activitat anterior de forces de fricció o de fregament, de la força de la gravetat, de forces elàstiques, etc. Totes aquestes forces es poden representar en els punts i instants en què actuen, i sobre la trajectòria dels objectes que es mouen, com ara veurem; les forces es representen amb un vector que indica cap a on es dirigeixen.

Activitat 3.5. Trajectòria i direcció de les forces

Feu un esquema de la trajectòria d'una pilota de bàsquet que es dirigeix contra el tauler i hi rebota, i representeu-hi també les forces que actuen sobre la pilota abans del xoc, durant el xoc amb el tauler i en el moviment posterior al rebot.

Solució

Figura 57. Impacte d'una pilota sobre un tauler i rebot

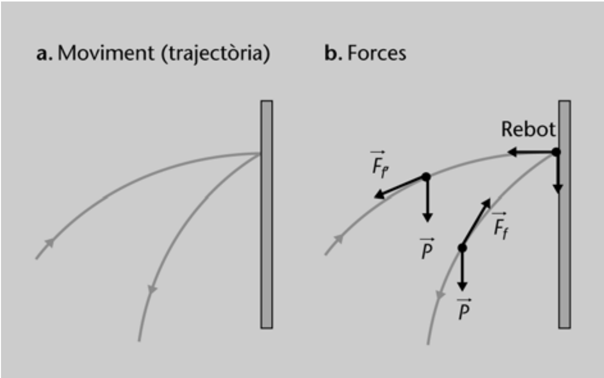


Figura 57

a. Moviment (trajectòria) de la pilota.

b. Forces que actuen sobre la pilota en tres instants del moviment.

Mentre la pilota vola cap al (o des del) tauler (figura 57a), no actua cap força més que la gravetat terrestre, que anomenem *pes*, $\vec{P}$, i la fricció de l'aire, $\vec{F_f}$ (i $\vec{F_{f'}}$ quan vola des del tauler), que sempre s'oposa al moviment de la pilota (figura 57b). En el moment de l'impacte actua la força que fa el tauler contra la pilota, perpendicular al tauler i la gravetat terrestre, que sempre està present (per a simplificar l'anàlisi no considerem la fricció que hi ha entre la pilota i el tauler).

Veiem en l'exemple anterior que en cada instant actuen forces diferents, que tenen magnituds i direccions diferents. Només el pes actua en tot moment i sempre en la mateixa direcció i sentit.

3.2.1. Què hem après?

- Les forces provoquen canvis en l'estat de moviment dels cossos.
- Les forces d'impacte (o de llançament) actuen només en el moment de l'impacte o del llançament, però no mentre l'objecte es mou posteriorment.
- La Terra actua en tot moment i fa caure els objectes, però de vegades no es nota, com quan una bola de billar es mou per una taula horitzontal, perquè altres cossos eviten que actui aquesta força, és a dir, la contraresten.
- En els moviments que observem en la vida diària, la força de fregament o de fricció també actua sempre, amb major o menor intensitat: hi ha fricció en el moviment d'un objecte a través l'aire, o sobre l'asfalt, o sobre una taula de billar, etc. Però en alguns casos la fricció és petita en comparació amb les altres forces que hi intervenen i es pot negligir.
- En un problema concret cal analitzar quines forces són importants per a descriure un moviment i quines no; és a dir, quines són negligibles en comparació amb la resta. Per exemple, en el moviment de la bola de billar, la força que fa la Terra no té cap efecte (llevat de mantenir la bola sobre la taula). I en el moviment d'una pedra, la fricció de l'aire és, en general, negligible en comparació amb el seu pes.

Hem vist que hi ha diversos tipus de forces i que aplicant forces aconseguim moure objectes, aturar-los o canviar-ne l'estat de repòs o de moviment. Aprofundirem ara en quina característica dels objectes fa que les forces que s'hi apliquen tinguin efectes diferents.

3.3. Moviment i repòs. Inèrcia

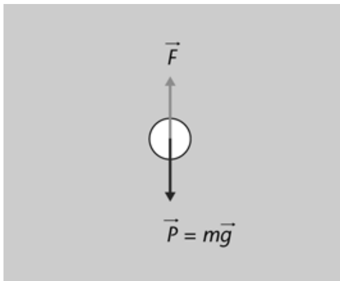
Suposeu que teniu uns papers sobre la taula i que estan en repòs. Actua alguna força sobre els papers? Hem dit en el subapartat anterior que la força de la gravetat actua en tot moment i sobre qualsevol objecte que tingui massa. Per això diem que els objectes tenen **pes**.

El **pes** d'un objecte de massa m és la força amb què l'atrau la Terra, i val $\vec{P} = m\vec{g}$.

L'acceleració de la gravetat $\vec{g}$ sempre està dirigida cap al centre de la Terra, és a dir, verticalment i cap a baix.

Però els papers estan damunt la taula, que impedeix que caiguin a terra. Per tant, direm que la taula també fa una força sobre els papers. Si volem alçar els papers de la taula, hem d'agafar-los (aplicar-hi una força), i en aquest moment diríem que la nostra acció "venç" la força de la gravetat: sobre els papers que mantenim en l'aire actuen les nostres mans (fent-hi una força) i la força de la gravetat terrestre (vegeu la figura 58).

Figura 58. El pes i la nostra mà actuen sobre un objecte que sostenim en l'aire



Però no sempre és tan fàcil aplicar una força i moure objectes com en el cas dels papers.

Activitat 3.6. Moure objectes

Volem moure una prestatgeria plena de llibres. Per què costa tant? I si volem arrossegar una cadira o una bombona buida de butà, per què ens costa menys?

Solució

Solem dir que el major o menor pes dels objectes és el que fa que sigui més o menys fàcil moure'ls. Però aquesta afirmació no és correcta. Tot i que no podeu fer l'experiment, si moguéssiu els objectes en l'espai, en una regió molt allunyada de planetes i d'estels, de manera que els objectes no "pesessin", seguiria sent molt més fàcil moure l'ampolla que la prestatgeria. És la massa de l'objecte, la quantitat de matèria, i no el pes, el que compta.

En el cas familiar dels objectes que són a terra i els voleu arrossegar, heu de fer força per a vèncer la fricció (o fregament) que fa la base dels objectes amb la superfície sobre la qual es troben. La força de fricció és proporcional al pes de l'objecte.

Les qüestions anteriors es podrien plantejar a l'inrevés: suposem que en lloc de provocar moviments en objectes que estan en repòs, volem aturar objectes que estan en moviment. Imaginem que sobre una superfície inclinada s'està movent una prestatgeria plena de llibres o una bombona buida de butà. Quin objecte serà més fàcil d'aturar? La resposta és que, com més massa té un objecte en moviment, més difícil és aturar-lo, de la mateixa manera que com més massa tingui, més difícil serà moure'l si està en repòs. Diem que més massa equival a més **inèrcia**.

La **inèrcia** és la dificultat que presenta un cos per a moure'l o per a aturar-lo.

Explorem el concepte d'inèrcia.

Activitat 3.7. Efectes de la inèrcia

Quan la peça de ferro d'un martell està fluixa, una manera d'aconseguir que estigui ben fixada a la fusta és donar un cop sec al martell, per la part del mànec (figura 59). Això permet encaixar millor el ferro. Expliqueu per què.

Figura 59

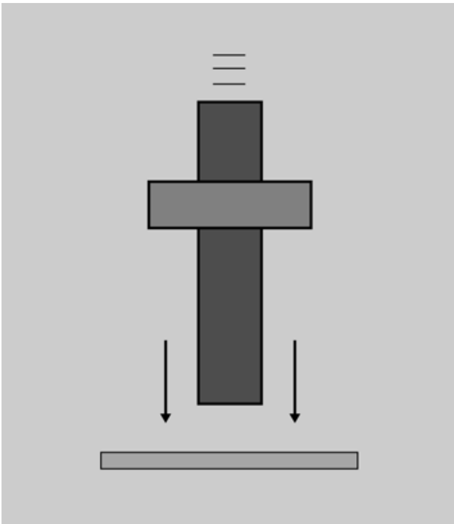


Figura 59

Per a fixar la peça de ferro a la fusta d'un martell donem un cop sec al mànec del martell contra el terra o contra una superfície dura.

Solució

En fer aquesta acció estem aprofitant la inèrcia d'una massa en moviment: quan movem el martell cap a la taula, movem tant la fusta com el ferro. Amb el cop sec frenem la fusta, però la peça de ferro, que està fluixa i té molta més inèrcia (perquè té molta més massa que la fusta), és més difícil d'aturar i continua movent-se una mica cap a la taula. D'aquesta manera es fixa millor la peça de ferro a la fusta.

Com veiem, podem descriure accions quotidianes en termes científics.

Què hem après?

- La inèrcia d'un objecte és la dificultat que oposa per a posar-lo en moviment o per a aturar-lo.
- Cal fer forces per a posar objectes en moviment i també cal aplicar forces per a aturar-los. Segons la inèrcia del cos, la força que cal aplicar sobre cada cos serà diferent.
- En termes físics no hem de dir que un objecte que *pesa* més té més inèrcia, sinó que és la *massa* la responsable de la inèrcia que presenta l'objecte.

Fins ara hem analitzat una part del que ocorre en l'aplicació d'una força: hem parlat de la Terra que atrau els cossos, o de la raqueta que colpeja la pilota, etc. Però tot seguit veurem que les forces no actuen soles, sinó en parelles.

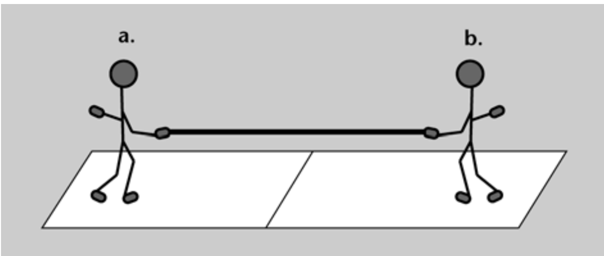
3.4. Acció i reacció

Quan colpegem una pilota de tennis, la raqueta i la mà que sosté la raqueta noten l'efecte del cop: la raqueta colpeja la pilota, però també la pilota fa una acció (una força) sobre la raqueta. Si us fixeu en la vostra experiència diària, podríem dir que qualsevol força està associada a una altra: es tracta de les **forces d'acció i reacció**.

Si colpegem la taula amb el puny ens fem mal, per tant també podem dir que la taula ens colpeja el puny. "És impossible tocar sense ser tocat".

Com es pot fer l'anàlisi de les forces que actuen en una situació donada? Penseu en la competició d'estirar una corda per part de dues persones, que tracten de fer que l'altra creui una línia marcada a terra (vegeu la figura 60).

Figura 60. El joc d'estira i arronsa



Si la corda no es desplaça és perquè les dues persones l'estiren amb la mateixa força. Si una persona fa més força, pot moure la corda cap a ella prou com per a guanyar la partida. Quines forces actuen en aquesta situació?

Activitat 3.8. Direcció de les forces

Indiqueu quines d'aquestes forces actuen en la competició de la figura 60, i cap a on estan dirigides:

- Tracció (la força que fan les persones).
- Tensió (la força que fa la corda).
- Fricció (el fregament, allà on actuï).
- Pes.

Solució

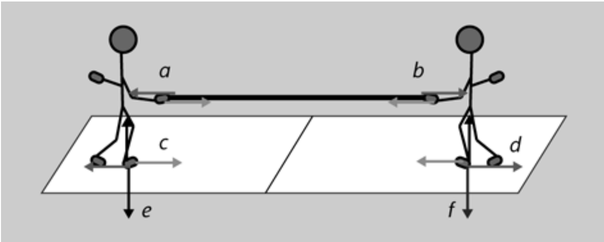
Les persones fan una força sobre la corda, les forces a i b en la figura 61. La corda està sotmesa a una força, que s'anomena *tensió*, i fa una força sobre les persones (les forces oposades a a i b).

Les persones aprofiten la força de fregament de les sabates contra el terra per a intentar no moure's: c i d són les forces que fan les persones contra la superfície del terra, i aquesta superfície exerceix forces contràries sobre les persones. Per exemple, c és la força que exerceix la persona de l'esquerra sobre el terra quan l'altra persona intenta que se li acosti. Per això, el terra exerceix la força de reacció oposada a c, és a dir, en contra del possible moviment de la persona de l'esquerra.

Les persones i la corda pateixen l'atracció de la Terra, tenen un pes: *e* i *f* (no s'ha representat el pes de la corda en la figura 61, per a no embolicar-la més).

També el terra (la superfície sobre la qual estan les persones) fa una força contra les persones que s'oposa al seu pes (les forces oposades a *e* i a *f*).

Figura 61. Parelles de forces que actuen en la situació de la figura 60



Per tant, **acció i reacció** actuen juntes però no sobre el mateix cos.

Per cada força que actua en un sentit, tenim la força contrària, que és de la mateixa magnitud, i cada força d'aquest parell acció-reacció actua sobre un cos diferent.

Així, en la situació de la figura 60, la persona de la dreta estira de la corda cap a la dreta i la corda fa la mateixa força sobre la persona de la dreta, però en sentit contrari, cap a l'esquerra. Igual passa amb qualsevol altra força. Per exemple, la Terra atrau la corda amb una força (el pes de la corda), i el mateix fa la corda: atrau la Terra amb una força igual en valor absolut al pes de la corda.

I així, per cada força que actua en qualsevol situació, sempre n'hi ha una altra d'aparellada, igual i oposada; però les dues forces de la parella actuen sobre cossos diferents! S'anomenen *forces d'acció i reacció*. Aquest fet cal tenir-lo sempre present: sobre cada cos només actua *una* de les forces del parell acció-reacció. El pes d'un objecte és la força que fa la Terra *sobre l'objecte*; la força de reacció corresponent és la força que fa l'objecte *sobre la Terra*. Les dues forces de la parella acció-reacció són iguals en mòdul.

Vegem-ne un altre exemple.

Activitat 3.9. Parelles de forces

a) Quines parelles de forces actuen en el cas d'una au que vola?
b) Quines forces actuen sobre l'au?

Solució

a) Podem aproximar el vol d'una au dient que aquesta vola perquè batega les ales i impulsa l'aire cap endarrere: la força que fan les ales empentant l'aire cap endarrere és igual però oposada a la força que fa l'aire sobre l'au, i que l'empenta cap endavant i la fa avançar.

La fricció o fregament de l'au contra l'aire fa que l'au es freni mentre avança. Aquesta força és igual, però oposada, a la que fa l'au contra l'aire.

La Terra atrau l'au cap a baix. L'au atrau la Terra amb una força igual al pes de l'au, però dirigida cap a l'au.

En la figura 62a mostrem les parelles de forces que intervenen quan una au vola cap a l'esquerra, i que hem designat així:

- $\vec{F}_1$: impuls de les ales que tiren l'aire cap a la dreta.
- $\vec{F}_2$: reacció de l'aire, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, que impulsa l'au cap a l'esquerra.
- $\vec{F}_3$: fregament de l'aire, que va en la direcció contrària al moviment.
- $\vec{F}_4$: reacció de l'au sobre l'aire, $\vec{F}_4 = -\vec{F}_3$.
- $\vec{P}$: pes de l'au, la força que fa la Terra sobre l'au.
- $\vec{F}_T$: atracció de la Terra per part de l'au, $\vec{F}_T = -\vec{P}$.

Figura 62

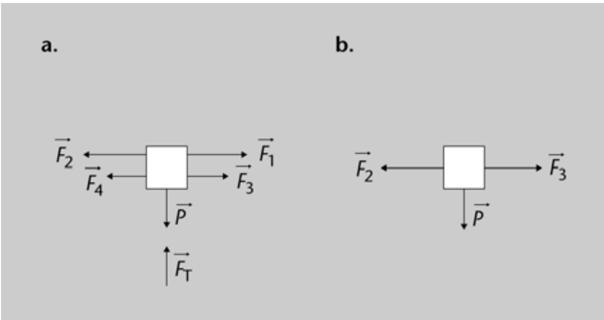


Figura 62

a. Una au que vola cap a l'esquerra i tots els parells de forces acció-reacció que actuen sobre el sistema au-aire-Terra
b. Forces que actuen sobre l'au.

b) De totes les forces esmentades només actuen sobre l'au les que mostrem en la figura 62b: el pes, l'impuls de l'aire i la fricció contra l'aire.

El problema del vol de les aus és, però, més complicat. Veurem en l'apartat següent que si la descripció de la figura 62 fos correcta, l'au cauria cap al terra en un moviment parabòlic.

Com que habitualment només ens interessa saber quin moviment té un cos determinat, no ens hem de preocupar de les forces que fa aquest cos contra els altres, i només ens caldrà tenir en compte una força de cada parell acció-reacció.

Les forces són magnituds vectorials: a més del mòdul de les forces és important saber en quina direcció actuen, perquè això també explica quin efecte fan.

Direcció de les forces

Quan un cos no es mou, podem pensar que no hi actua cap força. Però ja hem vist que és més correcte dir que la suma vectorial de totes les forces que actuen sobre aquest cos (el que se'n diu *resultant* de les forces) és nul·la, perquè, atès que som a la Terra, *sempre* hi actua, com a mínim, la força de la gravetat. La resultant d'un conjunt de forces és la suma de les forces.

Pensem en un quadre que tenim penjat a la paret o en un gimnasta que fa anelles, com a la figura 63. Quines forces actuen, per exemple:

a) sobre el clau que sosté el quadre?

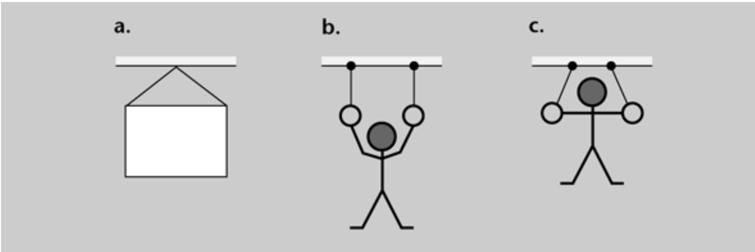
b) sobre la mà esquerra del gimnasta de la figura 63b?

Activitat 3.10. Forces i direccions de les resultants

Contesteu les dues preguntes anteriors i també la següent:

c) Tots podem fer la posició de la figura 63b: només cal que els nostres braços aguantin el nostre pes (de fet, cada braç només ha d'aguantar la meitat del nostre pes). Però, per què és més difícil de fer la postura 63c?

Figura 63. Un quadre penjat i una persona que penja d'unes anelles



Solució

a) El clau sosté el quadre. Per tant, el clau fa una força igual al pes del quadre. Però la força del pes actua sobre el quadre, *no* sobre el clau. La força que actua sobre el clau és la que li fa el quadre a través dels fils amb què el lliguem.

En una anàlisi més detallada, podríem dir que també la Terra fa una força sobre el clau, i la paret on està clavat el clau fa una altra força sobre el clau. Però en l'anàlisi de la figura 63a se sobreentén que ens volem fixar només en el sistema quadre-fils-clau, tot i que no podem oblidar l'acció "indirecta" de la Terra sobre el quadre, perquè sense el pes del quadre no hi hauria problema per resoldre.

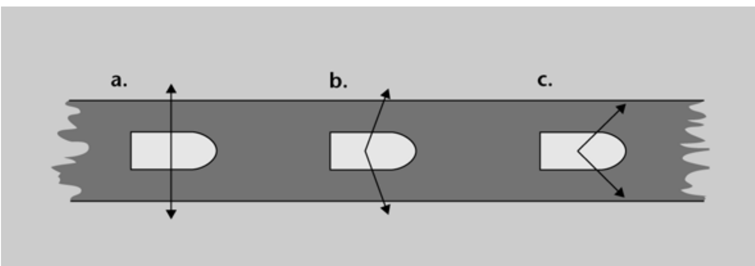
b) Sobre la mà esquerra del gimnasta en la figura 63b actua la tensió del fil que el suporta (i estira de la mà cap amunt) i també part del pes de la persona (que estira de la mà cap a baix a través del braç). Les dues forces s'han d'equilibrar.

c) La postura 63c és més difícil que la 63b perquè els músculs estan sotmesos a una tensió major, per la direcció de les forces que hi actuen. Per a aprofundir en la resposta a aquesta pregunta cal, doncs, aprendre a representar les forces i a operar-ne. Ho veurem en l'apartat 4.

Quan un cos està en equilibri, la suma de forces que hi actua és nul·la. Però aquesta suma de forces ha de ser una suma vectorial, és a dir, que tingui en compte les direccions en què actuen les forces.

Pensem en una altra situació: una barca que es remolca per un riu de tres maneres diferents, com podeu veure a la figura 64. Les fletxes indiquen la direcció en què estirem de la barca mitjançant dues cordes.

Figura 64. Tres maneres de remolcar una barca estirant amb dues cordes en les direccions de les fletxes



Activitat 3.11. Direcció de les forces i efecte resultant

Quina diferència hi ha entre les tres situacions de la figura 64?

Solució

Amb la situació **a** no aconseguirem moure la barca, perquè l'estarem estirant en direccions oposades amb la mateixa força.

Si estirem amb dues forces orientades segons un angle agut (en les direccions de la figura 64c), farem més efecte (per a la mateixa força d'estirament) que si estirem de manera que les forces facin un angle més obtús, com en la figura 64b.

Per tant, les forces són més o menys efectives segons la direcció amb què s'apliquin. Quan diem que una força és més o menys efectiva estem parlant de quina part de la força s'"aprofita" per al que volem; així, si estirem d'un carro, intentarem estirar paral·lelament a terra i no desviats cap amunt o cap avall, perquè aquesta desviació faria que no aprofitéssim una part de la força en desplaçar el carro.

També és important el punt on s'apliquen les forces, perquè en la situació de la figura 65, per exemple, no obtindrem el mateix efecte si apliquem les forces en un punt fora de l'eix de simetria de la barca. En el cas de la figura 65a, la barca avançarà; en els dos darrers casos, 65b i 65c, la barca no sols avançarà, sinó que girarà dins de l'aigua.

Figura 65

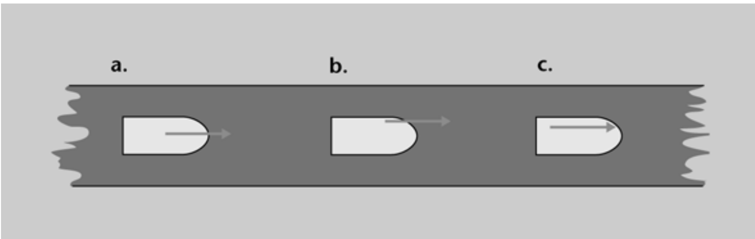


Figura 65

El punt d'aplicació d'una força també té importància. Si estirem la barca amb una corda en les direccions indicades en les fletxes, intuïm que en els casos **b** i **c** la barca pot girar dins de l'aigua, a més d'avançar.

3.4.1. Què hem après?

- Les forces sempre ens les trobem per parelles, però actuen sobre cossos diferents.
- El pes d'un objecte sempre està present, i tot objecte atrau la Terra amb una força igual i contrària al seu pes.

Hem vist que la magnitud *força* (que definirem formalment en l'apartat següent) és una magnitud vectorial: importa el punt d'aplicació, el mòdul o intensitat, la direcció i el sentit que té.

Com continuarem?

Hem vist que les forces aplicades sobre un cos causen canvis en el seu estat de repòs o de moviment. Veurem ara breument que els mateixos cossos poden provocar efectes (forces) sobre altres objectes.

3.5. Efectes dels moviments

Tots sabem que no és el mateix si ens cau un bolígraf al peu que si ens hi cau un llibre. Tanmateix, si recordem l'expressió del temps de caiguda d'un bitllet (equació (1) del subapartat 1.2, que vàrem deduir en el subapartat 2.4.4, equació (149)), podem dir que el temps que tarda a caure un objecte (un llibre, un llapis) en caiguda lliure (és a dir, sota l'acció de la gravetat, únicament) i des d'una altura *h*, és el mateix per al llapis que per al llibre:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{178}$$

D'altra banda, hem dit en el subapartat 3.3 que podem elevar un objecte si hi apliquem una força que en contrareste el pes. Alçar objectes de massa diferent ens suposa fer forces diferents durant el temps que estem elevant l'objecte.

Quan l'objecte cau no hem de fer cap força per moure'l, la fa la Terra. La raó de la caiguda és la força d'atracció de la Terra. La velocitat amb què arriba a terra *qualsevol* cos des d'una altura *h* és la mateixa per a tots els cossos, si es produeix en caiguda lliure (equació (150) del subapartat 2.4.4):

$$v = \sqrt{2gh} \tag{179}$$

Veiem que les relacions cinemàtiques (178) i (179) donen relacions entre variables geomètriques (altura) i cinemàtiques (temps, velocitat, acceleració de la gravetat). Però amb aquestes relacions no podem explicar el fet que el cos que cau produeix un efecte diferent segons la massa que tingui, perquè la massa no hi intervé.

Què no hem considerat encara per a tenir en compte la diferència que sabem que hi ha en la dinàmica de cossos diferents i en els efectes que produeixen sobre tercers cossos?

Ens podem plantejar diverses qüestions, a la vista de les consideracions anteriors:

a) Per què no apareix en les expressions (178) i (179) la massa o el pes dels objectes que cauen?

b) Què volem dir amb "caiguda lliure"? Quins altres tipus de caigudes hi ha?

c) Si agafem el llapis o el llibre caigut a terra, l'esforç (la força) que hem de fer és diferent. En què es tradueix aquest esforç, pel que fa a l'objecte que alcem?

d) Tot i que la força que hem de fer per a elevar un objecte és sempre igual al seu pes, si els objectes cauen des d'una altura menor, l'efecte que causen (sobre el peu, per exemple) són menors. Per què?

e) Tanmateix, en el cas anterior, una vegada els objectes són a terra, la força que hem de fer per a alçar-los és la mateixa que quan cauen des d'una altura més gran. No hi ha una contradicció, ací?

Tancarem aquest apartat deixant les qüestions anteriors obertes. Les contestarem en apartats posteriors, quan comencem a quantificar els efectes de les forces sobre els cossos, i quan introduïm altres conceptes com els relacionats amb el treball i l'energia que es posa en joc en els processos esmentats.

3.5.1. Què hem après?

- L'anàlisi del moviment de caiguda lliure ens mostra que, per a comprendre els efectes d'aquest moviment, no n'hi ha prou amb conèixer el temps de caiguda lliure o la velocitat amb què arriba un objecte a terra.

- Vam començar a estudiar els moviments fixant-nos únicament en la velocitat de la partícula i tot seguit vam parlar d'acceleracions, de forces, de lleis bàsiques de la mecànica, etc.

- La descripció de processos i fenòmens d'interès, que habitualment són complicats, requereix que introduïm conceptes cada vegada més elaborats.

3.6. Recapitulació

Hem introduït el concepte de sistema de referència inercial i l'hem definit com aquell que es mou a velocitat uniforme i constant.

- La velocitat d'un objecte és una magnitud relativa, que pren valors diferents quan s'observa des de sistemes de referència inercials diferents.

- L'acceleració de l'objecte, en canvi, és la mateixa quan es mesura des de sistemes inercials diferents. L'acceleració d'un objecte és una magnitud absoluta, independent del sistema de referència inercial des del qual es mesura.

Una força és qualsevol acció que provoca un canvi en l'estat de moviment d'una partícula.

- L'efecte que tenen les forces depèn de la direcció en què s'apliquen.
- Les forces actuen per parelles (acció i reacció).

La massa d'un objecte és una mesura de la inèrcia que presenta, és a dir, de la dificultat que implica canviar-ne l'estat de moviment. La massa influeix en la força que hem de fer per a desplaçar o per a aturar objectes.

Els efectes que tenen uns objectes sobre uns altres depenen de diversos factors: velocitats relatives, distància que els separa, massa, etc.

3.7. Problemes d'ampliació

Problema 3.1. Velocitats típiques

Recordem el problema 2.1 de l'apartat 2:

- Un vehicle que va a una velocitat de 72 km/h, és a dir, a 20 m/s.
- Una persona que corre a menys de 10 m/s.
- La Terra, que es mou a uns 30 km/s al voltant del Sol, que és a uns $1{,}5 \times 10^8$ km.

En quin dels tres casos podem definir un sistema de referència inercial lligat a l'objecte que es mou?

Problema 3.2. Fricció

Expliqueu per què en el comentari a les figures 53 i 54 (en comentar l'activitat 3.2) hem dit que de vegades observarem que un objecte (com ara un paper, en lloc d'una pedra) es veurà frenat si el deixem caure des d'un vehicle en moviment, tot i que suposem que no fa vent. Com s'observa el moviment de caiguda d'aquest objecte des del tren i des de l'estació?

4. Lleis de Newton de la dinàmica

En els apartats 1 i 2 hem estudiat la **cinemàtica**, la part de la mecànica que analitza i descriu els moviments dels objectes sense preocupar-se de les causes d'aquests moviments.

La **dinàmica** és la part de la mecànica que estudia les causes que produeixen els moviments i la relació entre les causes i els efectes que s'observen. Hem començat a estudiar qualitativament la dinàmica en l'apartat 3 i en aquest apartat formalitzarem els conceptes necessaris i les relacions entre ells: lleis i fórmules que relacionen magnituds físiques. Enunciarem les tres lleis bàsiques de la dinàmica, les tres lleis de Newton.

Introducció

Hem discutit en l'apartat anterior algunes situacions dinàmiques que resulten de l'aplicació de forces. En aquest apartat introduirem les lleis que determinen el moviment dels cossos. Això ens durà a definir de manera precisa termes com ara *força* i *massa*, que en la vida diària es fan servir de manera informal i, de vegades, metafòricament. Ací, però, donarem als termes *força*, *massa*, *energia*, *treball*, etc., un significat tècnic molt precís i concret. Es tracta de canvis semàntics (canvis en el significat) que només ens apropiarem adequadament si fem servir els conceptes en contextos variats i de dificultat creixent.

De cada concepte farem una definició operativa, que ens permetrà veure'n el significat i la manera en què es podria determinar o mesurar. Perquè la física, a banda de tractar de descriure el món físic que ens envolta, introdueix magnituds **mesurables** i investiga les lleis que les relacionen.

Què aprendrem?

- Ja hem discutit qualitativament en l'apartat 3 les tres lleis de la dinàmica, que tenen a veure amb la inèrcia, l'acció de les forces i l'existència de parelles de forces d'acció i reacció.
- En aquest apartat aprendrem a enunciar i a aplicar les tres lleis de Newton de la dinàmica, que ens permetran resoldre problemes complexos de dinàmica de partícules.

Què suposarem?

A més de tenir present la cinemàtica i les idees qualitatives de dinàmica que han aparegut en l'apartat anterior, només cal tenir nocions bàsiques sobre càlcul vectorial i integrodiferencial.

4.1. Llei de la inèrcia, o primera llei de Newton

Com ja hem vist en els subapartats 3.2 i 3.3, estem acostumats a veure que els objectes que estan en moviment acaben aturant-se si no s'hi fa res: si llancem una pilota, acaba caient a terra i roda fins que s'atura; un vehicle s'atura si no pitgem l'accelerador de manera constant. En els dos casos, la força de fregament amb el terra, de la pilota o de les rodes del cotxe, és la que fa que s'aturin la pilota o el vehicle.

També veiem constantment objectes aturats, que no es mouen si no s'hi actua: una pedra en el camí, un llibre damunt la taula, una bola de billar, etc., no es mouen si no els colpegem o els agafem.

En conclusió, són necessàries accions, que anomenarem *forces*, per a aturar objectes i calen forces per a moure objectes.

El llenguatge científic pretén ser acurat i inequívoc. Per tant, mentre que en la vida diària diem que una acció, com ara un cop de mà, un desnivell, etc., han causat un moviment, quan parlem en termes científics només farem servir el terme de *forces*.

Una **definició qualitativa de força** és, doncs, la següent.

> Una **força** és qualsevol acció, aplicada des de l'exterior d'un cos, que en modifica la velocitat o que en modifica l'estat de repòs, o absència de velocitat.

Analitzem aquesta definició.

Activitat 4.1. Definició qualitativa de força

Expliqueu per què la definició anterior de força és aplicable als exemples esmentats en aquest subapartat (pedra, bola, llibre, etc.) i indiqueu en cada cas qui o què fa les forces que hi actuen.

Solució

Quan alcem una pedra, quan colpegem una bola de billar, quan cau un llibre de la taula a terra, etc., estem modificant la velocitat del cos. En els exemples anteriors, la velocitat passa d'un valor nul a un valor no nul.

També apliquem una força si accelerem un cotxe o si colpegem un gronxador perquè vagi més de pressa.

Les forces que actuen en els exemples anteriors són la gravetat terrestre, la força que fem amb les mans, la força d'impacte del tac de billar, etc.

Per tant, les forces provoquen canvis en l'estat de repòs o de moviment, és a dir, les forces provoquen acceleracions.

Imagineu ara que viatgeu en un vehicle (un tren, un avió, un cotxe) que es mou a velocitat constant i en línia recta. Ja sabem que quan parlem de velocitat constant volem dir que el vector velocitat és constant: no en canvia ni el mòdul ni la direcció ni el sentit; és a dir, ens movem en línia recta i a tants m/s, invariables. Si el vehicle frena o accelera, fins i tot si només canvia de direcció, els nostres cossos (i els objectes situats dins del vehicle) ho noten. Segons el que hem dit, sembla que hi ha d'haver alguna força que faci que quan un vehicle arrenca des de la situació de repòs, o quan agafa una corba, o quan s'accelera bruscament, el nostre cos es vegi impel·lit contra el seient del davant o del darrere, o contra la porta del vehicle.

Activitat 4.2. Acceleracions brusques

Expliqueu què ocorre si:

a) El cotxe en què viatgeu agafa una corba violentament.

b) Aneu dempeus en un autobús que frena de sobte.

c) El cotxe en què viatgeu va a velocitat constant per una carretera recta i llisa i, de sobte, hi ha una forta baixada (un canvi de rasant brusc).

Solució

a) Ens donem un cop contra el lateral del cotxe, o contra la persona que tinguem al costat. Sentim que ens movem en sentit contrari a la corba, cap a l'exterior de la corba.

b) Ens veiem impulsats cap endavant, en el sentit de la marxa de l'autobús.

c) Sentim que el cos s'eleva, com si l'estómac pugés cap amunt.

Les observacions de l'activitat anterior i els exemples que hem vist abans són conseqüència d'una llei general de la dinàmica que anomenem **llei de la inèrcia** o **primera llei de Newton** que enunciem tot seguit.

> Tot cos continua en l'estat de repòs o de moviment uniforme i en línia recta si sobre el cos no actua cap força.

Ja vam comentar en el subapartat 3.1 que l'estat de repòs i el de moviment rectilini i uniforme són indistingibles, és a dir, són equivalents pel que fa als fenòmens que observem en la natura.

El concepte d'inèrcia es veu en el subapartat 3.3 d'aquest mòdul didàctic.

La llei d'inèrcia és, per tant, una declaració del fet que els estats de repòs o de moviment rectilini i uniforme són estats naturals dels objectes, i que són necessàries interaccions amb altres objectes per tal de produir *canvis* en aquest moviment.

Així, l'estat de repòs o velocitat nul·la és equivalent a l'estat de velocitat constant. Fixeu-vos que en dir velocitat estem referint-nos sempre al vector velocitat.

La llei de la inèrcia ens permet traure conclusions sobre l'existència de forces quan observem un moviment concret. Vegem un exemple.

Activitat 4.3. La llei d'inèrcia i la Lluna

Apliqueu la llei d'inèrcia al moviment de la Lluna al voltant de la Terra. Què en concloeu?

Solució

La Lluna fa una òrbita aproximadament circular al voltant de la Terra. La velocitat de la Lluna és, en cada punt, tangent a la trajectòria de la Lluna, com mostra la figura 66; per tant, la Lluna està sotmesa a una força en tot instant, perquè no es mou amb moviment rectilini i uniforme en cap moment.

Figura 66.

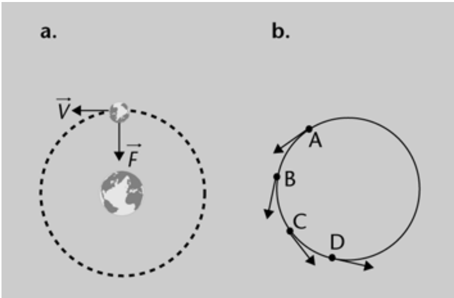


Figura 66

La Lluna fa una òrbita (una trajectòria) gairebé circular al voltant de la Terra.

a. Velocitat instantània de la Lluna i força que la manté en òrbita en un punt de l'òrbita.

b. Vector velocitat en alguns punts de l'òrbita.

Fixem-nos en els vectors velocitat en els punts B i C de la trajectòria de la Lluna (figura 66). Quin tipus de força fa que un moviment que té lloc en la direcció B esdevingui un moviment en la direcció C un instant després? Ha de ser alguna força que actuï en direcció al punt central de la circumferència, la que provoqui aquesta variació constant de la direcció de moviment. Aquesta força és la d'atracció de la Terra.

Vam veure en l'activitat 2.12 que en un moviment circular l'acceleració és centrípeta. Per tant, tindrà la direcció de la força (figura 66a).

Una altra manera d'interpretar **la primera llei de Newton** és dient que ens dóna una **definició qualitativa de *força*** com la que donem a continuació.

Una força és qualsevol actuació que permet alterar la velocitat d'una partícula.

Una força és l'acció feta per un agent extern al cos que està aturat o en moviment (en un moviment qualsevol, accelerat o no) i que l'hi provoca un *canvi* de velocitat. Diem *canvi* en el sentit més ampli, que inclou una modificació del vector velocitat en termes de mòdul, de direcció o de sentit.

Diem que la definició és *qualitativa* perquè no ens permet mesurar forces, sinó únicament detectar-ne l'existència. Veurem en el subapartat següent que amb la segona llei de Newton podrem construir una definició operativa de força, que ens permetrà treballar-hi quantitativament.

Analitzarem ara l'efecte de diverses forces que actuen simultàniament sobre un cos.

Activitat 4.4. Aplicació del primer principi de la dinàmica

Sabeu que si us tireu per un tobogan, habitualment caieu cada vegada més ràpidament: és un moviment accelerat.

Però potser també heu observat que de vegades una persona es tira pel tobogan i al cap d'uns instants d'estar caient continua el moviment amb una velocitat que sembla constant.

Analitzeu els dos casos a la llum de la pimera llei de Newton.

Solució

En lliscar per un tobogan la força de la gravetat és la que ens fa caure. Com que aquesta força actua constantment, el moviment és cada vegada més ràpid: es tracta d'un moviment accelerat. Segons el principi d'inèrcia les forces provoquen canvis en l'estat de moviment.

Però no és aquesta força l'única que actua, perquè també hi ha forces de fricció entre el nostre cos i la superfície del tobogan. Hi ha vegades que ens hi llancem i no caiem: la força de fricció, la reacció del tobogan que ens sosté i el pes es compensen (donen una força resultant nul·la) i, com que no actua cap força total, aleshores el nostre cos no s'accelera: si estava en repòs, continua en repòs.

També pot ocórrer que comencem a caure i mentre estem movent-nos es produeixi una cancel·lació de forces (fricció, reacció del tobogan i pes) i aleshores es manté la velocitat constant de caiguda perquè no actua cap força que acceleri el moviment de caiguda. D'acord amb el principi d'inèrcia, si no actua una força, no es modifica l'estat de moviment (rectilini i uniforme) del cos.

En els dos exemples veieu que, d'acord amb el primer principi, l'estat de moviment rectilini i uniforme, o l'estat de repòs, són estats en què no actua cap força que els alteri. Fixem-nos, però, que el que importa és la força total, o força neta: una força nul·la pot ser el resultat de sumar diverses forces.

Tanmateix, no tota força aplicada produeix moviment: pensem en una prestatgeria plena de llibres. Si un xiquet l'empenta, la prestatgeria probablement no es mourà. La "intensitat" de la força aplicada és, per tant, important (en aquest exemple, la força total que actua sobre la prestatgeria és la resultant de la força aplicada externament i la força de fricció del terra. Si la resultant és nul·la, no hi ha moviment).

Una altra situació és dóna quan tenim un llibre damunt d'una taula. Si l'empenyem contra la taula, aquest no es mourà (a no ser que es trenqui la taula). Si l'empenyem en una direcció paral·lela a la taula, podem moure'l, i es mourà en la direcció en què fem la força. La direcció de la força aplicada és, per tant, important.

Les dues conclusions anteriors (sobre la importància de la intensitat i la direcció de les forces aplicades) ens indiquen que la magnitud *força* és una magnitud vectorial, com ja havíem intuït en els exemples del quadre que penja de la paret, del gimnasta i de la barca de les activitats 3.10 i 3.11.

4.1.1. Què hem après?

- L'"estat natural" d'un cos és el repòs o el moviment rectilini i uniforme.
- Si apliquem una força a un cos, l'estat de moviment o de repòs del cos s'altera. És a dir, una força accelera un cos en canviar-ne la velocitat.
- Les forces són magnituds vectorials.

El subapartat següent aborda dos punts clau de la mecànica newtoniana: com es poden mesurar forces i com es relacionen les forces amb els canvis que produeixen en els moviments dels cossos.

4.2. Segona llei de Newton

Tots tenim l'experiència que si agafem una persona de la mà, i l'hi fem una estirada forta cap a nosaltres, la persona se'ns apropa; si l'estirem més fortament, l'efecte és major. Podríem dir que estirades i canvis de velocitats (acceleracions) estan relacionades.

Com que no tenim l'opció de fer un experiment al laboratori per tal d'arribar al concepte quantitatiu de força, farem un **experiment mental** (o, com li agradava dir a Einstein en alemany, un *Gedankenexperiment*).

Experiments

Avui en dia tenim altres opcions: podem veure simulacions per ordinador com les que vam comentar en l'apartat 1. Un exemple de simulació referida a la segona llei de Newton és aquesta: http://www.tutorvista.com/content/physics/physics-i/newtons-laws-motion/animation-newtons-second-law.php

Fem un experiment mental com el de la figura 67: un objecte B pot lliscar sobre un pla d'inclinació variable i està lligat a un altre cos, A, que es mou sobre un pla horitzontal. L'angle α que fa el pla inclinat es pot variar. Els dos objectes es mouen sense fricció (imaginem que les superfícies són ben polides i greixades, o que són de gel).

Figura 67

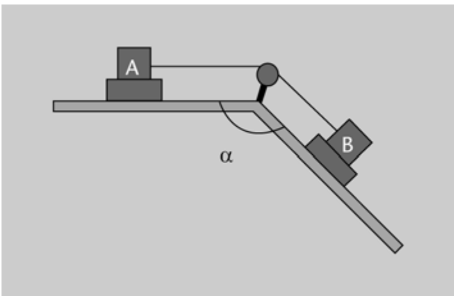


Figura 67

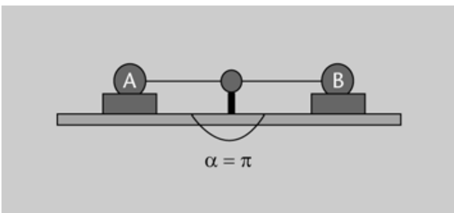
Un objecte B cau per un pendent i arrossega l'objecte A. Les superfícies sobre les quals descansen A i B no tenen fregament.

Si l'angle α és de 180° (figura 68), les superfícies on descansen A i B són planes i els dos objectes estaran aturats.

Recordeu

180° és igual a π radians.

Figura 68. Els objectes A i B no es mouen si la superfície és plana i horitzontal



Però si fixem un angle en l'interval $\pi/2 < \alpha < \pi$ i hi col·loquem els objectes, el cos *B* començarà a caure i això farà que el cos A també es mogui. Una ràfega de fotos disparada a A (diverses fotos en una fracció de segon) ens donaria un resultat com el de la figura 69.

Figura 69

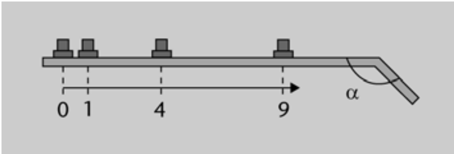


Figura 69

Quatre instantànies de la posició d'A per a tres increments iguals de temps, Δt. B arrossega l'objecte A en un moviment accelerat.

Si no hi ha fricció, la caiguda de B serà del tipus "caiguda lliure". En efecte, podríem comprovar (per exemple fent també una ràfega de fotos) que les posicions de B per a increments constants de temps segueixen una relació del tipus de la llei de moviment en caiguda lliure, equació (147) de l'apartat 2:

$$\Delta l \propto (\Delta t)^2 \tag{180}$$

on Δl és la distància recorreguda per B durant el temps Δt. El desplaçament del cos A seguirà la mateixa relació que el cos B.

A partir de les dades experimentals del desplaçament en funció del temps transcorregut, $\Delta l(\Delta t)$, podríem deduir l'acceleració a del cos B. Només hauríem d'ajustar les dades a l'expressió (146) de l'apartat 2, ja ben coneguda per nosaltres:

Recordeu

Quan escrivim $\Delta l(\Delta t)$ volem dir que el desplaçament Δl és funció del temps transcorregut, Δt.

$$\Delta l = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \tag{181}$$

Com que l'objecte de A està unit per un fil al cos B, A també es desplaçarà per la superfície horitzontal amb la mateixa acceleració constant que B.

Entre els angles $\alpha = \pi$ i $\alpha = \pi/2$ l'acceleració dels cossos A i B augmentarà des del valor $a = 0$ per a $\alpha = \pi$ fins a un valor màxim, $a = g$, per a $\alpha = \pi/2$. Si $\alpha = \pi/2$ el cos B cau en caiguda lliure i amb la màxima acceleració, g, sense ser afectat pel pla inclinat. Com hem dit, aquest fet experimental es podria comprovar amb una càmera que fes una ràfega de fotos. En definitiva, tenim un valor de l'acceleració del cos A per a cada angle α del pla inclinat.

A més de l'acceleració dels dos objectes en l'experiment anterior, hem de mesurar les forces que hi actuen. Vegem com ho podem fer.

4.2.1. Mesurador de forces

Ara sofisticarem l'experiment una mica i construirem mentalment un mesurador de forces, mitjançant una molla elàstica que situarem entre A i B (vegeu la figura 70).

Figura 70

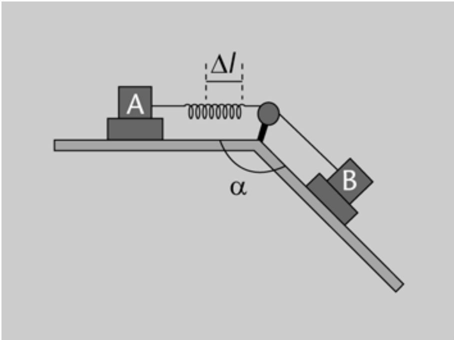


Figura 70

Afegim una molla al fil que uneix els dos cossos, que permetrà mesurar la força que fa B sobre A.

Podríem comprovar experimentalment que per a cada angle α hi ha un estirament diferent de la molla (tots tenim l'experiència que si fem una força sobre una molla podem estirar-la i que, si fem una força més gran, l'estirament és major). Amb una ràfega de fotografies podríem comprovar també que l'estirament de la molla és constant durant el moviment que es produeix per a cada angle del pla inclinat.

Per tant, podem associar un valor de la força que fa B a cada valor de l'estirament de la molla, i podem determinar així quina força fa B sobre A per a cada angle. La força la donarem en unitats arbitràries, de moment, és a dir: farem una escala 0, 1, 2, etc. sobre la molla, de manera que el valor 0 correspongui a la posició de l'extrem de la molla quan $\alpha = \pi$, i mesurarem a quin punt de l'escala arriba la molla estirada per a cada valor de l'angle del pla inclinat. Podem construir una taula de valors experimentals de força i acceleració per a cada angle, perquè la força i l'acceleració es poden mesurar independentment (la força, a partir de l'estirament de la molla, i l'acceleració, a partir de la ràfega de fotos).

Relació funcional

Si apliquem una força a una molla, aquesta s'estira o es contrau. Hi haurà alguna funció que descrigui aquesta relació que, intuïtivament, només podem albirar que serà monòtona creixent:
en incrementar la força aplicada, la molla s'allarga més.

Fixeu-vos que no hem fet cap hipòtesi sobre quina relació funcional hi ha entre força aplicada i estirament de la molla. Ja veureu en l'apartat 6 que en alguns casos aquesta relació és senzilla, però per a l'experiment que ens ocupa no cal ni investigar-la. Podem continuar la discussió de l'experiment sense conèixer la relació que lliga forces i estiraments o compressions en una molla elàstica.

4.2.2. La massa d'un objecte

Ara canviem l'objecte A per un altre de semblant, però més gran o més petit. Repetim els experiments i representem en una gràfica força-acceleració la relació que hi ha, per a cada angle, entre les forces que indica el mesurador (l'allargament de la molla) i l'acceleració que observem en l'objecte (per mitjà de la ràfega de fotos). Si ho fem per a objectes diferents obtindrem una gràfica com la de la figura 71.

Figura 71

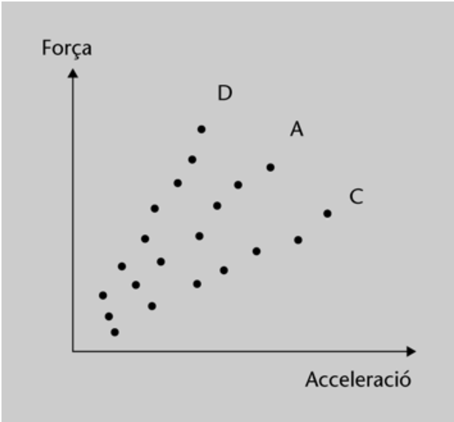


Figura 71

Resultats d'experiments de mesura de forces i d'acceleracions per a tres cossos diferents, A, C i D (cada mesura de força i d'acceleració; és a dir, cada punt de la gràfica, correspon a un angle α determinat).

Com que els punts corresponents a cada cos en la figura 71 estan bastant alineats, es pot fer passar una recta per la seqüència de punts que correspon al moviment de cada objecte (vegeu la figura 72).

Figura 72

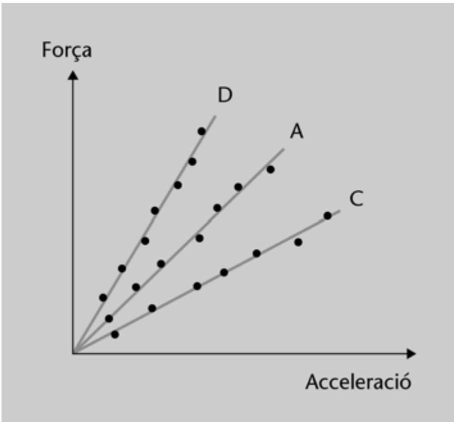


Figura 72

Fem passar les línies rectes que millor s'ajusten als resultats de la figura 71.

Què significa aquest resultat que hem obtingut dels experiments de mesura de forces aplicades i d'acceleracions produïdes per a diversos cossos? Ens adonem de dos fets:

1) La relació entre força i acceleració és lineal, és a dir, les dues magnituds són proporcionals.

2) El pendent de les rectes és diferent per a cada objecte.

Comencem pel segon fet. Si ens fixem en el valor d'una força qualsevol i fem una ratlla horitzontal (figura 73), observem que per a una mateixa força l'objecte D s'accelera menys que l'objecte A, i aquest menys que l'objecte C. Direm que C té menys inèrcia que A i que A té menys inèrcia que D.

Figura 73

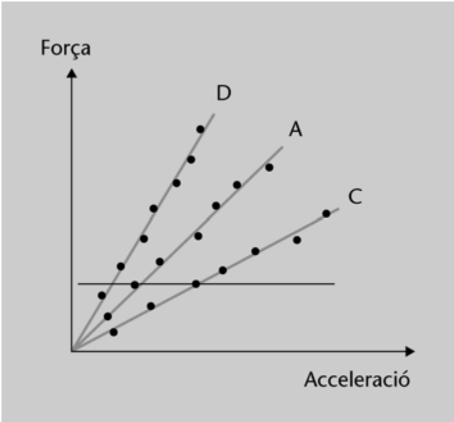


Figura 73

S'ha marcat en les dades de la figura 72 un valor qualsevol de la força amb una ratlla horitzontal. El cos D s'accelera menys (té més inèrcia) que l'A i aquest, que el C.

El primer fet, que les forces aplicades resulten ser directament proporcionals a les acceleracions que adquireixen els objectes, és una llei de la natura. La constant de proporcionalitat és un valor únic per a cada objecte, una "propietat" de cada objecte.

En conclusió, quan apliquem diverses forces, F, a un cos que s'accelera, a, per l'aplicació d'aquestes forces, es troba experimentalment el fet que F és proporcional a a, $F \propto a$. Si simbolitzem amb m la constant de proporcionalitat que relaciona les forces aplicades a un cos i les acceleracions que aquestes provoquen, podem escriure la **relació força-acceleració**:

$$F = ma \tag{182}$$

La propietat del cos que s'accelera, m, és el pendent de la línia recta corresponent a cada cos en la figura 72. Anomenem aquesta propietat *massa inercial* o simplement *massa* per a abreujar.

Aquesta llei, la **segona llei de Newton**, s'enuncia així: si actua sobre una partícula de massa m una força F, aquesta li comunica una acceleració que ve donada pel quocient de la força per la massa.

Mentre que l'escala de forces de l'experiment mental anterior era arbitrària, l'existència d'aquest número únic per a un cos determinat *no* és un assumpte de definició o de conveni i no es pot deduir de principis teòrics: és un *fet* físic experimental, una llei de la natura, que anomenem *segona llei de Newton*. Newton va arribar a la conclusió anterior per conjectura i no per proves experimentals directes, però es va adonar del seu caràcter de llei bàsica del moviment, i per això l'anomenem *segona llei de Newton de la dinàmica*.

Massa *m*

Diem *únic* per a indicar que la massa és una magnitud escalar i que és una propietat de cada objecte concret. Tot i així, objectes diferents en forma, color, textura, etc., poden tenir valors idèntics de *m*.

La massa, igual que la longitud i el temps, és una de les set unitats fonamentals del Sistema Internacional. La unitat de massa inercial s'anomena quilogram, se simbolitza kg i correspon (per conveni internacional) a la massa d'una peça patró determinada conservada a París.

De l'expressió (182) es pot veure que la força és una magnitud derivada. La unitat de força és el newton i es representa amb la lletra N.

Activitat 4.5. Un newton

Com es defineix la unitat de força, el newton, a partir d'unitats fonamentals del SI? (Ajuda: feu servir l'equació (182)).

Solució

Si donem el valor unitat a cada magnitud de l'equació (182), obtenim l'expressió de la unitat de força, el newton, a partir de les unitats fonamentals:

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg}\ 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{183}$$

És a dir, 1 newton (1 N) és la força que, aplicada a una massa d'1 kg, li comunica una acceleració d'1 $\mathrm{m/s^2}$.

Algú es podria preguntar si no és cert que, de la mateixa manera que un cos té una determinada massa, *totes* les propietats que tenen els objectes són úniques. No és així: un objecte concret de massa inercial m (per exemple un tros de fusta, una goma elàstica o un got d'aigua) pot tenir molts estats de càrrega elèctrica, molts colors diferents o moltes formes, però només *un* valor de la massa.

Amb la segona llei de Newton podem relacionar la velocitat i la posició de la partícula amb les forces que hi actuen, per mitjà de l'acceleració que provoquen. Aquest és l'objectiu principal de la dinàmica.

Activitat 4.6. Segona llei de Newton en forma d'equació diferencial: lleis del moviment

Tenint en compte que les magnituds força i acceleració són magnituds vectorials, escriviu la segona llei en forma d'equació vectorial i expliciteu també la definició d'acceleració per tal d'obtenir una equació diferencial. Escriviu les tres equacions que obteniu per a les components dels vectors.

Solució

En general, com que forces i acceleracions són magnituds vectorials, podem escriure la **segona llei de Newton en forma vectorial**:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{184}$$

o bé, component a component:

$$F_x = ma_x,\ F_y = ma_y,\ F_z = ma_z \tag{185}$$

Sobre una partícula poden actuar diverses forces alhora. En les expressions anteriors cal fer servir la **força neta** o **resultant**:

La força neta o força resultant és la que accelera una massa.

La segona llei de Newton també es pot escriure en termes de la velocitat de la partícula, si explicitem la definició d'acceleració en la relació (184), $\vec{a} = d\vec{v}/dt$:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{186}$$

O, si fem servir la relació entre l'acceleració i el vector de posició, $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{187}$$

De la mateixa manera que hem escrit les relacions (185) a partir de la (184), les relacions (186) o (187), com tota expressió vectorial, equivalen a tres equacions, quan les escrivim component a component. Per exemple, la (187) seria:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2} \quad F_z = m\frac{d^2z}{dt^2} \tag{188}$$

Es tracta d'equacions diferencials quan coneixem les forces i cerquem les coordenades de la trajectòria de la partícula, perquè apareixen sota el signe de derivació.

Les relacions (186) o (187) indiquen que, si coneixem les forces que actuen sobre un sistema, la resolució de les equacions diferencials anteriors ens permet obtenir la llei de moviment $\vec{r} = \vec{r}(t)$ i també la velocitat de la partícula en tot moment.

Recordem, per acabar el subapartat, el procés que ens ha dut a enunciar la segona llei de Newton. Començant per forces i acceleracions (dues magnituds mesurables experimentalment) hem definit la magnitud *massa*, que és una mesura de la inèrcia dels cossos, és a dir, de la tendència que té un cos a romandre en l'estat de moviment rectilini i uniforme (o de repòs) en què es troba. La inèrcia és, també, una mesura de la dificultat que presenta un objecte per a aturar-lo quan està en moviment (perquè cal aplicar una força per a frenar-lo, és a dir, desaccelerar-lo).

4.2.3. Què hem après?

- Hem plantejat la segona llei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, com a resultat d'un experiment mental que es podria reproduir fàcilment en un laboratori de física.
- També hauria estat un procediment vàlid postular aquesta llei i verificar-ne la validesa tot comprovant que les conseqüències que té són corroborables experimentalment.
- La segona llei de Newton permet definir quantitativament el concepte de força, una vegada s'ha fixat per conveni la unitat de massa.
- Si sobre un cos actuen diverses forces, l'efecte d'aquestes és el mateix que el d'una sola força, la força resultant o força neta.
- L'existència d'una única massa inercial associada a cada objecte, i que indica l'acceleració que tindrà si li apliquem una força, és una propietat bàsica de la natura.

Ja hem formulat la primera i la segona lleis de Newton. Abans d'enunciar la tercera llei de Newton, analitzarem algunes conseqüències que es deriven d'una anàlisi del que expressa la segona llei. Començarem per fer explícita una propietat de les magnituds vectorials, que permet analitzar de manera més senzilla els problemes en què intervenen: el seu caràcter lineal.

4.3. Superposició de masses i de forces

El pas de l'equació (182), $F = ma$, a l'expressió vectorial (184) no és un pas "natural" o obvi. És el resultat d'experiments que permeten comprovar que el principi de superposició de forces no és només una conjectura, sinó que és la manera en què es comporta la natura. El principi de superposició ens permet fer servir l'àlgebra vectorial en els problemes de mecànica. Aquest fet justifica que estudieu àlgebra lineal en matemàtiques. Els problemes "no lineals", quan són presents, són molt més difícils de tractar matemàticament, perquè no es compleix el principi de superposició.

El **principi de superposició de les forces** diu que l'efecte d'un conjunt de forces és el mateix que l'efecte que fa la força resultant.

En efecte, si apliquem dues forces $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ a un objecte que té una massa m, l'acceleració resultant d'aquesta massa és la suma de les acceleracions que li provocaria cada força per separat, $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

Vegem-ho. Segons la segona llei de Newton, l'acceleració que provoca la força total $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ és:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m} \quad (189)$$

i si ara separem la suma en dues fraccions, i tenim en compte que la segona llei també s'aplica a cada força per separat, obtenim:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \quad (190)$$

El principi de superposició de forces diu, també, que si dos objectes de massa m_1 i m_2 tenen la mateixa acceleració, la força que provocaria aquesta mateixa acceleració a un objecte de massa $m_1 + m_2$ és la suma de les forces que actuen sobre cada objecte.

El procediment per a demostrar-ho és semblant a l'anterior. La força que comunica una acceleració $\vec{a}$ a la massa total:

$$\vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{a} \quad (191)$$

és igual a la suma de les forces que provoca l'acceleració $\vec{a}$ a les dues masses per separat:

$$\vec{F} = m_1\vec{a} + m_2\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (192)$$

En resum, el principi de superposició expressa que l'efecte de la suma és igual a la suma dels efectes.

Això val tant per a les forces, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, com per a les masses o les acceleracions. El principi de superposició val també per a qualsevol altra magnitud vectorial que aparegui en aquest curs, com la velocitat, el moment lineal, el camp gravitatori o l'elèctric, etc.

El principi de superposició permet també "descompondre" una força en les seves components i analitzar quin efecte fa cada component sobre l'objecte. En particular, aquest principi és el que ens permet parlar de les tres components cartesianes d'un vector, com ara la força, i escriure el vector força com la suma dels efectes que té cada component actuant en una direcció diferent de l'espai:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \tag{193}$$

La notació vectorial és, doncs, ben compacta i potent: una sola equació vectorial representa tres equacions escalars i, a més, du implícit el compliment del principi de superposició de les magnituds involucrades.

Repassem tot seguit les idees bàsiques de l'àlgebra de vectors.

En una primera lectura d'aquest apartat podeu passar directament al subapartat 4.4, i continuar treballant els aspectes conceptuals de la segona llei de Newton, i veure a continuació la discussió de la tercera llei de Newton. En una nova lectura d'aquest apartat podeu fer les activitats següents, que són importants des del punt de vista pràctic, però no ho són tant en termes conceptuals.

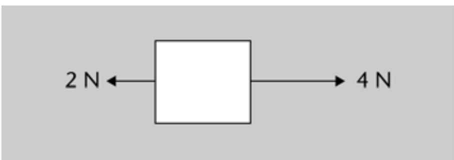
4.3.1. Suma de magnituds vectorials

En aquest subapartat farem un repàs breu de conceptes elementals sobre la suma de magnituds vectorials. En particular, recordarem com es fa la suma de forces, per tal d'obtenir la força resultant.

Activitat 4.7. Suma de forces

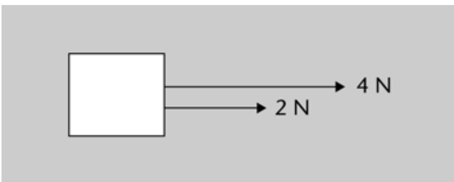
a) Si estirem un objecte amb una força de 2 N cap a l'esquerra i 4 N cap a la dreta (figura 74a), quina és la força resultant, és a dir, quina força fa el mateix paper que la suma de les dues?

Figura 74a. Dues forces que actuen sobre un cos, en direccions oposades



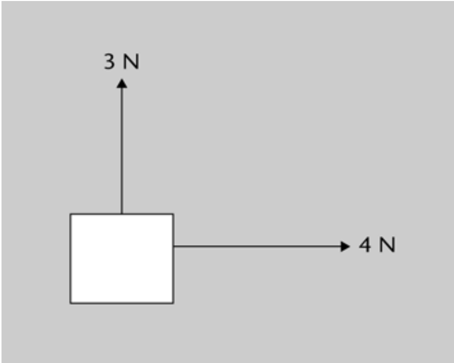
b) Calculeu la resultant de les forces indicades a la figura 74b.

Figura 74b. Dues forces que actuen sobre un cos, en la mateixa direcció



c) Si dues forces actuen en direccions que fan un angle recte, com en la figura 74c, quina és la força resultant?

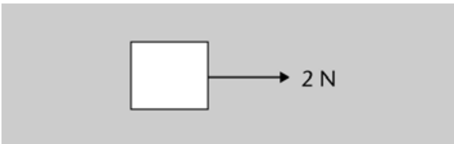
Figura 74c. Dues forces que actuen sobre un cos en direccions perpendiculars



Solució

a) El parell de forces de la figura 74a equival a una sola força de 2 N actuant cap a la dreta. Aquesta és la força resultant de la suma de les forces de la figura 74a:

Figura 74d. Resultant de les dues forces de la figura 74a

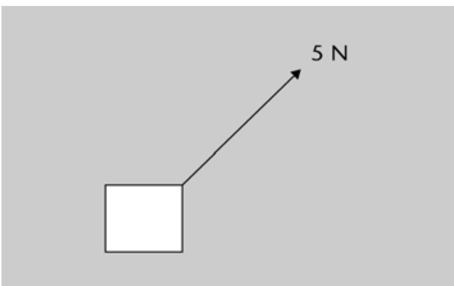


b) Fixeu-vos que la longitud de les fletxes és una indicació de la magnitud de les forces. La suma de les dues forces de la figura 74b equival a una força de 6 N dirigida en el mateix sentit (figura 74e).

Figura 74e. Resultant de les dues forces de la figura 74b

En el cas de la figura 74c, la força resultant es mostra en la figura 74f.

Figura 74f. Resultant de les dues forces de la figura 74c



Com obtenim la resultant en el cas anterior, en què les forces que sumem no tenen la mateixa direcció de l'espai?

Els dos procediments alternatius que comentarem ara per sumar dos vectors valen per a qualsevol parella de forces que formen un angle determinat, no només per a forces perpendiculars com les de l'exemple 74c.

Gràficament, la suma de dues forces que tenen direccions perpendiculars, com les forces de la figura 74c, es pot fer de dues maneres: la primera opció és tancar el quadrilàter amb rectes paral·leles als dos vectors que sumem i traçar el vector que uneix el vèrtex dels vectors que se sumen amb el vèrtex comú oposat. Aquest és el vector suma.

Figura 74g

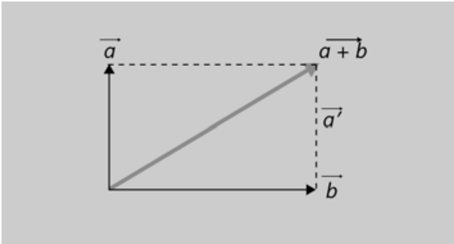


Figura 74g

Fem un rectangle que té per costats els vectors $\vec{a}'$ i $\vec{b}$ que volem sumar i unim el vèrtex comú dels vectors $\vec{a}'$ i $\vec{b}$ amb l'extrem oposat del rectangle.

També es poden sumar les dues forces perpendiculars si fem una còpia d'una de les forces, $\vec{a}$, per exemple, a l'extrem de l'altra, $\vec{a}'$, i unim l'origen del segon vector amb l'extrem del que hem copiat (figura 74h). Aquest és el vector suma.

Figura 74h

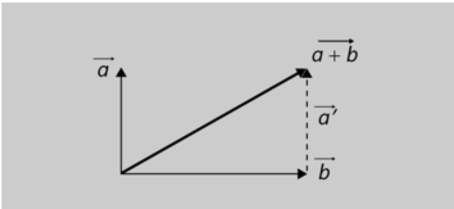


Figura 74h

Copiem el vector $\vec{a}$ a l'extrem del $\vec{b}$, vector $\vec{a}'$, i unim l'origen del vector $\vec{b}$ amb l'extrem del vector $\vec{a}'$.

Analíticament, si el triangle és rectangle, podem fer servir el teorema de Pitàgores per a calcular el mòdul del vector resultant. En l'exemple anterior, si $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$:

$$|\vec{r}| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (194)$$

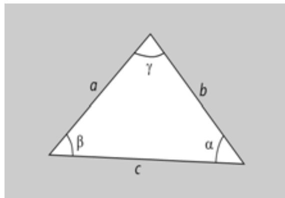
i per als valors de la figura 74c obtenim:

$$|\vec{r}| = \sqrt{(3\,\mathrm{N})^2 + (4\,\mathrm{N})^2} = 5\,\mathrm{N}\,.$$

Quan els vectors no fan angles rectes, es poden fer servir relacions trigonomètriques per a calcular la resultant (com el teorema del cosinus). Els dos procediments gràfics esmentats en les figures 74g i 74h són vàlids també per a vectors que no formen angles rectes, valen també per a vectors en qualsevol altra direcció: només cal formar el paral·lelepípede corresponent.

Teorema del cosinus

El teorema del cosinus diu que en un rectangle qualsevol



$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$.

Una operació tan habitual com la de sumar vectors és l'operació de descompondre el vector en uns altres dos que, sumats, donen el vector original. D'aquesta operació se'n diu *projectar* el vector en direccions de l'espai determinades. Vegem-ho.

4.3.2. Projecció (o descomposició) d'un vector

L'operació de sumar dues forces dóna una força resultant que fa el mateix efecte que les forces que sumem. Si sumem dues velocitats, per exemple, obtenim la direcció de la velocitat resultant.

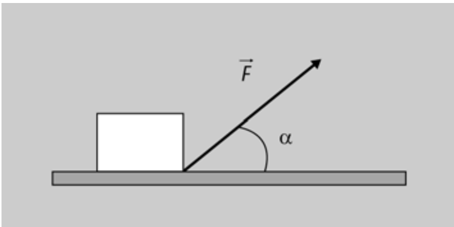
De vegades convé fer l'operació contrària: per a analitzar un moviment convé descompondre un vector en dues components i analitzar per separat l'efecte de cada component. L'operació anterior s'anomena projectar el vector en direccions determinades de l'espai, o descompondre el vector en les seves components.

Podem triar qualsevol direcció de l'espai per a fer la descomposició d'un vector, però el més habitual és que triem dues direccions perpendiculars de l'espai i calculem les components del vector en aquestes direccions. Vegem-ne uns exemples.

Activitat 4.8. Descomposició de forces

De vegades convé descomposar una força en dues components que formen unes direccions determinades. Per exemple, si un vehicle és arrossegat per una grua que fa una força F en una direcció que forma un angle α respecte al terra (figura 75) i voleu saber quina part de la força del cable de la grua es fa servir per a arrossegar el cotxe i quina part s'utilitza per a elevar la part davantera del vehicle, heu de descompondre la força de la grua en les components horitzontal i vertical de la força. Feu-ho.

Figura 75. Arrosseguem un objecte amb una força *F* que fa un angle a respecte al terra



Solució

Per a això podeu seguir el procediment invers al de la suma de dos vectors de la figura 74g: tracem dues rectes a l'extrem del vector que volem descompondre, una recta paral·lela a terra i l'altra perpendicular a terra; la projecció horitzontal i vertical del vector són els dos vectors que, sumats, donarien el vector original (figura 76), $\vec{F}_h$ i $\vec{F}_v$.

Figura 76

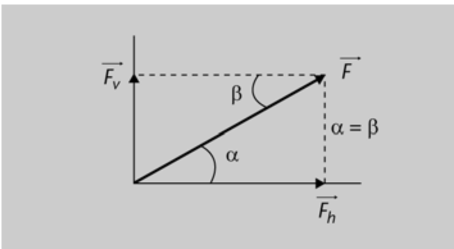


Figura 76

Descomposició de la força de la figura 10 en dues components, horitzontal i vertical.

En aquest cas parlem de **projeccions ortogonals**, perquè els vectors en què descomponem el vector original són perpendiculars. Però podem fer servir direccions no ortogonals per a projectar vectors, si ens interessa més en un problema concret.

El càlcul del mòdul de les projeccions es pot fer aplicant les propietats de les funcions trigonomètriques elementals. Com que l'angle β de la figura 76 és igual a l'α, per ser angles formats per dues rectes paral·leles de direcció $\vec{F}_h$ i una recta que les talla, de direcció $\vec{F}$, podem escriure:

$$F_h = F\cos\alpha \qquad (195)$$

$$F_v = F\sin\alpha \qquad (196)$$

La component vertical de la força eleva el cotxe i la component horitzontal és la que permet arrossegar-lo.

Quan es fa un càlcul o es resol un problema és convenient comprovar que el que hem obtingut té sentit. En l'exercici anterior, es pot veure que si $\alpha = \pi/2$ les equacions (195) i (196) donen $F_h = 0$ i $F_v = F$, i aquest resultat té sentit perquè estaríem parlant d'elevar el vehicle verticalment. Per a un angle de 90°, la component horitzontal de la força que s'aplica és nul·la.

Vegem més exemples de descomposició de vectors, però ara de velocitats.

Activitat 4.9. Components de la velocitat

Quant de temps trigarà un avió a desplaçar-se una distància horitzontal de 16 km, si s'eleva fent un angle α de 15° i a una velocitat de 250 m/s?

Solució

Per tal de veure com es mou en sentit horitzontal l'avió, necessitem saber la component horitzontal de la velocitat de l'avió, que l'obtenim descomponent el vector velocitat de la mateixa manera que hem fet la descomposició de forces (figura 77).

Figura 77

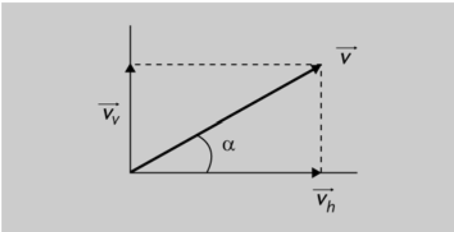


Figura 77

Descomposició del vector velocitat en dues components, vertical i horitzontal.

Obtenim:

$$v_H = v \cdot \cos\alpha = 250\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cos 15^o = 241\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (197)$$

i, per a un moviment a velocitat constant:

$$t = \frac{d_H}{v_H} = \frac{16.000\ \text{m}}{241\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 66\ \text{s} \quad (198)$$

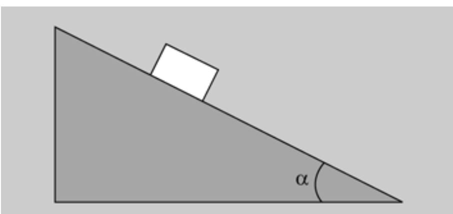
En poc més d'un minut l'avió recorre 16 km sobre el terreny.

De vegades la descomposició que ens interessa fer no és en direcció horitzontal i vertical. Vegem-ne un exemple.

Activitat 4.10. Descomposició de forces en direccions determinades

Quan tractem superfícies inclinades, sovint convé descompondre les forces en components paral·leles i perpendiculars al pla inclinat. Per exemple, en l'esquema de la figura 78, si la caixa té un pes $\vec{P}$, quina força la fa caure? (el pes és la força amb què la Terra atrau la caixa i té la direcció vertical).

Figura 78. Un objecte de massa m descansa sobre un pla inclinat.



Solució

Necessiteu descompondre el vector pes $\vec{P}$ en una component que vagi en la direcció del pla inclinat i una altra que hi sigui perpendicular. Aleshores dibuixem el vector pes (figura 79) i fem un rectangle a partir de rectes paral·leles i perpendiculars al pla inclinat, que passen per l'origen i per l'extrem del vector pes. Els costats del rectangle defineixen les components del pes.

L'angle que formen la perpendicular al pla i la direcció del pes és el mateix que fa el pla inclinat amb el terra, α (per ser rectes perpendiculars entre perpendiculars). Per tant, les dues components del pes són:

$$P_{\text{par}} = P \sin\alpha \tag{199}$$

$$P_{\text{per}} = P \cos\alpha \tag{200}$$

Figura 79

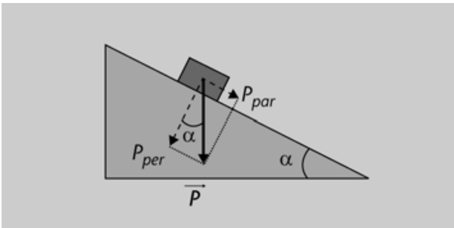


Figura 79

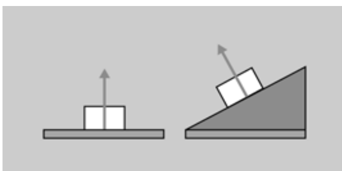
Descomposició del pes de la massa m en una component paral·lela P_{par} i una perpendicular P_{per} al pla.

Una vegada hem descomposat el pes en les dues components, podem analitzar la dinàmica del moviment de la caixa a partir de l'efecte que fa cada component. Segons la segona llei de Newton, si coneixem les forces que actuen sobre la caixa, sabrem a quina acceleració està sotmesa. La caixa pot caure pel pla inclinat.

L'efecte del pla és mantenir la caixa sobre la seva superfície i així el pla inclinat fa una força que s'anomena *normal*, perquè és perpendicular al pla i dirigida cap a la caixa. Aquesta força iguala la component perpendicular del pes, i seria la força de reacció que fa el pla, en resposta a la força d'acció que fa la caixa.

Quan es deixa un objecte sobre una superfície, la component del pes de l'objecte que és perpendicular a la superfície provoca una força de reacció de la superfície. La força de reacció sempre té la direcció de la perpendicular a la superfície, i per això parlem de *força normal* o, simplement, de *normal*. La força normal apareix sempre que hi ha contacte entre dos cossos.

Figura 80. Força normal que exerceix una superfície plana o inclinada sobre l'objecte que s'hi recolza



En definitiva, la caixa no té cap acceleració en la direcció normal perquè la força neta que actua en aquesta direcció és nul·la: la força P_{per} està igualada per la reacció normal (o perpendicular) al pla:

$$N = P_{per} \tag{201}$$

La component P_{par} és la que fa caure la caixa pel pla, la que accelera la massa. La component paral·lela sempre és menor que el pes i, per tant, la caixa cau pel pla amb una acceleració menor que en caiguda lliure, exactament amb una acceleració:

$$a = g \cdot \sin\alpha \tag{202}$$

Aquesta expressió resulta d'igualar (segona llei de Newton) la component P_{par} amb $m \cdot a$:

$$P_{par} = m \cdot a \tag{203}$$

i de tenir en compte l'equació (199), $P_{par} = P \cdot \sin\alpha$, amb $P = m \cdot g$:

$$P_{par} = ma = mg \cdot \sin\alpha \tag{204}$$

Si ara eliminem la massa en la igualtat anterior, resulta:

$$a = g \cdot \sin\alpha \tag{205}$$

Únicament per a l'angle $\alpha = \pi/2$ (pla vertical) recuperem el cas de caiguda lliure amb l'acceleració g i aleshores tota la força $\vec{P}$ qmue fa la Terra és la que fa caure la caixa.

En l'estudi de la caixa en el pla inclinat (figura 78) no hem tingut en compte el fregament que pot haver entre la caixa i la superfície del pla inclinat. En general, caldrà tenir-la en compte.

4.3.3. Què hem après?

- El principi de superposició de forces diu que quan sumem les forces que actuen sobre una partícula trobem la força resultant que hi actua, i que fa el mateix efecte que la suma dels efectes que causa cada força per separat.
- I, a la inversa, podem descompondre una força en les components que té respecte a unes direccions determinades i estudiar l'efecte de les components, que serà el mateix que l'efecte de la força que hem descompost.

El concepte de pes i massa és important i es confon en l'ús quotidià. Convé aclarir-lo.

4.4. Pes i massa

En la discussió que ens ha portat a la segona llei de Newton no ha aparegut en cap moment el concepte de pes. Tots els procediments i les operacions que s'hi han fet es poden dur a terme en qualsevol nau espacial ben allunyada de planetes i d'estels.

Quan parlem del pes d'un objecte estem donant un nom a una força particular:

$$\vec{P} = m\vec{g} \tag{206}$$

És la força gravitatòria que fa la Terra sobre l'objecte i que li provoca una acceleració $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$. Aquesta acceleració és la mateixa per a tots els objectes, si la gravetat és l'única força que hi intervé.

Convé distingir bé entre pes i massa:

Pes i massa són conceptes (magnituds) diferents i que tenen unitats de mesura diferents, newton i quilogram, respectivament. El **pes** és la força que fa la Terra sobre un objecte, mentre que la **massa** és la relació que hi ha entre una força qualsevol que actua sobre un objecte i l'acceleració que li provoca.

A la Lluna, per exemple, la massa m d'un objecte seria la mateixa que a la Terra, però el pes de l'objecte seria menor, poc més de la meitat que el pes que té la massa m a la Terra (recordeu el que vam dir en l'activitat 1.15 de l'apartat 1, que la gravetat en la Lluna és 5/9 del valor que té a la Terra).

Vegem ara com cal expressar un pes correctament, com una força.

Activitat 4.11. Peso tants newtons

a) Què hem de dir, per parlar correctament, en lloc de la frase "Un pes de 3,0 kg"?

b) Quin és el vostre pes aproximat?

Solució

a) S'hauria de dir una massa de 3,0 kg. Ens referim a un objecte sobre el qual la Terra fa una força gravitatòria d'uns 30 N:

$$mg = 3{,}00 \text{ kg} \times 9{,}81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 29{,}43 \text{ N} \tag{207}$$

b) Si la bàscula marca 70,0 kg per al nostre cos, aleshores pesem aproximadament 700 N o, més exactament:

$$70{,}00 \text{ kg} \times 9{,}81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \ 686{,}70 \text{ N} \tag{208}$$

Acceleració de la gravetat, *g*

Tot i que el valor de g (fins a la segona xifra decimal) és:

$$g = 9{,}81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

sovint s'aproxima per:

$$g \approx 10 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Caldria fer servir sempre quilograms (kg) per a la magnitud massa i newtons (N) per a la magnitud pes, però és difícil apartar-se de l'ús habitual i en la vida diària es parla de pes en quilograms. No es diu "jo peso 800 N", que seria el més correcte.

Vegem una altra manera de referir-nos a la constant g.

Activitat 4.12. Altres unitats per a l'acceleració de la gravetat, *g*

Una unitat menys habitual de la constant g és la següent:

$$g = 9{,}81 \text{ N/kg} \tag{209}$$

Sabríeu esbrinar per què és equivalent a les unitats habituals, $g = 9{,}81$ m/s^2?

Solució

Podem aplicar la segona llei de Newton al pes d'un objecte, equació (206):

$$P = mg \tag{210}$$

on P és la força pes i g l'acceleració de la gravetat. Fixeu-vos que hem escrit la relació entre els mòduls dels vectors $\vec{P}$ i $\vec{g}$.

Per a una massa d'1 kg tenim que:

$$P = mg = 1{,}0 \text{ kg} \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 9{,}81 \text{ N} \tag{211}$$

Per tant:

$$g = P / m = 9{,}81 \text{ N/kg} \tag{212}$$

Si expressem la unitat newton en termes de magnituds més bàsiques, equació (183):

$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \times 1\ \text{m/s}^2 \tag{213}$$

i la substituïm en l'equació (210) en recuperem l'expressió més habitual, g = 9,81 m/s^2.

L'expressió (209) pot ser més clara que l'habitual (9,81 m/s^2) pel que fa al significat físic de la constant g, perquè g és la força (pes) per unitat de massa, $g = P/m$.

Vegem ara quanta força és un newton.

Activitat 4.13. Idea qualitativa de què és un newton

A un enginyer li convé tenir una idea qualitativa de les diferents unitats de mesura. Per exemple, tots sabem que una velocitat de 10 m/s (un poc més que el rècord mundial de 100 m llisos) és una velocitat molt gran per a una persona. Com podem fer-nos una idea de quant és una força de, per exemple, 1 N? o 10 N? o 100 N?

Solució

Podem saber què és aproximadament una força d'1 N, de 10 N i de 100 N, si mantenim en l'aire 100 g, 1 kg o 10 kg de qualsevol substància.

Per exemple, si subjectem en l'aire una massa d'1 kg (1 bric de llet, per exemple) estem fent una força d'uns 10 N:

$$P = mg = 1{,}00\ \text{kg} \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 9{,}81\ \text{N} \approx 10\ \text{N} \tag{214}$$

La força que fem mentre subjectem un objecte en l'aire és per a compensar la que fa la Terra sobre l'objecte, de manera que l'objecte no es mou perquè està sotmès a una força total nul·la.

Les forces que produeixen acceleracions les pot exercir una persona, per exemple, però també objectes inanimats (com ara una molla comprimida que se solta, un cartutx de pólvora que esclata i impulsa una bala d'una escopeta o un vehicle que en colpeja un altre).

4.4.1. Què hem après?

Abans de presentar i discutir la tercera llei de Newton recopilaremací les idees essencials que hem tractat sobre el concepte de força i algunes que no hem comentat encara:

- Pes i massa són magnituds diferents. El pes es refereix a una força particular, mentre que la massa és una propietat que caracteritza cada cos quan el sotmetem a qualsevol força.
- Convé evitar expressions incorrectes, però presents en el llenguatge informal. No és correcte dir que una força fa que un objecte "es mogui"; el que fa una força és accelerar un objecte.
- Tampoc no es pot dir que "l'aplicació d'una força s'imposa sobre la inèrcia d'un objecte i l'accelera". La inèrcia no és cap força, la inèrcia és la tendència dels cossos a romandre en l'estat de repòs o de moviment rectilini i uniforme en què puguin estar inicialment.

- De vegades es parla incorrectament d'una "força" com quelcom que donem a un objecte, o que és una propietat de l'objecte, o que resideix en l'objecte que es mou o en l'objecte que s'està accelerant. L'expressió habitual "impartim o apliquem una força a un cos" no vol implicar cap de les afirmacions anteriors. Les forces actuen sobre els cossos o les exercim sobre els cossos.
- Quan parlem de *força neta*, *força total* o *força resultant*, en el cas que hi hagi diverses forces que actuïn simultàniament sobre un cos, estem parlant de la superposició d'aquestes forces i de l'efecte que tindrà la suma. Però les forces que sumem no "desapareixen" quan en fem la suma. Per exemple, si tenim dues forces diferents actuant sobre un cos al llarg d'una direcció determinada i parlem de la força resultant, estem fent únicament una abstracció que ens facilita l'anàlisi del procés; però sobre el cos no actua una força resultant, sinó les dues forces oposades.

Les lleis de Newton de la dinàmica són tres, la primera llei o llei d'inèrcia, la segona llei o llei fonamental de la dinàmica i la tercera llei o llei de l'acció i la reacció. Ja hem vist les dues primeres; comentarem tot seguit la tercera.

4.5. Tercera llei de Newton

Ja tenim una idea sobre el concepte de força i sabem com es relaciona l'aplicació d'una força en un cos amb l'acceleració que li provoca. Però en una interacció, és a dir, en l'aplicació d'una força, sempre actuen dos objectes, tant si es tracta d'una força de contacte com si és una força d'acció a distància. Quan deixem un objecte sobre una taula, hi ha forces de contacte entre l'objecte i la taula. Quan la Terra atrau una poma que cau de l'arbre, és una força que actua a distància, sense contacte; parlem aleshores d'*acció a distància*.

En efecte, en l'activitat 4.10 ja hem parlat de la força normal que fa el pla inclinat que sosté una caixa, la qual s'origina pel fet de posar-hi la caixa. La caixa fa una força sobre el pla inclinat i el pla inclinat fa una força sobre la caixa. Si llevem la caixa, la força normal que fa el pla desapareix.

Quan tenim una interacció entre dos o més cossos, com ara la Lluna, el Sol i la Terra, o una pilota i una raqueta en un dia de vent, o dos vehicles que xoquen, etc., habitualment només ens interessa saber quin efecte tenen les forces que actuen sobre un dels cossos que interaccionen. En els exemples anteriors, pot interessar-nos què li ocorre a la Lluna o a la pilota o a un dels vehicles. La tercera llei de Newton ens permet separar mentalment dos o més cossos que interaccionen i aplicar la segona llei de Newton a un dels objectes aïlladament.

La **tercera llei de Newton** diu que les forces sempre s'exerceixen en parelles: si un cos A fa una força $\vec{F}_{A\to B}$ sobre un cos B, aleshores el cos B fa una força igual i contrària sobre el cos A, $\vec{F}_{B\to A}$.

Ja heu vist el concepte d'acció i reacció en el subapartat 3.4.

Es parla de **força d'acció** i **força de reacció** (figura 81). Simbòlicament:

$$\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B} \tag{215}$$

Si ens interessa el comportament del sistema "A més B" (és a dir, del conjunt dels dos cossos A i B) direm que si no actua cap força externa al sistema, aleshores la força a què està sotmès el sistema és nul·la, perquè les dues forces es compensen:

$$\vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_{A\to B} = 0 \tag{216}$$

Figura 81. Forces d'acció i reacció

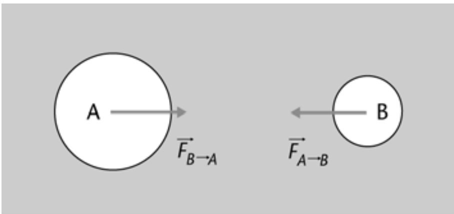


Figura 81

El cos A actua sobre el cos B i el cos B actua sobre el cos A. Les dues forces són iguals i oposades.

L'expressió (216) indica que un sistema no pot estar accelerat per forces internes, perquè aquestes s'anul·len per parelles. Les forces internes a un sistema no en modifiquen l'estat de moviment.

Però si volem saber què li ocorrerà al cos B, per exemple, aleshores la força a què està sotmès B és únicament $\vec{F}_{A\to B}$; aquesta força ja no s'anul·la amb la força $\vec{F}_{B\to A}$, perquè aquesta darrera força actua sobre el cos A i no intervé en la dinàmica del cos B.

A més a més, si en el sistema format pels dos cossos A i B hi ha una força externa $\vec{F}_A$ que actua sobre el cos A, i una altra força externa $\vec{F}_B$ que actua sobre B, aleshores la dinàmica del cos B està determinada pel valor de la força total que actua sobre B, $\vec{F}_B + \vec{F}_{A\to B}$. Si la massa de B és m_B, podem escriure que l'acceleració que tindrà el cos B és, per la segona llei de Newton, equació (182), $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$\vec{a}_B = \frac{\vec{F}_B + \vec{F}_{A\to B}}{m_B} \tag{217}$$

Convé insistir en el fet que les forces d'acció i reacció estan aplicades a cossos diferents. Per això no s'anul·len (no es compensen) si considerem un sol cos i la força que actua només sobre aquest cos.

L'expressió (217) ens dóna la dinàmica del cos B. I quina és l'expressió per al cos A?

Activitat 4.14. Forces que actuen sobre un sol cos

De manera semblant direm que, en el cas que acabem de discutir, si sobre el cos A actua una força $\vec{F}_A$, l'acceleració del cos A està determinada per... (escriviu l'equació).

Solució

Hem d'escriure en l'expressió de la segona llei només les forces que actuen sobre el cos A, que són la força que hi fa el cos B , $\vec{F}_{B\to A}$, i la força externa que actua sobre A, $\vec{F}_A$:

$$\vec{a}_A = \frac{\vec{F}_A + \vec{F}_{B\to A}}{m_A} \tag{218}$$

L'acceleració del cos A serà diferent, en general, de la del cos B, equació (217).

Les forces externes que actuen sobre un sistema, com ara les forces $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ de l'exemple anterior, *no* formen un parell de forces d'acció i reacció. Vegem per què.

Activitat 4.15. Forces entre tres cossos

En l'exemple anterior dels dos cossos A i B s'ha de complir la relació (215). Què ens diu el tercer principi de la dinàmica (o tercera llei de Newton) sobre les forces $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$? Han de ser iguals i oposades? Poseu-ne un exemple.

Solució

Les forces $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ no tenen perquè ser iguals i oposades, perquè no formen una parella d'acció-reacció. El que sí que ha de ser igual a $\vec{F}_A$, i de sentit contrari, $-\vec{F}_A$, és la força que fa el cos A sobre l'agent extern que actua sobre A.

Igualment, $-\vec{F}_B$ és la força que fa el cos B sobre l'agent extern.

Per a aclarir de què parlem quan hem dit en l'exemple anterior que tenim dos cossos A i B i que sobre ells actuen forces externes al sistema format pels dos cossos, vegem-ne un exemple: el sistema dels dos cossos Terra-Lluna, amb el Sol com a cos extern.

Figura 82

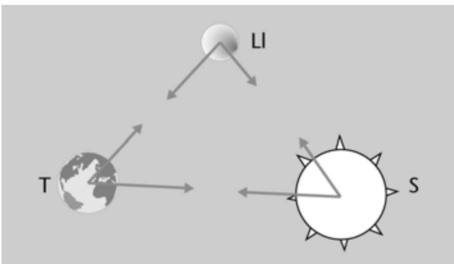


Figura 82

Un sistema de tres cossos i les forces que hi actuen: Terra (T), Sol (S) i Lluna (Ll) (el dibuix no està a escala).

Les forces que actuen entre els tres cossos són les següents:

- $\vec{F}_{Terra\to Lluna}$: força que fa la Terra sobre la Lluna.
- $\vec{F}_{Lluna\to Terra}$: força que fa la Lluna sobre la Terra, $\vec{F}_{Lluna\to Terra} = -\vec{F}_{Terra\to Lluna}$ (força de reacció).
- $\vec{F}_{Sol\to Terra}$: força que fa el Sol sobre la Terra, $-\vec{F}_{Sol\to Terra}$ és la força de reacció que fa la Terra sobre el Sol.
- $\vec{F}_{Sol\to Lluna}$: força que fa el Sol sobre la Lluna, $-\vec{F}_{Sol\to Lluna}$ és la força de reacció que fa la Lluna sobre el Sol.

L'acceleració de la Terra està provocada únicament per les forces que actuen sobre ella: la del Sol i la de la Lluna:

$$\vec{a}_{Terra} = \frac{\vec{F}_{Sol\rightarrow Terra} + \vec{F}_{Lluna\rightarrow Terra}}{m_{Terra}} \tag{219}$$

i l'acceleració de la Lluna estarà donada per les forces que actuen sobre la Lluna: la del Sol i la de la Terra:

$$\vec{a}_{Lluna} = \frac{\vec{F}_{Sol\rightarrow Lluna} + \vec{F}_{Terra\rightarrow Lluna}}{m_{Lluna}} \tag{220}$$

Les forces externes al sistema Terra-Lluna, les forces que fa el Sol i que apareixen en les relacions (219) i (220) no formen parelles d'acció-reacció entre sí, igual que passa a les relacions (217) i (218) amb les forces $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$: no té res a veure la força que fa el Sol sobre la Terra amb la força que fa el Sol sobre la Lluna.

S'ha d'anar molt en compte, doncs, amb quines forces actuen sobre un cos concret i amb quines formen un parell acció-reacció. Vegem-ne un altre exemple.

Activitat 4.16. Forces d'acció i reacció

a) Quins objectes dels que hi ha al nostre voltant poden exercir forces?

b) Considereu el sistema pilota-raqueta i l'aire i la Terra com a agents externs. Com determinaríeu l'acceleració de la pilota en els dos casos següents?

- Quan la colpegeu.
- Quan la pilota vola cap a l'altre jugador.

Solució

a) Tots els cossos poden exercir forces: una molla comprimida per una mà fa una força sobre la mà per a tornar a recuperar la longitud inicial; una cadira fa una força sobre la persona que s'hi asseu; una taula fa una força sobre el llibre que hi reposa; etc. I, per la tercera llei de Newton, la persona fa la mateixa força (i oposada) sobre la cadira, o el llibre la fa contra la taula, etc.

b) La força que impulsa la pilota és la de la raqueta, i actua en l'instant del cop (o més precisament, durant la interacció entre la raqueta i la pilota). L'acceleració de la pilota en l'instant del cop és la produïda per la suma de la força gravitatòria i la força que li fa la raqueta. En vol, únicament actuen sobre la pilota l'atracció gravitatòria i el fregament provocat per l'aire.

Com veiem, sempre hem de tenir cura de quines forces cal considerar. A més a més, algunes forces es poden negligir en alguns casos. Vegem-ho.

4.5.1. Efectes de les forces

En l'activitat que acabem de fer hem parlat de les forces que exerceixen els objectes en donar un cop, o de la força amb què la Terra atrau els objectes. Però una raqueta i una pilota també s'atrauen en tot moment amb una força gravitatòria, ja que qualsevol parell de masses s'atrauen per mitjà d'aquesta mena de força. És el mateix tipus de força que fa que la Terra atragui totes les masses, o amb què el Sol atrau la Terra.

Però l'atracció gravitatòria entre una raqueta i una pilota és tan extremadament petita en comparació amb la que fa la Terra sobre aquests objectes, que no cal tenir-la en compte.

Solem oblidar que un paper fa una força sobre la Terra. El fet que un full de paper sigui atret per la Terra no ens sorprèn, però ens resulta estrany que aquest paper atragui la Terra amb una força idèntica, en mòdul, però de sentit contrari, com ens diu la tercera llei de Newton. Una cosa és que una força sigui negligible i una altra és que no hi hagi una força. Vegem l'activitat següent.

Activitat 4.17. Forces negligibles

Comenteu aquesta afirmació: "Quan ens plantem sobre una taula de plàstic, aquesta es deforma perquè el nostre pes fa una força sobre la taula. Però quan dipositem un full de paper sobre la mateixa taula, aquesta no es deforma."

Solució

Sí que es deforma la taula quan hi posem un full de paper, per la mateixa raó que es deforma si ens hi posem dempeus, tot i que l'efecte és tan petit que és inobservable per nosaltres.

Que una força sigui *molt* petita no significa que no existeixi!

Per tant, tot i que en alguns casos algunes forces són negligibles o tenen efectes negligibles, hem de tenir present el que diu la **tercera llei de Newton** o **tercer principi de la dinàmica**, que es pot enunciar de manera abreujada així: **per a qualsevol acció hi ha una reacció igual i oposada.**

El contingut de la llei queda més clar i explícit si fem el doble enunciat següent: si un objecte exerceix una força sobre un altre, el segon fa una força igual i oposada sobre el primer; i cada força actua sobre un cos diferent.

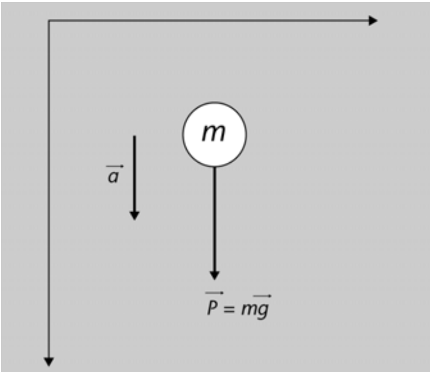
Una idea fonamental de l'enunciat del tercer principi és que estem parlant de *dues* forces diferents i que cada una d'aquestes actua sobre un cos *diferent*.

Tot i que parlem de forces d'acció i reacció, no té importància quina anomenem *acció* i quina *reacció*: és igualment correcte dir que un llibre fa una força sobre la taula i que la taula fa la mateixa força i en sentit contrari sobre el llibre, que si ho enunciem a l'inrevés.

Acabarem la discussió de la tercera llei de Newton amb unes consideracions sobre l'observació de la força de reacció. Quan les forces són de contacte entre dos cossos, no ens resulta estrany dir que cadascun pateix la força que fa l'altre cos. I en el cas d'accions a distància, com és el cas de la força gravitatòria, podem observar la força que fa la Terra sobre un llibre: si el soltem, el llibre cau acceleradament a terra, amb una acceleració que, d'acord amb la segona llei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, és:

$$\vec{g} = \frac{\vec{\text{P}}\text{es del llibre}}{\text{massa del llibre}} \tag{221}$$

Figura 83. Pes d'un objecte de massa *m* i acceleració en caiguda lliure



Però no podem observar la força (igual i contrària) que fa el llibre sobre la Terra.

Ordres de magnitud

L'ordre de magnitud és l'exponent del factor de 10 que relaciona els valors de les magnituds que comparem.

Per exemple, si un objecte és 1.000 vegades més gran que un altre, diem que és 3 ordres de magnitud (10^3 vegades) més gran.

Si un objecte té una massa de 0,01 kg i un altre de 100 kg, diem que és quatre ordres de magnitud més massiu (100 kg / 0,01 kg = 10^4).

Si l'ordre de magnitud d'alguna propietat és el mateix per a dos objectes, diem que tenen el mateix ordre de magnitud pel que fa a aquesta propietat.

Activitat 4.18. Observeu forces gravitatòries

Quina és l'acceleració que resultaria per a la Terra en l'exemple de l'equació (218), si únicament existís el sistema Terra-llibre?

Solució

La força que fa el llibre sobre la Terra, pel tercer principi de la dinàmica, és $-\vec{P}$, si $\vec{P}$ és el pes del llibre i, per tant, l'acceleració de la Terra l'obtenim de l'aplicació del segon principi de la dinàmica:

$$\vec{a}_{Terra} = -\frac{\vec{P}}{massa\ de\ la\ Terra} \tag{222}$$

i com que el pes d'un cos és el producte $m\vec{g}$:

$$\vec{a}_{Terra} = -\frac{massa\ del\ llibre \cdot \vec{g}}{massa\ de\ la\ Terra} = -\frac{massa\ del\ llibre}{massa\ de\ la\ Terra} \cdot \vec{g} \tag{223}$$

Com que la massa del llibre (de l'ordre d'1 kg) és molts ordres de magnitud inferior a la de la Terra (de l'ordre de 6×10^{24} kg), podem dir de la relació (223) que:

$$|\vec{a}_{Terra}| << |\vec{a}_{llibre}| = |\vec{g}| \tag{224}$$

La massa de la Terra és molt gran en comparació amb els objectes que ens envolten i no podem veure la forces d'acció i reacció en el cas del sistema Terra-objecte. En el cas d'altres forces a distància, com ara dos imants de grandàries ben diferents, sí que podem observar que els dos s'acceleren (s'atrauen o es repel·leixen) i, per tant, sí que veiem en acció les dues forces que prediu la tercera llei de Newton.

Anàlogament, si tenim, per exemple, dues boles que contenen imants, les dues es mouen per la força a distància que hi actua, que és la força magnètica que fa que les boles s'atraguin o es repel·leixin.

El cas de l'atracció gravitatòria entre la Terra i el llibre, en què només una força del parell acció-reacció és observable, és semblant al cas en què posem claus petits damunt d'una taula i hi posem al costat un imant gran: només veurem que els claus es mouen, s'acceleren cap a l'imant, però no observem que l'imant s'acceleri en sentit contrari.

Per què ocorre això?

Activitat 4.19. Forces sobre imants

Expliqueu per què no es mou l'imant gran en la situació que hem descrit ara mateix, tant si el subjectem amb les mans com si el deixem a la taula, a prop dels claus.

Solució

La figura 84 mostra alguns claus davant d'un imant. El fregament de l'imant amb la taula (o la subjecció de l'imant per la mà) impedeix el moviment de l'imant, perquè aquesta força és superior a la que fan els claus sobre l'imant.

També hi ha fricció dels claus amb la taula, però en aquest cas la força de l'imant és la més gran i la resultant és una acceleració dels claus en la direcció de l'imant.

Figura 84. Imants i claus sobre una taula

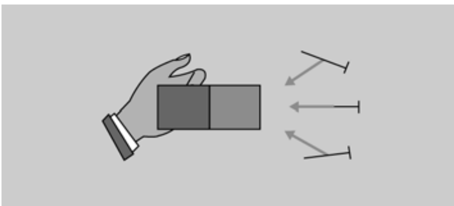


Figura 84

L'imant no es mou (tot i que no el subjectem amb la mà) però els claus sí que són atrets cap a l'imant.

Veiem que el fet de no observar una força no equival a que no hi sigui. Si posem l'imant sobre una superfície relliscosa, podrem veure que els claus atrauen l'imant.

En conclusió, la segona llei de la dinàmica ens diu com calcular l'acceleració que tindrà un cos si coneixem les forces que hi actuen.

La tercera llei de la dinàmica ens diu que les forces sempre actuen en parelles. Per tant, és important saber representar totes les forces que actuen sobre un cos la dinàmica del qual ens interessi, i que siguin únicament les forces que actuen sobre el cos. També és important no representar res més que forces en un diagrama de forces: ni velocitats, ni acceleracions, per exemple. De fet, els diagrames de forces són útils a l'hora de resoldre problemes de dinàmica. Vegem-ho.

4.5.2. Diagrames de forces de cos lliure

S'anomena *diagrama de forces de cos lliure* un esquema en què es representen únicament el cos que estem analitzant i totes les forces que hi actuen. En un diagrama de cos lliure s'han de mostrar únicament les forces que es fan *sobre* l'objecte o sistema d'interès; no s'hi han de representar les forces que fa el propi cos sobre altres objectes.

Per exemple, si tenim un llibre sobre una taula i hem posat uns dits de la mà pressionant el llibre, el diagrama de forces de cos lliure del llibre és el de la figura 85. Al pes del llibre, $\vec{P}$, i la força que fem amb la mà, $\vec{F}_{mà}$, s'oposa la força que fa la taula, $\vec{F}_{taula}$.

Figura 85

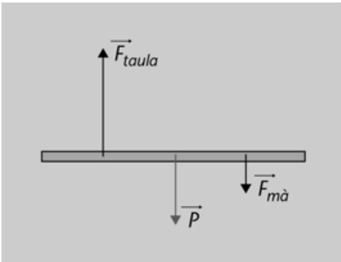


Figura 85

Diagrama de forces de cos lliure per a un llibre que està sobre la taula i se subjecta amb un dit. S'han representat les forces de manera arbitrària en punts diferents del llibre.

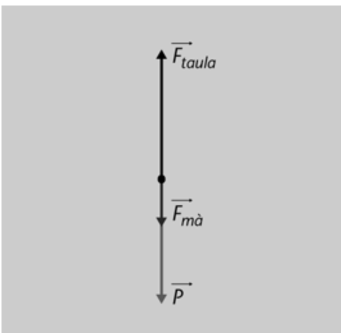
La suma de les forces cap a baix (pes i força que hi fem) es veu compensada exactament per la reacció normal de la taula, que es dirigeix cap a dalt:

$$\vec{P} + \vec{F}_{mà} = \vec{F}_{taula} \quad (225)$$

La força total que actua sobre el llibre és nul·la i, per això, el llibre té acceleració nul·la.

El dibuix de la figura 85 s'ha fet expressament de manera poc "ortodoxa". Resulta més útil per tal d'analitzar la dinàmica del llibre fer un esquema més senzill, com el de la figura 86, on el llibre es representa amb un punt (una partícula) que concentra la massa del llibre i s'hi representen les forces en la direcció que tenen cadascuna; en el cas que ens ocupa, totes són verticals. A més a més, les longituds dels vectors són una indicació del valor de la força, que dóna idea de com d'intensa és, de la seva intensitat.

Figura 86. Diagrama de forces de cos lliure per a un llibre que està sobre la taula i se subjecta amb un dit



Activitat 4.20. Diagrama de cos lliure

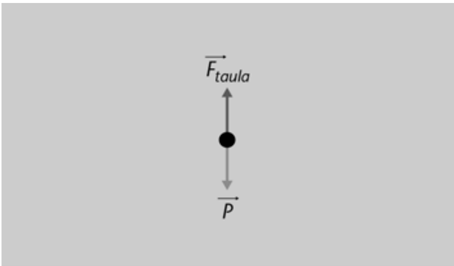
a) Feu el diagrama de forces de cos lliure per al llibre dipositat sobre la taula, quan llevem els dits que s'hi recolzen.

b) Imagineu que la taula està inclinada (o que el llibre està sobre un faristol). Feu el diagrama de cos lliure per al llibre quan ens ajudem dels dits per a mantenir-lo sobre el faristol.

Solució

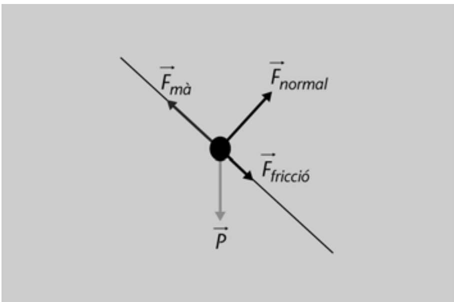
a) El diagrama de cos lliure per al llibre és igual que el de la figura 86, però amb una força de la taula menor, perquè ara compensa únicament el pes del paper, figura 87.

Figura 87. Diagrama de forces de cos lliure per a un llibre que està sobre una taula



b) Ara intervenen les forces següents sobre el llibre: el pes, la força normal de la taula, la força que fem amb els dits i la força de fricció que fa el faristol sobre el llibre. Suposem que amb els dits subjectem el llibre per la part inferior. Com que el moviment que provocaríem amb la mà per tal d'evitar la caiguda del llibre és en el sentit ascendent del faristol, la força de fricció té la direcció contrària. En la figura 88 es representen les quatre forces esmentades.

Figura 88. Diagrama de forces de cos lliure per a un llibre que està sobre una taula



Si la resultant de les quatre forces de la figura 88 no és nul·la, el llibre caurà acceleradament pel faristol (si la resultant va cap a baix) o hi pujarà amb acceleració (si la resultant té el sentit ascendent, sobre el faristol).

Fixeu-vos que si llevem la mà, el llibre tendiria a lliscar i caure pel faristol i, aleshores, la força de fricció tindria el sentit contrari al de la figura 88: aniria en sentit ascendent del faristol. Les forces de fricció sempre tenen uns direcció contrària a la del moviment. Si el llibre es manté en repòs sobre el pla inclinat, sense l'ajut de la mà, és perquè la força de fricció compensa exactament la resultant del pes i de la normal.

Com hem vist, el diagrama de forces de cos lliure permet analitzar la dinàmica d'un cos de manera més senzilla.

4.5.3. Què hem après?

a) Sempre que un agent extern fa una força sobre un cos, hi ha una força igual en mòdul i de sentit contrari que fa el cos sobre l'agent extern.

- També cal distingir entre efectes petits o inapreciables de les forces i efectes nuls per absència de forces. En l'activitat 4.17 hem vist un exemple d'efecte inapreciable, però no nul.

- Cal distingir entre forces inexistents i forces de resultant nul·la.

- En el cas de dues forces iguals i oposades que actuen sobre un objecte (per exemple, si dues persones estiren d'una altra amb la mateixa força i en sentits oposats), l'efecte seria estrictament nul. Però això no vol dir que no estiguin actuant-hi forces.

b) En un diagrama de forces de cos lliure únicament s'inclouen les forces que actuen sobre el cos la dinàmica del qual volem analitzar.

4.6. Recapitulació

Ja estem equipats amb les tres lleis de Newton de la dinàmica, que permeten abordar qualsevol problema de moviments.

- La primera llei de Newton, o principi d'inèrcia, introdueix el concepte de força de manera qualitativa i fa equivalents (és a dir, indistingibles) l'estat de repòs i l'estat de moviment rectilini i uniforme.

- La segona llei de Newton permet fer una definició explícita de l'expressió de la magnitud *força*, i introdueix el concepte de massa inercial.

- La determinació de la llei de moviment de la partícula passa per resoldre la segona llei de Newton, que ens dóna l'acceleració de la partícula a partir de les forces que hi actuen.

- La tercera llei de Newton, o llei d'acció i reacció, ens diu que les forces sempre actuen per parelles i que cadascuna de les forces de la parella actua sobre un cos diferent. Són les forces d'acció i reacció.

- Quan intervenen interaccions gravitatòries, habitualment no se sol incloure la Terra en el diagrama de forces ni les forces que actuen sobre la Terra; ja sabem que, per la tercera llei de Newton, a la força (pes) d'un objecte li correspon una força igual i contrària que fa l'objecte sobre la Terra.

- En els diagrames de força de cos lliure, únicament es representen les forces que actuen sobre el cos que s'estudia.

- Les forces, acceleracions i velocitats són magnituds vectorials i es poden manipular amb les eines de l'àlgebra lineal, perquè obeeixen el principi de superposició.

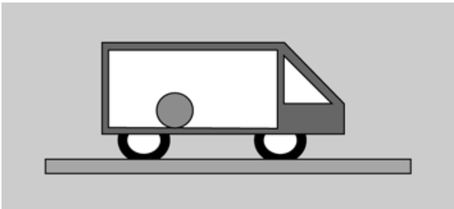
- La massa, el temps, el volum, etc., són exemples de magnituds escalars.

4.7. Problemes d'ampliació

Problema 4.1. Efectes de la inèrcia

En l'esquema de la figura següent es mostra una pilota en repòs dins d'un vehicle. Si el vehicle arrenca bruscament, expliqueu què li ocorrerà a la pilota.

Figura 89. Una pilota reposa lliurement sobre el terra d'un vehicle



Problema 4.2. Inèrcia i segona llei

Comenteu les frases següents:

a) "El repòs és una condició fonamental diferent de l'estat de moviment rectilini i uniforme, perquè en l'estat de repòs no actua cap força, mentre que en l'estat de moviment sí."

b) "Allò que fa que un cos s'estigui movent en línia recta i amb velocitat uniforme és el mateix que allò que fa que un cos que està en moviment s'aturi."

c) "La Lluna i la Terra s'atrauen per la força gravitatòria. Però per a mantenir la Lluna girant al voltant de la Terra no cal que actuï cap força, segons el principi d'inèrcia."

Problema 4.3. Forces que no acceleren

Si una força sempre accelera un objecte, per què no s'accelera un llibre que reposa sobre una taula, si li apliquem una força petita en la direcció horitzontal?

Problema 4.4. Acceleracions brusques

Expliqueu els efectes descrits en l'activitat 4.2 a la llum del primer principi de la dinàmica. Expliqueu què ocorre si:

a) el cotxe en què viatgeu agafa una corba violentament;
b) aneu dempeus en un autobús que frena de sobte;
c) el cotxe en què viatgeu va a una velocitat constant per una carretera recta i llisa i, de sobte, hi ha una forta baixada (un canvi de rasant brusc).

Problema 4.5. Aire i gravetat

Comenteu si són certes les afirmacions següents i per què:

a) Si eliminéssim l'aire, la gravetat desapareixeria.
b) Un globus ple d'aire no sura i cau al terra.
c) Si posem un globus ple d'aire dins d'un cilindre vertical i hermètic en què hem fet el buit (hem eliminat l'aire que hi havia en el cilindre), aleshores el globus ple d'aire sí que sura perquè no hi actua la pressió de l'atmosfera.

Problema 4.6. Moviment de "projectils"

Suposem que colpegem una pilota de tennis horitzontalment. Quina trajectòria segueix? Quina distància recorre abans de tocar terra?

Aplicació numèrica: suposem que la pilota té una massa de 100 g, està a una altura inicial d'1 m, i el cop li comunica una velocitat de 10 m/s. A quants metres cau?

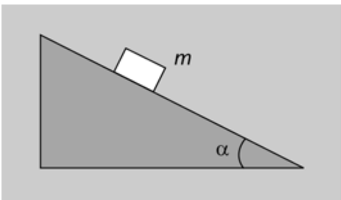
Problema 4.7. Acció i reacció

Descriviu les forces d'acció i reacció per a una cadira que és al terra i expliqueu per què està en equilibri.

Problema 4.8. Fricció

a) Quines forces actuen sobre el cos de la figura següent, quan està en equilibri?
b) Si el cos llisca pel pla inclinat sense fregament, amb quina acceleració cau?

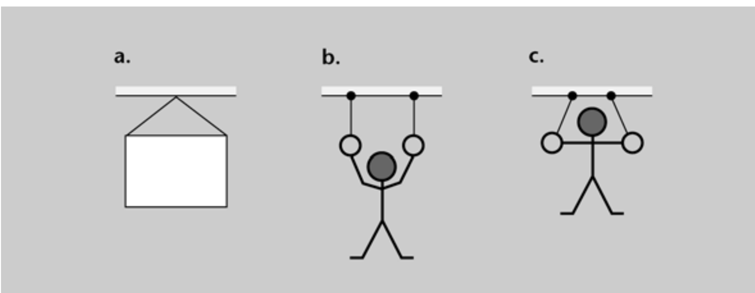
Figura 90. Una massa *m* sobre un pla inclinat



Problema 4.9. Forces i direccions

Per què és més difícil fer la postura **c** que la **b**?

Figura 91. Un quadre penjat i una persona que penja d'unes anelles



5. Energia, moment lineal i lleis de conservació

L'objectiu principal d'aquest apartat és introduir eines que faciliten el tractament de problemes dinàmics. Apareixeran conceptes molt bàsics de la física, com el de moment lineal, treball que fa una força i potència. Introduirem el concepte de camps de forces conservatius, que ens permetrà parlar de l'energia potencial del sistema i definirem el concepte d'energia cinètica. Analitzarem quan es pot parlar de conservació de l'energia total i de la conservació del moment lineal d'un sistema. També estudiarem la relació entre el treball que fa una força sobre una partícula i l'energia cinètica que l'hi comunica.

Descripció de processos

Les lleis de Newton permeten abordar i resoldre els problemes de dinàmica. Com afirma la primera llei de la dinàmica, cal aplicar una força per tal de posar un objecte en moviment o per a variar-ne l'estat de moviment. Per a sostenir un objecte cal fer una força en contra del pes però si, a més a més, movem l'objecte i el canviem de posició, la força que fem es desplaça, i hem d'aprendre a descriure aquest tipus de procés.

Així, per a pujar un objecte per una escala cal fer un "esforç", que anomenarem *treball* en termes físics i que definirem de manera precisa en aquest apartat. Cal fer un treball ben diferent per a pujar, per exemple, un objecte petit dalt d'una prestatgeria, com ara un llapis, que per a pujar una caixa plena de llibres. A més a més, si els objectes que hem pujat dalt de l'armari cauen a terra o damunt d'una taula de vidre, fan un efecte ben diferent si es tracta d'un sol llibre o si cau la caixa plena de llibres. En aquest apartat formalitzarem els conceptes necessaris per a descriure aquestes situacions en termes científics.

La ciència fa servir paraules d'ús quotidià d'una manera molt concreta, amb un significat ben precís, que no sempre es correspon amb el significat que li donem en el llenguatge informal. Per exemple, introduirem els conceptes físics d'energia i de treball que fa una força. També definirem el terme *moment lineal*, que en no ser un terme habitual no sol dur a confusions. En tots els casos haurem de memoritzar tant el nom com la definició operativa del terme, el seu significat, les unitats en què es mesura i les relacions més importants en què intervé.

De la mateixa manera que la ciència triga anys (i, de vegades, segles) a depurar els conceptes i les lleis que formula, aprendre a utilitzar el llenguatge científic és un procés lent que requereix esforç. La comprensió i la memorització d'aquests conceptes abstractes i de les expressions algebraiques que els defineixen o els relacionen s'aconsegueix quan es fan servir els conceptes per a abordar problemes diferents i per a descriure els processos físics que s'hi esdevenen. En acabar els apartats de mecànica haureu après a utilitzar conceptes com els esmentats (treball, energia, moment lineal) amb un significat científic ben precís, en frases com les següents: "treball que fa una força neta", "canvi del moment lineal d'un cos", "variació de l'energia cinètica de l'objecte", "treball fet contra una força", "canvi de l'energia potencial d'un sistema", etc.

També veureu que les lleis físiques limiten els tipus de moviments o de processos que són possibles.

Què aprendrem?

- Aprendrem els següents conceptes bàsics de la física: treball, moment lineal, energia cinètica, energia potencial i energia total.
- Aprendrem a enunciar i a fer servir les lleis de conservació que involucren algunes d'aquestes magnituds i que són eines molt útils per a l'estudi de processos físics, tant naturals com provocats per l'activitat humana.

Què suposarem?

Els continguts d'aquest apartat es basen en les tres lleis de Newton que ja coneixeu (apartat 4). Farem servir també, com en altres apartats, l'àlgebra vectorial i el càlcul integrodiferencial.

5.1. Moment lineal

Comencem introduint el concepte de moment lineal, que en alguns llibres de text encara s'anomena *quantitat de moviment*. És un concepte molt important en física, però que no es fa servir en el llenguatge quotidià informal.

El concepte de velocitat és útil, però no és suficient per a descriure el moviment dels cossos ni els efectes que pot tenir aquest moviment sobre altres cossos. Pensem, per exemple, en una bicicleta i un camió, que circulen a la mateixa velocitat $\vec{v}$. És clar que no es requereix el mateix tipus d'interacció per passar de l'estat de repòs ($\vec{v} = 0$) a una velocitat $\vec{v}$ en el cas de la bicicleta que en el del camió, i també sembla clar que els dos vehicles no fan el mateix efecte sobre un arbre; per exemple, si la bicicleta o el camió hi xoquen, tot i que tinguin la mateixa velocitat abans del xoc. En els dos casos (accelerar de 0 a $\vec{v}$ i frenar de cop) està intervenint també la massa inercial del cos.

Vector multiplicat per escalar

Per a un nombre c positiu, $c > 0$, i un vector $\vec{s}$, el producte $c\vec{s}$ és un vector paral·lel a $\vec{s}$ i del mateix sentit.

Si les components del vector $\vec{s}$ són: $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$, aleshores les components del vector $c\vec{s}$ són: $c\vec{s} = (cs_x, cs_y, cs_z)$.

Si $c < 0$ el vector $c\vec{s}$ és un vector paral·lel a $\vec{s}$ i de sentit oposat a $\vec{s}$.

Resulta útil, per tant, definir una magnitud nova que tingui en compte tant la massa com la velocitat del cos. L'anomenem **moment lineal** i es representa habitualment amb la lletra $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \tag{226}$$

El **moment lineal** d'una partícula de massa m que es mou a la velocitat $\vec{v}$ és el producte de la massa per la velocitat.

L'expressió anterior és una definició; per tant, cal memoritzar-la i no qüestionar-ne la necessitat en aquest moment. La utilitat d'aquest concepte es veurà quan l'apliquem i ens sigui útil per a analitzar diversos tipus de fenòmens.

Així, a una partícula en moviment de massa m se li pot associar el vector $\vec{p}$. El moment lineal és una magnitud vectorial que té la mateixa direcció i sentit que la velocitat de la partícula perquè hem multiplicat un vector per un escalar positiu. La unitat de moment lineal en el Sistema Internacional l'obtenim, com sempre, a partir de la definició de la magnitud quan donem un valor unitari a les magnituds que hi intervenen:

$$\left[\vec{p}\right] = 1 \text{ kg } \ 1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1 \text{ kg m s}^{-1} \qquad (227)$$

Activitat 5.1. Definició

Definiu amb paraules la unitat SI de la magnitud moment lineal. Quan direm que una partícula té un moment lineal unitari?

Solució

Segons l'equació (227), el moment lineal es mesura en unitats de quilogram metre per segon.

Una partícula té un moment lineal unitari si té una massa d'1 kg i es mou a una velocitat d'1 m/s, per exemple, o si té una massa de ½ kg i es mou a una velocitat de 2 m/s, etc.

El concepte de moment lineal $\vec{p} = m\vec{v}$ és molt potent per a descriure fenòmens físics, com veurem al llarg del curs. Es tracta d'un concepte abstracte que no té equivalent (ni se sol emprar) en el llenguatge ordinari, fora dels usos científics i, per tant, resulta un terme molt tècnic. Podem relacionar el concepte de moment lineal amb el concepte de força, de la manera següent.

La **segona llei de Newton** es pot escriure **en termes del moment lineal**, en lloc de relacionar-la amb la derivada de la velocitat, de la manera següent:

$$\vec{F}_{neta} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (228)$$

És a dir, hi ha una **relació força-moment lineal**:

La força neta (o força resultant) que actua sobre una partícula que té un moment lineal $\vec{p}$ coincideix amb la derivada temporal del moment lineal.

Activitat 5.2. Força i ritme de canvi del moment lineal

Demostreu la relació (228).

Solució

Si la massa de la partícula és constant, l'equació (228) adopta la forma coneguda de la segona llei, perquè si hi substituïm l'expressió (226):

$$\vec{F}_{neta} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \tag{229}$$

obtenim, quan traiem la constant m fora de la derivada:

$$\vec{F}_{neta} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{230}$$

i com que la derivada temporal de la velocitat és l'acceleració (equació 98 del subapartat 2.3.2), arribem a la segona llei de Newton en la forma usual:

$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a} \tag{231}$$

Per tant, l'expressió (228) és una altra forma d'expressar la segona llei de Newton.

En la forma (228) en què es presenta de vegades la segona llei de Newton podem analitzar més fàcilment processos en què la massa del cos també varia. És el cas, per exemple, del moviment d'una nau espacial de propulsió que avança en expulsar els combustibles que va cremant; en aquest procés la nau perd massa.

Es pot considerar que la segona llei de Newton relaciona forces aplicades i acceleracions provocades o bé que relaciona forces aplicades i canvis provocats en la direcció del moment lineal. Tot seguit analitzem la relació entre les forces aplicades i la trajectòria d'una partícula en un exemple concret.

5.1.1. Força i direcció de moviment

De vegades es planteja la qüestió de si el moviment d'un objecte es produeix en la direcció de la força que s'hi aplica. Una força aplicada accelera un cos en la direcció de la força, però no tenen perquè coincidir acceleració i velocitat. Un cas clar és el de la partícula en moviment circular, en què força aplicada i acceleració són radials, mentre que la velocitat és perpendicular al radi, tangent a la circumferència (recordeu la figura 38 de l'activitat 2.8).

Vegem un altre exemple: si un objecte s'està movent i el colpegem en una direcció diferent a la del seu moviment es continuarà movent però en una nova direcció, que no té per què coincidir amb la direcció de la força aplicada. És la situació que tenim quan, per exemple, cau un objecte al terra i a mig camí li donem un cop de mà o de peu: l'objecte acabarà caient, però seguirà una trajectòria no vertical (ni horitzontal, en el sentit del cop), sinó parabòlica.

Activitat 5.3. Força i direcció de moviment

Imaginem que hem aplicat durant un temps breu una força (l'hi hem donat un cop) a un objecte que cau en caiguda lliure i que la força té, per exemple, direcció horitzontal, perpendicular a la direcció inicial de caiguda. Com serà el moviment de caiguda de l'objecte després del cop?

Solució

Aplicar breument una força en direcció horitzontal a l'objecte que cau verticalment equival a donar a l'objecte que cau una velocitat "inicial" horitzontal que abans no tenia, és a dir, a accelerar-lo en la direcció horitzontal. La trajectòria, en aquest cas particular, serà com la de la figura 92, és a dir, parabòlica a partir de l'impacte. Pel que fa al moviment de l'objecte, el problema és com el del llançament horitzontal d'un objecte, que hem estudiat en el problema 4.6, amb l'única diferència que l'objecte ara té una velocitat inicial de caiguda, també.

Figura 92

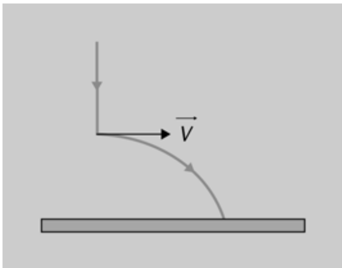


Figura 92

Un objecte rep l'efecte d'una força breu horitzontal mentre està caient verticalment. La trajectòria del moviment no té la direcció inicial ni tampoc la direcció de la força aplicada.

En conclusió, els objectes no tenen perquè moure's en la direcció de la força aplicada.

De fet, aquest resultat ja el coneixíem: si llancem un objecte, com ara una pilota, la força de la gravetat actua en tots els punts de la trajectòria de la pilota, en el sentit vertical i cap a baix, però la pilota es mou amb una trajectòria parabòlica, diferent de la direcció de la força aplicada.

5.1.2. Què hem après?

- Hem introduït el concepte de moment lineal, que ens ha permès reformular l'expressió matemàtica de la segona llei de Newton.
- Podem dir que una força accelera un cos i, també, que en canvia el moment lineal.
- Les forces i acceleracions que produeixen són paral·leles, però forces (o acceleracions) i velocitats resultants no tenen perquè ser-ho.

Ara veurem quin efecte té una força quan actua al llarg de la trajectòria de la partícula. El concepte de treball que introduirem és bàsic en la mecànica i en tota la física.

5.2. Treball que fa una força

El concepte físic de la magnitud *treball d'una força* que actua al llarg de la trajectòria d'una partícula és ben concret, i no sempre coincident amb el de la vida diària. En termes físics, la magnitud **treball infinitesimal** es defineix de la manera següent:

S'anomena **treball elemental** (o infinitesimal), dW¸ que fa una força $\vec{F}$ que actua al llarg de l'element de trajectòria $d\vec{r}$ de la partícula, al producte escalar de la força pel desplaçament:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (232)$$

La figura 93 mostra un esquema de les magnituds involucrades en la definició de treball.

Treball

Habitualment es fa servir el símbol *W* per al treball, de la paraula anglesa *work*.

Figura 93

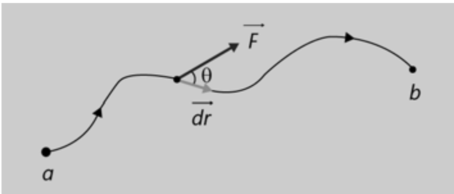


Figura 93

Una força que actua sobre una partícula que es mou per la trajectòria representada, de la qual $d\vec{r}$ és un element.

El treball és una magnitud escalar, obtinguda a partir de dues magnituds vectorials. Si sumem contribucions infinitesimals com la (232) per a tots els elements de la trajectòria sobre la qual actua la força (que pot dependre del punt on s'aplica), obtindrem el **treball finit** que fa la força sobre la partícula.

El treball que fa una força que actua entre els punts *a* i *b* de la trajectòria (definits pels vectors de posició $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, respectivament) es diu **treball finit** i es representa:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (233)$$

Una integral com la de l'equació (233) s'anomena *integral de línia*, perquè és la integral d'un producte escalar de dos vectors en què l'element d'integració és una diferencial de la línia que descriu la trajectòria de la partícula. Aleshores, podem **llegir l'expressió del treball**, equació (233), així.

La integral de línia de la força entre dos punts de la trajectòria de la partícula dóna el treball que fa la força que actua sobre la partícula entre aquests punts.

En el requadre que hi ha a l'activitat 2.8 us hem recordat que el producte escalar de l'equació (232) es pot calcular a partir de les components dels vectors força i desplaçament, que són, respectivament:

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \qquad d\vec{r} = (dx, dy, dz) \tag{234}$$

així:

$$dW = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz \tag{235}$$

També es pot calcular el treball infinitesimal que fa una força a partir de la definició de producte escalar de dos vectors, com el mòdul de cada factor multiplicat pel cosinus de l'angle que formen:

$$dW = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cdot \cos\theta \tag{236}$$

on θ és l'angle que fan els vectors força i desplaçament en cada punt (figura 93).

Lletra grega θ

θ es la lletra grega theta i es llegeix "teta".

Quan s'escriu d'aquesta manera, com l'equació (236), és més clar que la definició de treball implica que no es fa treball, $dW = 0$, en un dels tres casos següents:

- quan no s'aplica cap força, $\left|\vec{F}\right| = 0$,
- quan el punt d'aplicació de la força no es mou, $\left|d\vec{r}\right| = 0$,
- quan aquests dos vectors (força i desplaçament del seu punt d'aplicació) són perpendiculars ($\theta = \pi/2$; $\cos\theta = 0$).

D'altra banda, com que la component de la força paral·lela al desplaçament de la partícula, $F_{//}$, es pot calcular així (vegeu la figura 94):

Component d'un vector en una direcció

Si un vector té una projecció no nul·la en una direcció de l'espai determinada, podem dir que té una component en aquesta direcció.

En cas contrari, el vector és perpendicular a aquesta direcció de l'espai.

$$F_{//} = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\theta \tag{237}$$

aleshores les expressions (232) i (233) esdevenen:

$$dW = F_{//} \cdot dr \tag{238}$$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F_{//} \cdot dr \tag{239}$$

on dr és mòdul de l'element de trajectòria, el vector $\left|d\vec{r}\right|$.

Figura 94

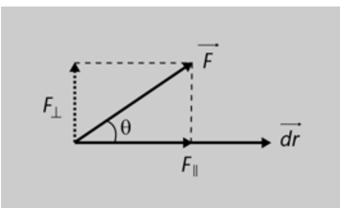


Figura 94

Components d'una força en la direcció del desplaçament, $F_{//}$, i perpendicular al desplaçament, $F_\perp$. $F_{//}$ és la component de la força paral·lela a la trajectòria, és a dir, la projecció de la força sobre la trajectòria de la partícula.

Per tant, una força només fa treball si està dirigida al llarg del desplaçament o, almenys, si la força té una component no nul·la en la direcció del desplaçament (figura 94): la component $F_{//}$ fa treball, però no en fa la component $F_{\perp}$.

En el cas particular que força i desplaçament siguin paral·lels i en el mateix sentit en tot moment, $F_{//} = F$ i el treball fet per la força serà el màxim possible:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F \cdot dr \tag{240}$$

El fet que es pugui aplicar una força sense fer cap treball si no hi ha moviment en la direcció de la força, és ben diferent del significat informal que té el terme *treball* en els usos quotidians. En termes de la física, una persona que sosté un paquet sense moure's no fa cap treball, perquè la força que aplica no es desplaça, $d\vec{r} = 0$. Si s'aplica una força i es desplaça en sentit vertical sí que fa treball (figura 95a). També en fa si es desplaça la força en una direcció obliqua (figura 95b).

Però tampoc no es fa treball si apliquem una força i el punt d'aplicació es desplaça en una direcció perpendicular a la força (figura 95c). Per exemple, si alcem un llibre, sí que fem treball (en contra del camp gravitatori), però si movem el llibre horitzontalment no fem treball perquè la força aplicada és en cada moment vertical i contrària al pes i, per tant, perpendicular al desplaçament horitzontal.

Figura 95

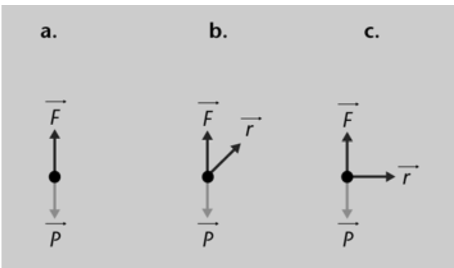


Figura 95

La força $\vec{F}$ mou una partícula en una direcció determinada i pot fer un treball en contra del camp gravitatori.

a. En un desplaçament vertical la força aplicada sí que fa treball.

b. En el desplaçament oblic també.

c. En el desplaçament horitzontal no fa treball.

Camps de forces

Un camp de forces és una regió de l'espai on actuen forces.

Hem dit que movem l'objecte en el camp gravitatori terrestre. El concepte de camp de forces és molt important en la física moderna.

Parlem de camp de forces perquè en cada punt de l'espai on posem una partícula de massa *m*, aquesta es veu sotmesa a la força d'atracció terrestre, la força del seu pes, *mg*.

Veurem més detalladament el concepte de *camp* en els mòduls d'electrostàtica i magnetostàtica.

En resum, doncs, només es fa treball si s'aplica una força i aquesta té una component en la direcció del moviment (o, alternativament, si es produeix un desplaçament en la direcció de la força).

Activitat 5.4. Treball sobre la Lluna

Suposem que la Lluna fa en tot moment una trajectòria circular al voltant de la Terra. Quin treball fa la força gravitatòria terrestre sobre la Lluna?

Solució

La força gravitatòria terrestre no fa cap treball, perquè la força és radial (centrípeta) i el moviment és circular, perpendicular a la força (figura 96).

Figura 96

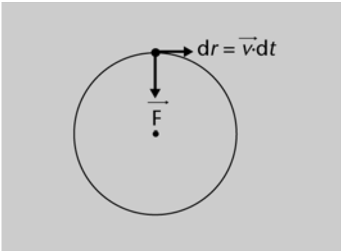


Figura 96

Trajectòria circular de la Lluna al voltant de la Terra i força d'atracció terrestre sobre la Lluna. Aquesta força no fa cap treball perquè força i desplaçament són perpendiculars en tots els punts (tanmateix, la força gravitatòria **sí que accelera la Lluna**).

Per tant, una força pot accelerar una massa, però pot no fer cap treball, com en el cas de l'òrbita lunar (figura 96). En el cas de la figura 95c no hi ha força neta ni, per tant, acceleració de la massa.

Fixem-nos també que sobre la Lluna no actua més que una força, la d'atracció terrestre, i que aquesta força centrípeta és la que la manté en òrbita al voltant de la Terra (si volem ser estrictes, de fet, tots els cossos de l'univers fan la seva contribució a la força que actua sobre la Lluna, però considerarem només el sistema aïllat Terra-Lluna).

Ara que ja sabem calcular el treball que pot fer una força, és útil calcular el ritme a què es fa aquest treball.

5.2.1. Potència

Des de l'exemple amb què vàrem obrir el curs en l'apartat 1, el de la persona que puja paquets per una escala, tenim pendent veure com caracteritzar-ne l'esforç que es fa per unitat de temps. Es pot fer un mateix treball en un temps determinat o en el doble d'aquest temps, per exemple.

Una vegada definit el concepte de treball, apareix la necessitat de mesurar el ritme a què es fa aquest treball i per això s'introdueix la magnitud **potència**:

James Watt

La denominació de la unitat de mesura *watt* (es pronuncia "vat") és en honor d'aquest matemàtic i inventor escocès (Greenock, Escòcia, 1736 - Handsworth, Anglaterra, 1819), que va experimentar amb la màquina de vapor. Les millores que hi va introduir van ser claus per al desenvolupament d'aquesta tecnologia i per a la revolució industrial.

La **potència** és el treball que es desenvolupa per unitat de temps:

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (241)$$

La unitat de potència en el Sistema Internacional és el watt, simbolitzat per W.

L'expressió (241) permet calcular la potència que es desenvolupa en cada instant, o potència instantània.

En un procés gradual de definició de la magnitud potència caldria començar per introduir la potència mitjana que es desenvolupa durant un interval de temps determinat. Això ho fem definint la potència com el treball que es fa per unitat de temps en aquest interval:

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{242}$$

i després, fer el pas al límit per a parlar de potència instantània, com s'ha definit en l'equació (241). Tanmateix, com que ja hem après aquest procés de definició de magnituds (l'hem fet servir per a definir les magnituds velocitat i acceleració), no cal repetir-lo cada vegada.

I en quines unitats es mesura aquesta nova magnitud que hem introduït, la potència? Ja hem vist en diverses ocasions com traure les unitats a partir de la definició de la magnitud. En l'activitat següent ho tornarem a fer.

Símbols i magnituds

Ja som conscients que els símbols expressen allò que es diu en el context. Així, podem veure la lletra *P* referida a magnituds ben distintes: *P* pot ser el moment lineal d'un conjunt de partícules, pot ser la magnitud *pes* o, com en l'equació (241), pot referir-se a una potència.

En cada cas s'ha d'anar amb compte amb el significat dels símbols quan interpretem el significat d'una fórmula o quan l'apliquem. Si aquest significat no queda clar pel context, s'ha de fer explícit.

Si veiem escrit, per exemple:

$$10 \text{ g}$$

es tracta de 10 grams. Però si veiem:

$$10g$$

es tracta d'una acceleració 10 vegades superior a la de la gravetat.

James Prescott Joule

La denominació de la unitat de mesura *joule* (es pronuncia "jàul") és en honor d'aquest científic anglès (Salford, Anglaterra, 1818 – 1889) , que va contribuir a l'estudi de les transformacions energètiques que ocorren en processos físics.

Activitat 5.5. Joule i watt

Definiu la unitat SI de treball, 1 joule = 1 J, la unitat SI de potència, 1 watt = 1 W (un "vat"), i un dels seus múltiples, 1 kW (un "quilovat").

Solució

En la relació 232 o la 238:

$$dW = F_{//} dr \tag{243}$$

podem prendre un valor unitari per a cada magnitud que hi intervé. Si anomenem *joule* la unitat de treball, el definirem com el treball que es fa quan una força d'1 N mou el punt d'aplicació una distància d'1 m en la mateixa direcció que el desplaçament de la partícula:

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ newton} \cdot 1 \text{ metre} = 1 \text{ newton metre} \tag{244}$$

Simbòlicament:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ N m} \tag{245}$$

Anàlogament, si escrivim la unitat per a cada magnitud que apareix en la definició (241) de potència, obtenim:

$$1\ \text{W} = \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{s}} = 1\frac{\text{J}}{\text{s}} \tag{246}$$

Per tant, un watt és la potència que es desenvolupa quan es fa un treball d'un joule per segon.

1 kW serà la potència equivalent a 1.000 joules per segon:

$$1\ \text{kW} = 1.000\ \text{W} = \frac{1.000\ \text{J}}{1\ \text{s}} \tag{247}$$

o equivalent a un treball d'1 joule cada mil·lisegon, per exemple:

$$1\ \text{kW} = \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{ms}} = 1.000\frac{\text{J}}{\text{s}} \tag{248}$$

Fem un càlcul de treball i de potència.

Activitat 5.6. Càlcul de potència

Pugem una massa de 3,0 kg a una altura de 3,0 m en 1,5 s. Quina potència hem desenvolupat? Compareu-la amb la potència que fa una bombeta elèctrica domèstica típica.

Solució

Per a alçar un objecte sense accelerar-lo hem de fer una força igual i contrària al seu pes, $\vec{F} = -\vec{P}$:

$$F_{//} = mg \tag{249}$$

Si el desplaçament que fem té en tot moment la direcció contrària a la força que hem de véncer, el pes, la integral (233) o (239), és immediata perquè la força és constant:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F_{//} \cdot dr = F_{//}\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dr \tag{250}$$

El treball que fem és:

$$W = F_{//} \cdot h \tag{251}$$

i si tenim en compte l'expressió (249):

$$W = mgh \tag{252}$$

Així, obtenim, per als valors que dóna l'enunciat:

$$W = 3{,}0\ \text{kg} \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times 3{,}0\ \text{m} = 88{,}29\ \text{J} \tag{253}$$

La potència mitjana (equació 242) que es desenvolupa en aquest temps és:

$$P = W/t = 88{,}29\ \text{J}/1{,}5\ \text{s} = 58{,}86\ \text{W} \tag{254}$$

un valor molt semblant a la potència d'una bombeta elèctrica típica tradicional (60 W).

La potència mesura el ritme a què es fa treball. Un mateix treball es pot desenvolupar en el temps de moltes maneres, i la potència en mesura l'evolució temporal. Si un sistema desenvolupa una potència $P(t)$, el treball que fa el sistema entre els instants t_1 i t_2 és:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) \cdot dt \tag{255}$$

5.2.2. Què hem après?

- Hem introduït el concepte físic de treball que fa una força com la integral de la component tangencial de la força sobre la trajectòria de la partícula.
- Hem vist que no totes les forces fan treball.
- Hem definit també la potència com el treball que fa un sistema per unitat de temps.
- Hem definit el joule i el watt.

Amb la magnitud *treball* s'avalua l'efecte de la força aplicada al llarg de la trajectòria de la partícula. Ara veurem quin efecte té aquest treball sobre la partícula en termes de l'estat de moviment que té o de la posició que ocupa en un camp de forces.

5.3. El concepte d'energia

Un terme ben present en la vida diària i en debats científics i socials és el d'*energia*. El terme *energia* ens apareix ací per primera vegada en aquest curs. Aquest terme s'usa incorrectament en molts casos; és un concepte difícil i que convé aprendre a manejar amb rigor. Parlarem, en primer lloc, del concepte d'energia cinètica i tot seguit introduirem el concepte d'energia potencial i les seves propietats.

En general podem dir que l'**energia** d'un sistema és la capacitat que té de fer treball.

Quan un sistema fa un treball sobre un altre, es produeix una transferència d'energia entre els dos sistemes. Per exemple, quan alcem una maleta fem un treball que es converteix en energia potencial de la maleta: hem transferit energia de nosaltres a la maleta. I si la maleta cau a terra, part del treball es converteix en energia de moviment de la maleta. Una altra part es converteix en el soroll que fa l'impacte, en la deformació de la maleta, etc.

5.3.1. Energia cinètica

Quan un objecte es mou pot produir efectes sobre altres objectes. Per exemple, podem fer servir el balanceig d'una bola d'acer per a demolir un edifici. Per tal d'ajudar a descriure processos en què intervenen cossos en moviment convé introduir el concepte d'energia cinètica, lligat al fet que un cos es mou:

Anomenem **energia cinètica**, E_c, d'una partícula de massa m que es mou a la velocitat $\vec{v}$ a la meitat del producte de la massa pel quadrat de la velocitat:

$$E_c = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 \qquad (256)$$

Diem, per tant, que un objecte que es mou, no sols té una posició en l'espai, una massa, una velocitat i un moment lineal; sinó que també té una energia, en forma d'energia cinètica. Simbòlicament, espai, massa, velocitat, moment lineal i energia cinètica s'escriuen, respectivament: $\vec{r}$, m, $\vec{v}$, $\vec{p}$, E_c.

Recordem de l'activitat 2.8 que el producte escalar d'un vector per ell mateix coincideix amb el quadrat del mòdul del vector, perquè un vector forma un angle de 0° amb ell mateix:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^2 = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| = v \cdot v = v^2 \tag{257}$$

Per tant, l'expressió (256) es pot escriure també en termes del quadrat del mòdul del vector velocitat:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \tag{258}$$

I ara, com sempre que introduïm una nova magnitud, ens preguntem en quines unitats del Sistema Internacional es mesurarà. També escriurem l'energia cinètica d'una altra forma.

Activitat 5.7. Unitats d'energia cinètica i expressió de E_c en funció del moment lineal

a) En quines unitats es mesura l'energia cinètica? Què serà, doncs, una energia cinètica unitària?

b) Escriviu la definició de l'energia cinètica en termes del moment lineal, en lloc de ferho en termes de la velocitat de la partícula, com apareix a l'equació (256).

Solució

a) La unitat en què es mesura la magnitud energia cinètica es pot obtenir, com sempre fem, donant el valor unitari a les magnituds que intervenen en la seva definició, o en qualsevol altra equació en què hi aparegui. Així, de l'equació (256):

$$[\textit{Energia cinètica}] = [\frac{1}{2}]\,[m][v] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \tag{259}$$

on no tenim en compte la constant ½ perquè es tracta d'un nombre sense dimensions. Per tant, l'energia cinètica es mesura en quilograms metre quadrat per segon al quadrat.

Podem veure que aquesta unitat coincideix amb la unitat de treball, el joule. En efecte, en l'activitat 5.6 hem calculat el treball que fa una força igual i contrària al pes de l'objecte en desplaçar-se una distància h en la direcció de la força, equació (252):

$$W = F_{//} \cdot h = mgh \tag{260}$$

Les unitats en què es mesura cada factor són:

$$[W] = [mgh] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\mathrm{m} \tag{261}$$

que coincideixen amb les de l'energia cinètica (equació 259). Aleshores, l'energia cinètica es pot mesurar també en joules, o N · m.

Per tant, d'acord amb l'equació (256), l'energia cinètica que té una massa d'un quilogram que es desplaça a una velocitat d'un metre per segon és $E_c = 0{,}5$ J, mig joule.

Un joule és l'energia cinètica que té, per exemple, una massa de 2 kg que es mou a 1 m/s.

b) Si recordem que $\vec{p} = m\vec{v}$, equació (226), podem fer aparèixer el producte $m\vec{v}$ en el numerador de l'energia cinètica si multipliquem i dividim l'expressió (256) per la massa de la partícula:

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\frac{(m\vec{v})^2}{m} \quad (262)$$

i si substituïm el producte $m\vec{v}$ pel moment lineal obtenim:

$$E_c = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad (263)$$

on p és el mòdul del moment lineal i hem fet servir el resultat que:

$$\vec{p}^2 = p^2 \quad (264)$$

anàlogament a l'equació (257).

L'energia cinètica depèn només de la massa i de la velocitat o del moment lineal de la partícula.

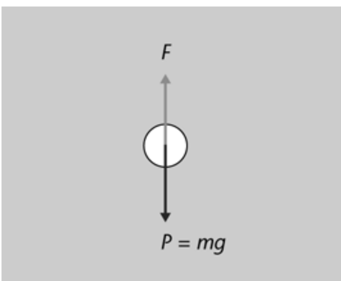
Un objecte en moviment té energia cinètica, però aquesta desapareix si ens posem en el sistema de referència en què l'objecte està en repòs! Per tant, el valor de l'energia cinètica d'un objecte depèn del sistema de referència des del qual es calculi. Això és conseqüència del fet que la velocitat d'un objecte és una magnitud relativa, que depèn del sistema de referència des del qual s'observa el moviment.

Abans de veure la relació que hi ha entre energia cinètica i treball, introduirem el concepte d'energia potencial, que mesura l'energia que té un cos en funció de la posició que ocupa en un camp de forces.

5.3.2. Energia potencial gravitatòria

Per a elevar un cos a una certa altura, la força que cal fer en cada moment és igual i oposada al pes del cos (figura 97).

Figura 97. Pes d'un cos i força aplicada per a elevar-lo



Quan elevem un cos en la direcció vertical apliquem una força igual i contrària a la de la gravetat; aquesta força aplicada es desplaça verticalment i, per tant, fem treball en contra de la gravetat; diem que el cos guanya energia potencial gravitatòria.

L'energia potencial que guanya l'objecte és, per definició, igual al treball que hem fet.

Com que la força que apliquem és constant en el cas d'alçar objectes, el treball que fem en elevar una massa m a una altura Δh és el producte de la força aplicada pel desplaçament vertical:

$$\Delta E_p = F \cdot \Delta h \tag{265}$$

i com que la força és igual al pes, en mòdul:

$$\Delta E_p = mg \cdot \Delta h \tag{266}$$

Aquesta relació és la mateixa que la de l'equació (252) o (260).

En el camp gravitatori terrestre un cos de massa m que s'ha desplaçat a una altura Δh, ha guanyat una energia potencial ΔE_p donada per l'expressió (266).

Així, si deixem un objecte dalt de l'armari hem fet un treball per a elevar-lo, que s'emmagatzema en forma d'energia potencial de l'objecte. I si aquest objecte cau, l'energia potencial que s'hi ha emmagatzemat pot fer un treball: pot fer, per exemple, una força sobre un altre objecte i deformar-lo o trencar-lo. O, en un altre exemple, el treball que es fa en elevar aigua a una determinada altura esdevé energia potencial de l'aigua; si deixem caure l'aigua, l'energia potencial es pot convertir en moviment de les rodes d'un molí o en moviment de les turbines generadores d'energia elèctrica.

L'energia potencial té la mateixa unitat que el treball i que l'energia cinètica, el joule (J), perquè l'hem definida en termes de treball.

5.3.3. Energia potencial, expressió general

Hem introduït el concepte d'energia potencial en el cas gravitatori senzill en què les partícules són a prop de la superfície terrestre i el pes és constant en tots els punts de l'espai on posem els objectes.

En el cas més general que sobre una partícula actuï una força que pot tenir un valor diferent en cada punt de l'espai, diem que la partícula està immersa en un camp de forces. És el que ocorre, per exemple, quan una nau espacial viatja de la Terra a la Lluna; sobre la nau actua una força diferent en cada punt del trajecte, la resultant de les forces gravitatòries terrestre i lunar, que atrauen la nau en direcció a la Terra i a la Lluna, respectivament.

Alguns camps de forces tenen la propietat que el treball que fan les forces del camp entre dos punts qualsevol no depèn del camí pel qual es desplaci la partícula. En aquest cas, es parla de camps conservatius. El camp gravitatori és un exemple de camp de forces conservatives. En el subapartat 5.3.7 en parlarem més.

La definició general del concepte d'energia potencial és la següent:

La **variació de l'energia potencial** d'una partícula entre dos punts és igual al treball de les forces conservatives, canviat de signe, que fan aquestes forces sobre la partícula entre aquests dos punts.

És una relació **energia potencial-forces del camp**:

$$\Delta E_{p\ a \to b} = -W_{forces\ conservatives} \tag{267}$$

Per tant, el treball que fa una força conservativa sobre una partícula en un recorregut qualsevol entre a i b és igual a la disminució de l'energia potencial del sistema, $W_{forces\ conservatives} = -\Delta E_{p\ a \to b}$.

En l'equació (267) hem fet servir el símbol d'**increment d'energia potencial** ΔE_p:

$$\Delta E_{p\ a \to b} = E_{pb} - E_{pa} \tag{268}$$

és a dir, l'increment d'energia potencial és la diferència entre el valor de l'energia potencial en el punt final on se situa la partícula i el valor en el punt inicial.

Increment d'una magnitud, Δf

L'increment d'una magnitud f, Δf (que es llegeix "delta efa"), entre un punt a i un punt b és la diferència entre el valor d'aquesta magnitud en l'extrem final de l'interval menys el valor en l'extrem inicial,

$$\Delta f = f_b - f_a$$

Figura 98

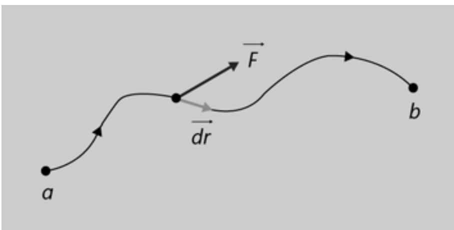


Figura 98

Una força $\vec{F}$ fa treball per a dur una partícula del punt a al b en contra de les forces del camp. $d\vec{r}$ és un element de trajectòria. L'energia potencial de la partícula ha augmentat en $\Delta E_{p\ a \to b}$.

Podem expressar també l'increment d'energia potencial en termes de les forces que apliquem si movem la partícula en un camp de forces. Com que la força que hem de fer per a moure una partícula sense accelerar-la en un camp de forces és igual i contrària a la força que fa el camp (vegeu la figura 97), podem dir que hi ha una relació **energia potencial-força aplicada**.

Camp de forces

Podeu pensar en un camp de forces com en una zona de l'espai en què hi ha una força aplicada a cada punt. En el mòdul d'electrostàtica incidirem més en aquest concepte.

L'energia potencial d'una partícula que està en presència d'un camp de forces conservatiu augmenta en una quantitat ΔE_p entre dos punts *a* i *b,* igual al treball que fem per a moure la partícula (sense accelerar-la) des del punt *a* al punt *b* en contra de les forces del camp:

$$\Delta E_{p\ a \to b} = W_{contra\ el\ camp} \tag{269}$$

Si fem un treball $W_{contra\ el\ camp}$ en contra del camp de forces en què està la partícula, l'energia potencial de la partícula augmenta en una energia igual al treball que ha fet la força.

Però si és el camp de forces conservatiu el que mou la partícula entre aquests dos punts, aleshores l'energia potencial disminueix en aquest valor, equació (267).

Diem, doncs, que quan es fa un treball, l'energia es transforma d'un tipus a un altre. La quantitat d'energia que es transforma en energia potencial en un procés com el descrit en l'equació (267) és igual a la quantitat de treball que es fa. Veurem en el subapartat 5.5.2 que l'energia potencial es pot convertir també en cinètica i viceversa.

Explícitament, si $\vec{F}_{camp}$ és la força que fa el camp de forces conservatiu sobre una partícula situada en un punt, aleshores la força que hi farem en contra del camp per a moure la partícula serà $\vec{F} = -\vec{F}_{camp}$, i escrivim la definició (269) de diferència d'energia potencial així:

$$\Delta E_{p\ a \to b} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{270}$$

si $\vec{r}_1$ és el vector de posició de la partícula en el punt *a* i $\vec{r}_2$ en el punt *b*.

En l'expressió anterior apareix la força aplicada. També podem escriure-la en funció de la força que fa el camp de forces conservatiu:

$$\Delta E_{p\ a \to b} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{camp} \cdot d\vec{r} \tag{271}$$

La relació (271) és la mateixa que la (267) i s'ha escrit explícitament l'expressió del treball de les forces del camp conservatiu.

Per què es diu en la definició (269) d'increment d'energia potencial que el treball de la força externa s'ha de fer "sense accelerar" la partícula? Perquè si apliquem una força igual i oposada a la que fa el camp de forces sobre la partícula, aleshores la força total que actua sobre la partícula és nul·la i, per tant, la partícula no s'accelera en el desplaçament entre els dos punts, segons ens diu la segona llei de Newton.

Vegem-ho d'una altra manera, per al cas de les forces gravitatòries.

És clar que elevar un objecte a una altura determinada implica aplicar una força per a elevar-lo i, per tant, fer un treball. Si la força aplicada compensa exactament el pes, aleshores la força total que actua sobre la partícula és nul·la. Però durant el desplaçament entre a i b podem fer una força major que el pes, amb la qual cosa la força neta que actua sobre la partícula no serà nul·la, i aquesta s'accelerarà, d'acord amb la segona llei de Newton. Això significa que arribarà a l'altura h amb una determinada velocitat, és a dir, amb una determinada energia cinètica. A l'altura h, doncs, tindrà tant energia cinètica com potencial, com a conseqüència del treball que fan les forces.

Per contra, si la força que fem compensa exactament el pes, el cos es mourà del punt inicial al final sense accelerar-se. Sobre el cos no actuarà cap força neta i el treball que farem serà el menor possible, perquè tot el treball que fem es convertirà en energia potencial i no se'n convertirà cap fracció en energia cinètica de la partícula.

Una condició essencial perquè es pugui definir el concepte d'energia potencial, i que fa que aquest concepte sigui útil, és que quan calculem el treball fet contra les forces del camp, equació (269) o (270), el resultat que obtinguem només ha de dependre de les coordenades dels punts inicial i final del camí que hem seguit per anar-hi.

A més a més, aquest camí pot ser qualsevol, és a dir, en fer la integral que dóna el treball no podem obtenir resultats diferents segons el camí que triem. Quan ocorre això, diem que el camp de forces en què es troba la partícula es **conservatiu** i el concepte d'energia potencial és útil.

Tornarem sobre aquesta idea més avall. Abans, però, farem una consideració sobre el camí d'integració que hem fet servir per a arribar al resultat de l'equació (266) i, tot seguit, parlarem d'algunes propietats generals del concepte d'energia potencial.

5.3.4. Energia potencial gravitatòria i camí d'integració

L'energia potencial gravitatòria d'un objecte de massa m que està a una altura Δh té la forma expressada en l'equació (266), $\Delta E_{\mathrm{p}} = mg\Delta h$. Per a fer el càlcul de l'expressió anterior hem suposat que desplacem l'objecte verticalment, (figura 99a). Però també podem fer servir qualsevol trajectòria, com les de les figures 99b o 99c, i el resultat seria el mateix, $mg\Delta h$. No farem la demostració general d'aquesta propietat dels camps conservatius, però ho comprovarem en un cas particular senzill.

Figura 99

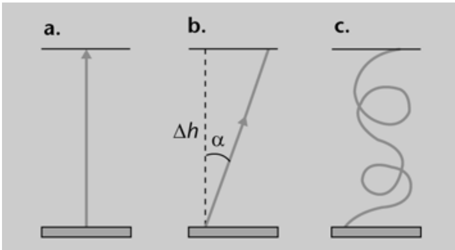


Figura 99

Tres de les possibles maneres d'anar del pla inferior al pla superior, separats una distància Δh:

a. un camí vertical;

b. un camí oblic;

c. un camí qualsevol.

Activitat 5.8. Càlcul de l'energia potencial gravitatòria

Repetiu el càlcul de l'expressió (266) per a una trajectòria obliqua com la de la figura 99b.

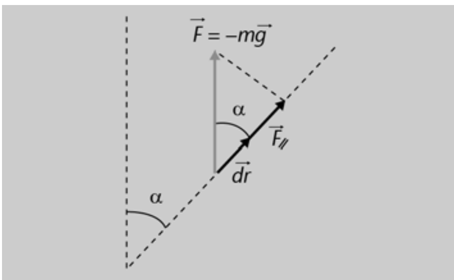
Solució

En el cas de la trajectòria de la figura 99b, el camí que recorrem és més llarg que per al cas d'ascens vertical:

$$camí = \frac{\Delta h}{\cos\alpha} \tag{272}$$

La força que hem d'aplicar és la que contraresta el pes de l'objecte, $\vec{F} = -m\vec{g}$. Per a calcular el treball que fem en elevar l'objecte, d'acord amb l'equació (270), hem de saber què val la projecció d'aquesta força sobre el camí que seguim (figura 100).

Figura 100. Projecció de la força que fem sobre l'objecte en la trajectòria oblíqua de la figura 99b



Només la projecció de la força paral·lela al camí, $F_{//}$, fa treball:

$$F_{//} = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\alpha = mg \cdot \cos\alpha \tag{273}$$

Per tant, el treball que fem si seguim el camí oblic és, equació (278):

$$\Delta E_{p_{1\to2}} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_{//}\cdot dr \tag{274}$$

i si hi substituïm l'expressió (273) obtenim:

$$\Delta E_{p_{1\to2}} = \int_1^2 mg \cdot \cos\alpha \cdot dr = mg \cdot \cos\alpha \int_1^2 dr \tag{275}$$

Hem tret els factors constants de la integral, i la integral és el camí oblic que seguim, equació (272):

$$\Delta E_{p_{1\to2}} = mg\cos\alpha \frac{\Delta h}{\cos\alpha} \tag{276}$$

Hem obtingut el mateix resultat (266) que si anem pel camí més curt:

$$\Delta E_{p1\rightarrow 2} = mg\Delta h \tag{277}$$

En l'exemple anterior hem vist que es pot fer el mateix treball si apliquem una força major, mg, per un camí curt, Δh, o una força menor, $mg\cos\alpha$, per un camí més llarg, $\Delta h/\cos\alpha$. És el mateix que aconseguim si pugem un objecte per un pla inclinat: fem menys força per empènyer-lo, però el camí és més llarg. En definitiva, fem el mateix treball en els dos casos (si suposem que no hi ha fregament en el moviment pel pla inclinat), i l'energia potencial de l'objecte en el punt superior del pla inclinat és la mateixa.

Hem comprovat en un cas senzill que el treball que fem en elevar un objecte per un camí vertical o per un camí inclinat és el mateix, i es pot demostrar que el resultat és sempre el mateix, independentment del camí que seguim, com el de la figura 99c, per exemple. En el camí de la figura 99c hi ha parts del camí que són de pujada, i nosaltres fem el treball, mentre que altres parts del camí són de baixada, i és el camp gravitatori el que fa el treball; aquestes contribucions tenen signe contrari.

En resum, un camí qualsevol que vagi del pla 1 al pla 2 que és a una distància Δh del primer, sempre donarà com a resultat que la diferència d'energia potencial d'una massa m entre els dos plans situats a una altura relativa Δh és $mg\Delta h$.

En l'expressió $mg\Delta h$, que havíem obtingut fent el càlcul pel camí més directe, vertical (figura 99a), ja es podia intuir que només importa l'altura final de la partícula i no pas el camí pel qual s'hi arriba, perquè el resultat només depèn de Δh.

Un cop vist que la diferència d'energia potencial en el camp gravitatori no depèn del camí, convé que analitzem encara més el concepte d'energia potencial, perquè és molt útil i s'aplica en molts camps de la física.

5.3.5. Discussió del concepte d'energia potencial

A partir de la discussió que hem fet per a l'energia potencial gravitatòria comentarem quatre propietats generals del concepte d'energia potencial, que són vàlides per a qualsevol camp de forces (gravitatori, elèctric, elàstic, etc.).

1) Els camps de forces es divideixen en conservatius i no conservatius.

Són camps conservatius aquells en què el treball que es fa per a dur una partícula entre dos punts en contra de les forces del camp només depèn d'aquests punts i no del camí que es recorre per anar-hi.

Per tant, només en el cas de camps conservatius es pot definir el concepte de diferència d'energia potencial, perquè en cas contrari no obtindrem un valor únic com a resultat del càlcul (269).

2) L'origen de l'energia potencial és sempre arbitrari.

Parlem d'origen d'energies per referir-nos a la situació en què l'energia pren el valor nul. Vegem com s'aplica aquesta idea en el cas de l'energia potencial o de l'energia cinètica.

La definició de la magnitud energia potencial es fa en termes de treball, i aquest treball incrementa l'energia potencial. Per tant, a partir de la definició d'energia potencial (269), podem calcular la diferència:

$$E_{p\ final} - E_{p\ inicial} = \Delta E_p \tag{278}$$

Però la definició d'energia potencial no ens diu com fixar un origen per al valor d'aquesta energia. En cada problema podem triar l'origen d'energies potencials que més ens convingui. En l'activitat següent veurem quin efecte té la tria de l'origen de l'energia potencial.

En el cas de l'energia cinètica, $\frac{1}{2} mv^2$, l'origen d'energies és clar: l'energia cinètica mai no pot ser negativa, perquè la massa és una magnitud definida com a positiva (no hi ha masses negatives) i la velocitat apareix elevada al quadrat en l'expressió de E_c. Per tant, l'energia cinètica només pot ser nul·la o positiva, i és nul·la si la partícula està en repòs, $v = 0$:

$$E_c = 0 \tag{279}$$

Aquest serà, doncs, l'origen de l'energia cinètica.

En el cas de l'energia potencial podem triar l'origen en el punt que vulguem, perquè en un procés només tindrà significat la variació que ha ocorregut en l'energia potencial del sistema. Les energies potencials sí que poden ser negatives, com veurem en l'activitat següent.

Activitat 5.9. Origen dels valors de l'energia potencial

En l'expressió $E_p = mgh$, quin és l'origen que s'ha triat implícitament per a l'energia potencial gravitatòria?

Poden ser negatives aquestes energies potencials?

Solució

L'origen d'una magnitud és el valor zero d'aquesta magnitud. Per exemple, una carretera comença pel quilòmetre zero; un compte bancari està a zero si no tenim ni devem diners; un eix de coordenades té un punt zero i valors positius i negatius a un costat i a l'altre del zero.

En el cas més senzill de l'energia potencial gravitatòria, $E_p = mgh$, l'origen és al punt $h = 0$, perque anul·la l'energia: $E_p = 0$. Hem pres la posició de partida de la massa que elevem a l'altura h com l'origen d'altures i, per tant, d'energies potencials gravitatòries.

Però un objecte pot estar en una posició inferior a l'altura $h = 0$ que hem pres com a origen i, per tant, $h < 0$ i l'energia potencial serà negativa. És el cas, per exemple, que triem el terra de la cambra com a origen d'energies potencials. Si l'objecte es col·loca dalt d'un armari d'altura H, l'energia potencial que hi té és mgH. Però si l'objecte ens cau pel balcó, quan sigui a una altura de $-h_1$ metres per sota del balcó, tindrà una energia potencial negativa, $-mgh_1$.

Com a conclusió:

- Si l'objecte és a terra, té energia potencial nul·la si hem pres el terra com a origen d'energies potencials.
- Si l'objecte és dalt de l'armari, té energia potencial positiva (i val $-mgH$); coincideix amb el treball que hem fet per posar-l'hi.
- Si l'objecte és a una altura $-h_1$ per sota del terra, té energia potencial negativa (i val $-mgh_1$). És el treball que ha fet el camp de forces conservatiu (no nosaltres) per dur-l'hi.

3) De vegades parlem del valor de l'energia potencial en un punt.

De vegades ens referim al valor de l'energia potencial en un punt i no a una diferència d'energia potencial. Aleshores és implícit que ens referim al valor de l'energia potencial en aquell punt respecte al valor zero que assignem a l'origen d'energies potencials.

4) En l'expressió de l'energia potencial apareixen tres magnituds que representen la font del camp, la partícula i la geometria de la situació.

En el cas particular de l'energia potencial gravitatòria, $E_\mathrm{p} = mgh$, el camp apareix a través de g, la partícula, a través de m, i la geometria de la situació, a través de la distància, h.

Convé remarcar que el concepte d'energia potencial sempre es refereix a un sistema, no a un cos. L'energia potencial gravitatòria d'un llibre, per exemple, és la del conjunt llibre-Terra. No té sentit parlar de l'energia potencial gravitatòria d'un llibre sense la presència de la Terra.

D'altra banda, de vegades resulta útil disposar d'una magnitud en què l'efecte d'un camp de forces es pugui calcular sense referència a la partícula que pateix l'efecte del camp. Aquesta magnitud es definirà en l'apartat següent.

En resum, i tenint present el que s'ha dit en aquest apartat, $\Delta E_p > 0$ quan fem el treball nosaltres, en contra del camp, i $\Delta E_p < 0$ quan el treball el fa el camp de forces conservatiu.

5.3.6. El potencial gravitatori

En el cas de camps gravitatoris, la magnitud activa és la massa; és la propietat del cos que pateix els efectes de la força. En el cas de camps elèctrics la magnitud activa serà la càrrega elèctrica. De vegades resulta convenient definir una magnitud derivada de l'energia potencial en què no hi aparegui la magnitud activa.

Amb aquest objectiu es pot definir l'energia potencial per unitat de magnitud activa. Aquesta nova magnitud s'anomena *potencial*. A partir de la definició general de l'energia potencial, la **diferència de potencial gravitatori** entre dos punts es defineix de la manera següent:

$$\Delta V_{p\,1\to 2} = \frac{\Delta E_{p\,1\to 2}}{m} \tag{280}$$

És a dir (si recordem com es llegeixen els quocients, subapartat 1.6.2), podem dir el següent del potencial gravitatori.

> El **potencial gravitatori** en un punt és l'energia potencial per unitat de massa situada en aquest punt.

Podem parlar de potencial en un punt de la mateixa manera que parlem d'energia potencial en un punt. Ens referirem al potencial en un punt respecte al valor de potencial zero que assignem a l'origen de potencials. L'origen d'energies potencials i de potencials és el mateix punt de l'espai.

Analitzem un poc més aquest concepte.

Activitat 5.10. Potencial

a) Quines de les propietats de l'energia potencial gravitatòria (propietats 1, 2 i 3 del subapartat 5.3.5) són aplicables a la magnitud potencial gravitatori?
b) En quines unitats es mesura el potencial gravitatori?
c) Calculeu el potencial gravitatori per al cas particular de l'expressió (277).

Solució

a)

1) El potencial només té sentit definir-lo per a camps conservatius, igual que l'energia potencial.

2) L'origen de potencials és el mateix que el que es triï per a l'energia potencial.

3) En el potencial apareix el camp i la geometria, però no la magnitud activa (la massa que en rep els efectes).

b) El potencial gravitatori es mesura en J/kg o també en m^2/s^2, si recordem que $1\text{ J} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$, equació (261).

c) El **potencial gravitatori respecte del terra** en un punt de l'espai que és a una altura h és:

$$V = gh \tag{281}$$

La importància del concepte de potencial es veurà millor en la segona part de l'assignatura, quan parlem de potencial electrostàtic.

Ara farem èmfasi en una propietat molt important dels camps de forces conservatives, relativa al treball que es fa en un recorregut tancat.

5.3.7. Treball en un recorregut tancat

Ja hem dit que el concepte d'energia potencial (i el de potencial) només és útil quan els camps de forces són conservatius. Així ocorre en el cas de les forces que no depenen del temps.

Un camp estacionari de forces, és a dir, un camp que no depèn del temps, té una propietat molt important: el treball total que fan les forces del camp en un recorregut tancat és nul. És a dir, si el punt material es desplaça en aquest camp segons una trajectòria tancada, de manera que en el seu moviment el punt torna a la posició inicial, el treball total que fan les forces del camp serà nul.

Figura 101

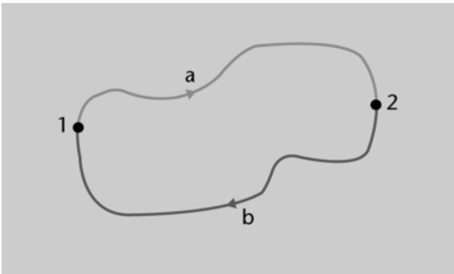


Figura 101

El camí **a** va del punt 1 al 2 i el camí **b** va del punt 2 a l'1.

Aquesta propietat és equivalent a una altra que hem fet servir com a definició de camps conservatius: el treball que es fa en contra de les forces del camp, en traslladar la partícula d'una posició a una altra, no depèn del camí que es recorre (subapartat 5.3.5), i només ve determinat per les posicions dels punts inicial i final de la translació.

Insistim en el fet que les forces han de ser conservatives perquè el concepte d'energia potencial es pugui definir. Vegem-ne un exemple.

Activitat 5.11. Forces de fricció i energia potencial

Si tenim un llibre sobre una taula i el volem moure sobre la superfície aplicant-hi amb el dit una força, aquesta força ha de ser infinitesimalment més gran i contrària a la força de fricció. Si les dues forces són exactament iguals i contràries, el llibre no es mourà.

I pel fet d'aplicar una força i desplaçar-ne el punt d'aplicació en la direcció de la força, estem fent un treball.

Suposem que fem anar d'aquesta manera el llibre des d'un punt A a un punt B determinats, per dos camins diferents sobre la taula. ¿Podrem parlar de diferència d'energia potencial $\Delta E_{pA \to B}$?

Solució

No es pot definir una energia potencial per a un procés en què intervenen forces de fricció, perquè les forces de fricció no són conservatives.

En efecte, si calculem el treball que fem en contra de les forces de fricció per dos camins diferents que van del punt A al B, i un camí té més longitud que l'altre, el treball que farem serà diferent: com més camí es recorri, més treball s'ha de fer, perquè la fricció sempre hi és present i actua en sentit contrari al moviment. Per això, la força que hem de fer per a superar-la és una força paral·lela al desplaçament, i el treball resultant és sempre positiu.

5.3.8. Què hem après?

- L'energia cinètica és la que té un objecte pel fet d'estar en moviment.
- L'energia potencial és la que té un objecte en funció de la posició que ocupa en un punt de l'espai a causa de la interacció amb un altre cos o amb un camp de forces.
- El treball que fem sobre una partícula n'augmenta l'energia potencial, si les forces que hi actuen són conservatives, equació (269).
- El potencial gravitatori és una magnitud derivada de l'energia potencial gravitatòria, i es refereix a la unitat de massa.
- L'origen d'energia potencial i de potencial és arbitrari.

Hem discutit el concepte d'energia potencial, que està lligat al càlcul del treball que fa la força que actua sobre la partícula en un camp de forces conservatiu, és a dir, el treball que fa una força conservativa.

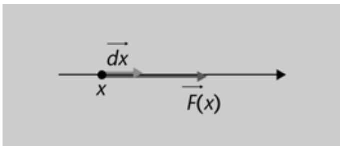
Tot seguit, veurem que l'energia cinètica està lligada amb el treball total, i no solament amb el que fan les forces conservatives.

5.4. El teorema del treball-energia cinètica

Quan una força accelera una partícula, en canvia la velocitat. Podem calcular el treball que fa la força neta (o resultant) que actua sobre una partícula i deduir una relació entre aquest treball i la variació d'energia cinètica que tindrà la partícula.

Tot i que la deducció que veurem ací es pot fer, anàlogament, en el cas general amb magnituds vectorials en tres dimensions, ho farem en el cas més senzill: un objecte que es mou en una dimensió, per exemple al llarg de l'eix X. Sobre l'objecte actua una força F que pot ser variable, $F(x)$ (figura 102). Calculem el treball que fa aquesta força si l'apliquem a l'objecte de manera continuada entre dos punts qualsevol, a i b:

Figura 102. Força variable que actua sobre una partícula que es mou al llarg d'un eix



$$W = \int_a^b F(x)dx \qquad (282)$$

Sabem que si actua una força neta sobre una partícula, aquesta s'accelera. Per la segona llei de Newton aplicada al cas de moviment unidimensional, si la partícula té una massa m, l'acceleració que té en cada punt és:

$$a(x) = \frac{F(x)}{m} \qquad (283)$$

Per tant, podem escriure el treball que fa la força aplicada a la partícula així:

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b ma(x)dx \tag{284}$$

i si recordem que l'acceleració és el canvi de velocitat per unitat de temps, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ i, en una dimensió, $a = dv/dt$, escrivim:

$$W = \int_a^b m\frac{dv}{dt}dx \tag{285}$$

En un moviment unidimensional la velocitat $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ només té una component no nul·la, la component en la direcció x, i $v = dx/dt$. Ara fem el petit truc de desplaçar en l'equació (285) la diferencial de temps al segon factor (recordeu que, a efectes pràctics, una derivada també es pot considerar un quocient de diferencials; per tant, podem manipular les magnituds del quocient com si fossin funcions). D'aquesta manera obtenim:

$$W = \int_a^b m\frac{dv}{dt}dx = \int_a^b m\cdot dv\frac{dx}{dt} \tag{286}$$

i com que la component x de la velocitat és:

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{287}$$

Resulta:

$$W = \int_a^b m\cdot dv\cdot v \tag{288}$$

Quan la massa és constant, la integral que queda és immediata i val:

$$W = m\int_a^b dv\cdot v = \tfrac{1}{2}mv^2\Big|_a^b \tag{289}$$

i d'acord amb la regla de Barrow, que permet calcular integrals definides, obtenim:

$$W = \tfrac{1}{2}m\left(v_b^2 - v_a^2\right) \tag{290}$$

Si tenim en compte que el terme $\frac{1}{2}mv^2$ és l'energia cinètica de la partícula que té una massa m i que es mou a la velocitat v, equació (256), hem arribat a:

$$W = \tfrac{1}{2}mv_b^2 - \tfrac{1}{2}mv_a^2 \tag{291}$$

Regla de Barrow

Si la funció *F* és una funció primitiva de la funció *f*, la integral definida de *f* entre dos punts *a* i *b* és

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Recordeu

$$\int_a^b x\cdot dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

i si simbolitzem l'increment d'energia cinètica amb el símbol ΔE_c (la variació de l'energia cinètica entre els dos punts a i b en què s'aplica la força):

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 \quad (292)$$

finalment podem escriure:

$$W = \Delta E_c \quad (293)$$

El resultat que hem obtingut s'anomena **teorema treball-energia cinètica** i s'enuncia així: el treball total que fa la força neta que actua sobre una partícula al llarg de la trajectòria que va del punt a al punt b es tradueix en una variació de l'energia cinètica de la partícula entre aquests punts:

$$W = \Delta E_c = E_{c,b} - E_{c,a} \quad (294)$$

Increment d'una magnitud

L'increment d'una magnitud f entre un punt a i un punt b és la diferència entre el valor d'aquesta magnitud en l'extrem final de l'interval menys el valor en l'extrem inicial:

$$\Delta f = f_b - f_a$$

Com podeu veure, s'indica amb la lletra grega delta majúscula (Δ) i per això es llegeix de vegades com a "delta de efa" en lloc d'"increment de efa".

Si la força, per exemple, frena la partícula, aleshores W serà negatiu i l'energia cinètica final:

$$E_{c,b} = E_{c,a} + W \quad (295)$$

serà menor que l'energia cinètica inicial:

$$E_{c,b} < E_{c,a} \quad (296)$$

És el cas, per exemple, d'una partícula que es mou en el sentit positiu de l'eix X i la força té el sentit contrari. Aleshores, $F \cdot dx < 0$, és a dir, per a un increment positiu de la variable x, $dx > 0$, la força va en sentit contrari (figura 103).

Figura 103

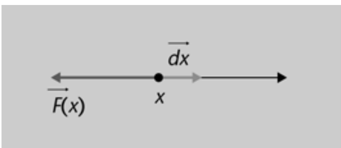


Figura 103

Una força que es dirigeix en el sentit descendent de l'eix X fa un treball negatiu sobre una partícula que es mou en el sentit positiu de l'eix X.

L'expressió (294) diu que l'energia cinètica d'una partícula augmenta en una quantitat que correspon exactament al treball que fa la força neta que actua sobre la partícula. Així, si $W > 0$, la partícula es mourà més ràpidament gràcies al treball que fa la força, és a dir, gràcies a l'energia que li aporta la força que actua al llarg d'un desplaçament. Si $W < 0$, la força frena la partícula, que redueix la velocitat.

El resultat (294) no es limita a moviments en una dimensió. Per a un desplaçament qualsevol de la partícula en l'espai, entre els punts a i b, el teorema treball-energia cinètica es pot expressar així:

$$\int_a^b \vec{F}_{neta} \cdot d\vec{r} = \Delta E_c \tag{297}$$

En general, quan una força actua sobre una partícula aquesta s'accelera i la força pot fer un treball: és el que ocorre, per exemple, quan estirem d'una persona que du patins. També podem dir que un cos que s'accelera, de manera que augmenta la seva velocitat, guanya energia cinètica. Hi ha una relació entre l'**acceleració** (produïda per una força) i l'**augment d'energia cinètica**:

La quantitat d'energia cinètica que guanya una partícula és igual al treball que fa la força neta que actua sobre la partícula.

El treball que calculem amb l'expressió (297) és el treball net, el treball que fa la força neta que actua sobre la partícula, i aquest treball s'inverteix, íntegrament, en augmentar l'energia cinètica de la partícula.

D'altra banda, quan les forces són conservatives, el treball que fan les forces del camp es tradueix en una reducció de l'energia potencial de la partícula, equació (267).

Per tant:

1) L'increment d'energia potencial és menys el treball de les forces conservatives: $\Delta Ep = -W_{FC}$.

2) L'increment d'energia cinètica és el treball total de les forces que actuen sobre la partícula (equació 294): $\Delta Ec = W_t$.

Aquests resultats generals ens poden ajudar a entendre què ocorre quan alcem un objecte de massa m a una altura h i després el deixem caure lliurement. Analitzem-lo.

Mentre alcem un objecte verticalment, apliquem una força contrària al seu pes, $\vec{F} = -\vec{P}$. La força total que actua sobre l'objecte és nul·la: $\vec{F} + \vec{P} = 0$. Segons els enunciats anteriors, direm que:

- el treball que fa la força neta és nul, i l'energia cinètica de l'objecte no varia quan l'alcem;

- el treball de la força aplicada és *mgh*, i es converteix en energia potencial de l'objecte;

- vist d'una altra manera: el treball de les forces del camp gravitatori és negatiu, –*mgh*, i, per tant, l'energia potencial de la partícula, que és 0 – (–*mgh*) = +*mgh*, augmenta; obtenim el mateix resultat que si considerem la força aplicada.

Heu de recordar el que vam dir en l'anàlisi posterior a l'equació (271): que la força aplicada és només infinitesimalment major que el pes, mentre alcem l'objecte sense accelerar-lo. Si la força aplicada fóra major que el pes, $\vec{F} + \vec{P} > 0$, aleshores l'objecte arribaria a l'altura h amb una determinada energia cinètica, igual al treball de la força neta.

En el procés de caiguda lliure de l'objecte des de l'altura h només actua la força del camp conservatiu i el treball que fa es converteix en energia cinètica de l'objecte. Al mateix temps, aquest treball (positiu, perquè la direcció de la força i el desplaçament coincideixen en el sentit vertical i cap a baix) fa que es redueixi l'energia potencial de la partícula. En el subapartat 5.5.2 tornarem sobre aquesta qüestió.

5.4.1. Què hem après?

- Una força pot accelerar una partícula sense fer-hi treball.
- El treball que fa la força neta que actua sobre una partícula s'inverteix, íntegrament, en augmentar l'energia cinètica de la partícula.
- Hem recordat, del subapartat anterior, que quan les forces són conservatives, el treball que fan les forces del camp es converteix en una reducció de l'energia potencial de la partícula.

Acabem de veure la relació entre el treball de les forces que actuen sobre una partícula i els canvis en la seva energia cinètica i potencial. Les forces són tant la força aplicada com la deguda al camp de forces en què es trobi la partícula.

Tanmateix, hi ha magnituds físiques que no varien en determinades condicions, tot i que es produeixin transformacions en el sistema. És el cas del moment lineal i de l'energia total d'un sistema aïllat. Es diu que les magnituds corresponents "es conserven" en els processos.

Veurem que les lleis de conservació de la mecànica tenen l'origen en les lleis de Newton i es poden fer servir com una forma alternativa d'expressió d'aquelles lleis i com a eina de càlcul ben útil.

5.5. Lleis de conservació

Les tres lleis de Newton que permeten estudiar la dinàmica d'un sistema de partícules o de cossos materials es poden reformular també en forma de **lleis de**

conservació. L'aplicació d'aquestes lleis de vegades facilita l'anàlisi de processos físics. Veurem ara les lleis de conservació del moment lineal i de l'energia.

5.5.1. Conservació del moment lineal

La tercera llei de Newton, en conjunció amb la segona, permet deduir el principi de conservació del moment lineal.

Suposem que dues masses puntuals es mouen amb una velocitat determinada, de manera que el moment lineal de cada partícula és, respectivament, $m_1\vec{v}_1$ i $m_2\vec{v}_2$. Comencem amb l'explicitació de la tercera llei, la llei d'acció i reacció: la força que fa una partícula sobre l'altra és igual a la força que fa la segona partícula sobre la primera:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \tag{298}$$

Si suposem que el sistema format per les dues partícules és aïllat (és a dir, que sobre les dues partícules no actua cap força externa), la força total que actua sobre el sistema de les dues partícules en conjunt és nul·la:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \tag{299}$$

La segona llei de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ ens permet escriure, per a cada partícula, la relació entre la força i el canvi de velocitat que es produeix per unitat de temps:

$$\vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1 = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} \tag{300}$$

$$\vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2 = m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} \tag{301}$$

i si ara tenim en compte l'expressió del moment lineal de cada partícula, podem escriure cada força de la manera següent, recordant l'equació (228):

$$\vec{F}_1 = \frac{d}{dt}\vec{p}_1 \tag{302}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{d}{dt}\vec{p}_2 \tag{303}$$

Per al conjunt de les dues partícules l'equació (299) resulta:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0 \tag{304}$$

Una magnitud que no varia amb el temps té derivada temporal nul·la; per tant, l'equació (304) indica que:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = constant \qquad (305)$$

on la constant no depèn del temps (si derivem l'expressió (305) respecte del temps obtenim l'expressió (304)).

Hem deduït (fent servir les lleis de Newton) la **llei de conservació del moment lineal** d'un sistema de dues partícules:

> Si no actua cap força externa, la suma dels moments lineals de les partícules del sistema és sempre constant.

La suma dels moments lineals de les partícules d'un sistema aïllat és constant en tot moment, passi el que passi en el sistema, sigui quina sigui la trajectòria de les partícules del sistema i les interaccions que hi pugui haver entre les dues partícules.

Aquesta **llei de conservació** es pot deduir, igualment, **per a un sistema** format per un conjunt de partícules: si el sistema està aïllat, és a dir, si sobre ell no actuen forces exteriors, aleshores la suma dels moments lineals de les partícules del sistema és constant en tot instant:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots = constant \qquad (306)$$

D'aquesta constant se'n diu **constant del moviment**:

> Una constant del moviment és el valor d'una magnitud (moment lineal, energia total, etc.) que es conserva durant l'evolució d'un sistema.

Universalitat de la llei de conservació del moment lineal

La llei que expressa l'equació (306) és una llei molt fonamental de la natura, i serveix, per exemple, per a detectar partícules subatòmiques.

Un exemple senzill de sistema aïllat és el format per dues boles de billar. La llei de conservació del moment lineal aplicada a les dues boles en un procés de col·lisió indica que el moment lineal és el mateix abans que després de la col·lisió. Si $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ són les velocitats de les boles abans i $\vec{v}_1{}'$ i $\vec{v}_2{}'$ són les velocitats després de la col·lisió, podem escriure la llei de conservació del moment lineal d'un sistema aïllat,

$$\vec{p}_{total\ abans} = \vec{p}_{total\ després} \qquad (307)$$

de la manera següent:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' \qquad (308)$$

Això vol dir que en una col·lisió de les dues boles, la velocitat de cadascuna pot variar (en mòdul, direcció i sentit), però sempre que es mantingui la igualtat anterior.

Hem fet l'anàlisi anterior de la col·lisió de dues boles de billar tot fixant-nos únicament en què ocorre sobre la superfície de la taula de billar. Però sobre les boles actua en tot moment la força de la gravetat i, per tant, la força normal de reacció de la taula que les hi manté. Ara bé, la suma del pes i de la força normal, que actuen sobre cada bola, és sempre nul·la. Per tant, no actua cap força neta exterior sobre les boles.

La relació (308) també serà vàlida si dues boles xoquen en l'aire. En aquest cas, sobre el sistema sí que actua en tot moment una força externa, la força gravitatòria, que accelera les boles en la direcció vertical i cap a baix. Tanmateix, si apliquem la llei de conservació (308) a dos instants infinitesimalment propers a la col·lisió de les boles, just abans i just després del xoc, durant aquest increment de temps que tendeix a zero l'acceleració que produeix la força de la gravetat és nul·la i podem ignorar-la. La relació (308) ens serveix per a determinar la relació entre les velocitats de les boles abans i després de la col·lisió. En qualsevol altre moment, l'acceleració de la gravetat determina la trajectòria i la velocitat instantània de cada bola.

Analitzem una conseqüència de la relació (308): vegem que no totes les situacions són possibles en la col·lisió de dues boles de billar.

Activitat 5.12. Conservació del moment lineal en una col·lisió

Una bola de billar que té una massa m_1 i es mou a velocitat $\vec{v}_1$ xoca contra una altra bola de billar que té una massa diferent m_2 i està aturada. Pot aturar-se la bola primera en el xoc?

Solució

Podem aplicar la conservació del moment lineal just en un instant anterior i un instant posterior al xoc de les boles. La situació és la de la figura 104.

La llei de conservació del moment lineal no impedeix que pugui passar allò que proposa l'enunciat de l'activitat: si igualem el moment lineal total (de les dues boles) abans del xoc, en què només es mou la bola 1, amb el moment lineal total després del xoc, en què suposem que només es mou la bola 2, obtenim:

$$m_1\vec{v}_1 = m_2\vec{v}_2\,' \qquad (309)$$

Aquesta expressió ens permet obtenir la velocitat de la bola 2 a partir de les masses de les boles i de la velocitat que té la bola 1 abans del xoc.

Figura 104

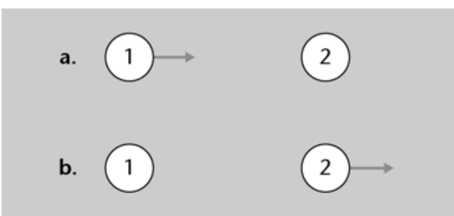


Figura 104

a. Una bola de billar xoca contra una altra que està en repòs.

b. Es pot donar la situació, en què la primera bola s'atura en xocar i la segona es posa en moviment?

Tanmateix, veurem en aplicar la llei de conservació de l'energia en el subapartat següent que, en general, no és possible un procés en què una bola xoca contra una altra que està aturada i el resultat és que la primera s'atura i la segona es posa en moviment.

La situació de la figura 104 només és possible si les dues boles tenen la mateixa massa. Aquest procés és el que podem veure en una taula de billar: per a col·lisions frontals de dues boles de masses idèntiques, la primera queda aturada en sec. Però si xoca una bola gran contra una petita, les dues es mouran després del xoc en el mateix sentit que duia la gran (figura 105).

Figura 105

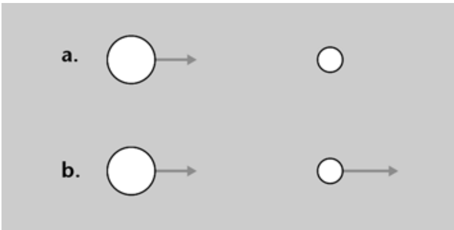


Figura 105

Una bola gran xoca contra una petita que està en repòs.
a. Abans de la col·lisió.
b. Després de la col·lisió.

I si xoca una bola petita contra una gran, la petita rebotarà i la gran es mourà en el sentit que portava la petita (figura 106).

Figura 106

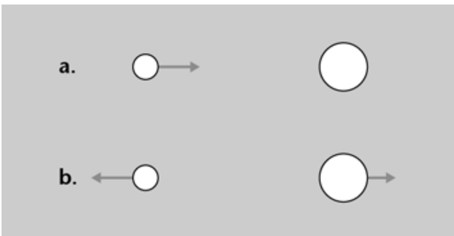


Figura 106

Una bola petita xoca contra una gran que està en repòs.
a. Abans de la col·lisió.
b. Després de la col·lisió.

Vegem ara què diu el principi de conservació de l'energia, que posa límits a les transformacions que poden ocórrer en els processos físics.

5.5.2. Conservació de l'energia

La llei de conservació del moment lineal, que acabem de veure, relaciona els canvis que ocorren en les velocitats de les partícules durant els processos. També podem relacionar els canvis que ocorren en les energies cinètiques i potencials de les partícules, durant els mateixos processos. Per tal d'aconseguir-ho hem de lligar aquests conceptes energètics.

Hem introduït en el subapartat 5.3.3 el concepte d'energia potencial, equació (267), com una manera d'anomenar el resultat del treball que fa una força conservativa sobre un sistema.

I, d'altra banda, hem demostrat en el subapartat 5.4 que el treball de totes les forces que actuen sobre un sistema (siguin conservatives o no) i la variació d'energia cinètica que hi produeixen estan relacionats segons l'equació (294). Si igualem el treball fet en els dos casos anteriors, podem obtenir una relació entre els dos conceptes energètics, cinètic i potencial. Vegem-ho.

Camp de forces estacionari

Un camp estacionari de forces és un camp en què les forces que actuen no depenen del temps. Però un camp estacionari pot ser un camp de forces no uniforme, és a dir, les forces poden tenir valors diferents en punts diferents.

En un camp de forces estacionari, el treball que fan les forces del camp en traslladar una partícula d'un punt a un altre no depèn del camí que s'hi recorri. Aquest fet ens proporciona una relació molt important: la llei (o principi) de la conservació de l'energia. Per tal d'obtenir l'expressió d'aquesta llei recordem que el treball que fa una força, com les forces del camp conservatiu, és igual a l'increment de l'energia cinètica de la partícula, equació (294):

$$W = \Delta E_c \tag{310}$$

D'altra banda, aquest treball és igual a la disminució de l'energia potencial de la partícula, equació (267), ja que en actuar només forces conservatives, el treball total és el de les forces conservatives:

$$W = -\Delta E_p \tag{311}$$

Expressions de les energies cinètica i potencial

En l'expressió (316) podem posar explícitament el terme d'energia cinètica,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

però no el terme d'energia potencial, perquè tindrem una expressió diferent segons el camp de forces en què es trobi la partícula.

Cal fer notar que ací ens estem referint a les forces del camp en què es troba la partícula, que n'augmenten l'energia cinètica, equació (310), i que també en redueixen l'energia potencial, equació (311).

En igualar les dues expressions anteriors, (310) i (311), podem escriure que:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \tag{312}$$

Ara escrivim els increments anteriors com la diferència entre els valors en el punt 2 i els valors en el punt 1:

$$E_{c2} - E_{c1} + E_{p2} - E_{p1} = 0 \tag{313}$$

i posem els valors corresponents al punt 1 a un costat de la igualtat i els del punt 2 a l'altre:

$$E_{c2} + E_{p2} = E_{c1} + E_{p1} \tag{314}$$

Finalment, si designem amb la lletra E_M ("energia" o "energia mecànica") la suma de l'energia cinètica i potencial:

$$E_M = E_c + E_p \tag{315}$$

és a dir:

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + E_{\mathrm{p}} \tag{316}$$

aleshores podem escriure una equació com la (314) per a cada instant del moviment del sistema. Per exemple, en un instant determinat, que denominarem punt 1, l'energia mecànica val:

$$E_{M1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + E_{\mathrm{p}1} \tag{317}$$

i el mateix per al punt 2.

Segons l'equació (314) hem obtingut que:

$$E_{M1} = E_{M2} \tag{318}$$

Com que els punts 1 i 2 (igual que els camins que van d'un punt a l'altre) són arbitraris, és a dir, són dos punts qualsevol del camp de forces conservatiu en què es troba la partícula, podem enunciar, finalment, la **llei de conservació de l'energia**.

Llei de conservació de l'energia

En un camp de forces conservatiu, la suma de l'energia cinètica i l'energia potencial d'una partícula en un punt qualsevol de la seva trajectòria és constant.

Simbòlicament, la llei de conservació de l'energia s'expressa també de la manera següent:

$$\frac{1}{2}mv^2 + E_p = constant \tag{319}$$

Amb el terme *constant* volem dir que per a qualsevol procés que passi en el sistema, sobre el qual actuen forces que són conservatives, la suma $E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}}$ donarà en tot moment el mateix resultat. Dit amb unes altres paraules, la suma de les energies de la partícula (cinètica, que només depèn de la velocitat, i potencial, que només depèn de les coordenades) no varia amb el desplaçament de la partícula. Aquesta suma l'hem anomenada *energia total* o, simplement, *energia* de la partícula.

La llei de conservació de l'energia es compleix per a qualsevol sistema aïllat, és a dir, per a un conjunt de partícules o de cossos que interaccionen entre sí però sobre els quals no actuen forces exteriors al sistema. Si el sistema no és aïllat, haurem de tenir en compte els fluxos d'energia que hi entrin o en surtin a l'hora de fer els balanços energètics que ocorren en un procés.

Si hi ha forces no conservatives que actuen sobre el sistema, la llei de conservació d'energia anterior no és certa. Aquest seria el cas, per exemple, d'una pilota gran que llancem: l'energia total de la pilota, cinètica més potencial, és constant si negligim els efectes del fregament, que és una força no conservativa. Les forces de fregament o de fricció no són forces conservatives perquè el treball que es fa contra la força de fregament no és el mateix si anem d'un punt a un altre per un camí o per un altre camí més llarg. Com més llarga sigui la trajectòria que va d'un punt a l'altre, més treball es fa contra les forces de fricció.

Recordem que la llei de conservació de l'energia mecànica l'hem obtinguda suposant que l'única força que fa treball sobre la partícula és una força conservativa. En efecte, en aquest cas el treball fet serà igual a la disminució de l'energia potencial del sistema i aquest treball (de la força conservativa) serà també igual a l'increment de l'energia cinètica de la partícula:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = +\Delta E_c \qquad (320)$$

Aquesta equació mostra que:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \qquad (321)$$

és a dir, que si només fan treball les forces conservatives, no hi ha cap canvi en l'energia mecànica total del sistema:

$$\Delta(E_c + E_p) = 0 \qquad (322)$$

És el principi de conservació de l'energia mecànica.

Quan actuen forces conservatives i no conservatives, continuarem dient, com al final de el subapartat 5.4, que:

- L'increment d'energia potencial és menys el treball de les forces conservatives.
- L'increment d'energia cinètica és el treball total de les forces que actuen sobre la partícula.

Per tant, la relació (320) serà ara:

$$W_T = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{forces\,conservatives} + W_{forces\,no\,conservatives} = -\Delta E_p + W_{forces\,no\,conservatives} \qquad (323)$$

però aquest treball que fan les forces conservatives i no conservatives es converteix en un augment d'energia cinètica, segons el teorema treball-energia cinètica:

$$W = \Delta E_c \qquad (324)$$

i si igualem les dues expressions, (323) i (324), i agrupem les variacions de les energies cinètica i potencial, com en l'equació (321), obtenim:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W_{forces\ no\ conservatives} \tag{325}$$

En aquesta expressió, si mireu (315) ja veieu que $\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_M$. Per tant, hem arribat a trobar el resultat següent.

El treball de les forces no conservatives produeix un increment de l'energia mecànica de la partícula:

$$\Delta E_M = W_{forces\ no\ conservatives} \tag{326}$$

L'expressió anterior és la generalització de la llei de conservació de l'energia en el cas que hi actuïn forces no conservatives.

La llei de conservació de l'energia mecànica és útil per a analitzar processos en termes energètics.

Vegem tot seguit un exemple que mostra que hi ha processos prohibits per la llei de conservació d'energia. L'exemple és el de col·lisions de boles de billar que ja hem comentat en el subapartat anterior.

Suposarem que les **col·lisions** de les boles són **elàstiques**.

En una **col·lisió elàstica**, la suma de les energies cinètiques de les partícules abans del xoc coincideix amb la suma de les energies cinètiques que tenen les partícules després del xoc. En cas contrari, parlem de **xoc inelàstic**.

En el problema 5.1 veurem un exemple de procés inelàstic.

Activitat 5.13. Conservació del moment lineal i de l'energia

Reprenguem l'activitat 5.12: una bola de billar que té una massa m_1 i es mou a velocitat $\vec{v}_1$ xoca contra una altra bola de billar que té una massa diferent m_2 i està aturada. Pot aturar-se la primera bola en el xoc? (Suposeu que la col·lisió de boles de billar és elàstica.)

Solució

Suposem que és possible el procés que diu l'enunciat: una bola de velocitat $\vec{v}_1$ (bola 1) xoca contra una altra bola (bola 2) que està aturada i la bola 1 es queda aturada.

El moment lineal inicial del sistema és simplement $m_1\vec{v}_1$. Si, en xocar, suposem que la primera bola s'atura i que la segona es mou amb una velocitat $\vec{v}_2$, aleshores el moment lineal total del sistema després del xoc és $m_2\vec{v}_2$. L'aplicació de la llei de conservació del moment lineal ens dóna una relació entre les velocitats de les dues boles (activitat 5.12, equació (309)):

$$m_1\vec{v}_1 = m_2\vec{v}_2 \tag{327}$$

L'energia potencial de les boles és gravitatòria, $E_p = mgh$, i com que podem prendre l'origen d'energies potencials a l'altura de la superfície de la taula, $E_p = 0$ en tot moment; per tant, només tenim energia cinètica i l'aplicació de la llei de conservació de l'energia (equació 314) se simplifica força perquè inicialment només tenim la partícula 1 en moviment, i després del xoc només la 2:

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} = \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} \tag{328}$$

Ara combinarem les dues lleis de conservació, la del moment lineal i la de l'energia.

Treballarem primer el segon terme de l'equació 314. Si escrivim el segon terme de l'expressió (328) de la manera següent, multiplicant i dividint per m_2:

$$\frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} = \frac{\frac{1}{2}m_2^2\vec{v}_2^{\,2}}{m_2} \tag{329}$$

i substituïm en el numerador el moment lineal de la partícula 2 pel de la partícula 1, segons l'equació (327), obtenim:

$$\frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} = \frac{\frac{1}{2}m_1^2\vec{v}_1^{\,2}}{m_2} \tag{330}$$

Ara ja podem dur aquesta expressió a la dreta de l'equació (328) i obtenim:

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} = \frac{\frac{1}{2}m_1^2\vec{v}_1^{\,2}}{m_2} \tag{331}$$

Eliminem la velocitat de la partícula 1 i obtenim una relació entre les masses de les partícules que xoquen:

$$m_2m_1 = m_1^2 \tag{332}$$

Aquesta igualtat és conseqüència de les dues lleis de conservació. Si simplifiquem el factor m_1 en els dos membres de l'equació anterior, veiem que només es compleix per a boles de la mateixa massa, $m_2 = m_1$. Per tant, la suposició que la bola que fa el xoc s'atura totalment du a un resultat contradictori, llevat que les dues boles tinguin masses idèntiques.

Per tant, com ja vam dir en l'activitat 5.12, es pot veure en el joc de billar el procés en què una bola xoca frontalment amb una altra i la primera queda aturada en sec, perquè les dues boles tenen la mateixa massa. Mai no s'observarà aquest procés si les boles tenen masses diferents, perquè es violarien les lleis de conservació de l'energia i del moment lineal.

Els teoremes que hem obtingut s'anomenen *llei de conservació del moment lineal* (subapartat 5.5.1) i *llei de conservació de l'energia* (aquest subapartat). Es tracta de dues lleis fonamentals de la mecànica. El seu caràcter general ens permet aplicar-les a tots els fenòmens, per a qualsevol tipus de forces conservatives que actuïn dins del sistema aïllat. Fem un altre exemple d'aplicació d'aquestes lleis.

Activitat 5.14. Aplicació a la caiguda lliure

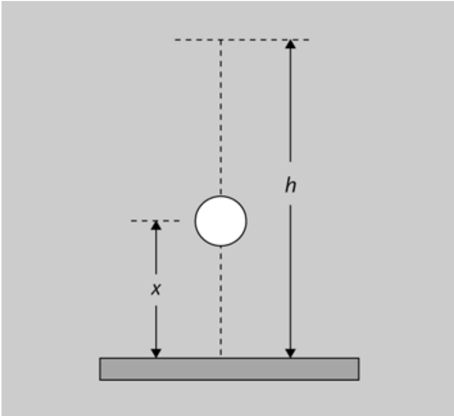
Apliqueu la llei de conservació de l'energia a un cos que cau verticalment des d'una altura h. Què en deduïu?

Solució

Quan un cos cau, s'accelera per l'atracció de la Terra (figura 107). A mesura que cau més i més ràpidament, la seva energia cinètica augmenta i la seva energia potencial decreix de manera que el guany d'energia cinètica E_c és igual a la pèrdua d'energia potencial E_p.

En resoldre un problema a partir del concepte d'energia, i no de força, no tenim en compte les acceleracions de les partícules, sinó les seves velocitats inicials i finals.

Figura 107. Un objecte cau des d'una altura *h* i al cap d'un temps és a una altura *x*.



Si el cos cau des del repòs (és a dir, sense que tingui una velocitat inicial), l'energia total a una altura h, $E(h) = E_c + E_p$, és només potencial, $E_p = mgh$:

$$E(h) = E_c(h) + E_p(h) = 0 + mgh = mgh \tag{333}$$

A mesura que cau l'objecte, part de l'energia potencial es converteix en energia cinètica. L'energia total que té la partícula en una posició x de la trajectòria és la suma de les energies cinètica i potencial en aquest punt:

$$E(x) = E_c(x) + E_p(x) \tag{334}$$

és a dir:

$$E(x) = \frac{1}{2}mv(x)^2 + mgx \tag{335}$$

De la identificació de l'energia en la posició x, $E(x)$, amb l'energia en la posició h, $E(h)$, podem obtenir la velocitat de la partícula en qualsevol punt de la caiguda.

En particular, quan el cos arriba a terra amb una velocitat final v_f, l'energia total és només cinètica perquè hem pres l'origen d'energies potencials en la posició del terra; per tant:

$$E(0) = E_c + E_\text{p} = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0 \tag{336}$$

Si igualem l'energia total inicial amb l'energia total final:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 \tag{337}$$

podem concloure que el cos arriba a terra amb una velocitat:

$$v_f = \sqrt{2gh} \tag{338}$$

Aquesta equació ja la vam deduir per un altre mètode en l'apartat 2, equació (150). Resulta molt instructiu que compareu com s'ha deduït el resultat (338) en aquell cas i ara.

Veiem que es poden utilitzar les lleis de conservació com a alternativa a les equacions del moviment per a calcular la velocitat d'un cos que cau. També es poden fer servir per a resoldre molts altres tipus de problemes de dinàmica.

5.5.3. Què hem après?

Un objecte que es mou no sols té una posició en l'espai, una massa, una velocitat i un moment lineal, sinó que també té una energia, en forma d'energia cinètica, energia potencial i una energia mecànica total. Simbòlicament, la posició, la massa, la velocitat, el moment lineal, l'energia cinètica, l'energia potencial i l'energia mecànica s'escriuen, respectivament, $\vec{r}$, m, $\vec{v}$, $\vec{p}$, E_c, E_p, E_M.

Les lleis de Newton, la definició de diferència d'energia potencial i el teorema treball-energia cinètica ens han permès arribar a dues lleis de conservació bàsiques de la física:

- La llei de conservació de l'energia mecànica ($E_c + E_p = constant$), quan les forces són conservatives.
- La llei de conservació del moment lineal per a sistemes aïllats.

Aquests són dos dels resultats més importants de la mecànica, que es fan servir en moltes altres branques de la física.

També hem vist que:

- El treball de totes les forces que actuen sobre una partícula li fan variar l'energia cinètica.
- El treball de les forces conservatives redueix l'energia potencial de la partícula.
- Quan actuen forces conservatives i no conservatives, l'energia mecànica total (suma d'energies cinètica i potencial) no es conserva en un procés, sinó que augmenta en un valor igual al treball que fan les forces no conservatives sobre la partícula.

Esquemàticament, aquests resultats es poden condensar en les relacions de la taula 4.

Taula 4. Relacions generals entre el treball de les forces i l'energia de les partícules

Relació	Vàlida per a forces...
$\Delta E_c = W_{forces}$	Conservatives i no conservatives
$\Delta E_p = -W_{forces\ conservatives}$	Conservatives
$E_M = E_c + E_p$	(Definició)
$E_M = constant$	Conservatives
$\Delta E_M = W_{forces\ no\ conservatives}$	Conservatives i no conservatives

5.6. Recapitulació

Hem introduït conceptes fonamentals de la física com els de treball, energia en les diverses formes que pot presentar-se, moment lineal i les lleis de conservació corresponents.

a) El moment lineal d'una partícula és una magnitud relacionada directament amb la massa i la velocitat de la partícula, i que té la propietat que els seus canvis per unitat de temps són iguals a la força neta que actua sobre la partícula.

b) Una força fa treball només si té almenys una component de la força en la direcció del desplaçament de la partícula. El concepte físic de treball que fa una força es pot expressar de manera molt sintètica gràcies a l'àlgebra vectorial.

c) El tema de l'energia ocupa molts dels debats de les societats modernes. Els conceptes introduïts en aquest apartat són bàsics en tota la física, no sols en la mecànica.

- Els conceptes energètics són conceptes difícils de definir, d'explicar i d'entendre. D'una banda, només sabem calcular diferències d'energia, no valors absoluts. En efecte, l'energia potencial es defineix directament en termes d'increments d'energia. I, com hem vist, un objecte en moviment té energia cinètica, però aquesta s'anul·la si ens posem en el sistema de referència en què l'objecte està en repòs!

- D'altra banda, en qualsevol procés físic que ocorri en un sistema aïllat l'energia total del sistema es conserva. Aquesta llei de conservació té una validesa molt més general que el de la conservació d'energia mecànica que hem vist en aquest apartat.

La comprensió dels conceptes que hem vist al llarg d'aquests apartats, i que formen la base de la mecànica, s'aconsegueix quan es posen en pràctica per a tractar d'entendre situacions físiques diverses. En l'apartat següent en farem una aplicació a un tema que és d'interès en enginyeria, els sistemes oscil·lants.

5.7. Problemes d'ampliació

Problema 5.1. Limitacions en els moviments

Ara estem en condicions de contestar la qüestió que va quedar pendent en la discussió de la pilota que puja i baixa (subapartat 2.1.3): llancem verticalment una pilota i l'arrepleguem amb les mans quan cau. Pot tenir la pilota una velocitat més gran quan torna a les nostres mans que quan la vam llançar?

Apliqueu el principi de conservació de l'energia a tres punts de la trajectòria de la pilota: l'inicial, el de màxima altura i el punt en què la pilota torna a les nostres mans.

Problema 5.2. Rebots

Ens diuen que quan cau una pilota verticalment, i rebota, perd un tant per cent, *r*, de la seva energia en l'impacte. Es tracta d'un exemple de procés inelàstic, en què l'energia cinètica de la pilota no es conserva.

Feu una gràfica qualitativa de l'altura que té la pilota conforme passa el temps i rebota diverses vegades.

Quina és l'expressió de l'energia potencial màxima de la pilota després de cada rebot?

En quin percentatge es redueix la velocitat de la pilota en cada impacte?

Problema 5.3. Força, treball i energia

Hem vist en l'activitat 5.8 que si pugem un objecte per un pla inclinat fem menys força per empentar-lo, però el camí és més llarg. Apliqueu el principi de conservació d'energia per a calcular el treball que fem quan arrosseguem l'objecte pel pla inclinat, en comparació amb el treball que es fa en pujar l'objecte verticalment (suposeu que el pla no té fregament).

Problema 5.4. Treball que fem

a) Sostenim un llibre d'1 kg en alt a una altura d'1 m durant una hora. Quin treball fem per unitat de temps?

b) Mentre sostenim un llibre de 10 kg en l'aire, el desplacem 5 m en direcció horitzontal. Quin treball fem?

c) Alcem un llibre 2 m, després 3 m més i, finalment, el deixem on era inicialment. Quin treball total hem fet sobre el llibre?

6. Estudi de cas. L'oscil·lador harmònic

Molts fenòmens físics es poden modelitzar mitjançant uns elements anomenats *oscil·ladors* i que ja anireu veient exactament què són al llarg de l'apartat. De moment us els podeu imaginar com a molles. L'objectiu principal d'aquest apartat és analitzar el moviment oscil·latori i aprofitar-lo per a veure l'aplicació de les lleis i els conceptes de la mecànica a un cas d'interès bàsic. Les oscil·lacions es presenten en els fenòmens quotidians i en molts camps de la ciència i de l'enginyeria: els arbres que es mouen per efecte del vent, l'estructura d'un cotxe que vibra quan viatgem, les cordes vibrants d'una guitarra, les oscil·lacions del corrent en un circuit elèctric, les oscil·lacions de les molècules d'aire al pas d'una ona sonora, etc.

En aquest apartat seguirem l'estructura general que hem seguit fins ara: primer estudiarem la cinemàtica d'un oscil·lador (equació de la trajectòria), després la dinàmica (forces que hi actuen) i, finalment, veurem els aspectes energètics del sistema oscil·lant.

Així, començarem descrivint el moviment oscil·latori en la seva forma més bàsica, l'anomenat *moviment harmònic simple*. En definirem els paràmetres que el descriuen, com ara la freqüència angular, la fase inicial i l'amplitud i després calcularem la velocitat i l'acceleració de la partícula que oscil·la.

Introduirem aleshores els models bàsics d'oscil·ladors, la molla oscil·lant i el pèndol, i en particular les anomenades *oscil·lacions petites* d'aquests sistemes.

Els conceptes energètics, aplicats als sistemes oscil·lants, ens permetran descriure'n el moviment com un intercanvi continu d'energia cinètica i potencial. La descripció de les forces que actuen sobre el sistema oscil·lant i la resolució de l'equació del moviment corresponent ens permetrà deduir-ne el que es coneix com a *freqüència d'oscil·lació natural*.

Introducció. Vibracions

Com vam veure en el subapartat 1.4, els moviments bàsics que pot tenir una partícula o un conjunt de partícules són de tipus translacional, rotacional i vibracional. Fins ara hem tractat els moviments en general i, principalment, el moviment translacional. En aquest apartat ens centrarem en el moviment vibracional per la importància que té en molts fenòmens físics i perquè és un bon exemple d'aplicació de tot el que hem après en aquests apartats de mecànica.

Farem servir els termes *oscil·lació* i *vibració* com a sinònims.

Una **oscil·lació** o una **vibració** mecànica és un moviment en què un cos es desplaça a un costat i a un altre d'un punt o d'una direcció de l'espai en què el sistema es troba en equilibri.

Per tot arreu veiem cossos que oscil·len moguts pel vent, com ara un gronxador, una làmpada penjada del sostre, una palmera, un edifici alt o un pont. Fa anys era habitual tenir a casa un rellotge de paret en què l'oscil·lació d'un pèndol marcava el pas del temps. En els aparells de ràdio i de televisió es generen oscil·lacions de corrents elèctrics.

L'estudi de sistemes oscil·lants o vibrants i, en particular, del moviment oscil·latori harmònic és important per la seva ubiqüitat en multitud de problemes cientifico-tècnics (en mecànica, enginyeria, circuits elèctrics, etc.). En particular, els moviments vibratoris o oscil·latoris són la font de molts fenòmens ondulatoris i l'estudi de la generació i propagació de les ones és una branca bàsica de la física, en especial pel que fa a les ones electromagnètiques. La llum i el so, per exemple, són vibracions que es propaguen per l'espai en forma d'ones; les vibracions d'una corda de guitarra són l'origen del so que sentim quan sona la guitarra.

Què aprendrem?

- Analitzarem els models físics més comuns de sistemes oscil·lants, com són el pèndol simple i la massa unida a una molla.
- Obtindrem la llei de moviment d'un sistema oscil·lant i en calcularem la freqüència natural d'oscil·lació.
- Aprendrem a reconèixer la forma que té l'equació diferencial d'un moviment vibratori harmònic.

Què suposarem

L'oscil·lador es pot estudiar com una aplicació de les lleis de Newton al cas de moviments unidimensionals.

També haurem de recordar les funcions trigonomètriques, que són la base de la descripció de les vibracions.

6.1. Oscil·lacions: període i freqüència

Començarem l'estudi de les oscil·lacions amb un model senzill d'un sistema oscil·lant: el pèndol simple.

Considerem un pèndol simple com una partícula de massa m que penja d'un fil que no es pot estirar (un fil inextensible, no elàstic). El fil se subjecta de l'altre extrem i la massa oscil·la al voltant de la direcció vertical, quan la separem de la posició d'equilibri, com podeu veure a la figura 108a.

El pèndol fa un moviment oscil·latori repetitiu que s'anomena *periòdic*. El pèndol fa una oscil·lació completa quan la massa ix d'un punt i hi torna amb un moviment en la mateixa direcció i sentit que en el moviment inicial. Per exemple, el cicle de moviment $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$ (figura 108a) és una oscil·lació completa perquè la massa surt del repòs en el punt 3 i hi torna a aturar-se momentàniament abans d'encetar un nou cicle. També, en el moviment $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ es fa una oscil·lació completa i es triga un període.

S'anomena **període** *T* del pèndol al temps que triga a fer una oscil·lació completa.

Un altre model senzill de sistema oscil·lant és el d'una massa unida a una molla subjectada del sostre (figura 108b). Si estirem la massa una mica verticalment i la deixem anar es posarà a oscil·lar amunt i avall. Un període és el temps que triga la molla a fer una oscil·lació completa, és a dir, el temps que triga a tornar al punt de partida i iniciar un nou cicle de vibració.

Figura 108. Models de sistemes oscil·lants

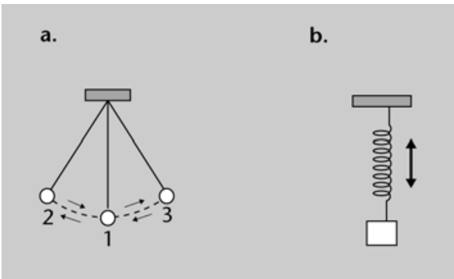


Figura 108

a. Oscil·lacions d'un pèndol.
b. Oscil·lacions d'una massa unida a una molla.

Recordeu

Fem servir SI per referir-nos al Sistema Internacional d'unitats.

Heinrich Rudolf Hertz

La denominació de la unitat de mesura *hertz* és en honor d'aquest físic alemany (Hamburg, 1857 - Bonn, 1894) que va demostrar l'existència de les ones electromagnètiques i que podien propagar-se en el buit, amb la qual cosa no calia l'existència d'una substància anomenada *èter* en la qual es pensava que s'havien de propagar les ones electromagnètiques.

Activitat 6.1. Freqüència

La freqüència d'un moviment oscil·latori que té un període *T* es defineix com la inversa del període:

$$f = \frac{1}{T} \qquad (339)$$

a) Què és *f*? Per a definir aquesta nova magnitud recordeu com es llegeix un quocient.

b) Com es defineix la unitat SI de freqüència, el hertz?

Solució

a) El període *T* d'un moviment oscil·latori és el temps que triga a fer una oscil·lació completa:

$$T = \frac{temps}{oscil{\cdot}lació\ completa} \qquad (340)$$

Per tant, la inversa, f, serà:

$$f = \frac{oscil{\cdot}lació\ completa}{temps} \qquad (341)$$

I la **freqüència** d'un moviment oscil·latori és **el nombre d'oscil·lacions completes que fa l'oscil·lador per unitat de temps**.

b) Com que la unitat SI de període és 1 s, 1 hertz (Hz) és la freqüència d'un moviment oscil·latori que fa un cicle complet per segon:

$$1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1} \tag{342}$$

Calculem les freqüències d'algunes oscil·lacions.

Activitat 6.2. Freqüències d'oscil·lació

a) Quina freqüència té un moviment oscil·latori que té un període de 0,02 s?

b) I quin període té una oscil·lació d'1 GHz?

Solució

a) De l'equació (339):

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}02\,\text{s}} = 50\ \text{s}^{-1} = 50\ \text{Hz} \tag{343}$$

50 Hz és també la freqüència del corrent elèctric altern a Europa (als EUA i a alguns altres països la freqüència del corrent elèctric és de 60 Hz).

b) Si recordem que el prefix *giga* indica mil milions, un gigahertz seran mil milions d'hertz o 10^9 Hz. Així, de l'equació (339):

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1\ \text{GHz}} = \frac{1}{10^9\ \text{Hz}} = 10^{-9}\,\text{s} = 1\,\text{ns} \tag{344}$$

1 ns és un nanosegon, que equival a 10^{-9} s.

Una propietat bàsica dels sistemes oscil·lants és la periodicitat del seu moviment, és a dir, el fet que es repeteix cíclicament. Si T és el període d'un moviment periòdic, la partícula que oscil·la ocupa la mateixa posició i té la mateixa velocitat (en mòdul, direcció i sentit) en els instants t i $t + T$:

$$f(t+T) = f(t) \tag{345}$$

L'equació (345) expressa el fet que la funció pren en un instant t qualsevol el mateix valor que en un instant $t + T$ posterior (o en un instant $t - T$ anterior). Per això diem que el moviment d'un oscil·lador és periòdic. Hi ha una infinitat de moviments periòdics descrits per funcions de tota mena que compleixen la propietat de periodicitat.

En general, si una funció del temps $f(t)$ és periòdica de període T, la funció també repetirà els valors que té quan passen dos, tres o qualsevol nombre de períodes (figura 109).

La funció matemàtica que descriu el moviment d'oscil·ladors com els de la figura 108 ha de prendre valors positius i negatius (per a desplaçaments a un costat i l'altre de la posició d'equilibri de l'oscil·lador).

Figura 109. Un exemple de funció periòdica

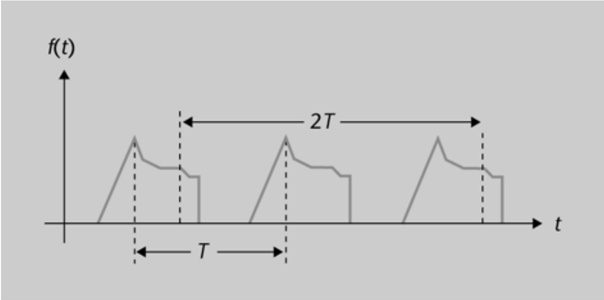


Figura 109

La funció es repeteix per a un període T i múltiples de T: $2T$, $3T$, etc.

Una funció com la de la figura 109, per exemple, tot i ser periòdica, no ens serviria per a descriure les oscil·lacions del pèndol o de la molla de la figura 108, perquè no presenta simetria per a oscil·lacions a un costat i l'altre de la posició d'equilibri i no pren valors negatius.

Veurem tot seguit que les funcions trigonomètriques sí que serveixen per a descriure el moviment oscil·latori.

6.1.1. Moviment harmònic simple

Les funcions periòdiques més senzilles són les trigonomètriques bàsiques, les funcions sinus i cosinus. Aquestes funcions prenen valors positius i negatius en un cicle i es repeteixen periòdicament. Les funcions sinus i cosinus són **funcions harmòniques**:

Si el moviment d'un oscil·lador es pot descriure amb una funció sinus o cosinus es tracta d'un **oscil·lador harmònic**.

Funcions harmòniques

Les funcions trigonomètriques sinus i cosinus s'anomenen també *funcions harmòniques*.

Per tant, un moviment periòdic bàsic és un moviment en què les coordenades del punt material varien segons la llei:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \tag{346}$$

on A, ω i δ són magnituds constants.

Paràmetres d'un oscil·lador: A, ω, δ, T

A, ω ("omega"), δ ("delta") i T són, respectivament, l'amplitud, la freqüència angular, el desfasament o fase inicial i el període de l'oscil·lador.

Un moviment periòdic com el descrit per l'equació (346) s'anomena *moviment oscil·latori harmònic* o **moviment harmònic simple** (**MHS**). El desplaçament de la partícula que oscil·la respecte a la posició d'equilibri segons la funció descrita per l'equació (346) té l'aspecte que podeu veure a la figura 110. En efecte, a mesura que avança el temps, la partícula s'allunya de la posició inicial i arriba al punt de màxima separació de l'equilibri, P_1, tot seguit s'aproxima al punt de desplaçament zero, P_2, i així successivament, com fa el pèndol de la figura 108a.

Figura 110. Oscil·lacions sinusoïdals periòdiques en un MHS

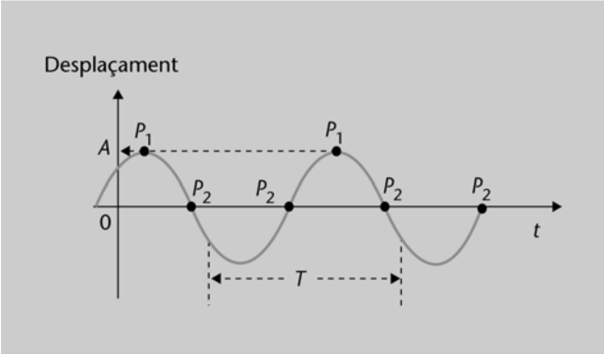


Figura 110

És el cas del desplaçament angular d'un pèndol o del desplaçament lineal d'una massa unida a una molla. S'hi indica l'amplitud i el període de l'oscil·lació.

Un pèndol i una massa unida a una molla com els de la figura 108 poden oscil·lar de manera que el moviment es descrigui per la relació (346). En el cas del pèndol, la variable $x(t)$ està relacionada amb l'angle que fa el pèndol amb la vertical (figura 111a); en el cas de la molla, la variable $x(t)$ és el desplaçament respecte a la posició d'equilibri de la massa que està vibrant amb la molla, figura 111b.

En un circuit elèctric també es poden produir oscil·lacions, com veureu en altres assignatures de la titulació i en aquests casos la variable $x(t)$ pot ser el corrent o el potencial elèctric.

Figura 111

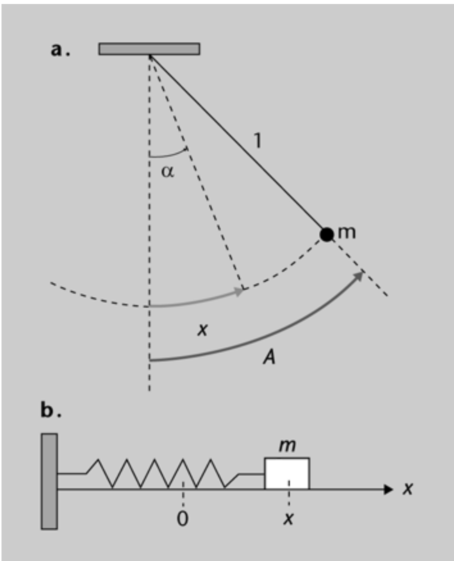


Figura 111

Paràmetres dels models bàsics d'oscil·lador: **a.** Pèndol oscil·lant. **b.** Molla elàstica.

Fixem-nos que, si en lloc de l'expressió (346), escrivim:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta) \qquad (347)$$

aquesta funció també representa un MHS. L'única diferència amb l'expressió (346) és que si $\omega t + \delta = 0$ la funció pren el valor $x = 0$ en el cas (347) (perquè $\sin 0 = 0$) i la funció pren el valor $x = A$ en el cas (346) (perquè $\cos 0 = 1$).

En definitiva, prendre l'equació (346) o la (347) com a punt de partida per a analitzar el moviment oscil·latori correspon a considerar la posició inicial ($t = 0$) de l'oscil·lador ($\delta = 0$) en l'extrem o en el centre de la trajectòria, respectivament.

Continuarem la discussió del moviment oscil·latori a partir de l'equació (346) com a punt de partida, però en alguns llibres de text prenen l'equació (347) com a expressió que descriu la posició instantània de l'oscil·lador. Qualsevol opció és igualment vàlida, però cal anar amb compte quan comparem expressions concretes de magnituds, com ara la velocitat, l'energia potencial, etc., de textos que adopten una o l'altra expressió com a punt de partida.

6.1.2. Freqüència i freqüència angular, amplitud i fase inicial

El sentit físic de les magnituds A i ω que apareixen en l'expressió (346) es pot deduir de la manera següent. En primer lloc, com que el valor màxim del cosinus és la unitat, el valor màxim de la coordenada x en l'equació (346) serà A, que s'anomena *amplitud*. La magnitud x, que varia entre els límits $-A$ i A, s'anomena *elongació* del MHS. És a dir, l'elongació és el punt on es troba en cada instant l'oscil·lador; així, podem dir també que l'amplitud és una elongació particular.

> L'**amplitud** de l'oscil·lació és el valor màxim de la posició de l'oscil·lador. L'**elongació** és la posició instantània, x, de la partícula que oscil·la. L'amplitud d'un oscil·lador és la màxima elongació que pot tenir.

D'altra banda, com que el període de la funció cosinus és igual a 2π, el període del moviment d'un oscil·lador es relaciona amb ω mitjançant el quocient següent:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{348}$$

o també:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{349}$$

on la magnitud ω s'anomena *freqüència angular*.

> La **freqüència angular** d'un oscil·lador és el nombre de cicles que fa per segon.

Tot seguit veurem d'on surt aquesta relació.

Activitat 6.3. Període i freqüència angular d'un oscil·lador harmònic

Demostreu l'expressió (348) a partir de les relacions (345) i (346).

Solució

Si imposem la condició (345), $f(t) = f(t + T)$, a la funció periòdica (346), obtenim:

$$A\cos(\omega t + \delta) = A\cos(\omega(t + T) + \delta) \tag{350}$$

i com que la funció cosinus té període 2π, la diferència entre els arguments de les dues funcions cosinus anteriors ha de ser 2π (o un múltiple de 2π):

$$(\omega(t + T) + \delta) - (\omega t + \delta) = 2\pi \tag{351}$$

Simplificant l'expressió anterior obtenim:

$$\omega T = 2\pi \tag{352}$$

o bé:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{353}$$

com volíem demostrar.

Si comparem les relacions (349) i (339) veiem que la relació entre la freqüència angular ω i la freqüència d'oscil·lació, f, és:

$$\omega = 2\pi f \tag{354}$$

En alguns textos de vegades s'empra el mateix nom, *freqüència*, per a designar ω i f.

D'altra banda, què és δ? El paràmetre δ és part del que s'anomena *fase*.

La **fase** de l'oscil·lació és l'argument de la funció cosinus, $\omega t + \delta$.

Per tant, podem parlar de **fase inicial** o fase en l'instant que prenem com a inici del temps, δ és la fase inicial.

Vegem per què.

Activitat 6.4. Fase inicial

Expliqueu per què δ és la fase inicial.

Solució

δ és el valor de la fase quan $t = 0$, és a dir, en l'instant inicial. En efecte, si fem $t = 0$ en la fase de la funció cosinus de l'equació (346) obtenim:

$$(\omega t + \delta)_{t=0} = \omega \cdot 0 + \delta = \delta \tag{355}$$

Ja hem determinat el significat dels paràmetres que defineixen l'elongació d'un MHS.

Ara continuarem amb la descripció cinètica de l'oscil·lador.

Derivada del cosinus

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

6.1.3. Velocitat en el MHS

La velocitat d'una partícula que oscil·la en una dimensió s'obté derivant-ne la posició respecte al temps (equació 67), $v = dx/dt$. A partir de l'expressió (346):

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \delta) \tag{356}$$

Veiem que la **velocitat** és també **harmònica**.

> La velocitat d'un oscil·lador harmònic està descrita també per una funció harmònica.

Per tant, la velocitat també oscil·la amb la mateixa freqüència que la posició.

L'amplitud de la velocitat és el valor màxim que pot tenir la velocitat; si fem que el sinus de l'equació (356) prengui el valor unitat veiem que l'amplitud de la velocitat, $v_{màx}$, és igual a l'amplitud del desplaçament multiplicada per la freqüència:

$$v_{màx} = \omega A \tag{357}$$

Com hem dit, la velocitat també varia segons una llei harmònica, l'equació (356), però amb la funció sinus en lloc de la funció cosinus que descriu el desplaçament de l'oscil·lador. Una funció cosinus oscil·la amb una fase que es diferencia en 90° d'una funció sinus. Això significa que les dues funcions prenen els mateixos valors, però quan sumem 90° ($\pi/2$) a l'argument d'una d'elles.

Vegem-ho

Podem fer servir la propietat de les funcions trigonomètriques esmentada al marge per a escriure la funció velocitat (356) així:

$$v = A\omega \cos\left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}\right) \tag{358}$$

Una relació trigonomètrica útil

El cosinus de la suma de dos angles es pot expressar com:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

En efecte, si desenvolupem el cosinus de l'expressió (358) per als dos angles $a = \omega t + \delta$ i $b = \pi/2$, obtenim:

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \delta) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - A\omega \cdot \sin(\omega t + \delta) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (359)$$

i com que el cosinus de $\pi/2$ s'anul·la i el sinus de $\pi/2$ és la unitat:

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \delta) \quad (360)$$

i arribem a l'expressió (356).

Una altra manera de veure que les funcions sinus i cosinus estan desfasades $\pi/2$ és geomètricament, a partir de la representació gràfica de les funcions trigonomètriques, com podeu veure a la figura 112. Fixeu-vos que l'alçada dels triangles correspon al sinus i la base al cosinus.

Figura 112

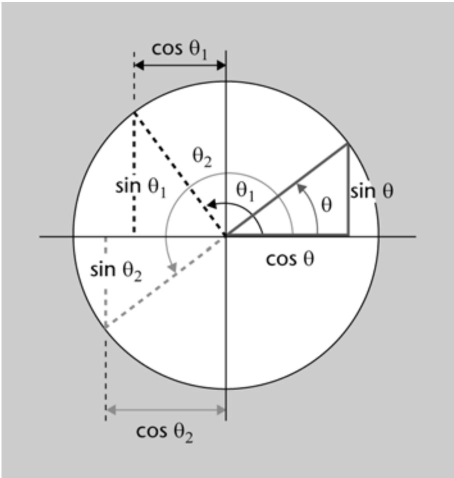


Figura 112

Sobre un cercle de radi unitat es defineixen les funcions sinus i cosinus per a un angle θ. També es mostren les funcions per als angles $\theta_1 = \theta + \pi/2$, i $\theta_2 = \theta + \pi$. S'hi veu, per exemple, que $\cos\theta_1 = -\sin\theta$ i que $\cos\theta_2 = -\cos\theta$.

Si comparem l'expressió (358) amb la llei del desplaçament (346), veiem que les funcions i les fases de les dues funcions són idèntiques llevat del terme extra $\pi/2$ que apareix en la fase en el cas de la velocitat, equació (358). Per tant, la variació de la funció velocitat està "desfasada en 90°", o "té un desfasament de $\pi/2$" respecte a la variació de la posició de l'oscil·lador. És a dir, la diferència de fase entre les dues funcions és de $\pi/2$.

Gràficament, una funció passa pels valors màxims "abans" que l'altra (figura 113). Què vol dir això? Fixeu-vos que en els extrems de l'oscil·lació, quan $x = \pm A$, la posició és la màxima possible i la velocitat és nul·la (l'oscil·lador s'hi atura instantàniament). Això es correspon amb el fet que si $\omega t + \delta = 0$, l'equació (346) dóna $x = A$, i l'equació (360) dóna $v = 0$.

En canvi, en el punt central, el desplaçament respecte a la posició inicial és nul i la velocitat de la partícula que oscil·la és màxima. Per tant, podeu veure que en tot punt estan desfasades 90° la posició i la velocitat de la partícula, el mateix desfasament que hi ha entre la funció cosinus i la funció sinus del mateix angle.

En resum, una funció sinus i una funció cosinus d'un mateix angle prenen els mateixos valors però amb un "retard" o desfasament de $\pi/2$.

Figura 113

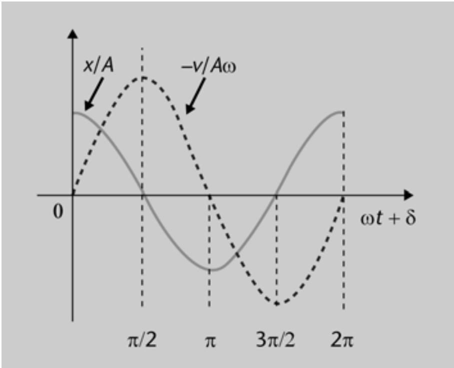


Figura 113

Desfasament de 90° entre la posició, x/A (línia sòlida) i la velocitat, $-v/A$ (línia puntejada) per a un oscil·lador.

Ja sabem què signifiquen els paràmetres que apareixen en l'equació de moviment de l'oscil·lador, l'equació (346). Ara veurem com es determinen.

6.1.4. Què hem après?

a) Hem introduït un grapat de conceptes que permeten descriure un MHS:

- fase i fase inicial,
- elongació,
- amplitud,
- freqüència,
- freqüència angular,
- període.

b) Hem vist que elongacions i velocitats estan desfasades $\pi/2$ en tot moment.

Ja sabem que el coneixement de la cinemàtica d'un moviment permet extraure'n informació sobre la dinàmica, i viceversa. Si coneixem, com en el cas del MHS, la funció que dóna el desplaçament del sistema en funció del temps (la llei de moviment), podem calcular-ne la velocitat (com hem vist) i l'acceleració. Però l'acceleració d'un sistema ens dóna informació sobre les forces que hi actuen. Vegem-ho.

6.2. Força en un MHS

Podem determinar quina força ha d'actuar sobre la partícula per tal que aquesta efectuï un moviment oscil·latori harmònic. L'acceleració de la partícula és la derivada de la velocitat, equació (356), respecte al temps:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \delta) \qquad (361)$$

L'acceleració varia amb el temps amb la mateixa llei temporal que la coordenada de la partícula, $x \propto \cos(\omega t + \delta)$, equació (346), però amb una diferència de fase de 180° (o radians), perquè l'acceleració es pot expressar així:

$$a = A\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \delta + \pi) \tag{362}$$

Demostració

Per a passar de l'equació (361) a la (362) hem fet servir la relació trigonomètrica per al $\cos(a + b)$ esmentada en l'equació (358), amb un angle igual a π i l'altre $\omega t + \delta$, de manera que :

$$\cos(\omega t + \delta + \pi) = \cos(\omega t + \delta) \cdot \cos(\pi) - \sin(\omega t + \delta) \cdot \sin(\pi) \tag{363}$$

és a dir:

$$\cos(\omega t + \delta + \pi) = -\cos(\omega t + \delta) \tag{364}$$

També s'arriba al mateix resultat a partir de la figura 112 i les relacions trigonomètriques per als angles $\theta_1 = \theta + \pi/2$, i $\theta_2 = \theta + \pi$.

La relació (362) mostra que entre l'acceleració i la posició, equació (346), el desfasament és de π radians, és a dir, acceleracions i desplaçaments són de signe contrari en tot moment:

$$a = -\omega^2 x \tag{365}$$

La força que actua sobre la partícula es pot obtenir a partir de la segona llei de Newton en una dimensió, $F = ma$. Si fem servir l'expressió (361) obtenim:

$$F = ma = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \tag{366}$$

i si tenim en compte l'equació (365), podem escriure:

$$F = -m\omega^2 x \tag{367}$$

és a dir, hi ha una **relació lineal força-desplaçament**:

La força que actua sobre una partícula que fa oscil·lacions harmòniques és, en cada moment, proporcional al desplaçament de la partícula, $F \propto x$, i de signe contrari al desplaçament:

$$F = -kx \tag{368}$$

El signe menys que apareix en l'expressió (368) indica que la força està dirigida en sentit oposat al desplaçament. Això significa que si la partícula està movent-se amb valors positius de l'elongació, $x > 0$, la força és negativa i va diri-

Derivada del sinus

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

I si c és una constant,

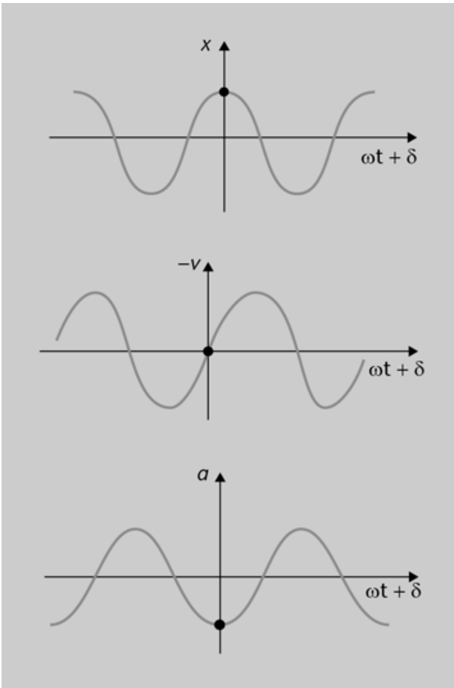
$$\frac{d \sin(cx)}{dx} = c \cdot \cos(cx)$$

gida cap a l'origen de coordenades; mentre que si la partícula es mou amb valors negatius de l'elongació, $x < 0$, la força és positiva i va dirigida també cap a l'origen de coordenades.

Així, en tot MHS, independentment de si la partícula s'allunya de l'origen de coordenades o s'hi apropa, la força "recuperadora" que actua sobre la partícula sempre tendeix a tornar-la a la posició vertical (en el cas d'un pèndol) o a la posició inicial de la molla (en què no estava estirada ni comprimida).

En la figura 114 es representen la posició, la velocitat i l'acceleració en un MHS, i es pot observar que posició i velocitat estan desfasades $\pi/2$, mentre que posició i acceleració estan desfasades en π radians.

Figura 114. Elongació, *x*, velocitat, *v*, i acceleració, *a*, en el MHS



Vegem ara un exemple de sistema físic en què es compleix la relació (368), $F \propto x$: la molla elàstica.

6.2.1. La molla elàstica

Tots tenim l'experiència d'haver comprimit i estirat una molla: com més l'estirem o la comprimim, més ens costa mantenir la molla estirada o comprimida.

Un exemple de força proporcional al desplaçament i de signe contrari a aquest és la que actua sobre un cos per part d'un ressort que s'estira o es contrau (figura 115): la força que fa el ressort és proporcional a l'allargament (o a la contracció) del ressort i sempre està dirigida de manera que el ressort tendeix a recuperar la seva longitud normal. Si fem una força per a comprimir la molla, la reacció de la molla tendeix a recuperar la longitud inicial. I si fem una força per a estirar la molla, la força de reacció de la molla tendeix a reduir-ne l'allargament i recuperar també la longitud inicial. Aquesta força s'anomena *força de restitució* o *força recuperadora*.

Figura 115

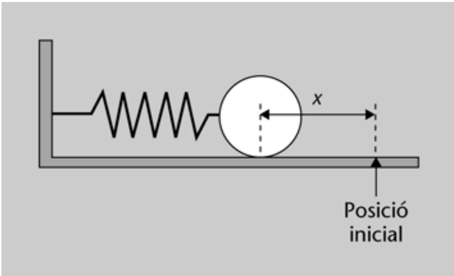


Figura 115

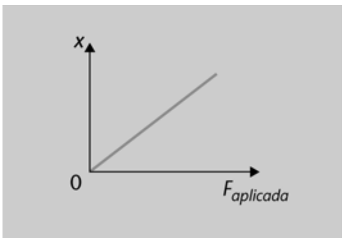
Massa unida a una molla horitzontal i que comprimim des de la posició inicial. La força recuperadora que fa la molla comprimida és cap a la dreta.

Quan estirem una molla (sense arribar al seu límit elàstic), l'extensió addicional que li provoquem, x, és proporcional a la càrrega (és a dir, a la força) que li apliquem, $F_{aplicada}$ (figura 116). Per tant, podem escriure la relació entre l'extensió i la força aplicada a la molla així (en mòdul):

$$F_{aplicada} = kx \tag{369}$$

on k és la constant elàstica de la molla. Una molla que té una longitud inicial l, tindrà una longitud $l + x$, major o menor que l, quan l'estirem o la comprimim, respectivament. El valor de l'estirament o de la compressió de la molla coincideix amb la separació de la massa respecte a la posició que té inicialment, quan està en equilibri.

Figura 116. Relació entre la força que apliquem a una molla i l'estirament que li produïm



En un ressort que tingui una resposta lineal com la descrita per l'equació (369) el coeficient k representa la **rigidesa** del ressort: per a una mateixa força aplicada F, com major sigui k, menor serà l'estirament del ressort, el ressort serà més rígid. De la mateixa manera que llegim qualsevol quocient de magnituds, podem dir, de $k = F_{aplicada}/x$, que k representa la força que cal aplicar a una molla per unitat de desplaçament que hi provoquem. La unitat en què es mesura la constant elàstica d'un ressort, k, és N/m = N m^{-1}.

Si recordeu el principi d'acció i reacció (subapartat 3.4), la força F que fa la molla és igual i contrària a la que hi apliquem, $F = -F_{aplicada}$, i podem escriure una expressió com la (369) per a la força que fa la molla elàstica estirada o comprimida:

$$F = -kx \tag{370}$$

El signe negatiu de l'equació (370) indica que **força i desplaçament són contraris**: les forces restauradores de la molla són de signe contrari als estiraments o les compressions.

Si una vegada estirada o comprimida la molla, la deixem lliure, la massa que està unida a la molla començarà a oscil·lar. Si comparem la relació (370) amb la (367), $F = -m\omega^2 x$, veiem que la freqüència angular d'oscil·lació de la molla és:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{371}$$

La freqüència d'un sistema oscil·lant que oscil·la lliurement s'anomena **freqüència pròpia** o **freqüència natural**.

La dependència funcional de la freqüència natural d'oscil·lació de la molla, equació (371), és la següent: la freqüència angular d'oscil·lació d'una molla depèn de la rigidesa de la molla i de la massa que oscil·la de la forma $\omega \propto k^{1/2}\, m^{-1/2}$.

L'estirament d'una molla diem que és elàstic si compleix dues condicions: 1) quan en deixar anar la molla aquesta recupera la longitud inicial; i 2) si, a més a més, les forces aplicades i els estiraments provocats són proporcionals. Si estirem molt una molla, aquesta pot quedar deformada en deixar-la lliure i no recuperarà la longitud que tenia abans d'estirar-la.

Ja hem fet servir molles per a mesurar forces quan hem discutit les bases experimentals de la segona llei de Newton en l'apartat 4. Però en aquella ocasió no vam especificar que la molla fóra elàstica, perquè no calia: únicament necessitàvem construir un mesurador de forces, i això requeria que la relació estirament-força fos unívoca, no que fos necessàriament lineal com la relació (370).

Fixem-nos ara en l'oscil·lació de la molla i la freqüència amb què ho fa.

Activitat 6.5. Freqüència d'oscil·lació d'una molla

a) Comproveu que els dos membres de la relació (371) es mesuren en les mateixes unitats.

b) Expliqueu per què oscil·la la molla, si separem la massa de l'equilibri.

Solució

a) La freqüència angular d'oscil·lació d'una molla elàstica, definida per la relació (349), $\omega = 2\pi / T$, té unitats de s^{-1}. Vegem si l'arrel que apareix en l'expressió (371) té les mateixes dimensions.

La constant elàstica del ressort es defineix en la relació (371) i es mesura en newton per metre:

$$[k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{\text{N}}{\text{m}} \tag{372}$$

Com que 1 N = 1 kg m/s^2 (ja que $F = ma$), el membre de la dreta de la relació (371) es mesura en:

$$\sqrt{\frac{[k]}{[m]}} = \sqrt{\frac{\text{N/m}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{kg}\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2\text{m}}}{\text{kg}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{s}^2}} = \frac{1}{\text{s}} \tag{373}$$

Per tant, els dos membres de l'equació (371) es mesuren en les mateixes unitats, com ha de ser en qualsevol equació que emprem en física o en enginyeria.

b) Per què oscil·la una molla que estirem o comprimim i deixem anar? Si deixem anar la massa que està unida a una molla estirada, per exemple, la força restauradora de la molla l'accelera en sentit contrari a l'estirament i li dóna més i més velocitat. La força és major com més allunyada estigui la massa de la posició inicial.

En passar pel punt inicial (en què $x = 0$ i, per tant, segons l'equació (370), $F = 0$ i $a = 0$) no actua cap força sobre la massa però la massa té una velocitat determinada i, per inèrcia, continua movent-se; ara és la massa la que en el seu moviment comprimeix la molla més i més, i la molla fa una força en sentit contrari i cada vegada major, que va frenant la massa fins que en el punt de màxima elongació l'atura completament.

Ara, amb la molla comprimida al màxim, la molla empenta la partícula de manera que la longitud de la molla tendeix a recuperar la longitud que tenia inicialment, i posa de nou la massa en moviment accelerat en direcció cap a l'origen de coordenades. I el cicle torna a començar, sense aturador.

Veiem doncs, que la dinàmica del sistema, la força que hi actua, ens permet determinar quina freqüència té el moviment oscil·latori.

6.2.2. Què hem après?

- Hem calculat la força que actua sobre una partícula que fa un MHS.
- Hem vist que en un MHS, forces i elongacions tenen signe contrari en tot instant i són proporcionals.
- En una molla elàstica, forces (F) i elongacions (x) són proporcionals, $F = -kx$, on k és la constant elàstica de la molla.

MHS

Un moviment harmònic simple és el que fa un objecte sobre el qual actua una força proporcional i de signe contrari al desplaçament de la partícula respecte de la posició d'equilibri.

Un MHS esta descrit per una funció sinus o cosinus.

En aquest apartat hem seguit l'estructura d'aquest mòdul: primer hem estudiat la cinemàtica (subapartat 6.1) i després la dinàmica d'un oscil·lador (subapartat 6.2). Ara veurem els aspectes energètics del sistema oscil·lant.

6.3. Energia de l'oscil·lador

El que direm en aquest subapartat s'aplica tant a una molla que oscil·la com a un pèndol, i també serveix per a qualsevol altre sistema oscil·lant, com ara un corrent elèctric en un circuit. L'única condició és que el sistema oscil·li amb un MHS, és a dir, que la relació entre la força restauradora del sistema i el desplaçament sigui lineal, com en l'equació (370):

$$F = -kx \tag{374}$$

Podem calcular l'energia potencial de l'oscil·lador a partir de la definició d'energia potencial en terme de les forces del camp conservatiu, equació (271):

Recordeu

La integral de x és:

$$\int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} + constant$$

$$\Delta E_{p\ a \to b} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{375}$$

En una dimensió, i si fem servir la relació (374), escriurem:

$$\Delta E_p = \int kx \cdot dx \tag{376}$$

és a dir:

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} kx^2 + constant \tag{377}$$

L'origen de les energies potencials és arbitrari, com hem discutit en l'apartat 5. Si triem la constant de l'expressió (377) de manera que l'energia potencial sigui igual a zero en la posició d'equilibri de la partícula ($\Delta E_p = 0$ per a $x = 0$), obtenim:

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 \tag{378}$$

El resultat és que l'energia potencial d'un oscil·lador que s'ha desplaçat una distància x de la posició d'equilibri és proporcional al quadrat del desplaçament de la partícula. En termes matemàtics, a forces lineals, proporcionals a x, corresponen energies potencials quadràtiques, proporcionals a x^2.

Ara sumem les energies cinètica, $1/2\ mv^2$, i potencial, equació (378), per tal de trobar l'energia mecànica total de la partícula que oscil·la:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 \tag{379}$$

Com veurem en l'activitat següent si tenim en compte les relacions (346), (356) i (371), la relació anterior és, simplement:

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \tag{380}$$

Fixeu-vos que en aquesta equació només apareixen la massa, m, l'amplitud de l'oscil·lació, A, i la freqüència angular, ω, que són magnituds que no varien amb el temps. Per tant, resulta que l'**energia es conserva**.

L'energia total d'un oscil·lador és constant.

Aquest resultat és conseqüència de l'aplicació de la llei de conservació de l'energia, que vam estudiar en l'apartat 5, al cas de l'oscil·lador harmònic, que és un sistema conservatiu quan no hi ha fricció.

Hem obtingut, segons l'equació (380), que l'energia total d'un oscil·lador és proporcional al quadrat de l'amplitud d'oscil·lació. L'energia de l'oscil·lador també és proporcional a la massa de la partícula que oscil·la i al quadrat de la freqüència d'oscil·lació. Si l'amplitud o la freqüència d'oscil·lació es dupliquen, l'energia de l'oscil·lador es quadruplica. Però si es duplica el valor de la massa que oscil·la, l'energia total de l'oscil·lador només es duplica.

En els sistemes reals, les oscil·lacions d'un sistema no es mantenen en el temps: una corda de guitarra que fem sonar acaba aturant-se, per exemple. Per tant, l'**energia no es conserva** si l'**oscil·lador té pèrdues**.

L'energia total d'un oscil·lador disminueix amb el temps (no és, per tant, constant) si l'oscil·lador té fricció o una altra font de pèrdua d'energia. En aquest cas es parla d'**oscil·ladors esmorteïts**.

Vegem ara com són les dependències temporals de les energies d'un oscil·lador que conserva l'energia total, és a dir, per al qual no s'esmorteeixen les oscil·lacions.

Activitat 6.6. Energia d'un oscillador en funció del temps

a) Deduïu l'expressió (380) de l'energia total de l'oscil·lador. Tingueu en compte les relacions (346), (356) i (371).

b) Analitzeu com varien amb el temps l'energia cinètica i l'energia potencial de l'oscil·lador i feu-ne una gràfica.

Solució

a) Si substituïm x per l'equació (346) i v per l'equació (356) en l'expressió (379) obtenim, per a cadascuna de les energies:

$$\omega E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \delta) \quad (381)$$

$$E_p = k\frac{x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \delta) \quad (382)$$

on hem tingut en compte la relació (371) per a eliminar la constant k en l'equació (382). L'energia total de l'oscil·lador és:

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \delta) + \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \delta) \quad (383)$$

Podem traure factors comuns $mA^2\ \omega^2 / 2$:

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}\left(\sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)\right) \quad (384)$$

i tenir en compte la relació trigonomètrica fonamental següent, vàlida per a qualsevol angle ϑ:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad (385)$$

Aleshores arribem a obtenir que l'energia total de l'oscil·lador és constant en tot moment:

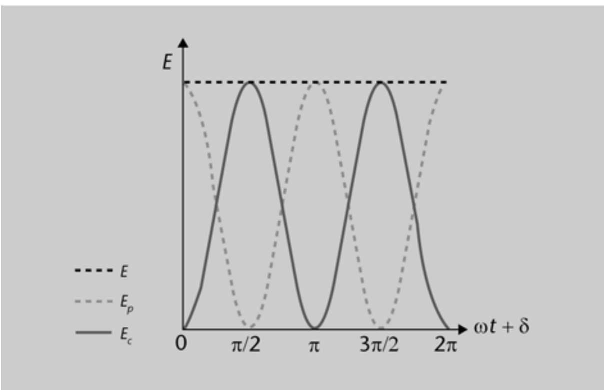
$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \quad (386)$$

b) Les energies cinètica i potencial de l'oscil·lador varien en cada punt de l'oscil·lació, però la suma de les dues és sempre constant.

En l'extrem d'oscil·lació, $x = A$, l'energia potencial és màxima i l'energia cinètica s'anul·la, perquè l'oscil·lador s'hi atura instantàniament; en el centre d'oscil·lació la posició és nul·la, igual que l'energia potencial, i l'energia cinètica és màxima. En qualsevol altre punt, quan un tipus d'energia es redueix en una quantitat, l'altre tipus d'energia augmenta en la mateixa quantitat.

Teniu representada en la figura 117 la variació temporal de l'energia cinètica de l'oscil·lador, equació (281), i l'energia potencial de l'oscil·lador, equació (382). Observeu que les dues energies són positives i varien amb el temps segons les funcions $\sin^2$ $(\omega t + \delta)$ i $\cos^2$ $(\omega t + \delta)$, respectivament, així que quan una augmenta, l'altra disminueix, de manera que la suma és sempre constant i igual a l'energia total.

Figura 117. Energia cinètica de l'oscil·lador harmònic en funció del temps E_c, energia potencial E_p i energia total constant E



Hem vist que el procés de l'oscil·lació està relacionat amb el pas periòdic de l'energia potencial a cinètica i viceversa. El valor mitjà (per període d'oscil·lació) de les energies potencial i cinètica és el mateix i val la meitat de l'energia total de l'oscil·lador, E/2:

$$< E_c > = < E_p > = \frac{E}{2} \tag{387}$$

on $<E_c>$ i $<E_p>$ representen, respectivament, el valor mitjà de l'energia cinètica i potencial d'un oscil·lador en un cicle, i E és l'energia total, equació (380).

6.3.1. Què hem après?

- En el cas d'un MHS, les expressions de l'energia cinètica i potencial que hem introduït en l'apartat 5 prenen valors oscil·lants; durant un període hi ha constantment un intercanvi d'una forma d'energia a l'altra.
- Hem vist també que l'energia total d'un sistema oscil·lant és constant, si no intervenen forces externes al sistema. Aquest resultat està d'acord amb el principi de conservació de l'energia que vam enunciar en l'apartat 5.

Una vegada vistes les característiques generals del moviment oscil·latori, acabarem l'apartat discutint el model del pèndol simple i les oscil·lacions petites que pot fer un pèndol.

6.4. El model físic del pèndol

Hem començat aquest apartat estudiant la cinemàtica del moviment oscil·latori per a arribar a la dinàmica i a les consideracions energètiques d'aquest tipus de moviment. Ací veurem com es pot fer un plantejament dinàmic per a arribar a les mateixes conclusions, és a dir, abordarem l'estudi de l'oscil·lador amb les lleis de la dinàmica. Aprofitarem per a discutir amb un poc de detall el model del pèndol.

Un benefici de l'aproximació dinàmica al moviment és que ens permet obtenir la freqüència d'oscil·lació del sistema que, com ja sabeu (vegeu el subapartat 6.2.1), s'anomena *freqüència pròpia* o *freqüència natural*.

En física es treballa amb un model anomenat *pèndol simple*, del qual ja hem parlat en el subapartat 6.1. Un pèndol simple està constituït per una massa unida a un fil inextensible i penjat d'un punt (figura 118).

Si el pèndol està inicialment parat, el trobarem penjant verticalment (figura 118). En estat de repòs, no actua cap força neta sobre el pèndol i aquest no es mou.

Figura 118

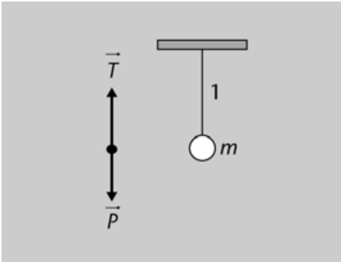


Figura 118

Un pèndol i les forces que hi actuen quan està en repòs. La tensió del fil equilibra la força del pes.

Nota

En un mateix apartat ens hem trobat amb el problema de designar dues magnituds que no tenen res a veure entre si amb el mateix símbol, *T*: tensió d'un fil i període d'un pèndol oscil·lant. El context deixarà clar a quina ens referim en cada cas.

Sobre la massa del pèndol actuen el pes, *P*, i la reacció del fil, l'anomenada *tensió* del fil, i les dues forces s'equilibren perquè tenen direccions oposades i el mateix mòdul:

$$\vec{P} = -\vec{T} \qquad (388)$$

El pèndol està en repòs perquè no hi actua cap força neta (o resultant). Tenim dues forces actuant sobre el pèndol i, per tant, hi ha també dues forces de reacció que fa el pèndol sobre altres cossos.

Activitat 6.7. Forces de reacció

Quines són aquestes dues forces de reacció que fa el pèndol i que hem esmentat en el paràgraf anterior?

Solució

El fil fa una força vertical i cap amunt sobre la massa *m*, una força que anomenem *tensió*, $\vec{T}$. Per tant, la massa estira del fil cap a baix amb una força de reacció $\vec{R} = -\vec{T}$ (figura 119a).

La Terra atrau la massa *m* amb una força que anomenem *pes*, $\vec{P} = m\vec{g}$. Per tant, la massa *m* fa una força igual i contrària sobre la Terra, la reacció $\vec{R} = -\vec{P}$ (figura 119b).

Per completar l'anàlisi, també podem considerar la parella de forces d'acció-reacció que actuen en el punt de subjecció del fil al sostre: la força que fa el fil sobre el sostre, $\vec{F}$, és idèntica i de sentit contrari a la tensió del fil, $\vec{F} = -\vec{T}$, i també és igual i contrària a la que fa el sostre sobre el fil, la reacció $\vec{R} = -\vec{F}$ (figura 119c).

Figura 119. Forces d'acció i reacció en un pèndol en repòs

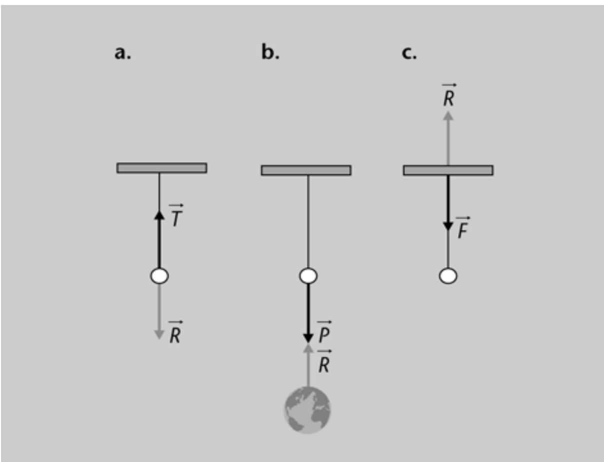


Figura 119

Es mostra la parella acció-reacció del fil **a**, de la massa **b** i del punt de subjecció del fil **c**.

Una vegada feta l'anàlisi del pèndol estàtic estudiarem el pèndol en moviment.

6.4.1. Oscil·lacions petites

En un oscil·lador que fa un moviment oscil·latori qualsevol, el desplaçament potser no vindrà donat per la funció trigonomètrica (346). Però en molts casos les oscil·lacions d'un sistema sí que són en forma de MHS, almenys per a valors petits de l'amplitud del moviment. Es diu aleshores que per a petites separacions respecte de la posició d'equilibri el sistema fa **oscil·lacions petites** o, equivalentment, que les oscil·lacions són moviments harmònics.

Ja hem vist què signifiquen les oscil·lacions petites per a una molla elàstica que oscil·la: la força recuperadora ha de dependre linealment del desplaçament de la massa i, en aquest cas, el sistema fa un MHS. Quines seran les oscil·lacions petites per a un pèndol? Hem d'estudiar la dinàmica del pèndol.

Desviem el pèndol un angle determinat, α, des de la posició d'equilibri i el deixem oscil·lar. Hem de determinar la força que hi actua.

El pes del pèndol, $\vec{P} = m\vec{g}$, el podem descompondre en dues components (figura 120), una al llarg del fil (tangent al fil) i l'altra perpendicular al fil. La primera component, $P \cdot \cos\alpha$, compensa la tensió del fil, T, quan el pèndol està en la posició de màxima separació respecte a la vertical; la segona component origina el moviment accelerat del pèndol.

Figura 120

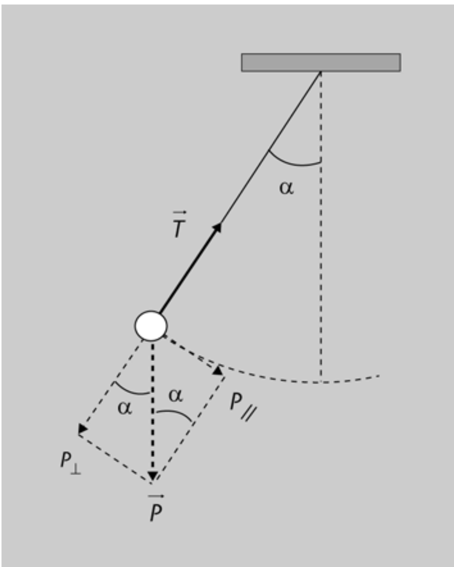


Figura 120

Pèndol simple i components del pes tangent a la trajectòria, $P_{//}$, i perpendicular a la trajectòria (és a dir, en la direcció del fil), $P_{\perp}$. Aquesta força, $P_{\perp}$, iguala la tensió del fil només en els extrems de la trajectòria, quan la partícula està instantàniament aturada i, per tant, no hi ha força centrípeta.

Així, la component del pes tangent a la trajectòria és la força neta que actua en aquesta direcció en qualsevol posició de l'oscil·lador:

$$P_{//} = -mg \cdot \sin\alpha \quad (389)$$

Angles positius i negatius

Recordem que mesurem angles positius en el sentit horari a partir de la vertical, i els negatius en sentit contrari.

El signe menys en l'equació (389) té en compte que per a angles negatius la direcció de $P_{//}$ és en sentit horari i per a angles positius la direcció de $P_{//}$ és en sentit antihorari. Si $\alpha < 0$, $\sin\alpha < 0$, i aleshores $-mg \cdot \sin\alpha > 0$, és a dir, $P_{//}$ va en sentit horari. Si haguéssim fet la descomposició de la figura 120 per a un angle positiu, aleshores $\alpha > 0$ i $\sin \alpha > 0$. El signe negatiu de l'equació (389) indicaria que ara $P_{//}$ va en sentit antihorari.

Però la força neta (389) que actua sobre el pèndol en la direcció tangent a la trajectòria *no* és proporcional al desplaçament angular, és a dir, no és proporcional a l'angle. La força neta ara depèn del sinus de l'angle. Podríem obtenir la dinàmica de l'oscil·lador en el cas més general, i resoldre l'equació diferencial que s'obté de substituir l'expressió (389) de la força que accelera el pèndol, en la segona llei de Newton, $F = ma$. L'equació diferencial resultant no té solució analítica, i s'ha d'abordar amb l'ajut d'un ordinador. El cas particular més important en la pràctica, però, és el d'oscil·lacions petites.

En el cas d'oscil·lacions petites, l'angle α és petit, mesurat en radians:

$$\alpha << 1 \tag{390}$$

i es pot aproximar el sinus per l'angle (el primer terme de la fórmula de Taylor):

$$\sin \alpha \approx \alpha \tag{391}$$

de manera que l'equació (389) resulta:

$$F \approx -mg\,\alpha \tag{392}$$

En aquestes condicions sí que són proporcionals forces i desplaçaments angulars, i el moviment pendular seria un MHS, com veurem després.

Desenvolupament de Taylor per al sinus

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots$$

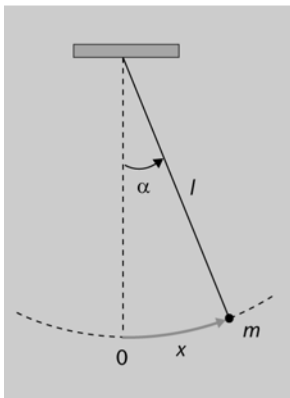
on l'angle *x* es mesura en radians.

Arc i angle

Sobre una circumferència de radi *l* podem definir un angle α com el quocient entre la longitud de l'arc i el radi:

$$\alpha = x / l$$

Figura 121. Arc *x* i angle α que el defineix, sobre una circumferència de radi *l*



Activitat 6.8. Angles petits

a) Per a quins angles, en graus, es compleix la condició d'angles petits, equació (390)?

b) Comproveu amb una calculadora manual si per als angles de 10° o 30° és bona l'aproximació (391).

Solució

a) L'aproximació (391) només és vàlida quan els angles es mesuren en radians.

Una circumferència té 2π radians i, per tant, un radian correspon a:

$$1 \text{ radian} = 1 \text{ radian} \cdot \frac{360 \text{ graus / cercle}}{2\pi \text{ radians/cercle}} = 57{,}3 \text{ graus} \tag{393}$$

La condició $\alpha << 1$ significa que l'angle d'oscil·lació ha de ser molt més menut que 1 radian (que com heu vist a (393) equival a uns 60°).

En la pràctica, amplituds angulars de 20-30° (que *no* són << 60°) donen moviments oscil·latoris que es poden descriure com a MHS amb bona aproximació.

b) Per a 10°, α = 0,1745 radians, mentre que sin 0,1745 = 0,1737. Els dos valors, α i $\sin \alpha$, coincideixen en les primeres dues xifres decimals.

Per a 30°, α = 0,5236 radians, i sin 0,5236 = 0,5. Ara només coincideix la primera xifra decimal del valor de l'angle i del sinus de l'angle.

Ja estem en condicions de calcular la freqüència d'oscil·lació del pèndol, que és el resultat principal que obtindrem de l'aplicació de la segona llei de dinàmica al problema de l'oscil·lador. Vegem-ho.

6.4.2. Període i gravetat

El camí x recorregut pel punt material mesurat sobre la trajectòria circular que fa el pèndol és (figura):

$$x = l\alpha \tag{394}$$

L'expressió anterior només té sentit si l'angle es mesura en radians i prové de la definició d'angle, com a quocient de l'arc pel radi amb què es traça l'arc. Per tant, escriurem l'expressió (392) així:

$$F = -\frac{mg}{l}x \tag{395}$$

i quan la comparem amb l'equació (374), $F = -kx$, la constant k és ara:

$$k = \frac{mg}{l} \tag{396}$$

Per tant, la freqüència angular del pèndol serà, segons l'equació (371) que ens diu $\omega = \sqrt{k/m}$, quan hi introduïm el valor de k de l'equació (396):

$$\omega = \sqrt{\frac{mg/l}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{397}$$

L'expressió anterior, $\omega = \sqrt{g/l}$, és la freqüència angular natural o pròpia del pèndol quan fa petites oscil·lacions.

El període de les oscil·lacions s'obté a partir de la relació (348), $T = 2\pi/\omega$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{398}$$

Veiem que quan les oscil·lacions són petites, el període de l'oscil·lació depèn només de la longitud l del pèndol i de la intensitat del camp gravitatori, g.

També heu de notar que la freqüència angular, equació (397), no depèn de l'amplitud de l'oscil·lació ni tampoc depèn de la massa que oscil·la. En aquest sentit, el pèndol simple és un sistema diferent de la molla elàstica, perquè la freqüència d'oscil·lació de la molla, equació (371), $\omega = \sqrt{k/m}$, sí que depèn de la massa oscil·lant m.

L'angle màxim, α_m, que fa el pèndol en cada oscil·lació s'obté de l'equació (394) quan hi substituïm el desplaçament per l'amplitud:

$$A = l \cdot \alpha_m \tag{399}$$

α_m és, doncs, l'amplitud angular de l'oscil·lador.

Podem obtenir l'equació que descriu la posició instantània del pèndol en termes de desplaçament angulars, en lloc de desplaçaments lineals. Si duem l'expressió (394), $x = l\alpha$, a la (346), $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$, i fem servir l'equació (399), obtenim l'equació de moviment del pèndol en funció de l'angle que fa amb la vertical:

$$\alpha(t) = \alpha_m \cdot \cos(\omega t + \delta) \tag{400}$$

De la mateixa manera, es podrien escriure per al pèndol simple, en funció de l'angle d'oscil·lació, totes les expressions que hem discutit en els apartats anteriors, com ara la de la velocitat, l'acceleració, etc.

Activitat 6.9. Un pèndol que tingui un període d'1 s

Quina longitud ha de tenir un pèndol per tal que tingui un període d'oscil·lació d'un segon o una freqüència d'1 Hz?

Solució

En l'expressió (398) volem que el període del pèndol sigui 1 s i volem conèixer-ne la longitud:

$$T = 1\,\text{s} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \tag{401}$$

En aïllar l obtenim:

$$l = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left(\frac{1\ \text{s}}{2\pi}\right)^2 = 0{,}2485\ \text{m} = 24{,}85\ \text{cm} \tag{402}$$

Amb un pèndol que tingui un fil d'un poc més d'un pam i una massa qualsevol, les oscil·lacions petites tindran una freqüència d'1 Hz i ens permetrà comptar fàcilment el pas dels segons a força de comptar el nombre d'oscil·lacions: cada oscil·lació completa trigarà 1 s.

Clourem l'apartat mostrant l'equació diferencial d'un MHS.

6.4.3. Freqüència natural i equació diferencial del MHS

La freqüència angular d'oscil·lació de la massa unida a la molla depèn de les propietats del sistema oscil·lant:

a) de la rigidesa de la fixació del cos a la molla, k, i de la massa del cos, m, en el cas de la molla elàstica, equació (371);

b) de la longitud del fil, l, i de l'acceleració de la gravetat, g, en el cas del pèndol que fa oscil·lacions petites, equació (397).

Però la freqüència angular d'oscil·lació no depèn de l'amplitud de l'oscil·lació. Un mateix cos que faci oscil·lacions d'amplitud diferent, les fa amb la mateixa freqüència (el mateix període). Aquesta és una propietat important dels pèndols que fan oscil·lacions petites, o de les molles elàstiques. L'amplitud d'oscil·lació d'un sistema depèn de la forma com l'hem excitat, és a dir, de com l'hem posat a oscil·lar.

Com ja hem dit (subapartat 6.2.1), les oscil·lacions d'un sistema que oscil·la lliurement s'anomenen *oscil·lacions pròpies*, i la freqüència de les oscil·lacions que tenen lloc en aquest cas s'anomena *freqüència natural* o *freqüència pròpia* del sistema.

L'equació diferencial que descriu la dinàmica d'un MHS té una forma característica que s'obté d'aplicar la segona llei de Newton a un sistema que fa un moviment unidimensional sota una força del tipus $F = -kx$. Vegem-ho.

A partir de la segona llei de Newton per a un moviment unidimensional, $F = ma$, i recordant l'expressió de l'acceleració en un moviment unidimensional al llarg de l'eix X, $a = d^2x/dt^2$ (equació 117), obtenim:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{403}$$

que se sol escriure de la forma següent:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{404}$$

amb la constant positiva $\omega^2 = k/m$.

L'equació diferencial anterior diu que la derivada temporal segona de la funció desplaçament coincideix amb la pròpia funció multiplicada per una constant positiva i canviada de signe.

Qualsevol sistema la dinàmica del qual condueixi a una equació diferencial del tipus (404) correspon a un MHS que es pot descriure per una llei de moviment harmònica, com l'equació (346):

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \tag{405}$$

D'aquesta manera hem connectat la dinàmica de l'oscil·lador amb la seva cinemàtica.

6.4.4. Què hem après?

- Un sistema oscil·lant pot fer petites oscil·lacions en què la força restauradora varia linealment amb el desplaçament. En aquest cas, el sistema fa un MHS.
- La freqüència natural o pròpia de cada sistema oscil·lant depèn dels paràmetres del sistema i no de les condicions d'excitació.
- L'equació diferencial d'un MHS té una forma característica, de la mateixa manera que un moviment amb acceleració constant, per exemple, satisfà una equació diferencial característica.

6.5. Recapitulació

En aquest apartat hem pogut aplicar gairebé tots els conceptes, llenguatges i lleis físiques que hem après en aquest mòdul de mecànica.

El tipus de moviment concret que hem estudiat, el vibratori o oscil·latori, és un dels moviments bàsics que pot tenir un sistema de partícules, i és únic entre els sistemes físics dinàmics.

El gran nombre de termes que hem introduït en aquest apartat són una mostra de la riquesa dels fenòmens oscil·latoris: període, freqüència, fase, amplitud, freqüència natural, etc.

Hem introduït els models de pèndol simple i de molla elàstica, i també l'aproximació d'oscil·lacions petites per a aquests sistemes.

El moviment harmònic simple (MHS) es pot descriure amb funcions trigonomètriques bàsiques.

Les oscil·lacions d'un sistema poden ser la font de fenòmens ondulatoris que es propaguen per l'espai o per un medi material.

6.6. Problemes d'ampliació

Problema 6.1. Projecció d'un moviment circular uniforme

Mostreu que la projecció $x(t)$ de la posició d'una partícula que gira en cercle a velocitat angular ω constant, fa una oscil·lació harmònica (ω és l'angle que fa la partícula per unitat de temps).

Problema 6.2. Dependències funcionals

La relació (380):

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \tag{406}$$

indica una proporcionalitat, $E \propto m$. Però si substituïm ω^2 per la relació (371):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (407)$$

l'energia resulta independent de la massa:

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \frac{k}{m} = \frac{1}{2} k A^2 \qquad (408)$$

No hi ha ací una contradicció?

Problema 6.3. Mesura del període

Podem mesurar el període d'oscil·lació d'un pèndol simple amb l'ajut d'un cronòmetre, com el que porten molts rellotges. Si recordem el concepte de temps de reacció de l'apartat 1, aquesta mesura estarà afectada d'un error. Què ocorre si mesurem, per exemple, deu oscil·lacions seguides, millorarà aleshores la qualitat de la mesura (és a dir, estarà afectada d'un error menor)?

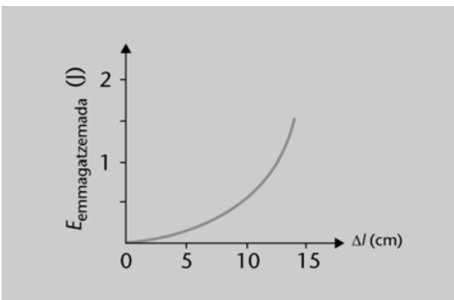
Problema 6.4. Conservació d'energia en un pèndol oscil·lant

Separem la bola d'un pèndol de la posició vertical i la deixem anar. Com podem descriure les oscil·lacions en termes energètics? Què podem dir del punt més baix i dels punts extrems de l'oscil·lació?

Problema 6.5. Constant elàstica

Calculeu la constant elàstica d'una molla per a la qual s'han mesurat les dades de la figura 122.

Figura 122. Energia que emmagatzema una molla estirada (o comprimida)



7. Solucions dels problemes d'ampliació

Solució del problema 1.1

Per a descriure aquestes dues situacions necessitem més conceptes dels que hem vist en aquest apartat exploratori. Com veurem en els apartats següents, les paraules clau per a descriure aquests processos són *inèrcia*, *energia cinètica*, *energia potencial*, *fricció*, etc. Hi tornarem!

Solució del problema 1.2

Com que les tres gràfiques posició-temps són línies rectes, les tres mostren cossos que es mouen amb una velocitat constant que ve donada pel gradient o pendent constant de la recta.

a) La primera correspon a un objecte que no comença a moure's fins que passa un temps determinat.

b) En el segon cas, l'objecte arrenca en l'instant $t = 0$ des d'un lloc diferent a l'origen de posicions, i se n'allunya.

c) El tercer cas és com el segon, el cos arrenca en l'instant $t = 0$ des d'una posició $s > 0$, però té una velocitat constant negativa, és a dir, que la partícula es dirigeix cap a l'origen, s'hi acosta.

Solució del problema 1.3

En els dos casos es tracta de moviments a velocitat no constant (no són gràfiques posició-temps lineals). Els vehicles es comencen a moure des de l'origen ($s = 0$) en l'instant inicial ($t = 0$), i se n'allunyen.

En el primer cas, l'espai recorregut augmenta de manera indefinida i de manera cada vegada més ràpida. En el segon cas, l'espai recorregut augmenta ràpidament al principi però a mesura que passa el temps, la velocitat es redueix i l'espai recorregut no augmenta tan ràpidament.

També podem dir que en el primer cas el pendent inicial és nul i va augmentant ràpidament amb el temps; el moviment del vehicle és accelerat. En el segon cas, el vehicle comença amb una velocitat gran, perquè la corba té un pendent gran en $t = 0$, i es va frenant a poc a poc; és un moviment que es frena amb el temps, és a dir, l'acceleració és negativa.

Solució del problema 1.4

Entreu en la pàgina web de la simulació.

Si es modifica l'altura del turó que hi ha davant del punt de sortida, o si s'augmenta el radi del cercle, el carret no completa el recorregut i torna al punt de partida.

Si elevem suficientment el turó de sortida o li donem una velocitat de sortida suficient, el carret descarrila (i surt volant!).

Solució del problema 1.5

Si el cotxe es mou per la superfície de la Terra, amb dues coordenades és suficient, com hem vist en l'activitat 1.9. Per exemple, podríem donar-ne la longitud i la latitud (com les que avui dia ens dóna un GPS).

En el cas d'una roda de fira seria suficient donar l'angle que forma el radi del carret (la línia que uneix la posició del carret amb el centre de la roda) amb una recta horitzontal.

Figura 123

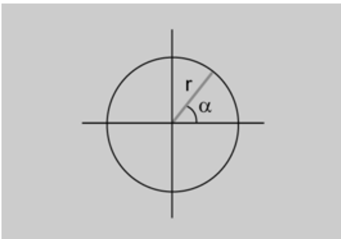


Figura 123

La posició d'un objecte en un cercle es pot donar mitjançant l'angle que forma la recta que uneix el centre del cercle amb la posició instantània de l'objecte, respecte a una recta horitzontal que prenem com a origen d'angles.

La funció $\alpha(t)$ dóna la posició instantània del carret. Tanmateix, no es tracta d'un moviment unidimensional, sinó bidimensional; l'altra funció que necessitem per a descriure'n la posició és:

$$r = constant \tag{409}$$

si r és el radi de la roda.

En lloc de les magnituds (r, α), que s'anomenen *coordenades polars* del punt que es mou sobre el cercle, podem donar les coordenades cartesianes (x,y) del punt del pla.

En el cas del cavallet, es tracta també d'un moviment bidimensional: el cap del cavallet, per exemple, no es mou en línia recta sinó que fa un moviment de pujada i baixada al llarg d'una corba.

El moviment del trepant és unidimensional: el podem caracteritzar si donem l'altura sobre la vertical a què es troba en cada instant qualsevol punt de la màquina.

Solució del problema 2.1

a) El vehicle va a 20 m/s, perquè:

$$72\frac{\text{km}}{\text{h}} = 72\frac{1000\ \text{m}}{60\ \text{min}\times 60\ \text{s/min}} = \frac{72.000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (410)$$

Per tant, una velocitat típica per carretera és d'uns 20-30 m/s.

b) Una velocitat de 10 m/s són 36 km/h, perquè és la meitat de la velocitat del cas anterior. Per tant, una velocitat típica d'un cotxe per ciutat és de menys d'uns 10 m/s, aproximadament la mateixa que té el rècord mundial de 100 m llisos.

c) Viatgem a uns 30 km/s = 30.000 m/s!! És una velocitat enorme: ens movem en tot moment en una nau espacial (la Terra) que viatja per l'univers a 30 km per segon!

Aquesta velocitat s'obté de dividir la longitud de la circumferència ($2\pi r$, amb $r = 1{,}5 \times 10^8$ km) que fa la Terra al voltant del Sol pel temps que triga a fer-ho (1 any):

$$\frac{2\pi r}{1\,\text{any}} = \frac{2\pi\times 1{,}5\times 10^8\ \text{km}\times\dfrac{1000\ \text{m}}{\text{km}}}{365\ \text{dies}\times\dfrac{24\,\text{h}}{\text{dia}}\times 60\dfrac{\text{min}}{\text{h}}\times\dfrac{60\,\text{s}}{\text{min}}} = 29.886\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 30.000\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (411)$$

Solució del problema 2.2

Com que són gràfiques posició-temps lineals, es tracta de partícules que es mouen a velocitat constant. Només cal calcular el gradient (el pendent) de la línia recta:

a)
$$\textit{Pendent} = v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3{,}0\ \text{m} - 0\ \text{m}}{5\ \text{s} - 0\ \text{s}} = 0{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (412)$$

b)
$$\textit{Pendent} = v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5\,\text{m} - 3\ \text{m}}{5\,\text{s} - 0\,\text{s}} = 0{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (413)$$

Solució del problema 2.3

La gràfica representa un cos que es mou a velocitat constant v durant un temps t_A.

Per a una partícula que es mou a velocitat constant durant un temps t, la distància recorreguda en aquest temps és el producte:

$$d = v \cdot t \qquad (414)$$

Aleshores, la distància recorreguda pel vehicle durant el temps t_A és equivalent a l'àrea que hi ha sota la gràfica, $v_A \cdot t_A$, perquè l'àrea d'un rectangle és el producte de la base per l'altura.

També podem dir que la distància recorreguda coincideix amb la integral definida de la funció velocitat entre l'instant inicial i l'instant t_A:

$$d = \int_0^{t_A} v \cdot dt \tag{415}$$

Solució del problema 2.4

En els tres casos es tracta d'objectes la velocitat dels quals canvia amb el temps i, per tant, tenen un moviment accelerat. Com que són línies rectes (amb gradients o pendents constants) tots tres casos mostren acceleracions constants.

En el primer i segon cas, el cos està accelerat, perquè el pendent augmenta amb el temps.

La tercera recta té un pendent negatiu, per tant el cos representat en el gràfic està frenant (descelerant o accelerant negativament).

En el primer cas, el cos es comença a moure des del repòs, $v = 0$ en $t = 0$. En el segon cas, comença amb velocitat no nul·la. En el tercer cas, el cos s'està movent a una velocitat determinada en l'instant inicial i a mesura que passa el temps la velocitat es redueix.

Solució del problema 3.1

Si el vehicle es mou en línia recta i a una velocitat constant (en mòdul, direcció i sentit), sí que és un sistema de referència inercial.

Una persona difícilment es pot moure a velocitat constant (a més a més, el caminar o córrer d'una persona no és estrictament en línia recta sinó que oscil·la en cada pas). Per tant, no pot ser un sistema inercial.

Ja hem comentat en el subapartat 3.1 que la Terra només pot considerar-se un sistema inercial quan analitzem moviments que duren poc en comparació amb el moviment de la Terra. A efectes pràctics, i per a experiments que duren poc temps, la Terra té un moviment gairebé rectilini i uniforme perquè l'òrbita al voltant del Sol té un radi enorme, d'un centenar i mig de milions de quilòmetres. Per això fem servir com a sistemes inercials sistemes de referència lligats a la Terra.

Solució del problema 3.2

Suposem que no fa vent i que viatgem en un vehicle que va a velocitat rectilínia i uniforme. Vist des del vehicle, nosaltres estem en repòs i són els objectes exteriors al vehicle (un arbre, per exemple) els que es mouen a velocitat rectilínia i uniforme *contrària* a nosaltres. Això val també per a l'aire. Per a nosaltres, és com si fes vent en el mateix sentit que veiem desplaçar-se els arbres.

Per tant, quan deixem caure l'objecte, i vist des del tren en moviment, la fricció amb l'aire farà que l'objecte es desplaci en la direcció que es mouen els arbres, contrària al nostre moviment, i no caurà verticalment com cauria una pedra. Vist des del tren, l'objecte sembla que se'n va cap enrere de la finestra. La trajectòria de l'objecte serà parabòlica.

Vist des de l'estació, l'objecte no cau en la direcció de la vertical de la finestra. Si no fa vent, vist des de l'estació, l'objecte sempre avança des del punt de caiguda, amb fregament o sense.

Si l'objecte té molta fricció amb l'aire (com és el cas si llancem un paper, i no una pedra), vist des de l'estació, l'objecte fa una trajectòria més complicada que una paràbola, més curta que si no hi hagués fregament.

Com més gran sigui la superfície de l'objecte que cau, major serà aquest arrossegament en sentit contrari al moviment del vehicle, perquè la fricció amb l'aire serà major.

Solució del problema 4.1

La pilota té molt poc fregament contra el terra i quan el vehicle arrenqui, romandrà en la mateixa posició de l'espai perquè no està lligada al vehicle, com ho estan els seients. Així, com que la pilota no està lligada al terra, la pilota tendeix per inèrcia a conservar l'estat de repòs que tenia abans que el vehicle arrenqués i, així, no es mourà cap endavant amb el vehicle.

Però tampoc no es mourà cap enrere, perquè no hi ha cap força en aquesta direcció. La pilota només es mourà cap endavant quan la part posterior del vehicle passi per la posició que ocupa la pilota i, en conseqüència, l'arrossegui.

L'efecte del moviment del vehicle és com si la pilota reculés per anar a colpejar la part posterior del vehicle.

Solució del problema 4.2

a) Fals. En un moviment rectilini i uniforme tampoc no actua cap força, o bé la resultant de les forces que hi actuen és 0.

b) Les qüestions són diferents i també ho són les respostes. Per a mantenir un cos en moviment rectilini i uniforme no cal fer res, no cal aplicar cap força. Però perquè s'aturi un cos en moviment sí que cal aplicar una força. És la primera llei de Newton, la llei de la inèrcia.

c) Fals. El moviment (gairebé) circular de la Lluna és un moviment accelerat, perquè la direcció de la velocitat canvia de manera constant. En cada instant, la força gravitatòria terrestre provoca l'acceleració de la Lluna, d'acord amb la segona llei de Newton. La primera llei de Newton no és aplicable a aquesta situació, perquè la Lluna no està en repòs ni està en moviment rectilini i uniforme.

Solució del problema 4.3

Si el llibre no es mou és perquè la força que hi apliquem és exactament contrarestada pel fregament, per la força de fricció que actua entre el llibre i la taula, en la superfície de contacte de tots dos objectes. Per tant, a una força neta nul·la (la suma de la força aplicada i la força de fricció que fa la taula) li correspon una acceleració nul·la. L'objecte que està inicialment en repòs, segueix en repòs.

Però la fricció entre dos objectes que no es mouen (el que s'anomena fricció estàtica) té un valor màxim determinat, que depèn de les superfícies dels objectes que estan en contacte.

Per tant, si inicialment el llibre no es mou i apliquem una força una mica major, el fregament augmenta també en el mateix valor i el llibre no es mourà. Però arribarà un moment en què la força aplicada superarà la fricció i podrem accelerar-lo, perquè entre els dos cossos la força de fricció té un valor màxim.

Solució del problema 4.4

En els tres casos veiem que el vehicle que canvia l'estat de moviment (de repòs o rectilini i uniforme) conté parts que no estan rígidament unides al vehicle: és el cas dels passatgers del cotxe del cas a), de la persona que va dempeus en el cas b) i dels òrgans interns del nostre cos en el cas c). Així, quan el vehicle frena o s'accelera, les parts que no estan rígidament unides al vehicle tendeixen (pel primer principi) a continuar el seu moviment rectilini i uniforme.

En el cas a) el nostre cos xoca contra la porta del cotxe perquè és el cotxe qui canvia la direcció de moviment (s'accelera en la corba).

En el cas b) els peus estan bastant fixats al terra de l'autobús pel fregament de la sola de les sabates; quan el vehicle frena, la part superior del cos segueix movent-se en línia recta: per això sembla que ens empenten cap endavant.

En el cas c) el nostre cos es mou cap a baix amb el cotxe que baixa, però els nostres òrgans interns tendeixen a quedar-se a la mateixa altura en què es trobaven i movent-se en línia recta, per això tenim la sensació que "se'ns pugen", quan en realitat és la resta del cos la que "baixa".

Solució del problema 4.5

Cal anar amb compte amb la idea que la gravetat és un efecte de l'aire o l'atmosfera, o que la gravetat fa una força que "empeny" cap a baix, en lloc de ser una força que "estira" cap a baix.

a) Fals. La força gravitatòria no té res a veure amb l'atmosfera, sols és deguda a la Terra (la Terra també atrau l'atmosfera!).

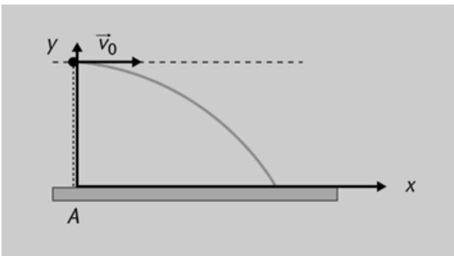
b) Un globus ple d'aire cau a terra perquè el conjunt del globus més l'aire que hi conté és més dens que l'aire i la força gravitatòria sobre el globus inflat supera l'empenta cap amunt que fa l'atmosfera sobre el globus.

c) El globus cauria en caiguda lliure si el poséssim dins d'un espai buit, sense aire, perquè únicament actuaria la gravetat terrestre .

No és cert que la gravetat desaparegui amb absència d'aire. En l'espai exterior a la Terra no hi ha matèria (hi ha el buit) i els cossos celestes s'atrauen per forces gravitatòries.

Solució del problema 4.6

Figura 124. Una pilota rep un cop que fa que es mogui horitzontalment en l'instant inicial



L'equació del moviment es pot obtenir de l'aplicació de la segona llei de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{416}$$

L'anàlisi d'aquesta situació se simplifica si tenim en compte que les components horitzontal i vertical del moviment es poden tractar de manera separada, d'acord amb el principi de superposició de les forces.

Les condicions inicials del problema són:

1) que la pilota està en $t = 0$ a una altura h; i

2) que es mou amb una velocitat que només té component horitzontal i val v_0.

Com que no actua cap força sobre la pilota en direcció horitzontal (si s'ignora la resistència de l'aire), aleshores la component horitzontal de la velocitat de la pilota no canvia.

$$\textit{força nul·la} \Rightarrow \textit{acceleració nul·la} \Rightarrow \textit{velocitat constant} \tag{417}$$

L'espai que recorre la pilota és:

$$x = v_0 t \tag{418}$$

El pes actua verticalment sobre la pilota i cap a baix, i fa que la component vertical de la velocitat de la pilota augmenti de manera constant.

Quina trajectòria farà la pilota abans de tocar terra? Podem aprofitar el resultat que coneixem de caiguda lliure per a dir que el temps de caiguda serà, segons l'equació (42):

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{419}$$

i la posició de la pilota en cada instant és, segons l'equació (143) de l'apartat 2:

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2 \tag{420}$$

Durant el temps t_c la pilota recorrerà una distància horitzontal igual a:

$$d_H = v_0\, t_c = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{421}$$

La pilota caurà a un punt situat a una distància d_{H} del punt A, la projecció sobre el terra del punt de sortida.

Si eliminem el temps i substituïm l'equació (418) en la (420), obtenim l'equació d'una paràbola:

$$y = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 \tag{422}$$

És per això que parlem de **moviment parabòlic**. La trajectòria de la pilota en caiguda lliure és parabòlica, i no vertical, perquè té una component horitzontal de la velocitat inicial.

Per als valors numèrics de l'enunciat, $m = 100$, $g = 0{,}1$ kg, $v_0 = 10$ m/s i $h = 1$ m, obtenim de l'equació (421):

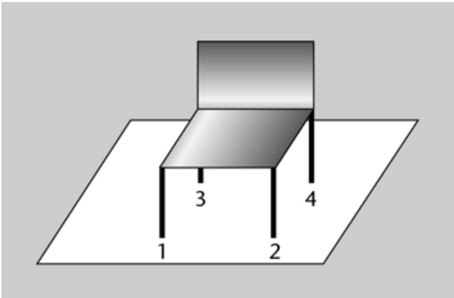
$$d_H = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \sqrt{\frac{2 \times 1\ \mathrm{m}}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \sqrt{20}\,\mathrm{m} \simeq 4{,}5\ \mathrm{m}$$

La pilota cau a més de 4 m de la posició x inicial.

Solució del problema 4.7

La figura 125 mostra la cadira.

Figura 125. Una cadira que reposa en terra



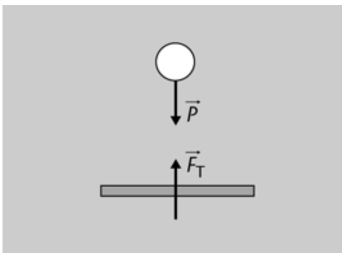
L'exemple d'aquesta situació física ens serveix per a parlar de diferents nivells de descripció que es poden fer.

En un primer nivell de descripció es pot dir que si $\vec{P} = m\vec{g}$ és la força que fa la Terra sobre la cadira (el seu pes), aleshores el terra fa una força igual i oposada sobre la cadira que s'hi recolza:

$$\vec{F}_{Terra} = -\vec{P} \tag{423}$$

La força total sobre la cadira és nul·la, $\vec{F}_{Terra} + \vec{P} = 0$, i aquesta està en equilibri. Esquemàticament tenim la situació de la figura 126.

Figura 126. Equilibri de forces en una cadira: pes i força de reacció del terra



En un altre nivell de descripció podem dir que cada una de les potes està en contacte amb el terra; per tant, per exemple, la pota 1 de la cadira fa una força $\vec{F}_1$ sobre el terra, que és igual i oposada a la força que fa el terra que suporta la cadira, $\vec{R}_1$: $\vec{R}_1 = -\vec{F}_1$ és la reacció del terra a $\vec{F}_1$. El mateix podríem dir de les parelles de forces sobre cada pota:

$$\vec{F}_2 = -\vec{R}_2 \tag{424}$$

$$\vec{F}_3 = -\vec{R}_3 \tag{425}$$

$$\vec{F}_4 = -\vec{R}_4 \tag{426}$$

Per simetria, cabria esperar que $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$, i que $\vec{F}_3 = \vec{F}_4$, però aquest fet no té importància per al tema que ens ocupa.

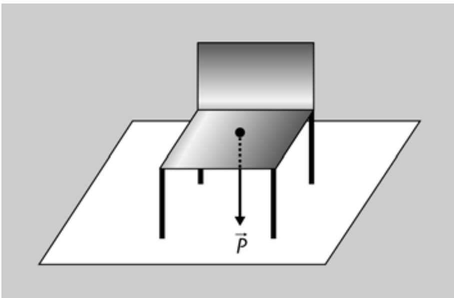
El pes de la cadira s'ha repartit entre les quatre potes ($\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$)

La cadira està en equilibri perquè la força que fa la Terra sobre ella (el pes) es compensa per la reacció del terra sobre cadascuna de les seves potes:

$$\vec{P} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 + \vec{R}_4 \tag{427}$$

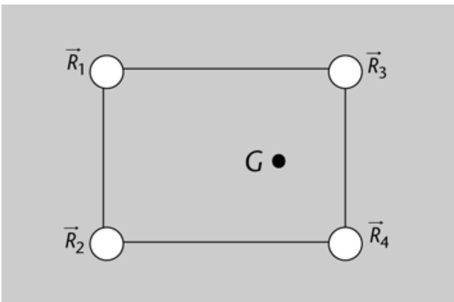
La força que fa la Terra actua sobre el centre de gravetat de la cadira (figura 127).

Figura 127. El pes (força d'atracció de la Terra) actua sobre el centre de gravetat de la cadira



La figura 128 mostra esquemàticament la projecció del centre de gravetat sobre el terra i els punts on actuen les reaccions del terra.

Figura 128. Posició del centre de gravetat de la cadira i punts en els quals actua la reacció del terra sobre cada pota



Solució del problema 4.8

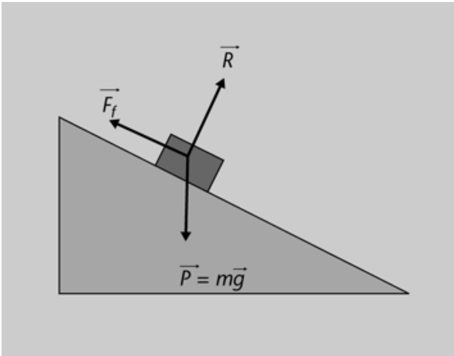
a) L'objecte està sotmès a l'atracció de la Terra (el pes):

$$\vec{P} = m\vec{g} \tag{428}$$

El pla fa una reacció sobre la massa, que és normal (perpendicular) al pla, $\vec{R}$, i també fa una força de fricció que s'oposa al possible moviment, $\vec{F}_f$.

Com que el cos té tendència a caure, la fricció té el sentit contrari, cap a dalt (figura 129).

Figura 129. Forces que actuen sobre la massa

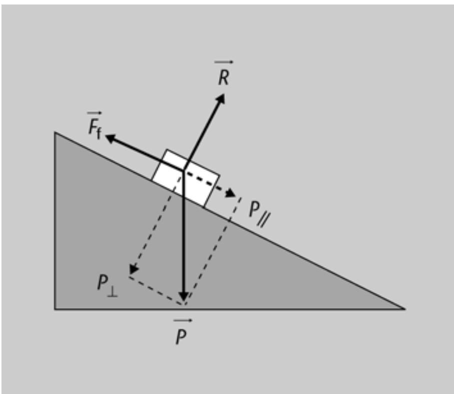


Si el cos està en equilibri, la suma de les tres forces s'ha d'anul·lar,

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_f = 0 \quad (429)$$

Una altra manera d'analitzar el problema és descompondre el pes en les dues components, paral·lela i perpendicular al pla inclinat, com mostra la figura 130.

Figura 130. Forces que actuen sobre la massa



Si la massa està en equilibri, s'ha de complir que:

$$P_{\perp} = R \quad (430)$$

$$P_{//} = F_f \quad (431)$$

b) La força que accelera la massa que cau pel pla inclinat és la resultant de les forces paral·leles al pla. Per la segona llei de Newton, l'acceleració de caiguda serà:

$$P_{//} - F_f = ma \quad (432)$$

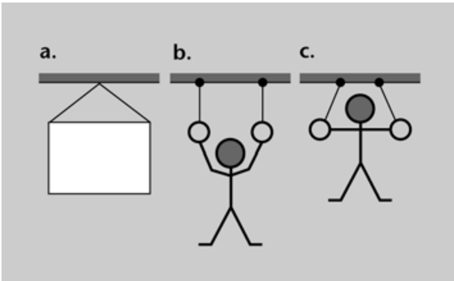
Si no hi ha fricció, l'acceleració amb què cau la caixa és:

$$a = \frac{P_{//}}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha$$

En caiguda lliure, a = 90°, el pla no fa cap paper, i $a = g$.

Solució del problema 4.9

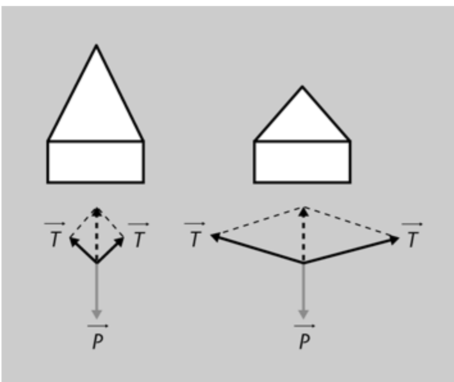
Figura 131. Un quadre penjat i una persona que penja d'unes anelles



La postura **c.** és més difícil per al gimnasta que la **b.** perquè ha de fer més força per a mantenir-se en equilibri. Per a veure quina és la raó, podem començar pel quadre que està penjat de dos fils. Si els fils de què penja el quadre són més llargs que els de la figura 132, la tensió a què estan sotmesos els fils és menor.

Per a veure-ho, podem fer un esquema en què la suma de les dues tensions, aplicades en la direcció dels fils, ha de compensar el pes del quadre. Amb dos conjunts de fils de longitud (i, per tant, angle entre ells) diferent, obtenim el que mostra l'esquema de la figura 132.

Figura 132. Un quadre penjat amb dos fils de longitud diferent, i equilibri entre la tensió dels fils i el pes del quadre



És clar que quan l'angle que formen els fils del quadre és major, les forces de tensió dels fils han de ser també més grans.

El mateix tipus de raonament permet concloure que els braços del gimnasta tindran una tensió major en el cas **c** que en el **b.**

Solució del problema 5.1

El teorema de conservació de l'energia ens diu que no, que quan llancem una pilota verticalment, la velocitat amb què torna a la mà és la mateixa, en mòdul, que la velocitat amb què la vam llançar. Vegem-ho.

Suposeu que llancem la pilota amb una velocitat inicial $\vec{v}_i$ i des d'una altura que prendrem com a origen d'altures i, per tant, com a origen d'energies potencials gravitatòries.

Apliquem el teorema de conservació de l'energia (equació 314) al punt de partida o "inicial" ($h_\mathrm{i} = 0$, $\vec{v}_i \neq 0$) i al punt més alt de la trajectòria o "final", en què la pilota és a una altura Δh i s'hi ha aturat instantàniament abans de començar a caure ($h_\mathrm{f} = \Delta h$, $\vec{v}_f = 0$). Si ho fem, obtenim:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = mg\,\Delta h \tag{433}$$

El resultat anterior és l'expressió matemàtica del fenomen físic que observem i que descrivim en termes energètics: l'energia cinètica inicial de la pilota s'ha transformat en energia potencial, que és màxima en el punt més alt de la trajectòria.

Aquesta energia potencial es converteix en l'energia cinètica que té la pilota en tornar a les mans (on l'energia potencial és nul·la perquè hi hem pres l'origen d'energies potencials). El teorema de conservació de l'energia diu que ens arribarà a les mans amb una velocitat $\vec{v}$ que compleix:

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}mv^2 \tag{434}$$

Per tant, si comparem l'equació (433) amb la (434), veiem que la velocitat amb què hi arriba és $v^2 = v_\mathrm{i}^2$, la mateixa amb què va sortir, però en sentit contrari:

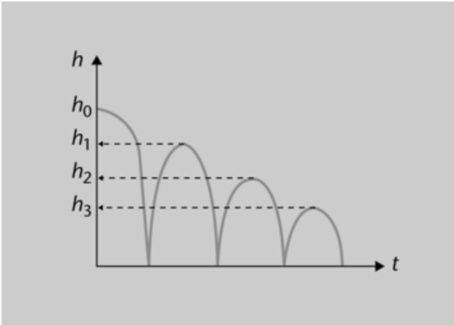
$$\vec{v} = -\vec{v}_i \tag{435}$$

El procés de llançament només ha resultat en un canvi de sentit de la velocitat inicial.

Solució del problema 5.2

La gràfica qualitativa mostra els rebots de la pilota que cau des d'una altura inicial h_0.

Figura 133. Altura d'una pilota que rebota, en funció del temps



El primer màxim de la figura 133 correspon a una energia potencial gravitatòria (equació 277):

$$E_{p0} = mgh_0 \tag{436}$$

que és l'energia inicial total de la partícula que cau lliurement.

En arribar a terra, tota l'energia potencial de la pilota s'ha convertit en energia cinètica. D'aquesta energia cinètica, la partícula perd un tant per cent r en el rebot.

En rebotar fins a la nova altura h_1, la pilota converteix en energia potencial l'energia cinètica que li resta després de l'impacte amb el terra.

El segon pic correspondria a una energia potencial reduïda en el tant per cent r corresponent (per exemple, si r = 10%, escriurem r = 10/100 = 0,1 en l'expressió següent):

$$E_{p1} = E_{p0}(1-r) = mgh_1 \tag{437}$$

Podem relacionar les altures a què arriba la pilota en cada rebot. De l'equació (437), quan s'hi substitueix l'expressió de l'equació (436), la relació entre l'altura a què arriba després del primer rebot i l'altura inicial és:

$$mgh_0(1-r) = mgh_1 \tag{438}$$

és a dir:

$$h_1 = h_0\ (1-r) \tag{439}$$

De la mateixa manera, podem trobar l'altura del tercer pic:

$$E_{p2} = E_{p1}(1-r) = mgh_2 \tag{440}$$

I anàlogament per als pics restants.

Pel que fa a la velocitat de la partícula, quan arriba a terra en el primer rebot té una velocitat que resulta, pel principi de conservació d'energia (equació 314), d'igualar l'energia potencial inicial amb l'energia cinètica amb què arriba al terra:

$$mgh_0 = \tfrac{1}{2}\, mv^2 \tag{441}$$

Quan torna a caure a terra, des de l'altura h_1, la velocitat de la pilota en el moment que toca terra és, anàlogament:

$$mgh_1 = \tfrac{1}{2}\, mv'^2 \tag{442}$$

Podem relacionar la velocitat abans del segon rebot, v', amb la velocitat abans del primer rebot, v; per a fer-ho dividim membre a membre les expressions que tenim en les equacions (441) i (442):

Observació

Fixeu-vos que la bola només perd energia en el xoc, la velocitat amb què surt d'un xoc és la mateixa que la velocitat amb què fa el xoc següent.

$$\frac{v^2}{v'^2} = \frac{h_0}{h_1} \tag{443}$$

i, si tenim en compte el resultat de l'equació (439), podem escriure que:

$$\frac{v^2}{v'^2} = \frac{1}{1-r} \tag{444}$$

Finalment, la velocitat de la partícula es redueix a:

$$v' = \sqrt{1-r}\, v \tag{445}$$

Per a r = 10 %, per exemple, l'energia es redueix en un 10% (1 – 0,9) en cada rebot, mentre que la velocitat es redueix en un 30 % ($= \sqrt{1-0,9}$).

Solució del problema 5.3

Apliquem el principi de conservació de l'energia al pla inclinat. Suposem que el pla no té fregament (per tant, només hi ha forces conservatives) i que pugem l'objecte pel pla sense accelerar-lo. En aquest cas només podem dir que el treball que fem és igual a la diferència d'energia potencial entre el punt més alt del pla i el punt més baix del pla, equació 269.

$$W = \Delta E_p \tag{446}$$

La diferència d'energia potencial és:

$$\Delta E_p = mgh \tag{447}$$

si prenem l'origen d'energies potencials en el punt baix del pla. Però aquest es el mateix treball que fem si pugem la massa verticalment a la mateixa altura que tingui el pla: fem una força constant, igual al pes, al llarg d'una distància *h*: $W = F \cdot h = mgh$.

Solució del problema 5.4

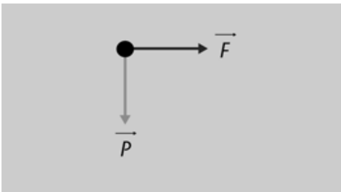
a) Cap treball. Si una força no desplaça el punt d'aplicació no fa cap treball. Ho podeu veure en l'expressió que defineix el treball que fa una força, l'equació 236:

$$dW = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cdot \cos \vartheta \qquad (448)$$

si el desplaçament ($\left|d\vec{r}\right|$) és nul, el treball és nul.

b) Cap treball. Com que la força que apliquem (vertical, en sostenir el llibre) és perpendicular al desplaçament (horitzontal), el treball és nul. Estem en la situació de la figura 134, que matemàticament dóna l'equació 448 per a un angle de 90°.

Figura 134. En un desplaçament horitzontal la força $\vec{F}$ no fa treball



c) No fem cap treball.

En alçar el llibre fem un treball positiu perquè la força aplicada (igual al pes) i el desplaçament són paral·lels i en el sentit cap amunt (l'angle que fan força i desplaçament és de 0 radians).

En baixar el llibre, el treball que fem és negatiu i de valor idèntic al primer, perquè la força aplicada és vertical i cap amunt (igual al pes), però el desplaçament és en sentit descendent (l'angle que fan força i desplaçament és de π radians).

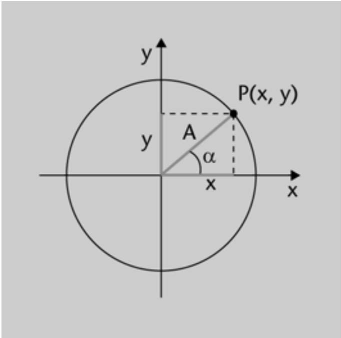
El treball total que hem fet sobre el llibre és nul.

El mateix podríem dir del treball de les forces del camp, que és nul en el recorregut tancat que ha fet el llibre, en tornar al mateix punt de partida.

Solució del problema 6.1

La situació que descriu l'enunciat es pot representar de la manera que mostra la figura 135.

Figura 135. Cercle de radi *A* i posició d'un punt sobre el cercle



Les coordenades del punt que gira sobre el cercle són:

$$x = A\cos\alpha \tag{449}$$

$$y = A\sin\alpha \tag{450}$$

Si la velocitat ω és constant, l'angle que recorre la partícula en un temps t (la velocitat angular és una velocitat i, per tant, aquí la velocitat angular fa el paper de la velocitat en l'apartat 2 i l'angle, el paper de la posició):

$$\alpha = \omega t + \alpha_0 \tag{451}$$

Recordeu

$$\sin x = \frac{catet\ oposat}{hipotenusa}$$

$$\cos x = \frac{catet\ adjacent}{hipotenusa}$$

on α_0 és l'angle que defineix la posició de la partícula en l'instant inicial:

$$\alpha(t = 0) = \alpha_0 \tag{452}$$

Per tant:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha_0) \tag{453}$$

Aquesta és l'equació del MHS que hem estudiat en l'apartat 6.1.

També és harmònic simple el moviment que fa la projecció de la posició de la partícula sobre l'eix Y: només hem de repetir els passos anteriors per a la funció $y = A\sin\alpha$.

Solució del problema 6.2

No hi ha cap contradicció.

El que s'afirma amb l'equació (380) és que *si* ω *i* A *són constants*, $E \propto m$.

Però amb la substitució d'ω s'arriba a l'expressió:

$$E = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 = \frac{1}{2} kA^2 \quad (454)$$

que indica que *per a una molla donada* (i, per tant, per a una constant elàstica k donada), l'energia total de l'oscil·lador és independent de la massa i depèn quadràticament de l'amplitud de l'oscil·lació.

Com vam veure en el subapartat 1.6.3, es pot parlar de la proporcionalitat entre dues magnituds quan les altres dependències funcionals que hi puguin intervenir es mantenen constants.

Solució del problema 6.3

Suposem que una sola mesura del període dóna un temps t_1 i que la mesura té un error ε. Aquest error depèn de l'instrument amb què mesurem el temps i d'altres factors, com ara que mai no cometrem el mateix error en activar i en desactivar el cronòmetre.

Recordeu

La lletra grega ε es llegeix "èpsilon".

Direm que el període val:

$$T = t_1 \pm \varepsilon \quad (455)$$

és a dir, que el període mesurat està entre els valors $t_1 - \varepsilon$ i $t_1 + \varepsilon$. Per exemple, podríem haver obtingut un període d'1,2 s amb un error de 0,3 s; llavors el període estaria comprés entre 0,9 s i 1,5 s.

Però si mesurem 10 oscil·lacions i obtenim el valor t_{10} amb un error ε', el període és:

$$T = \frac{t_{10} \pm \varepsilon'}{10} = \frac{t_{10}}{10} \pm \frac{\varepsilon'}{10} \quad (456)$$

L'error que cometem en mesurar 10 oscil·lacions no serà molt diferent de l'error que cometem en mesurar-ne una de sola. Per tant, l'error amb què podem donar el període és ara molt menor.

Solució del problema 6.4

Pel principi de conservació de l'energia, en tot moment l'energia total del pèndol roman constant, sempre que no hi hagi fricció per l'aire ni en el punt de suport del fil al sostre.

Si separem el pèndol de la vertical i el deixem anar, l'energia inicial és purament potencial, ja que l'energia cinètica inicial és nul·la.

L'energia potencial que té el pèndol quan el separem de la vertical, i que és l'energia total del pèndol, es converteix parcialment en energia cinètica mentre el pèndol torna a la posició inicial, vertical. En aquest punt, tota l'energia és cinètica i la potencial, nul·la.

En passar el pèndol per la possició vertical inicial, el pèndol continua el moviment i ara és l'energia cinètica la que va convertint-se en potencial fins que, en l'altre extrem de l'oscil·lació, únicament en tenim de potencial.

Anàlogament podríem explicar les oscil·lacions d'una massa unida a una molla elàstica.

En el punt més baix de la trajectòria el pèndol només té energia cinètica, i en l'extrem de l'oscil·lació només en té de potencial.

Solució del problema 6.5

Sabem que la relació entre l'allargament d'una molla i l'energia que emmagatzema és, segons l'equació (378) de l'apartat 6:

$$E_p = \frac{1}{2} k \Delta l^2 \tag{457}$$

Podem trobar la constant elàstica de manera aproximada si substituïm en l'equació anterior les coordenades d'un punt de la figura de l'enunciat (figura 122).

Per exemple, per a Δl = 10 cm, veiem en la figura que $E_p \approx$ 0,6 J, és a dir:

$$k = \frac{2E_p}{\Delta l^2} = \frac{2 \times 0{,}6\ \mathrm{J}}{(0{,}01\ \mathrm{m})^2} = 120\ \mathrm{J/m^2} \tag{458}$$

Per tal d'obtenir el valor de k d'una manera més precisa, caldria fer servir algun mètode com el de l'ajust per mínims quadrats.

Resum

En aquest mòdul hem estudiat les dues parts de la mecànica: la cinemàtica i la dinàmica.

Els conceptes i lleis que hem estudiat en mecànica són els fonaments per a tota la física. En particular, les tres lleis de Newton permeten resoldre molts problemes de dinàmica. Conceptes com ara velocitat, acceleració, energia, energia cinètica, energia potencial, moment lineal, moviment harmònic simple, freqüència angular, etc., i les lleis de conservació del moment lineal i de l'energia, són d'utilitat en tota la física i, en general, en totes les ciències i l'enginyeria.

En situacions especials, com quan estudiem el moviment de partícules que es mouen a velocitats comparables a la de la llum, o quan analitzem fenòmens que ocorren a l'escala atòmica i subatòmica, la mecànica newtoniana ha de deixar pas a la mecànica relativista, a la teoria de la relativitat general o a la mecànica quàntica.

Però amb els conceptes que hem estudiat en aquests sis temes, podem abordar multitud de problemes de la vida quotidiana i també problemes d'interès en enginyeria. D'altra banda, els conceptes que hem introduït i, sobre tot, la manera com hi hem arribat, ens ha mostrat una manera d'aprendre a definir magnituds i a enfrontar-nos a situacions problemàtiques que ens pot servir en altres matèries d'estudi o de treball.

Una vegada hem introduït els conceptes bàsics de la mecànica del moviment translacional, rotacional i vibracional, podem tenir present globalment aquesta part de la física a partir de les relacions més importants que hem estudiat. Un avantatge del llenguatge algebraic o matemàtic és que condensa en uns quants símbols les definicions o les relacions entre conceptes i magnituds d'interès per a l'anàlisi dels moviments i de les seues causes. Però, com hem vist en l'apartat 1, el llenguatge verbal en què s'enuncien les relacions entre les magnituds, i la descripció gràfica que n'acompanya l'ús, són tan importants com les fórmules.

La taula següent mostra algunes de les relacions més importants que hem estudiat en aquest mòdul. Les relacions es presenten en l'ordre en què han anat apareixent en els apartats anteriors.

Relacions bàsiques de la mecànica	
$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	Velocitat
$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$	Acceleració

$t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$	Temps de caiguda en caiguda lliure
$a_c=\dfrac{v^2}{r}$	Mòdul de l'acceleració centrípeta
$\vec{v}\,'=\vec{v}-\vec{V}$	Velocitats d'una partícula mesurades per dos sistemes de referència inercials que tenen una velocitat relativa $\vec{V}$
$\vec{a}=\vec{a}\,'$	Acceleracions d'una partícula mesurades per dos sistemes de referència inercials
$\vec{F}=m\vec{a}$	Segona llei de Newton
$\vec{F}=-\vec{R}$	Forces d'acció i reacció (que, recordeu, estan aplicades en cossos diferents)
$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2$	Principi de superposició per a les acceleracions, forces, etc.
$\vec{p}=m\cdot\vec{v}$	Moment lineal
$\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3+\ldots=constant$	Llei de conservació del moment lineal per a un sistema aïllat
$W=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}$	Treball
$P=\dfrac{dW}{dt}$	Potència
$E_c=\dfrac{m\vec{v}^2}{2}$	Energia cinètica
$\Delta E_c=W_{forces}$	Forces conservatives i no conservatives
$\Delta E_{p\ a\to b}=-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}_{camp}\cdot d\vec{r}$	Energia potencial en un camp de forces conservatives
$\Delta E_p=-W_{forces\ conservatives}$	Forces conservatives
$E_M=E_c+E_p$	Energia mecànica
$E_M=constant$	Forces conservatives
$\Delta E_M=W_{forces\,no\,conservatives}$	Forces conservatives i no conservatives
$x(t)=A\cos(\omega t+\delta)$	Elongació en un MHS
$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$	Freqüència angular pròpia d'una molla elàstica
$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$	Període d'oscil·lació d'un pèndol simple que fa petites oscil·lacions
$a=-\omega^2x$	Acceleració en el MHS
$\mathrm{F}=-kx$	Força restauradora en una molla elàstica
$E_p=\dfrac{1}{2}kx^2$	Energia potencial en un MHS
$E=\dfrac{1}{2}mA^2\omega^2$	Energia total en un MHS
$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$	Equació diferencial de moviment d'un MHS

Exercicis d'autoavaluació

1. Quan un objecte es mou a una velocitat constant de 50 km/h...

a) ... no està accelerat.
b) ... pot estar accelerat.
c) ... segur que està accelerat.
d) ... no pot haver una força que actuï sobre el cos.

2. Cauen una poma petita i una poma gran d'un arbre. El temps que triguen en arribar al terra...

a) ... és el mateix.
b) ... és major per a la poma gran.
c) ... és major per a la poma petita.
d) Totes les respostes anteriors són correctes.

3. La massa d'un cos és...

a) ... el pes d'un cos.
b) ... una mesura de la inèrcia del cos.
c) ... diferent a la Lluna que a la Terra.
d) Totes les respostes anteriors són correctes.

4. Un cavall fa una força d'1 kN sobre un carro. El carro fa una força sobre el cavall que...

a) ... depèn de l'acceleració del carro.
b) ... és menor d'1 kN perquè el cavall el pugui moure.
c) ... és major d'1 kN perquè el cavall no el pugui moure.
d) ... val 1 kN.

5. Quan un cavall arrossega un carro, la força que fa que el cavall avanci és...

a) ... la força que fa el carro sobre el cavall.
b) ... la força que fa el cavall sobre el carro.
c) ... la força que fa el cavall sobre el terra amb les potes.
d) ... la força que fa el terra sobre les potes del cavall.

6. Quan s'aplica una força constant sobre un cos que es mou, aquesta fa que tingui...

a) ... un moviment accelerat.
b) ... un moviment centrípet.
c) ... un moviment uniforme.
d) ... una velocitat constant.

7. Les forces d'acció i reacció de la tercera llei de Newton...

a) ... sempre actuen sobre cossos diferents.
b) ... de vegades poden actuar sobre cossos diferents.
c) ... actuen sobre el mateix cos.
d) ... actuen en la mateixa direcció però no són necessàriament de la mateixa intensitat.
e) ... són sempre de la mateixa intensitat però poden actuar en direccions diferents.

8. Un coet espacial s'accelera perquè...

a) ... els gasos que expulsa l'empenten contra la Terra.
b) ... els gasos empenten el coet.
c) ... la Terra empenta en coet.
d) ... el coet fa una força sobre ell mateix.

9. Quan aneu en un vehicle que fa una corba bruscament, us veieu empentats cap a un costat perquè...

a) ... tendiu a moure-us en línia recta.
b) ... actua una força centrífuga sobre vosaltres.
c) ... el cotxe fa una força sobre vosaltres i cap a l'exterior de la corba.
d) ... actua la gravetat.

10. Quan es fa un xut a una pilota de futbol que està en repòs sobre la gespa, la component vertical de la velocitat és major...

a) ... just desprès d'abandonar el peu que xuta.
b) ... en el punt més alt de la trajectòria.
c) ... just abans de tocar terra.
d) Les dues respostes a i c són correctes.

11. Com afecta la gravetat terrestre a la bala d'un rifle que es dispara horitzontalment?

a) La bala comença a caure quan ha perdut la major part de la velocitat que té.
b) La velocitat de caiguda dependrà de la velocitat inicial horitzontal.
c) La bala caurà exactament igual que si no tingués velocitat horitzontal.
d) Totes les respostes anteriors son falses.

12. Quan observem un objecte que es mou en un cercle, què podem inferir?

a) Que hi ha una força centrífuga que actua sobre l'objecte.
b) Que hi ha una força que empenta l'objecte al llarg del cercle.
c) Que sobre el cos actua una força dirigida cap al centre del cercle.
d) Que no actua cap força sobre l'objecte.

13. La Lluna es manté en òrbita al voltant de la Terra a causa de...

a) ... la gravetat terrestre.
b) ... la força centrífuga.
c) ... les marees.
d) ... el Sol.

14. De quins dos factors depèn el treball?

a) Força i energia.
b) Força i distància.
c) Distància i energia.
d) Energia i moment lineal.

15. Quina diferència hi ha entre el treball que es fa quan es mou un llibre de 10 kg a velocitat constant en una trajectòria recta horitzontal de 100 m, i el que es fa quan s'alça a una altura de 2 m un llibre de ½ kg?

a) Es fa més treball en el primer cas.
b) Es fa més treball en el segon cas.
c) Es fa el mateix treball en els dos casos.
d) No es fa treball en cap cas.

16. Si la massa d'un objecte en moviment es duplica sense canviar-ne la velocitat, l'energia cinètica...

a) ... es redueix en 1/4.
b) ... es redueix en 1/4.
c) ... no varia.
d) ... es duplica.
e) ... es quadruplica.

17. Si la velocitat d'un ocell es duplica, la seva energia cinètica...

a) ... es redueix a la meitat.
b) ... no varia.
c) ... es duplica.
d) ... es quadruplica.
e) ... augmenta en la mateixa quantitat en què es redueix la seva energia potencial.

18. L'energia potencial és...

a) ... energia deguda al moviment.
b) ... energia que depèn de la posició del cos.
c) ... energia que depèn de les propietats del cos.
d) ... sempre constant.
e) Les respostes b i c són correctes.

19. Un llibre de 2 kg que està sobre una prestatgeria de 2 m d'alçada té (...) energia potencial que dos llibres d'1 kg que estan a 1 m d'alçada.

a) la mateixa
b) el doble d'
c) la meitat d'
d) No es poden comparar perquè l'origen d'energies potencials és diferent en els dos casos.

20. L'energia és...

a) ... una magnitud associada només al moviment dels objectes.
b) ... una forma de moment lineal.
c) ... una magnitud que es conserva sempre.
d) ... una propietat que no es pot convertir d'una forma a una altra.

21. Deixem caure una pilota des d'una altura de 3 m. Rebotarà fins una altura...

a) ... de menys de 3 m.
b) ... de 3 m.
c) ... de més de 3 m.
d) ... que depèn de com sigui la pilota.

22. El ritme a què es transforma energia s'anomena...

a) ... treball.
b) ... moment lineal.
c) ... potència.
d) ... consum energètic.

23. En quin cas es necessita més potència?

a) baixar una escala de 3 pisos en 14 s.
b) pujar una escala de 3 pisos en 12 s.
c) pujar una escala de 2 pisos en 6 s.
d) pujar una escala d'1 pis en 4 s.

24. El moment lineal és...

a) ... una magnitud escalar.
b) ... la capacitat de fer treball.
c) ... la força que fa un cos sobre un altre en una col·lisió.
d) Totes les respostes anteriors són falses.

25. Un camió té més moment lineal que un cotxe que es mou a la mateixa velocitat perquè el camió...

a) ... té més massa.
b) ... no té un perfil aerodinàmic.
c) ... té rodes més grans.
d) ... té una energia cinètica menor.

26. El retrocés d'un rifle quan es dispara un tret és un exemple de...

a) ... conservació del moment lineal.
b) ... conservació de l'energia.
c) ... principi d'inèrcia.
d) Totes les respostes anteriors són falses.

27. Els sistemes de referència són...

a) ... necessaris per a determinades mesures de magnituds.
b) ... utilitzats per a fer qualsevol mesura de magnituds.
c) ... usats principalment per a sumar velocitats.
d) ... usats principalment per a sumar acceleracions i forces.

28. Un rifle és capaç de disparar una bala a una velocitat de 600 km/h. El rifle és dalt d'un tren que va a 60 km/h i dispara en la direcció de la marxa del tren. La velocitat de la bala, vista per un observador que veu passar el tren des de l'estació és...

a) 600 km/h.
b) 60 km/h.
c) 660 km/h.
d) 540 km/h.

29. En un moviment harmònic simple (MHS), el període és...

a) proporcional al quadrat de l'amplitud.
b) proporcional a l'amplitud.
c) independent de l'amplitud.
d) Totes les respostes anteriors són falses.

30. En el moviment harmònic simple, l'energia total...

a) és proporcional a l'amplitud.
b) és proporcional al quadrat de l'amplitud.
c) és independent de l'amplitud.
d) Totes les respostes anteriors són falses.

31. Si l'acceleració d'una partícula és proporcional al seu desplaçament i té (...) el moviment és harmònic simple.

a) el mateix sentit
b) sentit oposat
c) Qualsevol de les dues respostes és vàlida.
d) Totes les respostes anteriors són falses.

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. a; **2.** a; **3.** b; **4.** d; **5.** d; **6.** a; **7.** a; **8.** b; **9.** a; **10.** d; **11.** c; **12.** c; **13.** a; **14.** b; **15.** b; **16.** d; **17.** d; **18.** b; **19.** b; **20.** c; **21.** a; **22.** c; **23.** c; **24.** d; **25.** a; **26.** a; **27.** b; **28.** c; **29.** c; **30.** b; **31.** b.

Glossari

acceleració *f* Ritme a què canvia la velocitat d'un objecte amb el temps. El canvi de velocitat pot ser en magnitud, direcció o sentit.

acceleració de la gravetat *f* Acceleració d'un objecte que cau lliurement. A prop de la superfície de la Terra, g = 9,81 m/s^2.
sbl g

acceleració instantània *f* Valor de l'acceleració en un moment determinat.

acció i reacció *f* Parell de forces que s'exerceixen dos objectes entre si segons la tercera llei de Newton.

amplitud *f* Desplaçament màxim als dos costats de la posició d'equilibri (posició central) en una ona o vibració.

caiguda lliure *f* Moviment que ocorre únicament sota la influència de la gravetat.

camp de forces *m* Pertorbació de l'espai que rodeja una massa, una càrrega elèctrica o un imant, de manera que una altra massa, càrrega elèctrica o imant que s'hi introdueixi experimentarà una força.

camp gravitatori *m* Camp de forces que hi ha en l'espai al voltant de qualsevol massa o grup de masses.

col·lisió elàstica *f* Col·lisió en què els objectes que xoquen, reboten sense produir deformacions ni generar calor. Més concretament, col·lisió en què l'energia cinètica total del sistema és la mateixa abans i després de la col·lisió.
sin. **xoc elàstic**

col·lisió inelàstica *f* Col·lisió en què els objectes que xoquen queden distorsionats o s'hi genera calor. Més concretament, col·lisió en què l'energia cinètica total del sistema no és la mateixa abans i després de la col·lisió.
sin. **xoc inelàstic**

component *m* o *f* Cada una de les projeccions en què es pot descompondre un vector i que actua en una direcció diferent de l'espai.

conservació de l'energia mecànica *f* Principi que afirma que l'energia mecànica no es pot crear ni destruir. Es pot transformar d'una forma d'energia (potencial, cinètica) a una altra, però l'energia total no canvia.

conservació del moment lineal *f* Principi que afirma que, en absència d'una força neta externa, el moment lineal d'un objecte o d'un sistema no canvia.

distància recorreguda *f* Longitud de la trajectòria per la qual es mou un objecte.

elasticitat *f* Propietat d'un sòlid que fa que experimenti un canvi de forma quan hi actua una força deformadora i que torni a la forma original quan s'elimina la força deformadora.

energia *f* Capacitat de fer treball.

energia cinètica *f* Energia deguda al moviment, igual a la meitat de la massa multiplicada pel quadrat de la velocitat, $E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$.

energia mecànica *f* Energia deguda a la posició o al moviment d'un objecte, igual a la suma de l'energia cinètica i la potencial.

energia potencial *f* Energia deguda a la posició d'un cos en un camp de forces.

energia potencial gravitatòria *f* Energia potencial que té un cos per la posició que ocupa en un camp gravitatori. En el cas de calcular-se a prop de la superfície de la Terra és $E_p = mgh$.

equacions de moviment *f pl* Dependència temporal de les coordenades del vector de posició (o de la velocitat, o de l'acceleració) d'un objecte que es mou.

equilibri mecànic *m* Estat d'un objecte o d'un sistema en què les forces aplicades s'anul·len entre sí i no hi ha acceleració. (L'estat més general d'equilibri requereix també l'absència de rotacions.)

escalar *adj* Dit d'una magnitud física, com la massa, el volum o el temps, que queda totalment especificada per un número.

força *f* Qualsevol acció que tendeix a accelerar un objecte, com ara una empenta o un estirament. Es mesura en newton i és una magnitud vectorial.

força centrípeta *f* Força dirigida cap al centre d'una trajectòria corbada o circular i que fa que la partícula segueixi la corba.

força d'acció *f* Força de la parella de forces d'acció-reacció que descriu la tercera llei de Newton.

força de reacció *f* Força de la parella de forces d'acció-reacció que descriu la tercera llei de Newton, igual en intensitat i de direcció oposada a la força d'acció.

força neta *f* Força resultant de la suma de totes les forces que actuen sobre un objecte.

força normal *f* Força que fa la superfície sobre la qual es recolza un objecte, que equilibra la component del pes en la direcció de la normal.

freqüència *f* Nombre de vibracions per unitat de temps d'un cos o medi que vibra. Es mesura en hertzs (Hz).

freqüència natural *f* Freqüència a què un sistema oscil·lant tendeix a vibrar si és pertorbat i si la força pertorbadora deixa d'aplicar-s'hi.

fricció *f* Força que actua per a resistir el moviment relatiu (o l'intent de moviment) d'un objecte sobre un altre amb què està en contacte.

fricció estàtica *f* Força entre dos objectes que estan en repòs relatiu, deguda a les forces de contacte que tendeixen a oposar-se al lliscament.

g *m* Símbol de **gram**.

g *m* Símbol de l'**acceleració de la gravetat**.

gram *m* Mil·lèsima part d'un quilogram.
sbl **g**

gravitació *f* Atracció entre objectes a causa de la seva massa.

hertz *m* Unitat de freqüència del Sistema Internacional, equivalent a una vibració per segon.
sbl **Hz**

Hz *m* Símbol de **hertz**.

inelàstic -a *adj* Qualitat d'un material que no torna a la forma original després d'haver-lo estirat o comprimit.

inèrcia *f* Resistència que presenta un objecte a canviar l'estat de moviment. La massa és una mesura de la inèrcia.

ingravidesa *f* Condició de caiguda lliure cap a la Terra o al voltant de la Terra, en què un objecte no experimenta cap força de suport (i no fa cap força sobre una bàscula).

interacció *f* Acció mútua entre objectes en què cada objecte exerceix una força sobre l'altre i les dues forces són iguals i oposades.

interval de temps *m* Temps que transcorre entre dos instants donats.

inversament proporcional *loc* Dit de dues magnituds que canvien en sentit oposat: quan una augmenta l'altra disminueix.

J *m* Símbol de **joule.**

joule *m* Unitat de treball i d'energia del Sistema Internacional, equivalent al treball que fa una força d'un newton que s'exerceix sobre un objecte que es mou un metre en la direcció de la força.
sbl **J**

k *f* Constant d'una molla que obeeix la llei de Hooke, $F = -kx$.

k *m* Símbol de **quilo-**.

kg *m* Símbol de **quilogram**.

km *m* Símbol de **quilòmetre**.

kW *m* Símbol de **quilowatt**.

llei d'acció i reacció *f* Vegeu **tercera llei de Newton**.

llei d'inercia *f* Vegeu **primera llei de Newton**.

lleis de Newton del moviment *f pl* Conjunt de lleis bàsiques de la mecànica, formades per la primera, la segona i la tercera lleis de Newton.

m *m* Símbol de **metre**.

m *m* Símbol de **mil·li-**.

m *f* Símbol de **massa**.

M *m* Símbol de **mega-**.

magnitud *f* Propietat d'un cos o d'un sistema que es pot mesurar.

magnitud fonamental *f* Magnitud que es pren com a base per a definir totes les magnituds d'una disciplina. En el cas de la mecànica calen tres magnituds fonamentals: la massa, la longitud i el temps. Per a tota la física es prenen set magnituds fonamentals.

massa *f* Magnitud escalar positiva associada a tot objecte i que en mesura la inèrcia, igual al quocient entre la força que actua sobre l'objecte i l'acceleració que li produeix.
sbl ***m***

mega- *m* Prefix del Sistema Internacional per a indicar *un milió*.
sbl **M**

megajoule *m* Un milió de joules.
sbl **MJ**

metre *m* Unitat fonamental de longitud del Sistema Internacional.
sbl **m**

MHS *m* Vegeu **moviment harmònic simple**.

min *m* Símbol de **minut**.

minut *m* Interval de temps igual a la seixantena part d'una hora.
sbl **min**

MJ *m* Símbol de **megajoule**.

model *m* Representació d'un procés o d'una idea per a fer-la més comprensible.

moment lineal *m* Producte de la massa d'un objecte per la velocitat que té, $\vec{p} = m\vec{v}$.

moviment en *n* dimensions *m* Moviment que es pot descriure amb *n* coordenades.

moviment harmònic simple *m* Moviment vibratori o periòdic, com el d'un pèndol, en què la força que actua sobre el cos que vibra és proporcional al desplaçament respecte a la posició d'equilibri central i actua cap a aquesta posició.
sigla **MHS**

moviment lineal *m* Moviment al llarg d'una trajectòria rectilínia.

moviment no lineal *m* Moviment al llarg d'una trajectòria no rectilínia.

moviment oscillatori *m* Moviment cíclic a un costat i un altre de la posició d'equilibri, com el d'un pèndol.

moviment rotacional *m* Moviment de gir al voltant d'un eix o d'un punt.

moviment translacional *m* Moviment d'un objecte entre dos punts, en una trajectòria que no és circular.

moviment vibracional *m* Moviment d'un objecte endavant i endarrere al voltant d'un punt d'equilibri, en què l'objecte no es desplaça.

N *m* Símbol de **newton**.

newton *m* Unitat de força del Sistema Internacional, equivalent a la força que, aplicada a un quilogram de massa, produeix una acceleració d'un metre per segon cada segon,
$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \times 1\ \mathrm{m/s^2}$.
sbl **N**

normal *adj* En direcció perpendicular. La força normal actua en direcció perpendicular a la superfície sobre la qual es recolza un objecte.

ordre de magnitud *m* Exponent en la potència de 10 que dóna un valor múltiple de 10 més proper al valor de la magnitud (Per exemple, 892 és de l'ordre de magnitud de 10^3.)

oscil·lació *f* Moviment repetitiu (periòdic) a un costat i un altre de la posició d'equilibri d'un sistema.
sin. **vibració**.

paràbola *f* Trajectòria que segueix un objecte sobre el qual només actua la força de la gravetat i que no cau en línia recta al terra. La funció matemàtica que descriu la trajectòria és una paràbola.

partícula *f* Representació esquemàtica d'un objecte o d'un cos com un punt en l'espai.

període *m* Temps que triga a fer-se un cicle complet en un moviment oscil·latori. És la magnitud inversa de la freqüència.
sbl ***T***

pes *m* Força sobre un cos deguda a l'atracció gravitatòria de la Terra.

posició *f* Lloc que ocupa una partícula en l'espai.

potència *f* Ritme a què es fa o es transfereix energia. Treball que es fa o energia que es transforma per unitat de temps. Es mesura en watts.

primera llei de Newton *f* Llei que afirma que tot cos continua en l'estat de repòs o de moviment en línia recta i a velocitat constant, si no hi actua cap força neta que en canviï el moviment.
sin. **llei d'inèrcia**

proporcionalitat *f* Condició per la qual el quocient de dues magnituds a/b és constant per a qualsevol valor de les magnituds a i b.

quilo- Prefix del Sistema Internacional per a indicar *mil*, com en quilogram, quilowatt, etc.

quilogram *m* Unitat fonamental de massa del Sistema Internacional, igual a la massa d'un prototip internacional fabricat en platí i que es conserva a l'Oficina Internacional de Pesos i Mesures de Sèvres (França).
sbl **kg**

quilòmetre *m* Mil metres.
sbl **km**

quilowatt *m* Mil watts.
sbl **kW**

resultant *f* Vector resultat de la suma o combinació de dos o més vectors.

rotació *f* Moviment d'un objecte que gira sobre un eix que habitualment està localitzat dins l'objecte i que passa pel centre de masses.

s *m* Símbol de segon.

segon *m* Unitat fonamental de temps del Sistema Internacional.
sbl **s**

segona llei de Newton *f* Llei que afirma que l'acceleració que produeix una força neta sobre un cos és directament proporcional a la intensitat de la força neta, té la mateixa direcció i sentit que la força neta i és inversament proporcional a la massa del cos.

SI *m* Vegeu **Sistema Internacional**.

Sistema Internacional *m* Sistema d'unitats de mesura acceptat en gairebé tot el món i, especialment, entre els científics i els enginyers.
sigla **SI**

sistema *m* Conjunt de partícules, d'objectes o de cossos.

sistema de referència *m* Punt d'observació i sistema d'eixos de coordenades des del qual es pot descriure la posició i el moviment d'una partícula.

sistema de referència inercial *m* Sistema de referència en què les lleis de Newton es compleixen de manera exacta.

tangent *f* Línia que toca una corba només en un punt.

teorema treball-energia cinètica *m* Teorema que afirma que el treball que fa una força que actua sobre un objecte és igual a l'energia cinètica que guanya l'objecte.

tercera llei de Newton *f* Llei que afirma que quan un cos fa una força sobre un altre, el segon cos fa una força igual i contrària sobre el primer. Qualsevol força d'acció té una reacció igual i oposada.
sin. **llei d'acció i reacció**

treball *m* Producte de la força que actua sobre un objecte i la distància en què es mou en la direcció de la força aplicada.

vector *m* Representació d'una magnitud vectorial mitjançant una fletxa que n'indica la direcció i el sentit. La longitud de la fletxa representa el valor de la magnitud. El punt d'on surt la fletxa indica el punt en què està aplicada la magnitud.

vectorial *adj* Magnitud física que es representa amb un vector i, per tant, té mòdul, direcció i sentit. Són exemples de magnituds vectorials la força, la velocitat o l'acceleració.

velocitat *f* Distància recorreguda sobre la trajectòria per unitat de temps. Té també una direcció i un sentit.

velocitat instantània *f* Velocitat en qualsevol instant de temps.

velocitat mitjana *f* Distància recorreguda per unitat de temps en un interval de temps.

velocitat relativa *f* Velocitat que té un objecte respecte a un altre.

vibració *f* Vegeu **oscil·lació**.

W *m* Símbol de **watt**.

watt *m* Unitat de mesura de potència del Sistema Internacional, equivalent a la potència que es desenvolupa quan es fa un treball d'un joule en un segon, 1 W = 1 J/s.
sbl **W**

xoc elàstic *m* Vegeu **col·lisió elàstica.**

xoc inelàstic *m* Vegeu **col·lisió inelàstica.**

Bibliografia

Bibliografia utilitzada

En l'elaboració d'aquests materials s'ha fet servir, principalment, la bibliografia següent:

Arons, A. B. (1990) *A guide to Introductory Physics Teaching*. Nova York: Wiley & sons.

Becerra Labra, C. (2004) *La enseñanza de la mecánica newtoniana con una estructura problematizada en el primer curso universitario: Efectos sobre el clima del aula, el aprendizaje conceptual y la capacidad para la resolución de problemas*. Tesi doctoral. Universitat d'Alacant.

Becerra Labra, C.; Gras Martí, A.; Martínez Torregrosa, J. (2004). "Análisis de la resolución de problemas de física en secundaria y primer curso universitario en Chile". *Enseñanza de las Ciencias*. (22, núm. 2, pàg. 275-285).

Domènech, J. L. (2000). *L'ensenyament de l'energia en l'educació secundària. Anàlisi de les dificultats i una proposta de millora*. Tesi doctoral. Universitat de València.

Giancoli, D. C. (1995). *Physics: Principles with Applications*. Pearson.

Landau, L.; Ajiezer, A.; Lifshitz, E. (1979). *Curso de Física General*. Editorial Mir.

López-Gay, R. (2001). *La introducción y utilización del concepto de diferencial en la enseñanza de la Física*. Tesi doctoral: Universidad Autónoma de Madrid.

Martínez Sancho, V. (1991). *Fonaments de física*. Barcelona: Enciclopèdia Catalana, cop.

McDermott, L. C.; Schaffer, P. S. (1998), *Tutorials in introductory Physics and homework manual package*. Nova York: Pearson Education.

Mosca, G.; Kyker, G. C. (1991). *Study Guide to accompany Paul A. Tipler - Physics for Scientists and Engineers*. Nova York: Worth Publishers.

Price, K.; Kelly, G. (2000). *Success at AQA AS*, Oxford: Oxford University Press.

Bibliografia recomanada

L'estudiant que vulgui aprofundir en alguns dels temes tractats en aquesta part de l'assignatura, o que desitgi fer més exercicis, pot consultar algun dels molts texts de física general que hi ha en qualsevol biblioteca universitària. Per a esmentar-ne un, citarem el de Tipler:

Tipler, P. A. (1994). *Física*. (Traducció de la 3a edició nordamericana). Barcelona: Editorial Reverté ("Scriptorium").

Si voleu fer lectures que us poden ajudar a entendre la mecànica, sense l'ajut de fórmules, consulteu per exemple:

Hewitt, P. G. (2007). *Conceptual Physics*. Addison-Wesley.

Webgrafia

Els temes de mecànica es tracten en un gran nombre de pàgines web, tant amb hipertextos digitals com amb simulacions de processos. No tindreu cap problema en trobar-ne amb una recerca simple per Internet.

Per a esmentar-ne només algunes:

- Animacions de física i matemàtiques del prof. D. Harrison, traduïdes al català, en: http://www.meet-physics.net/David-Harrison/index_cat.html.
- Un recull d'animacions diverses, Inspire, d'EUN (European Schoolnet): http://ca.inspire.eun.org/index.php/P%C3%A0gina_principal.

- Podeu també consultar un curs complet de física per Internet, amb centenars d'animacions i simulacions, del prof. Ángel Franco: *Curso Interactivo de Física en Internet*:
  http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/

- Traduït al català en:
  http://meet-physics.net/AFco-catala/index.html).