El càlcul de la rendibilitat

Joan Pasqual Rocabert

PID_00194320

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

Manejar amb certa soltesa els elements més bàsics de les matemàtiques financeres, utilitzant-los com a instrument addicional per a prendre decisions, comporta certs avantatges. A la pràctica, augmenta la qualitat de la conceptualització que, necessàriament, es duu a terme com a etapa prèvia a la presa de decisions. Per tant, l'elecció es durà a terme en millors condicions.

De vegades, la matemàtica financera pren un aspecte tan poc atractiu que algunes persones experimenten certa repulsió en el primer contacte. Amb independència de l'aspecte formal, la veritat és que es tracta de manejar amb rigor conceptes quotidians, la qual cosa no té res de difícil si se segueix el camí adequat. En particular, fórmules i conceptes com el *valor actual* o la *taxa interna de rendiment* –el que els bancs a Espanya anomenen *taxa anual equivalent* (TAE)– no són esotèrics en absolut i, sens dubte, resulten molt útils.

En aquest text trobareu una via còmoda per a endinsar-vos en aquest petit món de les finances elementals que, a manera d'una visita guiada, vol facilitar l'aprenentatge. Perquè no incorreu en costos innecessaris, s'acompanya amb un full de càlcul que s'ocuparà de la part avorrida: el càlcul de fórmules.

Emprant un full de càlcul és fàcil observar les característiques financeres bàsiques d'un projecte, comparar-lo amb les alternatives disponibles i determinar si és o no desitjable executar-lo, d'acord amb el criteri de rendibilitat que es prefereixi. Així mateix, la informació que proporciona el full de càlcul resulta útil per a facilitar la comprensió de què són en realitat, com es comporten i com s'interpreten les característiques rellevants d'un projecte; per aquest motiu, és recomanable començar aquesta visita guiada pels indicadors de desitjabilitat d'un projecte tenint a mà el full de càlcul.

Aquest text es pot seguir de diverses maneres depenent de quina és la informació de què ja es disposa, quin nivell es vol aconseguir i el mètode de treball que prefereix cadascú:

- Una introducció elemental i ràpida (nivell I): capítols 1, 4, 5, 7, 10, 11, 14, 15 i 16

- Una informació més completa (nivell II): afegiu-hi els capítols 2, 3, 6, 8, 9, 12, 17 i 18

- Un estudi més avançat (nivell III): afegiu-hi els capítols 13, 19, 20 i 21

- Els capítols restants conformen el nivell IV.

Per a refrescar conceptes, passeu sense entretenir-vos pels nivells que us siguin familiars, però assegurant-vos que manegeu amb agilitat els conceptes que van apareixent i que sabríeu resoldre els exercicis que es plantegen. En qualsevol cas, es pot seguir el camí convencional, començar pel capítol u, continuar amb el dos, etc., o bé treballar els capítols seguint l'ordre marcat pels nivells, o sigui començar amb els capítols del nivell I, continuar amb els del nivell II i acabar amb els del nivell III i IV.

1. El valor del temps: una qüestió de preferències (nivell I)

El temps és or, diuen. De fet, un consumidor estarà disposat a pagar més o menys per un bé de consum depenent de *quan* en pugui disposar. Es considera, per regla general, que les preferències dels individus són tals que, posats a triar, resulta més desitjable consumir avui que demà. Per això mateix, quan en lloc de béns es tracta del contrari, l'individu preferirà ajornar l'acció que provoca desutilitat en lloc d'executar-la immediatament.

A l'Espanya dels feliços anys seixanta, si un pretenia adquirir un Seat 600 havia d'esperar diversos mesos; tants, que va florir un mercat més o menys legal de drets de compra de l'anhelat cotxet. Els consumidors més impacients pagaven amb gust una quantitat addicional en aquest mercat peculiar per evitar l'espera. L'important aquí és que aquesta impaciència és una font de valor i es pot quantificar.

L'aspirant a propietari del 600 prefereix disposar de l'automòbil ara (període 0) que esperar un any (període 1). Si pagaria 1.000 euros pel cotxe l'any 0, perquè li resulta indiferent tenir el cotxe en el moment actual (0) o en el següent (1), l'any 1 hauria de rebre el cotxe més una quantitat de diners que el compensés per l'espera, 170 euros, per exemple.

Nota

Se suposa que no hi ha inflació per simplificar. La inflació s'introdueix en l'apartat "El VAN no depèn de la inflació".

En aquestes condicions, al consumidor li és indiferent disposar de 1.000 euros l'any 0 (projecte I) o tenir 1.170 euros l'1 (projecte II); les preferències de l'individu entre consum present i consum futur per a aquest bé concret es poden expressar, doncs, com una relació d'indiferència entre els projectes I i II:

Períodes	0	1	Preferències
Projecte I	1.000	0	Indiferència entre els
Projecte II	0	1.170	projectes I i II

Si es coneixen les preferències, el valor específic de la taxa de descompte intertemporal del consumidor que és rellevant per a aquest tipus de béns es calcula amb facilitat. Suposem que D és la seva taxa de descompte; per al consumidor, la quantitat de 1.170 euros en el període 1 és igual a 1.000 euros en el 0, la qual cosa significa que s'està donant menys pes o importància al que ocorre en el període 1 pel simple fet que succeeix més tard; concretament, aquest pes més petit es reflecteix en el factor de ponderació $1/(1 + D)$, que és inferior a 1 per a tot D més gran que 0. L'operació de ponderar els impactes o valors econòmics segons el temps, de manera que siguin equivalents a una altra quantitat que es produís en el període actual (el 0), es denomina *actualització*. Així, el valor

Vegeu també

Vegeu l'apartat "El valor actual (VA)."

actual de 1.170 euros l'any 1 és de 1.170/(1 + D) euros **per a aquest consumidor**. Les seves preferències assenyalen que hi ha igualtat entre els 1.000 euros del moment 0 i el valor actual dels 1.170 euros del període 1, això és:

$$1.000 = 1.170/(1+D) \qquad (1)$$

de la qual:

$$\begin{aligned} (1+D) &= 1.170/1.000 \\ D &= 0{,}17 = 17\% \end{aligned} \qquad (2)$$

La taxa D trobada mesura la impaciència relativa del consumidor, la utilitat més gran per no demorar el consum. Com més gran sigui la taxa, més intensa és la preferència pel consum actual. Una taxa nul·la reflecteix indiferència entre consum present i futur, mentre que amb una taxa infinita l'individu preferirà consumir només en el període actual.

El funcionament de la taxa D és molt simple. Per exemple, suposem el mateix consumidor d'abans que rep un regal en el moment actual, per valor de 3 euros i un altre en el període següent per valor de 5,85 euros. És clar que el valor total d'aquests dos regals **no és igual a** 3 + 5,85 = 8,85 perquè les preferències d'aquest consumidor típic donen més importància al que ocorre avui que al que succeirà demà, tant per la impaciència pel consum com per la possibilitat d'invertir. Si, com que és obligat, es té en compte el factor temps, la valoració d'aquests dos regals en termes del moment actual serà de 3 euros més els 5,85 euros *actualitzats*, o sigui ponderats pel factor de descompte temporal $1/(1+D)$, la qual cosa dóna un *valor actualitzat* (VA) de 3 + 5,85/1,17 = 8 euros. Dit d'una altra manera, al consumidor li és indiferent rebre ara mateix un regal per valor de 8 euros o bé 3 euros ara i 5,85 al cap d'un període, perquè 8 euros és el valor actual de 3 euros en el moment 0 juntament amb 5,85 euros en l'1, ateses les preferències d'aquest consumidor.

Suposeu ara que l'individu en qüestió no disposarà de diners per a comprar el Seat 600 fins al període 1, però pot demanar un crèdit al tipus r per període. Si r és inferior al 17%, el consumidor augmentarà la seva utilitat comprant el cotxe a crèdit, perquè el seu guany subjectiu per anticipar el consum és del 17% (D = 0,17) i el cost d'aquest avançament és més petit ($r < D$). Si el tipus d'interès del crèdit supera el 17% ($r > D$), preferirà esperar-se fins al període 1 i si r és igual al 17% ($r = D$) li seran indiferents les dues opcions. Suposem que r = 10%, per exemple; com que $r < D$, el consumidor contractarà un crèdit per anticipar el consum, disposarà del cotxe en el període 0 i haurà de pagar el preu del cotxe més els interessos corresponents en el període 1, la qual cosa representa un total de 1.100 euros El consumidor guanya amb aquesta operació de crèdit perquè el pagament en el període 1 és de 1.100 euros quan estaria disposat a pagar fins a un màxim de 1.170 euros.

Que el consumidor disposi de prou diners per a pagar al comptat no significa que prefereixi sempre consumir en el període actual. Si aquest individu té l'oportunitat de dur a terme una inversió que proporciona una rendibilitat de r*%, el *cost d'oportunitat* per consumir ara en lloc d'invertir en el període 0 i consumir en l'1 és del r*% i, en termes nets, aquest cost és de (D - r*). Per tant, el consumidor triarà consumir ara si r* < D, mentre que optarà per invertir i ajornar el consum fins al període següent quan r* > D.

Quan s'està treballant amb béns que es compren i es venen amb diners, el problema sempre és molt simple (les taxes r i D són reals, no nominals):

- Consumir avui o demà. Si un individu pot aconseguir un crèdit al tipus r per període, li serà indiferent disposar de M unitats monetàries avui o bé de M · (1 + r) unitats en el període següent. En conseqüència, li interessarà un crèdit per a consum si el cost r és inferior a la seva taxa de preferència temporal D.

- Quan s'ha d'invertir. Si una inversió proporciona un benefici del r*% (vegeu la secció 10), és natural pensar que l'operació no serà interessant tret que el cost r del capital que es necessita sigui inferior a aquest r*% de rendibilitat.

Vegeu també

Vegeu l'apartat "La rendibilitat d'un projecte segons el VAN".

- Consumir o invertir. S'invertirà quan la rendibilitat r* d'aquest projecte superi la taxa de descompte D del consumidor que mesura la impaciència pel consum (suposant que la rendibilitat r* de la inversió és més gran que el cost del capital r).

2. El valor actual (VA) (nivell II)

S'assumeix que és més important el que ocorre en el present que la mateixa cosa situada en un moment futur i, a mesura que un fet s'allunya en el temps, s'hi assigna una importància o ponderació més petita. Dit d'una altra manera, els factors de ponderació d'un impacte qualsevol disminueixen de manera exponencial respecte al temps t, t = 0, 1, ..., T en el qual es produeix. Si es disposa d'una quantitat de diners a_0 (positiva o negativa) en el moment 0, d'a_1 en l'1, d'a_2 en el 2, i així successivament fins a arribar a la quantitat T que es produeix en moment final T, la importància de cadascuna d'aquestes quantitats decreix a mesura que s'allunyen en el temps. Si la taxa de descompte és r, la ponderació de les quantitats anteriors (fluxos) és d'1 per a a_0, d'$1/(1+r)$ per a a_1, d'$1/(1+r)^2$ per a a_2, … i d'$1/(1+r)^T$ per a l'últim flux a_T. Aquestes quantitats ponderades (*actualitzades*) ja es poden sumar i s'obté el valor actual (VA), que val:

$$VA = a_0 + a_1/(1+r) + a_2/(1+r)^2 + a_3/(1+r)^3 + \ldots + a_T/(1+r)^T$$

En resum:

Valor actual

Períodes	0	1	2	...	T – 1	T
Fluxos	a_0	a_1	a_2	...	a_{T-1}	a_T
Ponderació	1	1/(1 + r)	-	...	1/(1 + r)T – 1	1/(1 + r)T
Valor actual	$a_0 + a_1/(1 + r) + a_2/(1 + r)2 + \ldots + a_{T-1}/(1 + r)T - 1 + a_T/(1 + r)T$					

El valor actual (VA) dels fluxos a_0, a_1, ..., $_T$ és de:

$$VA = a_0 + a_1/(1+r) + a_2/(1+r)^2 + \ldots + a_{T-1}/(1+r)^{T-1} + a_T/(1+r)^T \qquad (3)$$

Per exemple, si r = 10%, el VA de:

Períodes	0	1	2	3
Fluxos	–100	–10	100	1.000

es calcula:

Períodes	0	1	2	3
Fluxos	–100	–10	100	1.000
Ponderació	1	1/(1 + 0,1) = 0,90909	1/(1 + 0,1)2 = 0,82645	1/(1 + 0,1)3 = 0,75131
Valor actual = 724,87 =	–100 –9,0909 +82,645 +751,31			

o sigui:

$$VA = -100 - 10/1{,}1 + 100/1{,}1^2 + 1000/1{,}1^3 = 724{,}87 \qquad (4)$$

Dit d'una altra manera, a partir de les quantitats a_0, a_1, ..., a_T, cadascuna de les quals referida a un període diferent en el temps (0, 1, ..., T, respectivament), es calcula una única quantitat referida al moment 0 (l'actual). Aquesta quantitat, que és el VA, resulta **equivalent** en termes econòmics als fluxos originals periodificats a_0, a_1, ..., a_T, com es mostra en el gràfic:

a_0 ↓	a_1 ↓	a_2 ↓	a_3 ↓	... ...	a_{T-2} ↓	a_{T-1} ↓	a_T ↓
0 ↑ VA	1	2	3	...	T – 2	T – 1	T

que amb les dades de l'exemple anterior seria:

–100 ↓	–10 ↓	100 ↓	1.000 ↓
0 ↑	1	2	3
VA = 724,87			

Quan es calcula el VA dels fluxos a_0, a_1, ..., a_T i aquests fluxos reflecteixen els saldos entre tots els beneficis i costos d'una operació econòmica, llavors el VA rep la denominació de *valor actual net* (VAN).

Reprenent el cas del comprador del 600, l'expressió:

$$1.000 = 1.170/(1+D) \qquad (5)$$

que s'havia trobat en l'apartat "El valor del tiempo: una cuestión de preferencias" és la mateixa que sorgiria de calcular el VAN dels projectes A i B següents:

	0	**1**
A	–1.000	1.170
B	1.000	–1.170

Si s'expressen les preferències del consumidor en la forma A, el que diu és que renunciaria a 1.000 euros en el moment 0 si li garanteixen que percebrà com a mínim 1.170 euros en l'1. Amb la forma B, es diu el mateix d'una altra manera: el consumidor pagaria 1.170 euros com a màxim en el període 1 a canvi de disposar de 1.000 euros immediatament. El VAN dels projectes A i B, calculats a la taxa D, valen:

$$\begin{aligned} &\text{VAN}(\text{A};\ \text{D}\%) = -1.000 + 1.170/(1+\text{D}) = \\ &= \text{VAN}(\text{B};\ \text{D}\%) = 1.000 - 1.170/(1+\text{D}) = \qquad (6) \\ &= 0 \text{ para D} = 17\% \end{aligned}$$

En altres paraules, la taxa de preferència temporal del consumidor és de D = 17%, com ja sabíem.

3. El valor actual (VA) depèn del temps (nivell II)

Una quantitat qualsevol –una obligació o un dret, si es vol– té molta menys importància com més allunyat estigui del moment actual i com més gran sigui la taxa de descompte. És perfectament normal que algú estigui més preocupat pel compte del restaurant que no admet demora, que per una obligació de pagament cent vegades més gran que s'ha de cancel·lar trenta anys més tard.

Suposem un flux qualsevol d'un projecte, com a_t, que pot ser positiu o negatiu. Si s'actualitza aquest flux –se'n calcula el valor actual (VA)– resulta un valor de $a_t/(1+r)^t$, per la qual cosa si $a_t > 0$, en actualitzar-lo, disminueix de valor i, per contra, $a_t < 0$, augmenta.

Prenent una taxa del 100% (r = 1), comproveu que el VA d'un impacte –un cost o un benefici– depèn també del moment (t) en què es produeix el flux, amb $a_t = 24$ en aquest cas. Com que la taxa és del 100% (r = 1), cada vegada que el flux at es desplaça un període cap al futur, el seu valor actual del flux es redueix a la meitat:

r = 1	VA(a_t; t = 1)	VA(a_t; t = 2)	VA(a_t; t = 3)	VA(a_t; t = 4)	VA(a_t; t = 5)	VA(a_t; t = 10)
at = 24	a_1 = **12**	a_2 = **6**	a_3 = **3**	a_4 = **1,5**	a_5 = **0,75**	a_{10} = **0,023**

El que ocorre en l'exemple anterior no és fruit de l'atzar. Qualsevol flux futur, sigui del signe que sigui, és menys important que si es produís en el moment actual. Per aquest motiu, si es pogués escollir, se situarien tots els fluxos positius en el moment actual i tots els negatius en el període més llunyà possible; d'aquesta manera el VA seria màxim.

Com que el creixement (o decreixement) d'un capital a una taxa determinada no és proporcional sinó exponencial respecte al temps, és interessant disposar d'una regla per a visualitzar aquest efecte. Amb la *regla del 69* es determina quin és el temps T* que ha de transcórrer per a duplicar el capital invertit K a una taxa r.

La *regla del 69*. El plantejament és simple: si s'inverteix un capital K a una taxa r durant T anys s'obté un total acumulat de K':

$$K(1+r)^T = K' \qquad (7)$$

Com que el que es vol és duplicar el capital, K' ha de ser igual a 2K, per la qual cosa s'ha de complir que:

$$\begin{aligned}
K(1+r)^T &= 2K \\
(1+r)^T &= 2 \\
T\cdot\ln(1+r) &= \ln 2 \\
\boxed{T = \ln(2)/\ln(1+r)} & \qquad (8) \\
T &= 0{,}693147/\ln(1+r) \\
T &= 69/\ln(1+r)
\end{aligned}$$

arrodonint i prenent r en tant per cent. Com que ln (1+r) és aproximadament igual a r per a valors petits de r, l'expressió anterior es pot substituir per l'aproximació lineal:

$$T = 69/r \qquad (9)$$

en què r s'expressa en %. No obstant això, s'usa més la fórmula:

$$T = 70/r \qquad (10)$$

ja que facilita el càlcul mental i és una mica més precisa. Així, són necessaris setanta anys per a duplicar el capital inicial quan la taxa d'acumulació r és de l'1%, mentre que si la taxa és del 7%, n'hi ha prou amb deu anys perquè es multipliqui per dos la quantitat invertida i si el PIB d'un país creix a una taxa del 3,5%, al cap de vint anys aproximadament el PIB s'haurà doblat. A continuació, es mostren alguns valors calculats mitjançant la fórmula exacta (*):

Temps T* necessari el capital per duplicar inicial invertit a la taxa r

Taxa r	1%	2%	3%	5%	7%	8%	9%	12%	15%	19%	26%	32%	41%	59%	100%
T*	70	35	23,5	14	10,2	9	8	6	5	4	3	2,5	2	1,5	1

4. Tipus de projectes (nivell I)

El primer pas per a avaluar un projecte consisteix a esbrinar el tipus d'operació economicofinancera de què es tracta. Hi ha quatre tipus bàsics de projectes: inversions, crèdits, regals i pèrdues. En una primera aproximació, aquestes operacions es poden descriure com segueix:

Tipus bàsics de projectes

Regal	$\Leftrightarrow$ Tots els fluxos són no negatius i almenys un és estrictament positiu
Pèrdua	$\Leftrightarrow$ Tots els fluxos són no positius i almenys un és estrictament negatiu
Inversió	$\Leftarrow$ Tots els costos es produeixen abans que els beneficis
Crèdit	$\Leftarrow$ Tots els beneficis es produeixen abans que els costos

Com deveu haver notat, mentre que la definició de *regal* i *pèrdua* és completa, perquè inclou les condicions necessàries i suficients ($\Leftrightarrow$), la d'*inversió* i *crèdit* no ho és, perquè no indica les condicions necessàries ($\Rightarrow$), només mostra les suficients ($\Leftarrow$). Les condicions necessàries i suficients per a caracteritzar una inversió i un crèdit les desenvoluparem en les seccions següents.

Una *inversió* és l'operació contrària a un *crèdit*. Un *regal* és una operació contrària a una *pèrdua*.

Comproveu que els projectes A, B, C i D estan correctament caracteritzats:

	0	**1**	**2**	**Tipus d'operació**
A	–10	–10	25	Inversió
B	10	10	–25	Crèdit
C	10	10	25	Regal
D	–10	–10	–25	Pèrdua

Observeu ara que en multiplicar per menys u tots els fluxos d'un projecte, s'obté l'operació contrària (es passa d'inversió a crèdit i de regal a pèrdua i viceversa):

	0	1	2	Tipus d'operació
–A	10	10	–25	Crèdit
–B	–10	–10	25	Inversió
–C	–10	–10	–25	Pèrdua
–D	10	10	25	Regal

Si els projectes tenen la característica de regal o de pèrdua, tots els fluxos tenen el mateix signe, positiu en els regals i negatiu en les pèrdues, per la qual cosa la caracterització és immediata a simple vista. Comproveu que els projectes K i A són *regals*, mentre que L i I són *pèrdues*:

	0	1	2	3	4	5	Tipus d'operació
K	1	1	7	0	3	3	Regal
A	1						Regal
L	–1	–1	0	–1	0	–8	Pèrdua
I					–3	–3	Pèrdua

Per contra, quan es tracta d'inversions i crèdits, alguns fluxos del projecte són positius i d'altres negatius i la característica d'inversió i crèdit no sempre és òbvia. Quan tots els fluxos d'un projecte tenen un mateix signe i, a partir d'un període determinat, el canvien però mantenen el signe nou fins al final, no hi ha cap ambigüitat. Caracteritzeu els projectes:

	0	1	2	3	4	5	Tipus d'operació
A	–1	1	7	0	0	2	
B	–1	0	–2	–1	–9	3	
C	1	1	0	1	1	–9	**Crèdit**
D	8	0	0	–3	–3	–3	**Crèdit**

Els projectes A i B són inversions i els C i D, crèdits. No hi ha ambigüitat en la classificació perquè els fluxos d'aquests projectes **canvien de signe una sola vegada**. Quan els fluxos del projecte presenten més d'un canvi de signe, determinar si és una inversió o un crèdit deixa de ser intuïtiu i requereix alguns càlculs.

Tant en avaluar un projecte d'inversió com en mesurar un impacte determinat, convé tenir present que cap decisió no és innòcua i que la transcendència de l'elecció depèn sempre de les alternatives concretes existents. La proposta que s'examina s'ha de comparar amb **la millor** de totes les altres alternatives factibles. Davant un projecte d'inversió pública (el cas privat és simètric), el conjunt d'alternatives explícites o implícites de què es disposa en general és:

- Executar el projecte d'inversió que s'està avaluant.
- Executar un altre projecte d'inversió (públic o privat).
- Transferir els recursos al sector privat perquè siguin invertits.
- Consumir en lloc d'invertir (en el sector públic o en el privat).
- La inacció, deixant ociosos els recursos.

Nota

Com deveu haver observat, optar per la darrera alternativa (seria el criteri del "gos de l'hortolà"– ja sabeu, no menja ni deixa menjar–; seguir-lo comporta una pèrdua neta per al conjunt de l'economia) té poc sentit, tret que s'incorri en el cost d'oportunitat que significa la demora per a dur a terme una millor inversió en el futur, i tan rendible que mereixi suportar el cost de l'espera.

5. El valor actual (VA) depèn de la taxa de descompte r (nivell I)

La taxa de descompte mesura la importància de disposar d'un saldo avui en lloc de demà. Així, si la taxa és del 100% $(r = 1)$, significa que el valor de 2.000 euros en el període 1 equival a $2.000/(1+r) = 1.000$ euros en el període zero. Si en el període dos $(t=2)$ el saldo d'un projecte val 24 $(a_2 = 24)$ i la taxa de descompte és del 100% (r = 1), el VA de 24 en el període 2 és inferior, val $24/2^2 = 6$. Però si en lloc de 24 tinguéssim un saldo de -24 en el mateix període $(a_2 = -24)$, llavors el VA corresponent augmenta, ja que $-24/2^2 = -6$. Comproveu que la importància d'aquest efecte d'augment o disminució sobre un flux original que val 24 en el moment $t = 2$ depèn de la taxa de descompte:

t = 2	VA(r = 0%)	VA(r = 10%)	VA(r = 20%)	VA(r = 50%)	VA(r = 100%)	VA(r = 200%)
a_2 = 24	**24**	**19,83**	**16,67**	**10,67**	**6,00**	**2,67**

Com que com més alt sigui el VA, millor, **sembla** que l'ideal seria que, atesos uns fluxos periodificats, la taxa de descompte r fos sempre tan baixa com fos possible, si els fluxos són positius, i tan alta com fos possible si els fluxos són negatius. Com veurem de seguida, pot ocórrer qualsevol cosa: en primer lloc, comprovarem que la suposició es compleix i, en segon lloc, que és necessari matisar. Per exemple, suposem que el projecte d'inversió és:

1	2
–7	15

Si la taxa de descompte és constant i val $r = 0,1$, resulta:

$$VA(r = 0,1) = -7/(1+0,1) + 15/(1+0,1)^2 = 6,03 \qquad (11)$$

Però la taxa no sempre serà constant. Pel que hem dit, si les taxes fossin de $r_1 = 0,11$ en el període 1 i de $r_2 = 0,09$ en el segon, el VAN seria més alt que amb $r_1 = 0,1 = r_2 = 0,1$ ja que val:

Per això mateix, el VA corresponent a les taxes $r_1 = 0,09$ i $r_2 = 0,11$ serà més baix que el VA calculat a una taxa constant de $r_1 = 0,1 = r_2 = 0,1$, que resulta:

$$VA(r_1 = 0,09,\ r_2 = 0,11) = -7/(1+0,09) + 15/[(1+0,09)\cdot(1+0,11) = 5,98 \qquad (12)$$

Si el projecte fos l'invers de l'anterior, o sigui:

1	2
7	-15

llavors es trobaria el resultat simètric, i seria preferible una taxa més baixa en el primer període, perquè el flux és positiu, i més alta en el segon, ja que el flux és negatiu.

Es tracta ara de veure que la suposició de la qual s'ha partit no és del tot correcta. És a dir, **no és cert** que el VA augmenti sempre que augmenta la taxa de descompte en els períodes amb fluxos negatius i disminueix en els positius, perquè el que compta és el factor de ponderació del flux de cada període. Utilitzant el mateix projecte, amb $r_1 = 0{,}1$ i $r_2 = 0{,}1$, , resulta un VA inferior, en lloc de superior com es pressuposava:

$$VA\left(r_1 = 1, r_2 = 0{,}1\right) = -7/(1+1) + 15/[(1+1)\cdot(1+0{,}1)] = 3{,}32 \qquad (13)$$

La raó d'aquest resultat és clara, la taxa de qualsevol període afecta el flux en aquest període i tots els que el segueixen, amb la qual cosa el factor d'actualització del flux canvia i el que marca la importància d'un flux és precisament aquest factor de ponderació, no la taxa del període. Quan la taxa de descompte és constant no hi ha cap conflicte: la ponderació és inferior si la taxa és superior i viceversa.

En resum:

1	**2**	VA($r_1 = r_2 = 10\%$)	VA($r_1 = 11\%$, $r_2 = 9\%$)	VA($r_1 = 9\% = r_2 = 11\%$)	VA($r_1 = 100\% = r_2 = 10\%$)
–7	15	6,03	6,09	5,98	3,32
7	–15	–6,03	–6,09	–5,98	–3,32

Una altra vegada, l'exemple que acabem d'exposar serveix per a presentar un cas general. Donada una taxa de descompte constant, quan es tracta d'una inversió, el VA disminueix amb la taxa de descompte i, si es tracta d'un crèdit, el VA augmenta amb la taxa.

Per aquest motiu, quan no és clar si un projecte que presenta fluxos positius i negatius té la característica de crèdit o d'inversió, cal recórrer a aquesta propietat per a diferenciar-los. Com que la funció VA no sempre serà monòtona (o sempre creix o sempre decreix), és necessari observar les variacions del VA com a conseqüència d'augments marginals de la taxa.

Una manera còmoda d'operar consisteix a trobar el VA i tornar-lo a calcular augmentant la taxa en un 1%(o un 1‰) i observar si el VA creix o decreix.

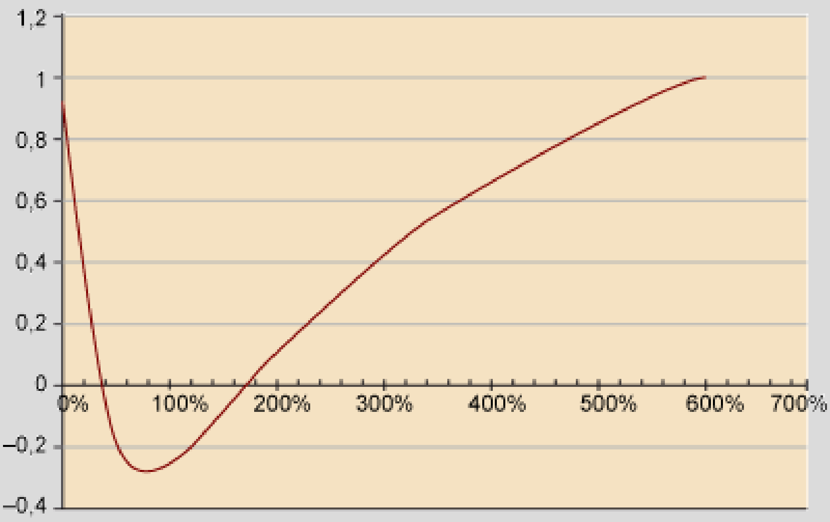
Considereu el projecte següent:

0	1	2
2	–8	7

Com que té més d'un canvi de signe, la caracterització com a inversió o crèdit no és òbvia. Fent servir la regla de caracterització que depèn de si el VA creix o no, resulta que el VA decreix per a taxes entre 0% i 75% i creix a partir del 75%. Per tant, aquest projecte es comporta com una inversió per a taxes inferiors al 75% i com un crèdit per a taxes iguals o superiors al 75%.

Per exemple, per a una taxa de r = 10% resulta VA(r = 0,1) = 0,5124 i amb r = 10,1% el VA disminueix, ja que VA(r = 0,101) = 0,5085, i per tant per a r = 10%, el projecte es comporta com un crèdit; per a una taxa de r = 80%, VA(r = 0,8) = -0,2840 i si la r fos una mica més gran, com ara r = 80,8%, llavors el VA és menys negatiu, VA(r = 0,808) = -0,2834, augmenta, per la qual cosa en el punt r = 0,8 el projecte es comporta com un crèdit.

Examineu la representació gràfica d'aquest projecte:



En resum, atès un projecte amb alguns fluxos positius i altres de negatius i una taxa de descompte constant i no negativa:

Resum

- Si en augmentar marginalment la taxa r, el VA disminueix es tracta d'una **inversió**.
- Si en augmentar marginalment la taxa r, el VA augmenta es tracta d'un **crèdit**.

6. El VAN com una funció contínua de la taxa de descompte r (nivell II)

Donat un projecte qualsevol, que està caracteritzat per uns fluxos periodificats, K_0, K_1, K_2, ..., K_T, (saldos nets):

0	1	2	...	T
K_0,	K_1,	K_2,	...	K_T,

el VAN és una funció contínua de la taxa de descompte:

$$VAN(K_t, r) = K_0 + K_1/(1+r) + K_2/(1+r)^2 + \ldots + K_T/(1+r)^T \qquad (14)$$

Per exemple, el VAN del projecte S, amb un *àmbit temporal* definit pels períodes 0, 1 i 2:

	0	1	2
S	–3	5	1

val:

$$VAN(S;\ r) = -3 + 5/(1+r) + 1/(1+r)^2 \qquad (15)$$

El projecte O té un àmbit temporal de 64 períodes (63 + 1), encara que la majoria de fluxos són iguals a zero.

Representant només els fluxos no nuls:

	0	2	35	63
O	–4	6	8	5

el VAN de O val:

$$VAN(O;\ r) = -4 + 6/(1+r)^2 + 8/(1+r)^{35} + 5/(1+r)^{63} \qquad (16)$$

El projecte L té també amb un àmbit temporal de 64 períodes, amb uns pocs fluxos amb valors no nuls i s'executa en el moment 1, amb un període de retard respecte al projecte de l'exemple anterior:

	1	2	35	63

L	2	–5	10	10

El seu VAN és de:

$$\text{VAN}(L;\ r) = 2/(1+r) - 5/(1+r)^2 + 10/(1+r)^{35} + 10/(1+r)^{63} \qquad (17)$$

Activitat

Calculeu alguns valors per al VAN(r) dels projectes S, O i L:

VAN(r)	r = 0	r = 0,1	r = 0,5	r = 1
S	3	2,37	0,778	–0,25
O	15	1,26	–1,33	–2,5
L	17	–1,93	–0,889	–0,25

Encara que es pren sempre com a punt per a calcular el valor actual el període 0 i, a més, l'habitual és que es defineixi com a inici dels projectes el període 0, aquesta última convenció es pot alterar a voluntat, ja que el càlcul del VAN admet que el signe dels períodes sigui positiu o negatiu, com en els projectes E, R i A:

	–3	–2	–1	0	1	2
E			–5	6	6	
R	2	2	0	0	2	–9
A			–6	12	–5	

La interpretació és immediata; el projecte R s'executa en el moment -3 i els projectes E i A s'inicien en el període -1. El VAN d'aquests projectes val, respectivament:

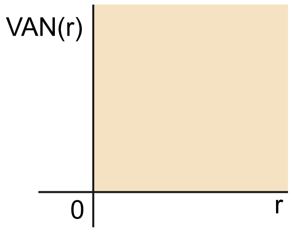
$$\text{VAN}(E;\ r) = -5\cdot(1+r) + 6 + 6/(1+r)$$
$$\text{VAN}(R;\ r) = 2\cdot(1+r)^3 + 2\cdot(1+r)^2 + 2/(1+r) - 9/(1+r)^2$$
$$\text{VAN}(A;\ r) = -6\cdot(1+r) + 12 - 5/(1+r)$$

Activitat

Calculeu alguns valors per al VAN(r) dels projectes E, R i A:

VAN(r)	r = 0	r = 0,1	r = 0,5	r = 1
E	7	5,95	2,5	–1
R	–3	–0,54	8,58	22,75
A	1	0,85	–0,33	–2,5

Representeu ara les dades de les funcions VAN(r) dels projectes {S, O, L, E, R, A} en la gràfica:



7. La taxa de descompte en el VAN (nivell I)

El VAN d'un projecte, sigui del tipus que sigui, existeix sempre. Com hem vist en les seccions anteriors, la funció VAN es pot emprar per a caracteritzar projectes quan la seva naturalesa no sigui evident. La caracterització del projecte és important perquè el paper que té la taxa de descompte (la r) en una inversió, per exemple, és molt diferent del corresponent a un crèdit.

El VAN d'una **inversió** disminueix a mesura que augmenta la taxa de descompte r (el pendent de la funció VAN és negatiu), ja que r representa el cost del capital, i com més alt és el cost, més petita la rendibilitat. El VAN comptabilitza el guany (pèrdua) total per dur a terme una inversió rendible (no rendible); expressa l'augment de la riquesa, en termes del moment present, que es deriva d'executar el projecte.

Quan es tracta d'un **crèdit**, el VAN augmenta amb la taxa de descompte (el pendent de la funció VAN és positiu). La taxa r representa el tipus d'interès de mercat (el preu del capital) i, atès un cost determinat del crèdit, conseqüència dels fluxos de cobraments i pagaments corresponents, com més gran sigui el tipus d'interès més favorable és la diferència entre el cost efectiu del crèdit i el que resultaria de concertar-lo al preu de mercat. El VAN reflecteix el guany (pèrdua) total per obtenir un crèdit (comprar capital) a un preu inferior (superior) al de mercat.

Quan l'operació té la característica de **regal**, el VAN decreix amb la taxa de descompte. La taxa representa aquí la disminució de valor d'un flux pel fet de no produir-se en el present sinó en un període futur, en tot o en part; el factor de descompte per a un període genèric t val $1/(1+r)^t$, com en qualsevol altre cas.

El mateix ocorre quan l'operació té característiques de **pèrdua**, si bé en aquest cas el VAN creix amb la taxa, ja que com més gran és la taxa, més petita és la pèrdua. El VAN expressa el valor total de la pèrdua si es produís en el moment actual.

En resum, donats uns fluxos periodificats i una taxa de descompte no negativa, les condicions necessàries i suficients per a caracteritzar una operació són les següents:

- **Inversió**. En augmentar la taxa r, el VAN disminueix. Els signes dels fluxos poden ser negatius o positius.

- **Crèdit**. En augmentar la taxa r, el VAN augmenta. Els signes dels fluxos poden ser negatius o positius.

- **Regal**. En augmentar marginalment la taxa r, el VAN disminueix. Els signes dels fluxos són tots positius.

- **Pèrdua**. En augmentar marginalment la taxa r, el VAN augmenta. Els signes dels fluxos són tots negatius.

El VAN del projecte d'inversió:

Períodes	0	1
Fluxos	–10	12

val:

$$VAN(r) = -10 + 12/(1+r) \qquad (18)$$

en què, si r = 0:

$$VAN(r = 0\%) = -10 + 12 = 2 \qquad (19)$$

i per a r = 0,2:

$$VAN(r = 20\%,) = -10 + 12/1,2 = 0. \qquad (20)$$

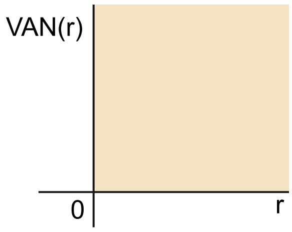
El VAN d'aquest projecte és positiu per a tots els valors de r inferiors al 20% $(r < 0{,}2)$, negatiu per a valors més grans que el 20% i el valor del VAN és zero quan la taxa de descompte és del 20%, $r = 0{,}2$. Com més gran és el valor de r (el cost del capital), més petit és el valor del VAN (això és, la rendibilitat de la inversió mesurada en termes absoluts, en quantitat total de dòlars per exemple):

0	1	VAN(0%)	VAN(10%)	VAN(15%)	VAN(20%)	VAN(25%)	VAN(30%)
–10	12	2,000	0,909	0,435	0,000	–0,400	–0,769

El VAN(r) decreix sempre amb la taxa de descompte perquè és un projecte d'inversió.

Activitat

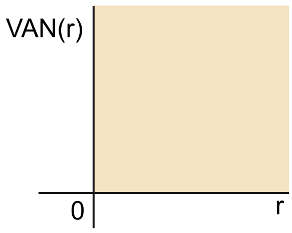
Representeu les dades anteriors en la gràfica:



Per a comprovar com varia el VAN segons la taxa de descompte r **en cada tipus d'operació**, utilitzeu el full de càlcul; aneu canviant el valor de la taxa r, calculeu el VAN corresponent i observeu si creix o decreix en augmentar la taxa de descompte:

	0	**1**	**Operació**	**VAN(10%)**	**VAN(20%)**	**VAN(30%)**	**Observacions**
F	–1	2	**inversió**	**0,818**	**0,667**	**0,538**	
I	1	–2	**crèdit**	**–0,818**	**–0,667**	**–0,538**	
L	1	2	**regal**	**2,818**	**2,667**	**2,538**	
O	–1	–2	**pèrdua**	**–2,818**	**–2,667**	**–2,538**	

Representeu gràficament els projectes {F, I, L, O}:



Com que la funció VAN no sempre és monòtona[1], convé observar si creix o decreix en el punt rellevant augmentant marginalment la taxa de descompte (un 1 per mil, per exemple). El projecte R té una TIR del 100% i el VAN es calcula amb una taxa r del 10%. La funció VAN no és monòtona, per la qual cosa interessa saber com es comporta (creix o decreix) en el punt rellevant $(r = 10\%)$ amb independència que en altres punts (com en $r^* = 1$) passi el contrari:

(1)Una funció és monòtona si sempre creix o sempre decreix. Si un projecte es caracteritza per només dos fluxos i s'executa en el moment 0, llavors la funció VAN és monòtona. Una condició necessària però no suficient perquè el VAN tingui aquesta característica és que els fluxos presentin un canvi de signe com a màxim.

	0	1	2	VAN(r = 10%)	VAN(r = 10,01%)	VAN(r* = 100%)	VAN(r = 100,1%)
R	2	–8	8	1,3388	1,3383	0	0,0000005
				el VAN decreix		el VAN creix	

El projecte R es comporta com una inversió quan la taxa és del 10%. No obstant això, si la taxa adequada fos del 100%, llavors R pren la característica de crèdit.

La taxa de descompte r no sempre és constant en el temps, i pot variar en cada període; en aquest cas, que és el general, la funció VAN s'expressa:

$$VAN = a_0 + a_1/(1+r_1) + a_2/[(1+r_1)\cdot(1+r_2)] + \dots + a_T/[(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot \dots \cdot(1+r_T)] \qquad (21)$$

i la interpretació del resultat és l'habitual. Per exemple, suposem que $r_1 = 5\%$ i $r_2 = 7\ \%$ són les taxes de descompte apropiades per als períodes 1 i 2 respectivament; llavors el VAN de projecte:

0	1	2
–10	12	15

val:

$$\begin{aligned} VAN(r_1 = 5\%, r_2 = 7\%) &= -10 + 12/1{,}05 + 15/(1{,}05\cdot 1{,}07) = \\ &= -10 + 11{,}43 + 13{,}10 = 14{,}78 \end{aligned} \qquad (22)$$

8. El VAN no depèn de la inflació (nivell II)

Els fluxos d'un projecte poden estar expressats en unitats físiques (u. f.):

Fluxos en unitats físiques

	0	1	2	3	Unitats físiques
HT	–2	1	1	1	Hores de feina
T	–100	–100	300	200	Tones de manganès
BVT	66	30	10	–180	Ampolles de vi negre

El quadre precedent expressa els fluxos de dues inversions i un crèdit expressats en unitats físiques (u. f.). Es canvien dues hores de treball en el període actual per una hora en cadascun dels períodes u, dos i tres, també s'inverteixen cent tones de manganès en el període zero i com a contrapartida s'aconsegueixen tres-centes tones en el període dos i dues-centes en el tres i, finalment, s'aconsegueixen seixanta-sis ampolles de vi en el període zero, trenta en l'u i deu en el dos a canvi de lliurar-ne cent vuitanta en el tres.

És habitual que els fluxos s'expressin en unitats monetàries constants (u. m. constants), que no és més que el resultat de multiplicar cadascuna de les quantitats expressades en u. f. pel preu que regeix en un període, típicament el període inicial (el zero). Si **en el període zero** els preus dels projectes de la taula anterior són de $P^0HT = 10$, $P^0TM = 3$ y $P^0BVT = 2$ llavors les unitats dels fluxos resultants seran **u. m. constants del període zero**:

Fluxos en unitats monetàries (constants)

	0	1	2	3	Unitats
HT	–20	10	10	10	u. m. constants del període zero
T	–300	–300	900	600	u. m. constants del període zero
BVT	132	60	20	–360	u. m. constants del període zero

Així mateix, en lloc de valorar tots els fluxos al preu vigent en un mateix període (u. m. constants), es poden valorar als preus que regeixen en cada període, amb la qual cosa s'obtenen uns fluxos expressats en unitats monetàries corrents (u. m. corrents). Suposem que f és la taxa d'inflació que, per comoditat, se suposarà constant; llavors, aplicant aquest augment percentual per període als fluxos anteriors, s'obtenen els fluxos expressats en u. m. corrents:

Fluxos en unitats monetàries (corrents)

	0	**1**	**2**	**3**	**Unitats**
HT	–20	10(1 + f)	10(1 + f)2	10(1 + f)3	u. m. corrents
T	–300	–300(1 + f)	900(1 + f)2	600(1 + f)3	u. m. corrents
BVT	132	60(1 + f)	20(1 + f)2	–360(1 + f)3	u. m. corrents

Per a calcular el VA es fa servir la taxa de descompte real r, quan els fluxos estan expressats en unitats físiques o en unitats monetàries constants, o la taxa nominal i, que és l'adequada per a actualitzar els fluxos expressats en u. m. corrents. La relació entre la taxa nominal i, la real r i la taxa d'inflació f és $(1 + i) = (1 + r)\cdot(1 + f)$.

El VA del cost del treball (HT) es pot calcular en a partir de les dades en unitats físiques:

$$VA(HT;\ u.f) = -2 + 1/(1+r) + 1/(1+r)^2 + 1/(1+r)^3 \quad \text{unidades físicas} \qquad (23)$$

Aquest VA es pot expressar fàcilment en u. m. constants (del període 0); n'hi ha prou amb multiplicar-lo pel preu del període inicial, que val $P^0HT = 10$:

$$\begin{aligned} VA(HT;\ u.m.\ constantes) &= 10\cdot VA(HT;\ u.f.) = \\ &= 10\cdot[-2 + 1/(1+r) + 1/(1+r)^2 + 1/(1+r)^3] \end{aligned} \qquad (24)$$

El VA del treball, calculat a partir dels fluxos en u. m. corrents, val:

$$\begin{aligned} VA(HT;\ u.m.\ corrientes) &= -20 + 10(1+f)/(1+i) + 10(1+f)^2/(1+i)^2 + 10(1+f)^3/(1+i)^3 = \\ &= -20 + 10(1+f)/(1+r)(1+f) + 10(1+f)^2/(1+r)^2(1+f)2 + 10(1+f)^3/(1+r)^3(1+f)^3 = \\ &= -20 + 10/(1+r) + 10/(1+r)^2 + 10/(1+r)^3 = \\ &= 10\cdot VA(HT;\ u.f.) = \\ &= (P^0HT)\cdot VA(HT;\ u.f.) \end{aligned} \qquad (25)$$

Però alguns preus concrets poden variar de forma molt diferent que la taxa d'inflació f i, en aquest cas, la regularitat observada entre els fluxos expressats en unes o altres unitats no es manté. Si els preus de les hores de treball HT en cada període són $P^0HT = 10$ $P^1HT = 11$ $P^2HT = 14$ $P^3HT = 12$, llavors s'obté:

Períodes	0	1	2	3	Unitats
HT	–2	1	1	1	u. f. (hores de feina)
PtHT	10	11	14	12	preus
HT·(PtHT)	–20	11	14	12	u. m. corrents

Perquè sigui més fàcil comparar aquestes dades de cost amb d'altres, es poden transformar en u. m. constants. Per a això, com abans, n'hi ha prou amb descomptar la inflació:

Períodes	0	1	2	3	Unitats
HT	–2	1	1	1	u. f. (hores de feina)
HT·(PtHT)	–20	11	14	12	u. m. corrents
HT	–20	11/(1 + f)	14/(1 + f)2	12/(1 + f)3	u. m. constants

El VA(HT), calculat a partir de les u. m. corrents, és ara de:

$$\text{VA(HT; u.m. corrientes)} = -20 + 11/(1+i) + 14/(1+i)^2 + 12/(1+i)^3 \qquad (26)$$

valor que és diferent del trobat en (24) a causa que l'augment en els preus no coincideix amb la taxa d'inflació. El VA(HT) es pot calcular també a partir dels fluxos en u. m. constants:

$$\text{VA(HT; u.m. constantes)} = -20 + 11/(1+f)(1+r) + 14/(1+f)^2(1+r)^2 + 12/(1+f)^3(1+r)^3 \qquad (27)$$

i el resultat coincideix amb el trobat en (26), ja que com hem vist en (*):

$$(1+i)^t = (1+r)^t(1+f)^t \qquad (28)$$

En resum, quan els preus que valoren els impactes d'un projecte en cada període varien igual que la inflació, llavors és indiferent calcular el VA a partir de fluxos en unitats monetàries constants o corrents. Suposem que X_t són els impactes d'un projecte en un període genèric t, mesurats en unitats físiques; si el preu en el període inicial 0 és P_0, s'obté $K_t = X_t P_0$ (u. m. constants), flux que descomptat amb la taxa real resulta:

$$\text{VAN}(\cdot) = X_t P_0/(1+r)^t \qquad (29)$$

Per a passar el flux K_t a u. m. corrents n'hi ha prou amb conèixer el preu P_t, que per hipòtesi es va modificant igual que la inflació, això és $P_t = P0(1+f)^t$, i s'obté $R_t = X_t P_0(1+f)^t$ (u. m. corrents). Aquest flux s'ha de descomptar amb la taxa nominal, i per tant i recordant la relació entre la taxa nominal i real (*) resulta:

$$\begin{aligned} \text{VAN}(\cdot) &= X_t P_0(1+f)^t/(1+i)^t = \\ &= X_t P_0(1+f)^t/[(1+r)^t(1+f)^t] = \\ &= X_t P_0/(1+r)^t \end{aligned} \qquad (30)$$

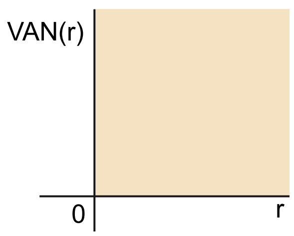
amb la qual cosa el VAN computat a partir d'u. m. corrents coincideix amb el calculat amb els fluxos en u. m. constants.

Però els preus que afecten els fluxos d'un projecte específic es poden modificar de manera molt diferent del que reflecteix la taxa d'inflació f. En aquest cas, el preu d'un impacte qualsevol en un període genèric t, P_t, serà tal que $P_t \neq P_0(1+f)^t$. El correcte en aquests casos és, primer, passar els fluxos a u. m. corrents usant l'estimació dels preus P_t que regiran en cada període i, segon, calcular el VAN mitjançant la taxa de descompte nominal i, o bé, que seria el mateix, descomptant la inflació dels fluxos expressats u. m. corrents, amb la qual cosa s'obtindrien u. m. constants, i computar el VAN amb la taxa de descompte real r.

9. El VAN d'un projecte segons l'escala d'execució (nivell II)

Si s'executen N projectes idèntics –una cadena de botigues, per exemple–, el VAN resultant és igual a N vegades el VAN del projecte original. La relació és, doncs, d'estricta proporcionalitat:

	0	1	Operació	VAN(10%)	Observacions
A	–1	2	**Inversió**	**0,8182**	
2A	–2	4	**Inversió**	**1,6364**	
10A	–10	20	**Inversió**	**8,1818**	**VAN(k·A) = k·VAN(A) ∀ k**
50A	–50	100	**Inversió**	**40,9091**	



10. La rendibilitat d'un projecte segons el VAN (nivell I)

El criteri per a no rebutjar un projecte és sempre el mateix per a qualsevol tipus d'operació: VAN > 0.

Si el VAN d'una operació és positiu (negatiu), el de l'operació contrària serà negatiu (positiu). El mateix ocorre amb el creixement o decreixement del VAN respecte a la taxa r, com recordareu observant els projectes següents:

	0	1	Operació	VAN(2%)	VAN(7%)	El VAN:
A	–100	105	Inversió	2,94	–1,87	disminueix amb la taxa r
B	100	–105	Crèdit	–2,94	1,87	augmenta amb la taxa r
C	–100	–105	Pèrdua	–202,9	–198,1	augmenta amb la taxa r
D	100	105	Regal	202,9	198,1	disminueix amb la taxa r

Activitat

Mantenint el valor de la taxa de descompte en el 10%, determineu el tipus d'operació de què es tracta i compareu la rendibilitat dels projectes que s'expressen a continuació segons el valor del VAN de cadascun. Repetiu l'operació amb una taxa del 150% i compareu-la amb els resultats anteriors. Observeu que si un projecte és rendible, el projecte invers, format pels mateixos fluxos canviats de signe, no ho és, i viceversa. Per a qualsevol taxa positiva, els regals són sempre rendibles, les pèrdues mai no ho són, mentre que una inversió o un crèdit seran interessants o no segons la taxa de descompte.

	0	1	Operació	VAN(10%)	És rendible?	VAN(150%)	És rendible?
J	–1	2	**inversió**	**0,8182**	**Sí**	**–0,2**	**No**
O	1	–2	**crèdit**	**–0,8182**	**No**	**0,2**	**Sí**
T	1	2	**regal**	**2,8182**	**Sí**	**1,8**	**Sí**
A	–1	–2	**pèrdua**	**–2,8182**	**No**	**–1,8**	**No**

11. Comparació de dos o més projectes segons el VAN (nivell I)

El criteri bàsic és el mateix per a qualsevol tipus de projecte: entre dos projectes, **tota la resta constant**, es triarà el que tingui un VAN més gran. A la pràctica caldrà matisar aquest criteri, com veurem més endavant. Observeu els projectes que es presenten en la taula:

	0	**1**	**2**	**VAN(10%)**	**Observacions**
S	–1	2		**0,8181**	**Inversió rendible**
O	–1	0	5	**3,1322**	**Inversió rendible**
N	–1	–1	10	**6,3554**	**Inversió rendible**
R	–10	20		**8,1818**	**Inversió rendible**
I	–10	0	50	**31,3223**	**Inversió rendible**
A	–10	–10	100	**63,5537**	**Inversió rendible**

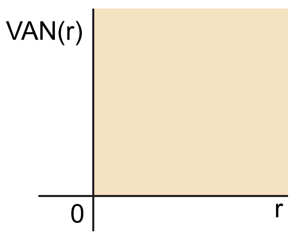
Els projectes S, ..., A, estan ordenats de VAN més petit a més gran. Tenint en compte els supòsits habituals, aquesta ordenació és correcta. No obstant això, en una situació més realista, aquests projectes són difícilment comparables de manera directa, perquè l'*àmbit temporal és diferent* (dos períodes per a uns projectes i tres per a d'altres) i perquè la quantitat que cal invertir tampoc no és igual. Les dificultats que no es compleixi la clàusula *ceteris paribus* ('tota la resta constant') les abordem més endavant.

Vegeu també

Pel que a fa a aquest aspecte, vegeu els apartats "La TIR com a una funció inversa del VAN" i "La rendibilitat d'un projecte segons la TIR".

Activitat

Representeu els projectes {S, O, N, R, I, A}:

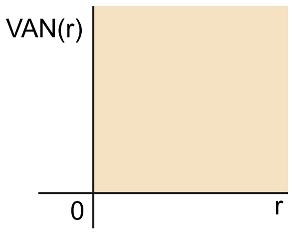


Una altra manera de comparar dos projectes qualssevol A i B és calculant el VAN de la diferència, VAN(A - B). Si VAN(A - B) > 0 això significa que el projecte A és preferible que el B. En calcular el VAN del projecte diferència VAN(A - B), s'està determinant el que es guanya per executar A en lloc de B, això és, el cost d'oportunitat en el qual s'incorreria si s'executés el projecte menys rendible, mesurat en termes absoluts. En resum:

$$\text{A es preferible a B} \Leftrightarrow \text{VAN}(\text{A}) > \text{VAN}(\text{B}) \Leftrightarrow \text{VAN}(\text{A} - \text{B}) > 0$$

Activitat

Comproveu, numèricament i gràficament, que, donats els projectes U i F, es compleix $\text{VAN}(\text{U}) > \text{VAN}(\text{F}) \Leftrightarrow \text{VAN}(\text{U} - \text{F}) > 0$:

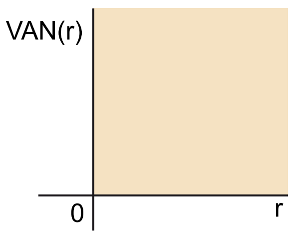


El VAN és capaç de triar el millor projecte encara que no es tracti d'inversions ni crèdits sinó de regals i pèrdues.

Activitat

Trieu el millor projecte entre S i P i el menys dolent entre Q i R:

	0	**1**	**2**	**Operació**	**VAN(10%)**	**Observacions**
S	3	3	1	**Regal**	**6,55**	
P	2	2	5	**Regal**	**7,95**	**És millor P que S**
Q	–10	–10	–20	**Pèrdua**	**–35,62**	
R	–20	–7	–7	**Pèrdua**	**–32,15**	**És millor R que Q**



El VAN permet comparar projectes de diferent tipus. Així, és possible decidir si és millor acceptar el regal A o dur a terme la inversió M, per exemple. Compareu tots els projectes examinats en aquesta secció, ordeneu-los de VAN més gran a VAN més petit i mireu d'establir una regla general, per exemple "tot projecte de pèrdua és pitjor que qualsevol regal, per insignificant que sigui el regal" o "sempre és possible trobar el regal més petit que és capaç de dissuadir un promotor perquè desisteixi d'una inversió".

Finalment, i no per això menys important, convé no oblidar que el VAN mesura una sola característica del projecte, la rendibilitat que proporciona en termes absoluts. Com que a la pràctica les coses solen ser més complicades del que suggereixen els manuals, no és estrany que un sol indicador no sigui suficient per a conèixer la desitjabilitat d'un projecte qualsevol. En particular, el VAN no depèn de la durada del projecte. Com es mostra en la taula, els projectes X, Y, Z i W tenen el mateix VAN i no obstant això són diferents. El projecte X dura dos períodes, el Y i el Z en duren tres i el W té una vida de quatre períodes. A més, el X i el Z comencen en el moment número u mentre que el Y i el W s'executen en el període zero.

	0	**1**	**2**	**3**	**VAN(r = 1)**	**Obser-vacions**
X		–1	2		1,8182	
Y	0	–1	2		1,8182	
Z		–1	2	0	1,8182	
W	0	–1	2	0	1,8182	

Per emfatitzar la importància de la durada, considereu els dos projectes següents i pregunteu-vos si no és preferible el projecte A, que dura dos anys, que el B, que en dura cent un, malgrat que el VAN de A és inferior al de B:

	0	**1**	**2**		**99**	**100**	**VAN(r = 10%)**	**Obser-vacions**
A	–1	2				1,8182		
B	–1	0	0	...	0	40000	1,9026	

En els apartats següents analitzem aquesta característica dels projectes, la durada, amb més detall.

12. El VAN segons el moment en què s'executa (nivell II)

Si un projecte és rendible, com més aviat es dugui a terme, millor. Si no s'executa immediatament s'incorre en un cost d'oportunitat, que és molt més elevat com més gran sigui el VAN del projecte original i com més temps s'ajorni.

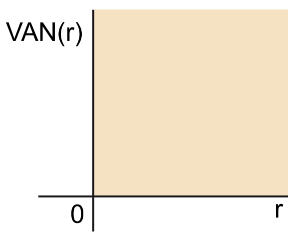
Activitat

Compareu els projectes A i B i observeu com disminueix el VAN a mesura que augmenta el retard en la seva execució (un període –A_1 i B_1 –, quatre períodes –A_4 – i tres períodes –B_3 – en l'exemple):

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**VAN(10%)**	**Obser-vacions**
A	–1	2					**0,8182**	
A1		–1	2				**0,7438**	
A4					–1	2	**0,5588**	
B	–10	20					**8,1818**	
B1		–10	20				**7,4380**	
B3				–10	20		**6,1471**	

Activitat

Amb un examen gràfic, observeu les relacions de dominància entre un projecte rendible i el mateix projecte quan se'n retarda l'execució:



De passada, vegeu que es poden tenir en compte nombres de període negatius sense cap problema, com en el projecte Ç:

	–2	–1	0	1	2	3
	–20	–20	70	25	–33	47

El VAN de Ç val:

$$\begin{aligned} \text{VAN}(Ç) &= -20\cdot(1+r)^2 - 20(1+r) + 70 + 25/(1+r) - 33/(1+r)^2 + 47/(1+r)^3 = \\ &= 54{,}57 \text{ amb una taxa de r } = 10\% \end{aligned} \qquad (31)$$

Activitat

Compareu ara el VAN del projecte A amb el VAN d'aquest mateix projecte avançant-lo dos períodes, VAN(A_{-2}), o retardant-lo un, VAN(A_1):

	–2	**–1**	**0**	**1**	**2**	**VAN(10%)**	**Obser-vacions**
A			–1	2		**0,8182**	
A_{-2}	–1	2				**0,9900**	
A_1				–1	2	**0,7438**	

Repetiu l'exercici anterior amb una taxa superior al $100\%\,(r > 1)$. Trobareu que l'ordenació de millor a pitjor és ara la inversa que abans: $\{A_1, \quad A, \quad A_{-2}\}$. Com que per a taxes superiors al 100% el projecte A no és rendible, l'ideal seria no executar-lo mai i com més s'endarrereixi l'execució de A, millor.

13. El millor ordre d'una sèrie de projectes segons el VAN (nivell III)

Com hem vist en l'apartat anterior, donada una sèrie de projectes **rendibles**, el millor seria executar-los tots simultàniament. Però això no sempre serà possible a causa de les restriccions inevitables en els recursos disponibles, per la qual cosa cal plantejar-se quin és el millor ordre de prioritat en l'execució dels projectes preseleccionats.

Activitat

Suposem els projectes originals A, B i C; repasseu que VAN(A) + VAN(B) + VAN(C) = VAN(A + B + C); compareu el resultat d'executar tots els projectes alhora, VAN(A + B + C), amb el d'executar-los un darrere l'altre en l'ordre ABC, VAN(ABC), en l'ordre ACB, VAN(ACB), i amb l'execució simultània de A i B seguit pel C superposat un període, $\mathrm{VAN}([A+B]C_{-1})$:

	0	1	2	3	4	5	VAN(10%)	Observacions
A	–1	2					**0,8182**	**Inversió**
B	–3	7					**3,3636**	**Inversió**
C	–2	3					**0,7273**	**Inversió**
A + B + C	–6	12					**4,9091**	**Inversió**
ABC	–1	2	–3	7	–2	3	**4,0948**	**Inversió**
ACB	–1	2	–2	3	–3	7	**3,7166**	**Inversió**
[A + B] C_{-1}	–4	7	3				**4,8430**	**Inversió**

El valor d'un projecte genèric X que no s'executa immediatament (o sigui, en el període 0) sinó amb un retard de d períodes, és de:

$$\mathrm{VAN}(X;\ d) = \mathrm{VAN}(X;\ 0)(1+r)^{-d} \qquad (32)$$

Quan no tots els projectes seleccionats es poden executar simultàniament, es planteja el problema de trobar l'ordenació òptima. A continuació, examinarem el cas particular en el qual no és possible executar un projecte fins després que l'anterior hagi acabat. El millor ordre entre dos projectes genèrics X i Y amb rendibilitats VAN(X) i VAN(Y) i durades de x i y, respectivament, serà el que proporcioni un guany més gran en termes del VAN total:

$$\begin{aligned}
&\text{l'orde XY serà preferible a l'orde YX} \Leftrightarrow \mathrm{VAN}(XY) > \mathrm{VAN}(YX) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \mathrm{VAN}(X) + \mathrm{VAN}(Y) \cdot [(1+r)^{-x}] > \mathrm{VAN}(Y) + \mathrm{VAN}(X) \cdot [(1+r)^{-y}] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \mathrm{VAN}(X) - \mathrm{VAN}(X) \cdot [(1+r)^{-y}] > \mathrm{VAN}(Y) - \mathrm{VAN}(X) \cdot [(1+r)^{-y}] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \mathrm{VAN}(X) \cdot [1 - (1+r)^{-y}] > \mathrm{VAN}(Y) \cdot [1 - (1+r)^{-x}] \\
&\Leftrightarrow \mathrm{VAN}(X) / [1 - (1+r)^{-x}] > \mathrm{VAN}(Y) / [1 - (1+r)^{-y}] \\
&\Leftrightarrow \mathrm{VR}(X) > \mathrm{VR}(Y)
\end{aligned} \tag{33}$$

en què VR(X) i VR(Y) es defineixen com el *valor de reserva* de X i de Y, respectivament.

14. La TIR com una funció inversa del VAN (nivell I)

L'Anna deixa 100 u. m. a l'Òscar durant un període. Si tot va bé, passat el temps fixat l'Anna rebrà les 100 u. m. prestades més 7 més en concepte d'interessos, perquè ha pactat amb l'Òscar un tipus d'interès del 7% $(r^* = 0{,}07)$. L'Anna actua com a prestadora i en concedir un *crèdit* a l'Òscar està duent a terme una *inversió*. El projecte d'inversió de l'Anna es resumeix en una quantitat de (-100) en el període 0 i (+107) en l'1:

	0	1	Operació
Anna	–100	107	**Inversió**

Per a l'Òscar, que assumeix el paper de prestatari, aquesta operació té la característica de *crèdit*; els fluxos són els mateixos que per a l'Anna però amb el signe contrari, aconsegueix 100 en el període 0 i ha de pagar 107 en l'1. En resum, 100 en 0 i -107 en 1:

	0	1	Operació
Òscar	100	–107	**Crèdit**

Per tal de conèixer millor aquestes operacions, s'han calculat alguns valors per a la funció VAN:

	0	**1**	**VAN(0%)**	**VAN(3%)**	**VAN(5%)**	**VAN(7%)**	**VAN(10%)**
Anna	–100	107	7,00	3,88	1,90	0	–2,73
Òscar	100	–107	–7,00	–3,88	–1,90	0	2,73

El primer que s'observa en el quadre és que l'Anna i l'Òscar són en pols oposats. Tot el que és positiu per a l'Òscar és negatiu per a l'Anna i viceversa, i en igual mesura, a més.

Quan la taxa de descompte és nul·la (el preu de mercat del capital és zero), l'Anna obté un VAN positiu, mentre que l'Òscar aconsegueix exactament la mateixa quantitat, però amb el signe contrari; una taxa nul·la significaria que és possible aconseguir capital a preu zero; per tant, l'Anna guanya en prestar al 7% el que li costa el 0% i l'Òscar perd en agafar un crèdit al 7% quan el podria aconseguir per res. Ocorre el mateix, encara que en menor mesura, si la taxa de descompte és del 3% o del 5%; l'Anna continua guanyant en invertir al 7% el capital que pot aconseguir a un preu més baix; el guany de l'Anna es compensa amb el que perd l'Òscar per comprar a un preu superior al de mercat; en termes nets, l'Anna guanya (l'Òscar perd) quatre punts $(7\% - 3\%)$ o dos punts $(7\% - 5\%)$ segons si la taxa de descompte és del 3% o del 5%.

És interessant veure el que succeeix quan la taxa de descompte apropiada –el cost o preu de capital– és del 7%: per a aquesta taxa el VAN dels projectes dels nostres herois és nul, $VAN(r = 7\%) = 0$. El significat és clar: no hi ha guanys extraordinaris per al qui ven a preu de mercat ni costos d'oportunitat per al qui compra al mateix preu.

La taxa r* per a la qual el VAN és zero és la taxa de creixement del capital i mesura la rendibilitat de les inversions i el cost dels crèdits, en termes relatius.

Nota

Aquesta taxa r* rep el nom de *taxa de rendiment intern*, la TIR per als iniciats.

El VAN de l'Òscar –o el de l'Anna, tant se val– s'anul·la per a un valor de r = 0,07, la qual cosa significa que la TIR és del 7%. En conseqüència, l'Anna obté una **rendibilitat** del 7% de **la seva inversió** i el **cost** del **crèdit** per a l'Òscar és, així mateix, del 7%. S'arriba a aquest mateix resultat de manera més directa usant la definició de TIR:

La TIR és tota aquella r* de manera que VAN(r*) = 0.

O sigui igualant el VAN a zero i calculant la r que compleix aquesta condició.

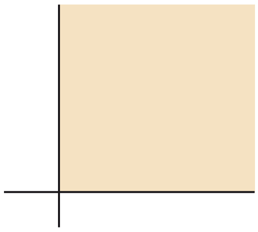
Si l'Anna busca la TIR del seu projecte d'inversió, resoldrà la senzilla equació:

$$\begin{aligned} &VAN(r) = -100 + 107/(1+r) = 0 \\ &107/(1+r) = 100 \\ &107/100 = (1+r) \\ &\quad r^* = 0{,}07 = 7\% \end{aligned} \qquad (34)$$

Com que per a $r^* = 0{,}07$ el $VAN = 0$, el valor de la TIR és del 7% i coincideix amb el que trobaria l'Òscar, encara que l'una i l'altre ho interpretaran de manera oposada. Per a la inversora Anna, com més gran sigui la TIR, millor, perquè com més alta sigui la TIR, més gran és la rendibilitat que aconsegueix. Per contra, l'Òscar vol una TIR tan baixa com sigui possible, perquè com més baixa és la TIR més petit és el cost del seu crèdit.

Activitat

Representeu els projectes de l'Anna i l'Òscar:

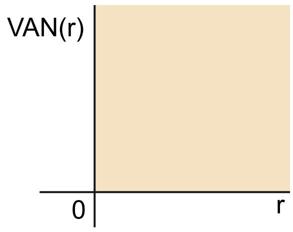


Els càlculs que han dut a terme l'Anna i l'Òscar es poden sistematitzar, de manera que serveixin per a qualsevol altre cas del mateix tipus:

Donats els fluxos periodificats K_t d'un projecte, es defineix la TIR com la taxa r* de manera que:

$$VAN(K_t,\ r^*) = K_0 + K_1(1+r^*)^{-1} + K_2(1+r^*)^{-2} + \ldots + K_T(1+r^*)^{-T} = 0 \qquad (35)$$

La TIR és, doncs, l'arrel de la funció $VAN(K_t,\ r^*)$, r* en el projecte d'inversió de la gràfica:



Si r* és la TIR de $VAN(K_t, r^*)$, també és la TIR del projecte contrari, això és, de $VAN(-K_t, r^*)$. El valor de r* és el mateix però la interpretació canvia. La TIR d'un crèdit reflecteix el **cost** per al prestatari i la **rendibilitat** per al prestador. Per tant, com més gran (petita) sigui la TIR millor (pitjor) per al prestador i pitjor (millor) per al prestatari.

Com que la TIR no és més que la intersecció amb l'eix d'abscisses –r– de la funció $VAN(K_t, r^*)$, si no hi ha intersecció la TIR no existeix. Per aquest motiu, la TIR no permet comparar projectes amb tots els fluxos del mateix signe, és a dir, amb característica de regal o de pèrdua i, com a criteri de decisió, no és complet.

Perquè hi hagi una TIR real, és necessari que no tots els fluxos tinguin el mateix signe, però no és suficient, com es posa de manifest en dibuixar la gràfica VAN(r) del projecte següent, que és una inversió per a taxes superiors al 5%:

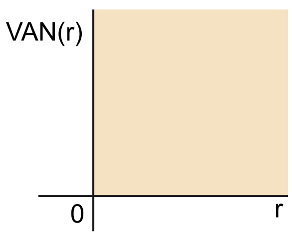
0	1	2	TIR	Observacions
–100	200	–105		**No existeix arrel real**

Activitat

Calculeu la TIR dels projectes que segueixen, després d'observar com evoluciona el VAN segons la taxa de descompte. Com que no sempre es té a mà un full de càlcul, és útil saber calcular la TIR pel mètode de *prova i error*; intenteu-ho; si se segueix un mètode raonable , amb dues o tres iteracions n'hi ha prou per a aconseguir la TIR amb una bona aproximació.

El mètode de la "caça del lleó al desert" funciona molt bé. Primer de tot, es divideix el desert en dues parts, això és, es busquen dos valors de r, de manera que per a un –r_1 el VAN sigui positiu i per a l'altre –r_2 – negatiu; llavors no falla: si el lleó no és en una part és que és a l'altra, o sigui, la TIR serà en algun lloc entre r_1 i r_2 perquè la funció VAN és contínua. Es pren ara el valor mitjà $r_3 = (r_1 + r_2)/2$ i, com abans, poden passar dues coses: o el VAN(r_3) és positiu o és negatiu. Si el VAN(r_3) és positiu, això indica que el lleó es troba entre r_2 i r_3; llavors es calcularà el VAN de $r_4 = (r_2 + r_3)/2$. Si el VAN(r_3) és negatiu, és clar que el lleó es troba en algun punt entre r_1 i r_3, per la qual cosa el nou punt que cal explorar serà $r_4 = (r_1 + r_3)/2$. Es va procedint d'aquesta manera, dividint el desert i delimitant zones cada vegada més petites on es troba el lleó, fins que s'ha marcat un espai que és més petit que la gàbia de què es disposa –això és, s'aconsegueix la precisió volguda en el càlcul de la TIR–, es col·loca la gàbia en aquest lloc i, sens dubte, el lleó serà a dins, furiós, però a dins.

	0	**1**	**Operació**	**VAN(10%)**	**VAN(20%)**	**VAN(30%)**	**TIR**
J	–10	11,1	**Inversió**	**0,0909**	**–0,75**	**–1,4615**	**11,0%**
U	–10	20,0	**Inversió**	**8,1818**	**6,6667**	**5,3846**	**100,0%**
E	–10	9	**Inversió**	**–1,8182**	**–2,5**	**–3,0769**	**–10%**
G	10	–10,5	**Crèdit**	**0,4545**	**1,25**	**1,9231**	**5,0%**
O	10	–11,3	**Crèdit**	**–0,2727**	**0,5833**	**1,3077**	**13,0%**



15. La rendibilitat d'un projecte segons la TIR (nivell I)

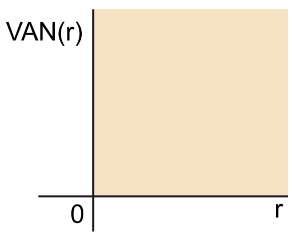
A diferència del VAN, que té una única regla de decisió per a qualsevol tipus de projecte, VAN > 0, per a decidir si es rebutja un projecte fent servir la TIR és indispensable conèixer el tipus de projecte de què es tracta; si r_0 és la taxa de descompte de referència, el criteri per a no rebutjar un projecte és:

Inversió	Crèdit
$r^* > r_0$	$r^* < r_0$

Activitat

Caracteritzeu els següents projectes, calculeu el VAN per a les taxes r = 10%, r = 20% i r = 200%. Determineu el valor o valors de la TIR de cada projecte, tenint en compte que la TIR no sempre existeix.

	0	1	2	Operació	VAN(10%)	VAN(20%)	VAN(200%)	TIR
A	–10	11			0	–0,8333	–6,3333	10%
S	10	–25		Crèdit	–12,727	–10,8333	1,6667	150%
C	–10	–25		Pèrdua	–32,727	–30,8333	–18,3333	No existeix
E	–10	9,9			–1,00	–1,75	–6,7	–1,0%
T	–10	10			–0,9091	–1,6667	–6,6667	0,0%
I	–1	10,5	–10		0,2810	0,8056	1,3889	5,92 i 844,1
C	2	–8	7		0,5124	0,1944	0,1111	29,3% i 170,7%



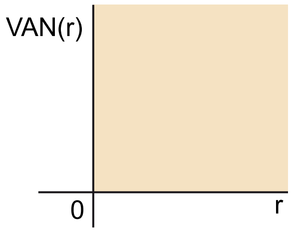
Quan un projecte presenta més d'un canvi de signe en els fluxos s'ha de sospitar que hi ha més d'una TIR i s'han de trobar totes.

Activitat

Representeu la funció VAN(r), trobeu les dues TIR del projecte A i les tres del B i, en ambdós casos, calibreu les conseqüències d'agafar una de les TIR del projecte a l'atzar i considerar-la com a única:

	0	1	2	TIR
A	200.000	–800.000	799.999	**99,8% i 100,2%**

	0	1	2	3	4	5	TIR
B	10	–80	74	–10	105	–100	**3,17%, 16,01% i 592,5%**

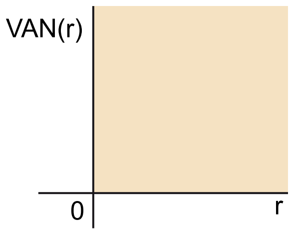


Quan la taxa de descompte de referència r_0 no és constant, la interpretació del resultat en termes de desitjabilitat del projecte no és tan clara si es fa servir la TIR.

Activitat

Donades les taxes que reflecteixen el cost d'oportunitat del capital en els períodes 1 i 2, $r_1 = 6\%$ i $r_2 = 10\%$, intenteu decidir si és rendible la inversió:

	0	1	2	TIR	Observacions
ZZ	–200	106	122	**8,98%**	



16. Comparació de dos o més projectes segons la TIR (nivell I)

Si tota la resta és constant, entre dos projectes es preferirà el que presenti una TIR més gran si es tracta d'inversions (més rendibilitat), i el que en presenti una més petita si es tracta de crèdits (menys cost). La comparació entre dos projectes de diferent tipus (una inversió amb un crèdit, per exemple) no es pot dur a terme de manera directa, sobretot quan un o més tenen la característica de regal o de pèrdua.

Activitat

Calculeu la TIR dels projectes L, A, ..., S, ordeneu-los de TIR més gran a més petita, i indiqueu en cada cas si són millors o pitjors que el projecte F, considerant que el cost del capital és del 10% ($r_0 = 0{,}1$):

0	1	2	TIR	Millor	Pitjor	Observacions
–1	1	2	**100%**			
–1	1	1	**61,8%**		✓	
–10	9	11	**59,1%**		✓	
10	–9	–10	**54,66%**		✓	
–50	40	40	**37,98%**		✓	
60	–50	–40	**33,33%**		✓	
–90	7	6	**–70%**		✓	
90	90	90	**No existeix**	**?**	**?**	**No comparable segons la TIR**
–1	6	–9	**200%**	✓		**Paradoxa: VAN < 0 r 2**

Per a comparar dos projectes, A i B, seguint el criteri de la TIR, és preferible recórrer a la formació del projecte diferència D = A − B. Si r_D és la TIR de D i r_0 el cost del capital, el projecte A serà preferible que el B quan:

$r_D > r_0$	Si el projecte D és una inversió
$r_D < r_0$	Si el projecte D té les característiques d'un crèdit
Sempre que el projecte D tingui la característica d'un regal (tots els fluxos no negatius)	

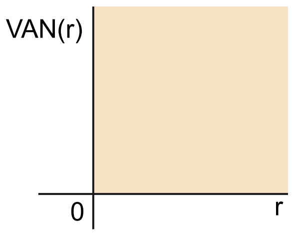
de manera que el projecte B serà preferible que el projecte A si en formar el projecte D = A − B i calculant la TIR r_D resulta:

$r_D > r_0$	Si el projecte D té les característiques d'un crèdit
$r_D < r_0$	Si el projecte D és una inversió
Sempre que el projecte D tingui la característica d'una pèrdua (tots els fluxos no positius)	

Activitat

Repetiu l'exercici anterior formant el projecte diferència i compareu els resultats. Intenteu escollir el millor projecte o, almenys, observeu les relacions de preferència entre alguns parells de projectes com a alternativa al F i no us descuideu de caracteritzar cada projecte, (F - L), ..., (F - S), abans d'interpretar-ne els resultats:

	0	1	2	TIR	Millor	Pitjor	Observacions
F	–1	1	2	**100%**			
F – L	0	0	1	**No existeix**	**?**	**?**	**Regal**
F – A	9	–8	–9	**53,88**	✓		**Crèdit**
F – M	–11	10	12	**59,36**		✓	
F – E	49	–39	–38	**36,43**	✓		**Crèdit**
F – N	–61	49	42	**32,35**		✓	
F – C	89	–6	–4	**–75,16**	✓		**Crèdit**
F – O	–91	–89	–88	**No existeix**	✓		**Pèrdua**
F – S	0	3	11	**No existeix**		✓	**Regal**



17. Alguns avantatges de la TIR enfront del VAN (nivell II)

A diferència del VAN, que és un indicador de rendibilitat en termes absoluts, la TIR proporciona la rendibilitat en termes relatius. Per aquest motiu, la comparació de dos projectes molt diferents pot ser més fàcil amb la TIR. Considereu, per exemple, els projectes X i Y que es presenten en la taula que segueix. Si s'ha de jutjar pel VAN, és millor X que Y ja que $VAN(X) = 100 > VAN(Y) = 90$; no obstant això, la inversió inicial necessària per a aconseguir aquests resultats difereix, fa falta invertir 50 en el projecte X i només 10 en el Y. La TIR indica amb claredat que és preferible Y que X, la qual cosa significa que l'ideal seria executar cinc projectes com Y. Naturalment, no sempre serà possible invertir tots els recursos (50) en projectes com Y, per la qual cosa la superioritat de Y respecte a X depèn de les possibilitats d'inversió i de reinversió. Suposeu que si s'inverteix en Y, l'única possibilitat per a canalitzar la resta de recursos (40) és el projecte Z, que és pitjor que Y i pitjor que X. Amb tot, el resultat d'executar el projecte Y i el Z, o sigui (Y + Z), és superior al d'executar X, tant pel VAN com per la TIR.

	0	1	VAN(r = 10%)	TIR
X	–50	165	100	230%
Y	–10	110	90	1.000%
5Y	–50	550	450	1.000%
Z	–40	80	32,7	100%
Y + Z	–50	190	122,7	280%

De vegades, l'ús de la TIR permet superar alguns problemes de falta d'informació. Per a finançar un programa de medicina preventiva es treuen recursos del sistema hospitalari convencional. El resultat comporta augmentar les defuncions en el període actual a canvi de disminuir-les en major mesura en el període següent. En tractar de valorar projectes d'aquesta naturalesa es topa amb dos problemes espinosos: d'una banda, cal decidir què val la vida humana i, de l'altra, s'ha de trobar la taxa de descompte apropiada. La impossibilitat de calcular el VAN no representa més problema amb els dos projectes U i V que s'expressen a continuació; malgrat que els costos i beneficis estan valorats en vides humanes (H), no sols és clar que V és millor que U, sinó que tot suggereix que V és un projecte atractiu i que U no ho és en absolut, segons els seus valors de TIR:

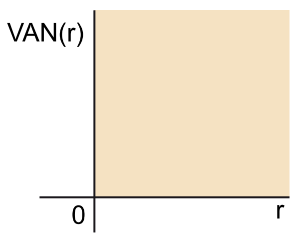
	0	1	VAN(r = ?)	TIR
U	–100 H	102 H	?	2%
V	–100 H	600 H	?	500%

18. La TIR davant canvis d'escala i moment d'execució (nivell II)

Com que es tracta d'una mesura de rendibilitat que no és absoluta sinó relativa, la TIR manté el valor sigui quina sigui l'escala a la qual s'executi un projecte. Si una empresa aconsegueix una rendibilitat de r*, el conjunt format per qualsevol quantitat d'empreses idèntiques a la primera obtindrà també una rendibilitat de r*. Dit d'una altra manera, en multiplicar tots els fluxos d'un projecte per una constant qualsevol, el valor de la TIR es manté invariable fins i tot quan la constant és negativa:

	0	1	TIR	Observacions
A	–1	1,5	**50%**	
2A	–2	3	**50%**	
10A	–10	15	**50%**	
50A	–50	75	50%	
–50A	50	–75	**50%**	

Observeu que, tot i que les gràfiques VAN(r) són diferents per a cadascun dels projectes anteriors, comparteixen el mateix punt d'intersecció amb l'eix d'abscisses, això és, tenen la mateixa TIR:

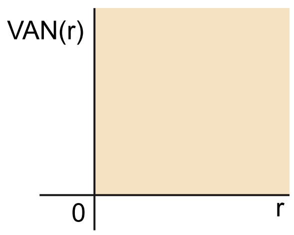


Així mateix, la TIR es manté constant davant canvis en el moment d'execució d'un projecte, per la qual cosa no proporciona cap indicació sobre els costos en els quals s'incorre pel fet de retardar un projecte rendible o els beneficis d'avançar-lo:

	–2	–1	0	1	2	3	4	TIR	Observacions
K			–10	11				**10%**	
K_{-2}	–10	11						**10%**	

	–2	–1	0	1	2	3	4	TIR	Obser-vacions
K_3						–10	11	**10%**	

Igual que en el cas anterior, cada projecte es correspon amb una funció VAN diferent però tots tallen l'eix de la taxa r en el mateix punt perquè tenen la mateixa TIR:



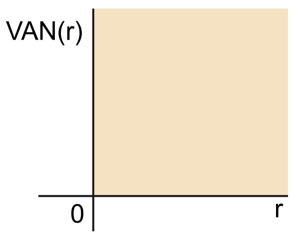
19. La TIR davant canvis en l'ordre de dos projectes (nivell III)

La TIR, sens dubte, no és un bon instrument per a triar el millor ordre d'execució d'una sèrie de projectes. Donats dos o més projectes rendibles, és sabut que com més es duguin a terme, millor, i l'ideal és executar-los tots alhora. No obstant això, si se seguís cegament el criteri de la TIR, en l'exemple que es presenta a continuació, es trobaria que la millor opció, que no pot ser una altra que (A + B + C), no està situada en el primer lloc, sinó que quedaria postergada per l'alternativa ABC i d'altres.

Activitat

Observeu la disparitat entre la selecció d'aquestes alternatives segons la TIR i seguint el criteri correcte: triar l'opció que proporciona un VAN més alt:

	0	1	2	3	4	5	TIR	VAN(10%)	Observacions
A	–1	2					100%	0,82	
B	–3	7					133,7%	3,36	
C	–2	3					50%	0,73	
A + B + C	–6	12					100%	4,91	
ABC	–1	2	–3	7	–2	3	109,8%	4,1	
ACB	–1	2	–2	3	–3	7	88,8%	3,72	
[A + B] C_{-1}	–4	7	3				110,61%	4,84	



20. Limitacions (superables) dels mètodes VAN i TIR (nivell III)

Tant el VAN com la TIR són criteris molt útils per a determinar la bondat d'un projecte, si se'n tenen en compte les limitacions. El procés que cal seguir és simple; es tracta d'explicitar els supòsits que són a la base del VAN i la TIR, examinar les conseqüències d'aplicar aquests criteris quan un supòsit determinat no es compleix en el cas que s'examina i trobar-hi una solució. En aquest apartat posarem l'èmfasi en els problemes que sorgeixen com a conseqüència d'un ús inadequat i la manera apropiada d'abordar-los, sense necessitat de recórrer a altres models.

Vegeu també

Més endavant examinarem els problemes que el VAN i la TIR no resolen correctament i requereixen un canvi de model.

20.1. La taxa de descompte

Com és obvi, se suposa que la **taxa de descompte r és coneguda**. En el cas més típic, els fluxos estaran expressats en unitats monetàries o en unitats convertibles en diners, de manera que sempre es pot recórrer al cost d'oportunitat del capital per a utilitzar-lo com una aproximació a la taxa de descompte adequada. Quan es tracta d'un projecte que involucra béns que no són convertibles en diners sense forçar el mètode més enllà del que és raonable, no és possible determinar si el projecte és rendible sense una estimació prèvia de la taxa rellevant en el cas que s'està examinant. No fa falta afegir que aquest tipus de problemes es presenta amb freqüència, i no sols en projectes públics. Per fortuna, en molts casos n'hi haurà prou amb esbrinar si la taxa apropiada és més gran o més petita que el valor crític del projecte, la TIR:

	0	1	TIR	Observacions
O	–7 ❖	7 ❖	0,0%	
H	–10 ★	11 ★	10,0%	
!!	–10 ❄	200 ❄	1.900,0%	

El projecte O no és rendible si, com és habitual, disposar d'una unitat de ❖ avui és preferible a una demà. El H i el !! són rendibles si les taxes de preferència temporal dels béns mesurats en ★ i ❄ són inferiors al 10% i al 1.900%, respectivament. Com que O no és rendible i els altres sí, H i !! són preferibles que O. Però, encara que la TIR del projecte !! sigui superior a la de H i tan alta que provoqui admiració, no es pot dir res sobre la desitjabilitat relativa de !! respecte a H ja que estan expressats en unitats diferents. H i !! no són directament comparables i es necessitaria disposar d'una relació d'equivalència entre ★ i ❄ per a determinar quin dels dos és millor (es necessitaria un preu relatiu, en definitiva; ★ = 7,24·❄, per exemple).

20.2. Problemes amb les unitats dels fluxos

Com ha posat de manifest l'últim exemple amb els projectes H i !!, en utilitzar el VAN i la TIR s'està suposant que **tots els fluxos s'expressen en les mateixes unitats**: o tots en unitats físiques –en les mateixes unitats físiques–, o tots en unitats monetàries constants o tots en unitats monetàries corrents[2], sense barrejar les unes amb les altres. Si alguns fluxos estan expressats en unitats monetàries corrents i d'altres en unitats monetàries constants o físiques, per exemple, és clar que no es poden sumar. Tampoc no es poden agregar mitjançant la funció VAN ni, amb més motiu, es pot calcular la TIR. Encara que aquesta exigència és molt raonable, no sempre es pot complir a la pràctica. Aquesta restricció limita les possibilitats d'anàlisi racional dels projectes amb costos i beneficis de difícil valoració, com tots els que incorporen vides humanes, per exemple. Amb tot, en alguns casos particulars, respectar la regla de no agregació de fluxos en unitats diferents és compatible amb determinar si un projecte és millor que un altre.

(2)Com hem vist en l'apartat "Tipus de projectes (nivell I)", les unitats monetàries corrents són unitats físiques valorades als preus que regeixen en cada període. Les unitats monetàries constants són aquestes mateixes unitats físiques valorades totes plegades als preus d'un mateix període –el 0, típicament–, amb independència del període en què es produeixen.

Activitat

Comproveu que el projecte O, sense cap dubte, és millor que el B, el V i el I; no és necessari recórrer al VAN però sí que cal tenir en compte els conceptes que incorpora:

	0	1	Observacions
O	–10 ♦	5 ♉	
B	–11 ♦	5 ♉	**El mateix benefici i més cost que l'O**
V	–10 ♦	4 ♉	**El mateix cost i més benefici que l'O**
I	–11 ♦	4 ♉	**Més cost i menys benefici que l'O**

Considereu ara dos projectes tan clàssics com universals, el O i el K, tenint en compte que la conveniència de O és indiscutible (O és rendible per hipòtesi):

	0	1	...	T
O	–1 ☠	3 ⚐	...	3
K	–3 ☠	12 ⚐	...	12

El K és millor que O, perquè els costos del K són tres vegades més grans que els de O, mentre que els beneficis per període són quatre vegades més grans. Per a resoldre qualsevol dubte, es compara K amb el projecte 3 · O, i igualem així la inversió necessària (– 3☠):

	0	**1**	**...**	**T**
3·O	–3 ☠	9 ⚐	...	9
K	–3 ☠	12 ⚐	...	12
K – 3·O	0 ☠	3 ⚐	...	3

El projecte K és preferible que el 3 · O perquè el projecte diferència (K - 3 · O) és un regal, això és, en executar el projecte K en lloc del 3 · O s'aconsegueixen uns fluxos que sempre són positius, un guany de 3 per període entre 1 i T. Atès que O és rendible, és millor executar tres projectes idèntics a O que un de sol. Per tant, K és millor que O i rendible; dit d'una altra manera, el projecte d'inversió (K - O):

	0	**1**	**...**	**T**
K - O	-2 ☠	9 ⚐	...	9 ⚐

és rendible, la qual cosa significa que $VAN(K - O) > 0$ i, per tant, que $VAN(K) > VAN(O)$ encara que no és possible calcular ni el VAN(K) ni el VAN(O) per falta de dades.

Nota

El projecte K és millor que 3 · O amb independència que O sigui rendible o no. Però **si O no fos rendible**, no se sabria si K ho és (encara que es continuaria complint que K és millor que 3 · O), ni si K és millor o no que O.

En lloc de replicar el projecte O de manera que s'iguali la inversió amb el projecte K, es pot igualar el benefici de O i K i comparar-ne els costos:

	0	**1**	**...**	**T**
4·O	–4 ☠	12 ⚐	...	12 ⚐
K	–3 ☠	12 ⚐	...	12 ⚐
K – 4·O	1 ☠	0 ⚐	...	0 ⚐

El resultat, com no podia ser d'una altra manera, és el mateix. El projecte K és preferible que el 4 · O, perquè el projecte (K - 4 · O) és un regal. Concretament, en executar el K en lloc d'invertir simultàniament en quatre projectes idèntics al O, s'aconsegueix un estalvi net d'1 ☠ en el període 0. Com que O és rendible, 4 · O és millor que O i, en conseqüència, K és preferible que O i també és rendible.

Malgrat la disparitat en les unitats de mesura dels fluxos, el VAN proporciona informació que gairebé sempre és útil, com es mostra més a baix. Suposem que r = 1 és la taxa de descompte adequada, tant per als fluxos expressats en ♣ com en #; llavors es tracta de comparar el VA dels costos i el dels beneficis en tots i cadascun dels projectes. D'aquesta manera, queda clar que el projecte O és millor que el B, el V i el I, mentre que el V és preferible que el I i la comparació entre el B i el V i entre el B i el I no és possible amb les dades disponibles:

	0	1	VA(r = 100%)	Observacions
O	–10 ♣	–50 ♣	–35 ♣	
	10 #	40 #	30 #	
B	–15 ♣	–40 ♣	–35 ♣	
	27 #	2 #	28 #	
V	–30 ♣	–12 ♣	–36 ♣	
	29 #	2 #	30 #	
I	–10 ♣	–56 ♣	–38 ♣	
	28 #	2 #	29 #	

Suposeu ara que **tots** els costos d'una sèrie de projectes estan expressats en ❒, per exemple; els beneficis són intangibles i s'han valorat multiplicant la quantitat de producte, que és coneguda, per un indicador de valor, un preu, si es vol, que és el resultat d'una enquesta en la qual es volia valorar el bé segons una escala de punts d'un a deu . En aquest cas, és evident que la taxa de descompte adequada per als costos no ha de ser la mateixa que la que reflecteix la preferència temporal dels beneficis.

Suposem que r_C = 0,1 és la taxa de descompte per als costos i r_B = 0,5 és l'estimada per als beneficis. El càlcul del VA no ofereix cap dificultat encara que, com en el cas anterior, no tots els projectes seran comparables entre si. En l'exemple que segueix, l'únic projecte comparable és el O, que és millor que el B, el V i el I, sens dubte, mentre que els altres no són directament comparables entre si:

	0	1	VA	Observacions
O	–10 ❒	–11 ❒	VA(10%) = –20 ❒	
	60 ⌘	60 ⌘	VA(50%) = 100 ⌘	
B	–20 ❒	0 ❒	VA(10%) = –20 ❒	
	33 ⌘	90 ⌘	VA(50%) = 93 ⌘	
V	–3 ❒	–22 ❒	VA(10%) = –25 ❒	
	70 ⌘	45 ⌘	VA(50%) = 100 ⌘	
I	–20 ❒	–1,1 ❒	VA(10%) = –21 ❒	
	78 ⌘	30 ⌘	VA(50%) = 98 ⌘	

20.3. Seleccionar projectes en condicions que no són les ideals

El VAN i la TIR es basen en la clàusula *ceteris paribus*. En particular, això significa que funcionen bé en comparar dos projectes que es desenvolupen en **un mateix àmbit temporal** i manegen la **mateixa quantitat de capital** i que, en cas contrari, és esperable que sorgeixin dificultats. Se suposa, a més, que **el mercat de capitals és perfecte**, la qual cosa dificulta percebre la necessitat de tenir en consideració **restriccions financeres** eventuals. En la realitat, les condicions que es troben disten de respondre a un model ideal, per la qual cosa és necessari dur a terme algunes adaptacions.

Activitat

Disposeu la millor manera d'invertir 100 euros en el període 0, sabent que el cost del capital és del 10%, que l'àmbit temporal acaba en el període 2 i que les oportunitats d'inversió són:

	0	1	2	TIR	VAN	Observacions
A	–200	350		**75%**	**118,18**	
B	–100	250	–100	**100%**	**44,63**	
C	–100	0	225	**50%**	**85,95**	

Si heu calculat el VAN i la TIR d'aquests projectes, deveu haver comprovat que segons la TIR el millor projecte és el B, i el segueix el C, ja que A no és factible. Seguint el VAN, l'ordre de preferència seria A, C, B, però el A es descarta perquè no es disposa d'una quantitat tan elevada per a invertir, amb la qual cosa el millor és el C seguit del B. Descartat A perquè no és factible, el dubte és executar el B o el C, recomanats per la TIR i el VAN, respectivament, la qual cosa té tot l'aspecte d'un problema ben conegut.

Seguint el que prescriu la tradició en aquests casos, es forma el projecte diferència (B - C) i es determina la rendibilitat de dur a terme el projecte B en lloc del C:

	0	1	2	TIR	VAN	Observacions
B – C	0	250	–325	**30%**	**–41,3**	**Crèdit**

Així sembla que s'han solucionat totes les dificultats, perquè tant la TIR com el VAN del projecte (B - C) coincideixen a assenyalar que C és millor que B; no obstant això, això no és del tot cert. Hi ha una alternativa millor, ja que en executar el B immediatament i el A en el període 1, $(B+A_1)$, s'obté un VAN més alt que amb la solució trobada més amunt:

	0	1	2	TIR	VAN	Obser-vacions
B	–100	250	–100	**100%**	**38,89**	
A_1		–200	350	**75%**	**107,44**	
B + A_1	–100	50	250	**85,1%**	**152,1**	

Aquest exemple il·lustra la necessitat de **tenir en compte l'ordre d'execució**, a més de la combinació de projectes factibles. La tasca de programar l'execució d'un conjunt de projectes en un àmbit temporal predeterminat no és gens fàcil, perquè **la millor combinació pot incorporar un projecte que no compleix la condició de no rebuig** (VAN > 0), amb la qual cosa s'augmenta la quantitat de combinacions possibles, ja per si mateixa elevada.

Activitat

Comproveu que donats els projectes:

	0	1	2	TIR	VAN	Obser-vacions
A	–200	500		**150%**	**254,54**	
B	–100	200	–105	**No n'hi ha**	**–4,96**	
C	–100	0	225	**50%**	**85,95**	

la millor combinació és B+A_1, (executar B en el moment 0 i A en l'1), malgrat que el projecte B no té cap TIR real i el VAN(B) és sempre negatiu (no us descuideu d'observar si el projecte és una inversió o un crèdit):

	0	1	2	TIR	VAN	Obser-vacions
B	–100	200	–105	**No n'hi ha**	**–4,96**	
A1		–200	500	**150%**	**231,41**	
B + A1	–100	0	395	**98,75%**	**226,44**	

20.4. La taxa de descompte no és constant al llarg del temps

Quan es fa servir la TIR, s'espera –millor dit, es vol– que la taxa de descompte que expressa **el cost del capital sigui constant**, perquè d'una altra manera la comparació pot resultar una tasca poc agradable.

Repreneu el cas ZZ ja presentat en la secció 11. Si les taxes de descompte en els períodes 1 i 2 són diferents, r1 = 6% i r2 = 10%, es tracta de decidir si és rendible la inversió ZZ:

	0	1	2	TIR	Observacions
ZZ	–200	106	122	8,98%	

La TIR de ZZ està compresa entre r_1 i r_2, per la qual cosa no és immediat saber si ZZ és rendible.

Nota

En aquests casos, per a aplicar el criteri de la TIR és necessari calcular la TIR neta, com expliquem en l'annex 1.

El problema és fàcil de solucionar, perquè el signe del VAN es coneix sempre sense cap ambigüitat:

$$\begin{aligned} &\mathrm{VAN}(r_1 = 6\%, r_2 = 10\%) = -200 + 106/(1{,}06) + 122/(1{,}06 \cdot 1{,}1) = \\ &= -200 + 100 + 104{,}63 = 4{,}63 > 0 \end{aligned} \quad (36)$$

21. Limitacions del VAN i la TIR que requereixen un canvi de model (nivell III)

En l'apartat anterior, els problemes que sorgien com a conseqüència de l'incompliment en la realitat d'alguns supòsits dels models clàssics VAN i TIR, es podien resoldre emprant els mateixos models. Quan fallen altres hipòtesis, és necessari recórrer a un canvi de model.

Tant en el VAN com la TIR, els fluxos positius i negatius es descompten a una mateixa taxa, perquè se suposa que **la taxa d'inversió i la de reinversió coincideixen**. Però la realitat pot ser molt diferent d'aquest supòsit. De fet, la taxa que denota el cost del capital (r) i la taxa de rendibilitat (k) que es pot obtenir amb la reinversió dels fons generats pel projecte són diferents, per regla general. En aquest cas, s'ha de recórrer a un altre model per a determinar la rendibilitat.

Per hipòtesi, els fluxos positius que genera el projecte es reinverteixen a la mateixa taxa de rendibilitat del mateix projecte, amb independència no sols de quan es produeixen, de la seva quantia i durada, sinó també de la seva naturalesa (el tipus de flux és important perquè no és el mateix un ingrés per vendes que la mesura monetària de l'augment d'utilitat derivat d'una millora en el paisatge, per exemple). Aquest supòsit restrictiu no resta utilitat als criteris VAN i TIR sempre que s'apliquin quan és apropiat. En un altre cas, el decisor s'exposa a resultats paradoxals, ja que la TIR i el VAN no s'han d'aplicar quan no es compleixen els supòsits que els sustenten.

Considereu els projectes A, R i T, que són mútuament excloents i rendibles per hipòtesi:

	0	1	2	TIR	VAN	Observacions
A	–100	115		15,0%	4,55	
R	–100	0	130	14,02%	7,44	
T	–100	70	70	25,7%	21,49	

D'acord amb el VAN, la jerarquització dels projectes, de menys a més rendibilitat, és immediata: el pitjor és A, seguit del R i el millor és T. Segons el criteri de la TIR, encara que coincideix amb el VAN en assenyalar T com el millor, el pitjor no seria A sinó R, seguit per A. Per a dilucidar aquesta qüestió és necessari un canvi de model. En lloc d'utilitzar la hipòtesi que la taxa d'inversió (r) coincideix amb la de reinversió (k) és possible l'alternativa de substituir-la per dades reals; suposeu que la inversió es duu a terme amb capital aliè, amb un cost del r%, i que es retorna íntegrament en el període 2. En el període 1 hi ha la possibilitat de reinvertir amb una taxa de rendibilitat del k%, amb k diferent de r.

Per a solucionar aquest tipus de problemes res més indicat que simular un per un els passos que es farien en la realitat, i detallar la forma concreta de finançament del projecte d'inversió i l'ús específic dels fons positius alliberats pels projectes, la qual cosa es podria denominar *projecte de reinversió*. Es tracta, doncs, de detallar els fluxos que es generen en cada cas, i referir el resultat al període 2, perquè el que compta és si, *al final*, resulta millor A, R o T, això és, calcular el valor final net (VFN) sobre el projecte d'inversió més el de finançament.

Referència bibliogràfica

J. Montllor (1978). "Un modelo determinista de proyectos agregados de inversión-financiación: El valor final neto". *Económicas y Empresariales* (núm. 9, pàg. 152-163).

La forma concreta de finançament del projecte, en qualsevol cas, ha de ser tal que:

- La suma dels fluxos període per període ha de ser sempre no negativa, excepte en l'últim període, en què el resultat és de signe lliure.

- El cost del finançament ha de ser el mínim possible.

Per al finançament del projecte, hi ha dues maneres extremes, segons que es maximitzi –H1– o es minimitzi –H2– la dependència respecte a recursos externs. En el primer cas (H1), que, per la seva simplicitat i facilitat de càlcul, constitueix la hipòtesi estàndard, tot el finançament és extern, i és el que presentem a continuació.

Segons la hipòtesi H1, si el flux d'inversió és negatiu, s'agafa un préstec per aquesta quantitat (*finançament*), al tipus r i pel temps que falta fins al període final T, el dos, en aquest cas. Si el flux d'inversió és positiu, s'inverteix tot el saldo (*reinversió*) al tipus r i també pel temps que falta fins al període final, o sigui, fins al període T. D'aquesta manera, entre els períodes 1 i T – 1, la suma dels fluxos del projecte d'inversió i el projecte de finançament tindrà un valor zero, quan el flux d'inversió sigui negatiu o zero, o estrictament positiu quan el flux de la inversió també sigui estrictament positiu; el saldo del període final pot tenir qualsevol signe. Els fluxos de la suma anterior es reinverteixen al tipus k fins al període T. El valor final es troba sumant el saldo d'inversió, el de finançament i el de reinversió en el període final T.

Aplicant aquest procediment als projectes {A, R, T}, resulta:

Projecte A	0	1	2	Observacions
Inversió	–100	115		
Finançament	100	0	$-100(1 + r)^2$	

Projecte A	**0**	**1**	**2**	**Obser-vacions**
Suma	0	115	$-100(1 + r)^2$	
Reinversió			$115(1 + k)$	
Valor final			$\mathbf{115(1 + k) - 100(1 + r)^2}$	

Projecte R	**0**	**1**	**2**	**Obser-vacions**
Inversió	–100	0	130	
Finançament	100	0	$-100(1 + r)^2$	
Suma	0	0	$130 - 100(1 + r)^2$	
Reinversió			0	
Valor final			$\mathbf{130 - 100(1 + r)^2}$	

Projecte T	**0**	**1**	**2**	**Obser-vacions**
Inversió	–100	70	70	
Finançament	100	0	$-100(1 + r)^2$	
Suma	0	70	$70 - 100(1 + r)^2$	
Reinversió			$70(1 + k)$	
Valor final			$\mathbf{70(1 + k) + 70 - 100(1 + r)^2}$	

En resum, el valor final trobat per a cada projecte és:

A	$115(1 + k) - 100(1 + r)^2$
R	$130 - 100(1 + r)^2$
T	$70(1 + k) + 70 - 100(1 + r)^2$

Nota

Observeu que el VAN no és més que un cas particular del VFN, ja que el VAN proporcionarà la mateixa ordenació de projectes que el VFN quan la taxa d'inversió i la de reinversió coincideixen. En aquest exemple, n'hi ha prou amb multiplicar el VAN per $(1 + r)^2$ per a obtenir el VFN quan ocorre que $r = k$. Si ambdues taxes no són iguals, aquesta equivalència desapareix i la recomanació seguint un criteri o un altre, en general, serà diferent.

Comparant el valor trobat al final per a cada projecte s'observa que el resultat de l'elecció entre A, R i T depèn, en aquest cas, del valor de la taxa de reinversió k, però no de r, perquè tots tenen el mateix terme comú, $[-100(1+r)^2]$. L'ordenació de més a menys rendibilitat, per a taxes de reinversió positives (k > 0), és, doncs:

Taxa de reinversió k	Ordenació
Inferior al 13%	T > R > A
Entre el 13% i el 56%	T > A > R
Superior al 56%	A > T > R

en què resulta que no sempre serà T el millor dels tres projectes, com es presumia al principi pel valor del VAN i la TIR.

Suposant una taxa d'inversió de r = 10%, el VFN dels projectes és, depenent de la taxa de reinversió k:

VFN(k)	k = 6%	k = 20%	k = 60%
A	0,9	17,0	**63,0**
R	9,0	9,0	9,0
T	**23,2**	**33,0**	61,0

Considereu ara la hipòtesi de finançament H2, que no és més que una extensió natural del model de Montllor. A diferència del cas anterior, aquí es vol recórrer a l'autofinançament tant com sigui possible, i reduir per tant al mínim la dependència de recursos aliens.

El procediment de càlcul és semblant al ja examinat, si bé aquí tant el finançament com la reinversió no es fa pel temps que falta fins al període final T, sinó per un sol període cada vegada.

En cada període, el crèdit total necessari dependrà del flux de la inversió en el període i, o bé el pagament per la devolució del crèdit i interessos del període anterior, o bé l'ingrés pel fruit de la reinversió del període anterior, segons el cas.

El resultat assenyalarà o bé la necessitat de refinançar (durant un període) o bé mostrarà un excedent que es pot reinvertir (també a un període). Es procedeix d'aquesta mateixa manera fins a arribar al període final T; en aquest període ja no es pot refinançar i el saldo coincideix amb el VFN.

Aquest procediment és fàcil de comprendre amb un exemple. Suposem que tenim el projecte H:

	0	1	2	3
H	3	–20	21	1

Aquest projecte presenta dues TIR: $r^{*}_{1} = 37\%$ i $r^{*}_{2} = 434{,}6\%$. Per a alguns valors de la taxa de descompte, el projecte té la característica d'inversió i per a d'altres, de crèdit. Se suposarà que la taxa de descompte adequada és de $r = 10\%$ i que la taxa de reinversió és de $k = 6\%$. Es tracta de calcular el VFN aprofitant al màxim els recursos generats pel mateix projecte (minimitzar el finançament extern). A continuació, exposem cadascun dels passos necessaris període per període.

Període 0

$a_0 = 3$. Flux de la inversió.

$d_0 = 0$. Devolució del crèdit del període anterior; és nul perquè és el primer període.

$v_0 = 0$. Reinversió del període anterior; és nul perquè és el primer període.

$b_0 = 0$. Crèdit total necessari; la necessitat de refinançar és nul·la perquè $a_0 + d_0 + v_0 > 0$.

$c_0 = 3$. Saldo; com que $b_0 = 0$, $c_0 = a_0 + d_0 + v_0$; com que $c_0 > 0$, es reinverteix.

Període 1

$a_1 = -20$. Flux de la inversió.

$d_1 = 0$. Devolució del crèdit del període anterior; $d_1 = 0$ perquè $b_0 = 0$.

$v_1 = 3(1+k)$. Reinversió del període anterior; $v_1 > 0$ perquè $c_0 > 0$.

$b_1 = 20 - 3(1+k)$. Crèdit total necessari; se suposa que $20 - 3(1+k) > 0$ (si no, seria $b_1 = 0$).

$c_1 = 0$. Saldo; $c_1 = 0$ perquè $b_1 = 0$.

Període 2

$a_2 = 21$. Flux de la inversió.

$d_2 = -(1+r)\cdot[20-3(1+k)]$. Devolució crèdit període anterior.

$v_2 = 0$. Reinversió del període anterior $v_2 = 0$ perquè $c_1 = 0$.

$b_2 = 0$. Crèdit total necessari; si $(1+r)[20-3(1+k)]-21 \le 0$ (si no, $b_1 = (1+r)[20-3(1+k)]-21$).

$c_2 = 21-(1+r)\cdot[20-3(1+k)]$. Saldo. Com que $b_2 = 0$, $c_2 = a_2+d_2+v_2$. Com que $c_2 > 0$, es reinverteix.

Període 3

$a_3 = 1$. Flux de la inversió.

$d_3 = 0$. Devolució del crèdit del període anterior. $d_3 = 0$ perquè $d_2 = 0$.

$v_3 = (1+k)\cdot\{21-(1+r)\cdot[20-3(1+k)]\}$. Reinversió del període anterior $v_3 > 0$ perquè $c_2 > 0$.

$b_3 = 0$. Crèdit total necessari. No es pot refinançar perquè és l'últim període: $b_T = 0$.

$c_3 = 1+(1+k)\cdot\{21-(1+r)\cdot[20-3(1+k)]$. Saldo. Com que $b_3 = 0$, $c_3 = a_3+d_3+v_3 > 0$, i atès que aquest és l'últim període ($T = 3$), no hi ha reinversió; $c_3 = c_T$ és el VFN.

En resum, el VFN del projecte H, quan $r = 0{,}1$ i $k = 0{,}06$ i tenint en compte la hipòtesi d'autofinançament màxim H2[3], resulta que és de $VFN(H) = 3{,}64788$, com detallem a continuació:

(3)També segons aquesta hipòtesi es dóna l'equivalència entre els criteris VAN i VFN per al cas particular r = k.

	Concepte	0	1	2	3
at	Flux de la inversió en t	3	–20	21	1
dt	Devolució crèdit de t – 1	0	0	–18,502	0
vt	Reinversió de t – 1	0	3,18	0	2,64788
bt	Crèdit total en t	0	16,82	0	0
ct	Saldo en t	3	0	2,498	3,64788
	Valor final net				3,64788

Aplicant ara aquest mateix procediment als projectes A, R i T, anteriors, i expressant amb una mica més de detall cadascun dels passos seguits, resulta:

Projecte A	**0**	**1**	**2**
Inversió	–100	115	0
Finançament a r	100	–100(1 + r)	0
Refinançament a r	0	0	0
Suma	0	115 – 100(1 + r)	0
Reinversió a k	0	–[115 – 100(1 + r)]	[115 – 100(1 + r)](1 + k)
Valor final net			**[115 – 100(1 + r)](1 + k)**

Projecte R	**0**	**1**	**2**
Inversió	–100	0	130
Finançament a r	100	–100(1 + r)	0
Refinançament a r		100(1 + r)	–100(1 + r)2
Suma	0	0	130 – 100(1 + r)2
Reinversió a k	0	0	0
Valor final net			**130 – 100(1 + r)2**

Projecte T	**0**	**1**	**2**
Inversió	–100	70	70
Finançament a r	100	–100(1 + r)	0
Refinançament a r	0	–70 + 100(1 + r)	[70 – 100(1 + r)](1 + r)
Suma	0	0	70 + [70 – 100(1 + r)](1 + r)
Reinversió a k	0	0	0
Valor final net			**70 + [70 – 100(1 + r)](1 + r)**

En resum, el valor final trobat per a cada projecte és:

A	115(1 + k) – 100(1 + r)(1 + k)
R	130 – 100(1 + r)2
T	70 + 70(1 + r) – 100(1 + r)2

de la qual el projecte R és millor que el T per a tota taxa r positiva, mentre que la relació entre A i R depèn dels valors concrets de r i k.

Per exemple, per a r = 10% i k = 6% resulta un VFN de:

A	VFN(A) = 5,3
R	VFN(R) = 9,0
T	VFN(T) = 26,0

Activitat

Compareu aquests valors del VFN maximitzant els fons propis (H2), amb els obtinguts anteriorment en maximitzar els fons aliens (H1).

22. Comparació de projectes de durada diferent

L'anàlisi de dos o més projectes amb diferent vida útil planteja problemes addicionals que no sempre es resolen adequadament. Hi ha diversos sistemes raonables, encara que no sempre coincidiran a assenyalar un mateix projecte com el millor i són els que presentarem en aquesta secció. En primer lloc, exposarem dos procediments suposadament equivalents que, amb el títol de *renovació d'equips*, es proposen en Brealey i Myers –d'ara endavant, BM– i rebran la denominació de *mètode BM i BM'*, respectivament. En segon lloc, explorarem algunes variants conservadores amb caràcter experimental –MC i MC'– i, finalment, resumirem els resultats obtinguts.

Referència bibliogràfica

R. A. Brealey; S. C. Myers; F. Allen (2008). *Principles of corporate finance* (9a. ed.). Auckland: McGraw-Hill.

22.1. Mètode BM

Quan es volen comparar dos o més projectes amb diferent vida, es forma un conjunt de projectes nou de manera que tots tinguin una durada igual a l'MCM de la durada dels projectes originals, com hem indicat. Si les diferències en la durada no són rellevants (més endavant es relaxa aquest supòsit), aquest artifici no comporta més problemes. La forma de càlcul no presenta dificultats, com es mostra seguidament amb alguns exemples.

Segons el supòsit més simple, ambdós proporcionaran benefici idèntic (o cost) i només es diferenciaran pels fluxos de cost (o benefici). Això és precisament el que ocorre quan es tracta d'escollir entre dues tecnologies o dos processos per a aconseguir un mateix objectiu.

Suposem que A i B són dues màquines que es volen comparar. Ambdues fan exactament la mateixa funció i es diferencien pel preu de compra, pels costos de funcionament i, a més, pel fet que la màquina A dura dos períodes i la B tres, com es reflecteix en la taula següent:

	0	1	2	3
A	–7	–5	–5	--
B	–8	–2	–2	–2

L'MCM dels períodes de funcionament de les màquines A i B és de 6 períodes. Per tant, es poden comparar els costos d'utilitzar (tres) màquines A amb els de fer servir (dues) màquines B. Dit d'una altra manera, s'estan comparant dues seqüències, la cadena AAA, formada per tres màquines A (A1, A2 i A3), i la cadena BB, composta per dues màquines del tipus B (B1 i B2), amb la qual cosa s'està mesurant el cost de disposar de manera continuada de màquines A o B al llarg de sis períodes. Tant en un cas com en l'altre, si es volgués prosseguir l'activitat productiva seria necessari fer una inversió addicional en el període sis (amb una màquina A o B, segons convingui). En resum, si es tracta de planificar l'activitat únicament fins al període sis, els fluxos corresponents són els que es mostren en la taula següent:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A1	-7	-5	-5				
A2			-7	-5	-5		
A3					-7	-5	-5
AAA	**-7**	**-5**	**-12**	**-5**	**-12**	**-5**	**-5**
B1	-8	-2	-2	-2			
B2				-8	-2	-2	-2
BB	**-8**	**-2**	**-2**	**-10**	**-2**	**-2**	**-2**

Nota

AAA = A1 + A2 + A3 i BB = B1 + B2.

Recordeu que s'estan comparant els costos de les màquines A i B durant únicament sis períodes. Si es volgués que aquest exercici resultés equivalent a comparar-les durant un temps il·limitat s'hauria d'introduir el valor de la inversió en una màquina addicional, la quarta de A i la tercera de B, en el període sis, com es fa en el procediment número 3.

El problema acaba comparant el valor actual (VA) d'ambdós projectes i triant el millor (el menor en termes absoluts, en aquest cas). El valor actual del projecte compost AAA és més petit que el BB, almenys per a taxes reals raonables (positives i no superiors al seixanta per cent), de manera que la màquina B és preferible que la A perquè, proporcionant un benefici idèntic, costa menys. Per exemple, amb una taxa real del 5% $(r = 0{,}05)$ resulta $VA(AAA) = -44{,}5 < VA(BB) = -25{,}1$ i s'escull el projecte amb més VA, que és el BB.

Tal vegada l'analista tingui preferències per la TIR per a determinar la rendibilitat de cada projecte, una cosa que és impossible si no es coneix la suma dels beneficis encara que, si es vol, es pot calcular la rendibilitat de prendre la decisió correcta. Si aquest és el cas, es determina la TIR del projecte diferència $(BB - AAA)$, que mesuraria la rendibilitat relativa aconseguida per tal de dur a terme el projecte BB en lloc del AAA. Com que la TIR de $(BB - AAA)$ és igual a la de $(AAA - BB)$, cal estudiar si el projecte diferència constitueix o no una inversió; en cas contrari es corre el risc d'interpretar malament el resultat. D'altra banda, poden aparèixer diversos canvis de signe en els fluxos de $(BB - AAA)$, la qual cosa comporta la possibilitat d'existència de més d'una arrel, la qual cosa per sort no ocorre en aquest exemple. Els fluxos de $(BB - AAA)$ són:

	0	1	2	3	4	5	6
(BB-AAA)	-1	3	10	-5	10	3	3

Calculada la TIR del projecte diferència (BB - AAA), resulta del 391,72% i **com que es tracta d'una inversió** (almenys per a aquest valor de r), és preferible mantenir durant sis períodes la cadena BB que la AAA, com s'havia determinat. En resum, la màquina B costa menys que la A.

22.2. Mètode BM'

En lloc de calcular el VA durant un temps igual a l'MCM de la vida dels dos projectes que s'estudien, la qual cosa generalment comporta càlculs llargs i avorrits, es calculen i comparen les anualitats constants equivalents. Per a examinar aquest procediment, tan enginyós com d'aplicació simple, utilitzarem el mateix exemple anterior, l'elecció entre les màquines A i B, que proporcionaven els mateixos beneficis i uns costos que es tornen a reproduir per comoditat:

	0	1	2	3
A	-7	-5	-5	--
B	-8	-2	-2	-2

A partir d'aquestes dades, per a cada projecte es calcula l'**anualitat constant equivalent**, que, aplicada durant la vida del projecte (2 períodes per a A i 3 per a B), proporciona el mateix VA que els fluxos originals. La fórmula és simple; suposem que V és el VA, a, l'anualitat i n, la vida del projecte, llavors es compleix $V = a\,K$, essent $K = \left[1/r - 1/\left(r(1+r)^n\right)\right]$ el valor actual equivalent d'una anualitat constant per valor d'una unitat, invertida des de l'any **u** fins al n a la taxa **r**.

El valor de l'anualitat (constant) equivalent a serà, doncs $a = V/K$, en què a és el valor de l'anualitat buscat. En aquest cas, per a les màquines A i B, designant les anualitats corresponents per a i b, resulta:

$$\begin{aligned} V(A) &= -7 - 5\left[1/r - 1/\left(r(1+r)^2\right)\right] \\ a &= -7/\left[1/r - 1/r(1+r)^2\right] - 5 \\ V(B) &= -8 - 2\left[1/r - 1/r(1+r)^3\right] \\ b &= -8/\left[1/r - 1/r(1+r)^3\right] - 2 \end{aligned} \qquad (37)$$

Per tant, els fluxos originals de A i B es poden substituir per les anualitats a i b, ja que proporcionen el mateix VA. Coneguda la taxa, es calculen a i b; suposeu que la taxa és del 5% (r = 0,05), llavors V(A) = -16,3 i a = -8,77, V(B) = -13,45 i b = -4,94. Es pot escriure, doncs:

	0	1	2	3	Tipus de flux	VA(·)
A	-7	-5	-5	--	Flux original	-16,3
A	--	**-8,77**	**-8,77**	--	**Anualitat equivalent**	**-16,3**
B	-8	-2	-2	-2	Flux original	-13,45
B	--	**-4,94**	**-4,94**	**-4,94**	**Anualitat equivalent**	**-13,45**

La regla de decisió és simple: *es tria el projecte amb un valor més alt de l'anualitat equivalent* (el valor més gran entre a i b, amb el signe que li correspon). Com que a = -8,77 < b = -4,94, es tria la màquina B.

Segons BM, determinades les anualitats, és immediat calcular el VA del projecte definit com una cadena il·limitada de màquines A -VA(A, VA(A,∞)) –contra un altre de format per una cadena il·limitada de màquines B -VA(B, VA(A,∞)). En efecte, els VA són VA(A, VA(A,∞)) = a/r i VA(B, VA(A,∞)) = b/r i, com es pot observar, aquesta informació addicional no afecta en absolut la decisió perquè el signe de (a - b) sigui el mateix que el de (a/r - b/r).

22.3. Mètode conservador (MC)

En els procediments anteriors, es definien àmbits finits. En el BM, l'àmbit temporal per a l'anàlisi de dos projectes era el mateix per a ambdós i es determinava com el MCM de la vida útil d'ambdós. En el BM', es mantenia l'àmbit original per a cada projecte, encara que el sistema usat s'estenia al cas d'una cadena il·limitada de màquines o projectes d'un mateix tipus. En un cas i en l'altre, l'àmbit temporal delimitat era finit.

Com a alternativa, aquí es considerarà un temps il·limitat com a àmbit temporal comú. Reprenent l'exemple anterior d'elecció entre les màquines A i B, el problema es planteja en altres termes. Ara es tracta d'estudiar què seria preferible, si utilitzar **sempre** màquines A o màquines B.

L'esquema és idèntic al cas anterior, amb l'excepció de la inversió que és necessari fer en l'últim període perquè no es trenqui la cadena, com es mostra a continuació:

	0	1	2	3	4	5	6	...
A1	-7	-5	-5					
A2			-7	-5	-5			
A3					-7	-5	-5	
A4							-7	...
A'	**-7**	**-5**	**-12**	**-5**	**-12**	**-5**	**-12**	**...**
B1	-8	-2	-2	-2				
B2				-8	-2	-2	-2	
B3							-8	...
B'	**-8**	**-2**	**-2**	**-10**	**-2**	**-2**	**-10**	**...**

Nota

VA(A,∞)

Com abans, es pot calcular el VA d'ambdós projectes i triar el que proporciona un VAN més gran. Concretament, amb una taxa real del 5%, resulta $\mathrm{VA}(\mathrm{A}') = -49{,}7 < \mathrm{VA}(\mathrm{B}') = -31$, la qual cosa suggereix que és preferible la màquina B que la A. La interpretació d'aquest resultat no és directa. En efecte, encara que el problema està plantejat en un àmbit temporal il·limitat, de fet, s'ha comparat el VA d'ambdós projectes considerant un mateix àmbit temporal finit (sis períodes) que és el MCM de la vida dels dos projectes, si bé s'han disposat els fluxos de manera que es poden replicar indefinidament. Els inversors que practiquen la *tàctica de terra cremada* no veuran amb bons ulls aquest model que, amb raó, s'ha qualificat com a conservador, en el bon sentit del terme.

En altres paraules, en l'últim període (el sis en aquest cas) es deixa el projecte preparat per a continuar l'activitat, de la mateixa manera que es va trobar en el període u. Per aquest motiu el càlcul del VA serà relativament baix atès que inclou el cost de la inversió en el període final (A4 i B3) però no els beneficis que s'obtindran gràcies a aquesta inversió. Aquest enfocament sembla apropiat per a determinar la rendibilitat que obtindrà un concessionari, el qual obté uns drets d'explotació i té l'obligació de deixar els actius en tan bon estat en cessar la concessió com estaven en el període u. En la realitat abunden les clàusules d'aquest tipus en les concessions de serveis públics (proveïment d'aigua potable a domicili, per exemple). En general, el model es correspon amb situacions en les quals en l'últim període, per les raons que siguin, s'ha de fer la inversió necessària per a deixar les coses igual o millor que com estaven en el període inicial.

22.4. Mètode MC'

A fi de treballar amb un àmbit temporal il·limitat, es calculen les anualitats equivalents, com en el mètode BM' però amb alguna variant: en lloc de calcular les anualitats de manera que siguin equivalents als fluxos de tots els períodes originals, es calculen les anualitats equivalents als fluxos a partir del període u. Per a facilitar la lectura es repeteixen els fluxos de A' i B'.

	0	1	2	3	4	5	6	...
A'	-7	**-5**	**-12**	-5	12	-5	-12	...
B'	-8	**-2**	**-2**	**-10**	-2	-2	-10	...

Observant les dades precedents, en les quals s'han destacat els fluxos que es repeteixen indefinidament, és immediat que la forma més simple de plantejar el problema és com segueix:

	0	1	2	3	...
A'	-7	**-5**	**-12**	...	...
B'	-8	**-2**	**-2**	**-10**	...

Calculant les anualitats constants equivalents (a' i b') de A' i B', prescindint dels fluxos del període zero (operant, doncs, amb els fluxos dels períodes 1 i 2 per a A' i períodes 1, 2 i 3 per a B'), amb una taxa real del 5% resulta a' = -8,41463 i b' = -4,53766:

	0	1	2	3	...
A'	-7	**-8,41**	-8,41	...	...
B'	-8	**-4,54**	-4,54	...	...

El càlcul dels VA d'una cadena il·limitada de màquines d'un tipus i de l'altre és ara immediat.

$VA(A') = -7 - 8{,}41463/0{,}05 = -175{,}292$ y $VA(B') = -8 - 4{,}53766/0{,}05 = -98{,}75$. El cost de mantenir en funcionament de manera permanent màquines o projectes de tipus A és més alt que el corresponent amb màquines B, per la qual cosa es preferirien aquestes últimes.

22.5. Comparació de mètodes per a considerar diferents durades

Els tres mètodes examinats són molt semblants, però no idèntics, per la qual cosa no sempre coincidiran en el diagnòstic. Convé, doncs, examinar amb detall i tenir present les diferències entre els procediments abans d'aplicar-los i avaluar-ne els resultats. Per posar de manifest les primeres diferències entre els mètodes usats, a continuació tornem a plantejar el problema original juntament amb els fluxos que es deriven de la forma de tractament pròpia de cada sistema, després resumim les característiques principals de cada mètode i, finalment, complementem l'exposició amb alguns exemples.

		0	1	2	3	4	5	6	...
Problema original	A	-7	-5	-5					
	B	-8	-2	-2	-2				
Mètode BM	AAA	-7	-5	-12	-5	-12	-5	-5	...
	BB	-8	-2	-2	-10	-2	-2	-2	...
Mètode BM'	A	--	-8,77	-8,77	-8,77	-8,77	-8,77	-8,77	...
	B	--	-4,94	-4,94	-4,94	-4,94	-4,94	-4,94	...
Mètode MC	A'	-7	-5	-12	-5	-12	-5	-12	...
	B'	-8	-2	-2	-10	-2	-2	-10	...
Mètode MC'	A'	-7	-8,41	-8,41	-8,41	-8,41	-8,41	-8,41	...
	B'	-8	-4,54	-4,54	-4,54	-4,54	-4,54	-4,54	...

Com és immediat per simple inspecció de la taula precedent, a partir d'un únic problema original, hi ha diferències en els fluxos que s'utilitzen per a determinar la bondat relativa dels projectes A i B. En conseqüència, és esperable que sorgeixin discrepàncies entre les recomanacions fetes aplicant un sistema o l'altre, com a conseqüència de plantejaments diferents. Dit d'una altra manera, l'elecció del mètode no sempre serà innòcua, com es posa de manifest en el resum que segueix.

22.6. Resum

Donat un projecte A, caracteritzat per una inversió inicial en el període zero i uns fluxos econòmics (positius o negatius) durant una quantitat de períodes determinada fins al període final T_z, B (en suma, $z = A$), es compara amb un altre B, que presenta les mateixes característiques però amb durada i fluxos diferents. Un problema típic seria el de reemplaçament de màquines i equips. Els mètodes presentats es poden resumir com segueix:

- Mètode BM. Es defineix un mateix àmbit temporal per a ambdós projectes, calculat com l'MCM de la durada total de cadascun. Es determinen els VAN respectius i es tria el projecte amb VAN més gran.

- Mètode BM'. Mantenint els àmbits temporals originals, es calculen els VAN de cada projecte i, per a una quantitat de períodes igual al del projecte menys u (no es té en compte en aquest còmput el període inicial zero perquè aquest lapse temporal es pot suprimir en continuar el projecte), es determinen les quotes constants per període que són equivalents al VAN trobat. Es tria el projecte amb una quota constant més gran. La generalització per a una cadena il·limitada de projectes d'un mateix tipus seguint aquest mètode, com proposa BM, no és correcta perquè el VAN calculat té en compte T_Z+1 períodes, pressuposa, doncs, la necessitat d'utilitzar sempre T_Z+1 períodes, quan això únicament és necessari la primera vegada i per prosseguir amb un projecte idèntic es requereixen només T_Z períodes per cada renovació.

- Mètode MC. Es procedeix com en el mètode BM, amb una excepció: per a cada projecte, al flux corresponent al període final T_Z se li suma el corresponent al període inicial 0, de manera que el període T_Z+1 és indistingible del període 1_Z, i assegura indefinidament la continuïtat del projecte. Es tria el projecte amb VAN més gran. Sistema adequat per al cas de projectes llargs amb necessitat de reposar una o més vegades alguns equips amb d'altres de les mateixes característiques.

- Mètode MC'. A partir de les dades obtingudes segons el mètode anterior (MC), es calculen les quotes constants equivalents als VAN respectius per a T_Z períodes, de manera semblant a la que es feia amb el mètode BM', però sense comptabilitzar el flux corresponent al període inicial 0. El resultat és, doncs, un flux inicial i unes quotes constants per a cada projecte per un temps il·limitat (en rigor, les quotes duren T_Z períodes, però com que són replicables indefinidament equivalen a quotes il·limitades en el temps). Es calculen els VAN respectius per a un temps il·limitat i es tria el projecte amb VAN més gran. Tal vegada sigui un model adequat per a la gestió de recursos naturals.

22.7. Tractament de projectes amb durades molt dispars

Fins aquí s'ha suposat que les diferències en les durades dels projectes que es vol comparar no introduïen variacions de fons, en tot cas, res que no quedés reflectit en una funció VAN convencional. En cas contrari, és convenient introduir de manera explícita un factor de correcció per a compensar, en la mesura que sigui possible, el desfasament entre les cadenes de projectes formades artificialment i els projectes originals. A continuació, plantegem una forma de tenir en consideració de manera explícita aquest element distorsionador.

Suposem els projectes $y = 1, 2, \ldots, Y,$, amb durada T^y i fluxos a_{ty}^y, ordenats de menys a més durada. A partir dels projectes originals, es formen sèries de manera que cadascuna de les cadenes de projectes, formades artificialment, tingui una durada total de:

$$T = \text{m.c.m.}\{T^1,\ T^2,\ T^3,\ \ldots,\ T^y\} \qquad (38)$$

La funció VAN^y de cada cadena de projectes y serà, en un cas qualsevol, per exemple, el j:

$$VAN^j = \Sigma a^j_{t1}(1+r)^{-t1} + \Sigma a^j_{t2}(1+rK_2)^{-t2} + \Sigma a^j_{t3}(1+rK_3)^{-t3} + \Sigma a^j_{t4}(1+rK_4)^{-t4} + \ldots + \Sigma a^j_{ts}(1+rK_s)^{-ts}, \quad (39)$$

en què:

$t_1 = 1, 2, \ldots, T^j, t^2 = T^j + 1, T^j + 2, \ldots, 2T^j \ldots t^s = T - T^j + 1, T - T^j + 2, \ldots, T,$ en què $K_2, \ldots, K_s$, $s = T/T^j$ són factors que depenen de l'inversor i volen reflectir que dos projectes curts són preferibles a un de llarg, tota la resta constant; significa, a més, que es pot aconseguir la indiferència entre aquests projectes modificant adequadament la relació entre la taxa de descompte per a l'un i l'altre a partir del punt en què difereixen en durada.

Com és lògic, a partir de la funció VAN^j es pot obtenir la TIR o qualsevol de les mesures de rendibilitat ja examinades. Amb tot, caldrà tenir present les modificacions introduïdes en la interpretació dels resultats.

La principal dificultat del mètode proposat en aquest apartat rau a trobar els valors adequats per als factors correctors de la taxa de descompte. En tot cas, la funció resultant ha de concordar amb les preferències de l'inversor respecte a l'alternativa: menys rendibilitat avui contra més rendibilitat demà. Quan almenys un dels projectes és llarg, s'haurien de tenir en consideració les preferències entre consum propi i consum de les generacions futures (Pasqual, 2003).

Una altra alternativa, potser més pràctica, és decidir un àmbit temporal per a la inversió i calcular el valor final net per a tots els projectes candidats (Montllor, 1978, i Pasqual, 2003).

Referència bibliogràfica

J. Montllor (1978). "Un modelo determinista de proyectos agregados de inversión-financiación: El valor final neto". *Económicas y Empresariales* (núm. 9, pàg. 152-163).

Activitats

1) Nivell I

ER1.1. L'Antoni i la Bernarda no es posen d'acord. L'Antoni preferiria comprar el rentavaixella al comptat, mentre que la Bernarda defensa la compra a terminis. Trobeu una explicació racional a aquest fet sabent que ambdues opcions són factibles.

ER1.2. Les preferències de la Josefa entre consum present i futur es poden representar per una taxa de descompte subjectiva del D% i disposa d'una quantitat de diners que pot invertir o dedicar a consum. Hi ha dues alternatives d'inversió a un període: el dipòsit a termini X que proporciona una rendibilitat real del r_X % i la Y, que rendeix el r_Y %, també en termes reals (se suposa que no hi ha inflació). Sabent que la Josefa prefereix la inversió Y que la X i que davant l'alternativa entre inversió i consum optarà per invertir, indiqueu la relació que hi ha entre r_X, r_Y i D.

2) Nivell II

ER2.1. Calculeu el valor actual dels fluxos següents sabent que la taxa de descompte és del cent per cent (r = 1):

Períodes	–4	–2	0	1	4
Fluxos	100	–100	722	50	–1.600

ER. 2.2. Passejant pel carrer trobeu tres pagarés al portador per valor de 100, 150 i 200 euros. El primer es pot cobrar immediatament, el segon al cap d'un any i el tercer al cap de dos. Com que no li ve de gust esperar el venciment dels pagarés, els lliura a un banc a canvi d'una quantitat de diners al comptat. Determineu aquesta quantitat sabent que el banc aplica una taxa de descompte del 100% anual (r = 1).

ER. 2.3. Us intenten convèncer que dugueu a terme una inversió financera a termini fix amb l'argument que al cap vint anys haureu duplicat la quantitat invertida. Determineu la taxa de remuneració d'aquesta imposició a termini.

ER. 2.4. Un amic us demana una quantitat de diners K en préstec. No us podeu negar a complaure'l, però la veritat és que només esteu disposats a prestar-li la meitat (K/2), per la qual cosa recorreu a demorar el lliurament d'aquests diners (K). Si la taxa de descompte és de r = 10%, indiqueu quant heu de retardar el lliurament de la quantitat K que el vostre amic us ha sol·licitat perquè, vist el préstec des del moment present, només li deixeu en realitat K/2.

Solucionari

ER. 1.1. La Bernarda i l'Antoni estarien d'acord si la taxa de preferència temporal de l'Antoni, D_A, la de la Bernarda, $_B$, i el tipus d'interès real, r, fossin tal que r > D_A i r > D_B (comprarien a crèdit), o bé r < D_A i r < D_B (pagarien al comptat). Perquè sorgeixi un conflicte com el del problema, n'hi ha prou que el cost r del crèdit estigui comprès entre la taxa de la Bernarda i la de l'Antoni, en aquest cas ocorre que D_A < r < D_B. Com que r > D_A, l'Antoni troba que el cost del crèdit és massa car i, en conseqüència, prefereix comprar al comptat, mentre que a la Bernarda li ocorre el contrari, només pot pensar que és millor pagar a terminis que al comptat ja que la seva taxa de preferència temporal és més gran que el cost del crèdit.

ER. 1.2. Com que la Josefa prefereix la inversió Y que la X, Y és més rendible que X, o sigui $r_x < r_y$. Si renuncia a consumir avui per invertir, significa que D < r_y. En resum, $r_x < r_y$ i D < r_y, en què la relació entre D i r_x és desconeguda. Per exemple, suposem que r_y = 32%, r_x = 27% i D = 30%. Si la quantitat de diners a la disposició de la Josefa és un total de M, llavors les alternatives són:

Períodes	0	1
Preferències consum	-M	1,30M
Inversió X	-M	1,27M
Inversió Y	-M	1,32M

Amb aquestes alternatives és clar que la Josefa entre invertir en X i consumir triaria consumir, perquè no està disposada a renunciar a consum en el moment present si no aconsegueix el trenta per cent més com a mínim en el període següent, i la rendibilitat de X no arriba a aquest mínim (r_x = 27% < D = 30%). Entre les dues inversions, la millor és la Y (r_y = 32% > r_x = 27%), per la qual cosa és la inversió Y la que s'ha de comparar amb l'alternativa de dedicar els recursos M a consum. Amb Y podrà consumir un trenta-dos per cent més en el període u, que és un valor superior al mínim marcat per les seves preferències (r_y = 32% > D); per tant el millor és invertir en Y.

ER. 2.1. La fórmula general per a actualitzar una quantitat qualsevol K_t a una taxa r és simple, $VA(K_t, r) = K_t/(1+r)^t$, que també se sol expressar com a $VA(K_t, r) = K_t\ (1+r)^{-t}$, en què $(1+r)^{-t}$ és el factor d'actualització a la taxa r d'un valor qualsevol situat en el període t. Per exemple, si t = 10, $VA(K_{10}, r) = K_{10}/(1+r)^{10}$ i si t = -4, llavors, $VA(K_{-4}, r) = K_{-4}/(1+r)^{-4}$. El resultat de l'actualització demanada és:

Períodes	-4	-2	0	1	4
Fluxos	100	-100	722	50	-1.600
Factor $(1 + r)^{-t}$	$(1 + r)^4 = 8$	$(1 + r)^2 = 4$	$(1 + r)^0 = 1$	$(1 + r)^{-1}$ $= 1/2$	$(1 + r)^{-4} = 1/8$
Fluxos actualitzats	800	-400	722	25	-200

ER. 2.2. El valor nominal del primer pagaré, que és de 100 euros, coincideix amb l'actualitzat, ja que es pot fer efectiu al moment. El segon pagaré és a un any i l'import nominal és de 150 euros; la quantitat equivalent en el moment actual és de 150/(1+r) = 150/2 = 75 euros. L'últim pagaré és per un nominal de 200 euros que cal pagar al cap de dos anys, per la qual cosa el seu valor actualitzat és de $200/(1+r)^2$ = 200/4 = 75 euros. Per tant, el que cobrarà en el moment 0 és un total de 100 + 75 + 50 = 225 euros, o sigui el valor actual dels pagarés calculat a la taxa r = 1. En resum:

Períodes	0	1	2
Import nominal	100	150	200

Períodes	**0**	**1**	**2**
Factor de descompte (r = 1)	1	$1/(1 + r) = 1/2$	$1/(1 + r)^2 = 1/4$
Import actualitzat	100	75	50
Valor actual (VA)	100 + 75 + 50 = 225		

ER. 2.3. Per la regla del 69, T = 70/T , de la qual r = 70/T i el tipus d'interès d'aquesta inversió és de r* = 70/20 = 35% aproximadament. Si es vol una xifra exacta, s'aïlla r a partir de (*) = T = ln2/ln(1+r), de la qual r = exp(ln(2)/T) -1 = exp(ln(2)/20) -1 = 3,526%.

ER. 2.4. Suposem que T és la quantitat de períodes que es retarda el lliurament dels diners sol·licitats (K). Com que voleu prestar-ne la meitat (K/2) en termes de valor actual, s'ha de complir que $K/(1+r)^T = K/2$, o sigui $1/(1+r)^T$, de la qual $(1+r)^T = 2$, però a partir d'aquesta expressió es pot deduir la regla del 69 (coincideix amb el tercer pas en el text), i per tant aquesta regla és aplicable a aquest cas. El temps T buscat és, doncs, T = 70/r = 70/10 = 7 períodes, aproximadament.

Bibliografia

Brealey, R.; Myers, S. (1984). *Principles of corporate finance*. Nova York: McGraw-Hill.

Caballer, V. (1993). *Valoración agraria. Teoría y práctica*. Madrid: Ediciones Mundi-Prensa.

Comissió de les Comunitats Europees (1993). *Manual. Gestión del Ciclo de un Proyecto. Enfoque Integrado y Marco Lógico*. Brussel·les: Comissió de les Comunitats Europees, Ajuda al Desenvolupament, Unitat Avaluació.

Dasgupta, A. K.; Pearce, D. W. (1972, rep. 1973). *Cost-benefit analysis*: *theory and practice*. Londres: The McMillan Press Ltd.

Durán, J. J. (1990). *Estrategia y evaluación de inversiones directas en el exterior*. Madrid: Instituto Español de Comercio Exterior.

Epley, D.; Kelly, G. W. (1993). "The six factors of one dollar are actually fourteen factors". *The Appraisal Journal* (vol. LXI, núm. 3, pàg. 399-404).

Fontaine, E. R. (1994). *Evaluación social de proyectos*. Santiago: Ediciones Universidad Católica de Chile.

Fundación BBV (1998). *La gestión del riesgo de marcado y de crédito*. Bilbao: Fundación BBV. Documenta.

Gittinger, J. P. (1987). *Análisis económico de proyectos agrícolas*. Madrid: Instituto de Desarrollo Económico del Banco Mundial / Ed. Tecnos.

Harberger, A. C. (1972, VC 1973). *Evaluación de proyectos*. Madrid: Instituto de Estudios Fiscales.

Hawkins, C. J.; Pearce, D. W. (1971; VC 1974). *Evaluación de inversiones*. Madrid: Editorial Vicens-Vives.

Layard, R. (1974). *Cost-benefit analysis*. Harmondswhorth: Penguin Books Ltd.

Layard, R.; Glaister, S. (1994). *Cost-benefit analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

Luengo, P. (1988). *Análisis coste-volumen-beneficio*. Madrid: Instituto de Planificación Contable / Ministerio de Economia y Hacienda.

Mishan, E. J. (1988). "A critique of the discounted-present-value method". A: *Cost-Benefit* Analysis (. Boston, MA: Deorge Allen and Unwin.

Monnier, E.; Toulemonde, J. (1993). *Methods to give meaning to the evaluation obligation: the conclusions of the MEANS (Methods for Evaluating Structural Policies) programme*. Vaulx-en-Velin: CEOPS, ENT.

Montllor, J. (1978). "Un modelo determinista de proyectos agregados de inversión-financiación: El valor final neto". *Económicas y Empresariales* (núm. 9, pàg. 152-163).

ONUDI (1972). *Pautas para la evaluación de proyectos*. Nova York: Nacions Unides.

Pablo, A. de; Ferruz, L.; Santamaría, R. (1990). *Análisis práctico de decisiones de inversión y financiación en la empresa*. Barcelona: Ed. Ariel, SA.

Pasqual, J. (2003). *La evaluación de políticas y proyectos. Criterios de valoración económicos y sociales*. Barcelona: Icaria Editorial / Universitat Autònoma de Barcelona.

Pasqual, J.; Tarrío, J. A. (1995). "Optimal time-phasing of investment. A consolidated spurius model". *Applied Economic Letters* (vol. 2, núm. 10, pàg. 321-322).

Pearce, D. W.; Nash, C. A. (1981). *The social appraisal of projects. A text in cost-benefit analysis*. Londres: Ed. MacMillan Press Ltd.

Riera, P. (1993). *Rentabilidad social de las infraestructuras: Las rondas de Barcelona*. Madrid: Ed. Civitas.

Robusté, F.; Clavera, J. (1997). *Impacto económico del aeropuerto de Barcelona*. AENA / Editorial Civitas, SA.

Romero, C. (1992). *Normas prácticas para la evaluación financiera de inversiones agrarias*. Madrid: Banco de Crédito Agrícola.

Suárez, A. (1993). *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*. Madrid: Ed. Pirámide.

Tarrío, J. A. (1994). "Evaluación de proyectos con métodos matemático-financieros". *Working Paper, 94.03*. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, Departament d'Economia Aplicada.

Williams, M. R. W. (1988). *Decision-making in forest management*. Letchworth: Research Studies Press Ltd. [Versió catalana: (1990). *La presa de decisions en la gestió forestal*. Barcelona: Diputació de Barcelona.]

Annexos

Annex 1. Nous i vells criteris de rendibilitat. Coherència entre criteris (nivell IV)

Introducció

Hi ha abundants referències en la bibliografia –inclosos manuals clàssics en el tema– que analitzen o exposen les bondats i els defectes dels diferents criteris de rendibilitat que s'apliquen en l'avaluació de projectes.

Referències bibliogràfiques

Vegeu, per exemple:

H. Peumans (1974). *Valoración de proyectos de inversión*. Bilbao: Ed. Deusto.

J. F. Weston; E. F. Brigham (1984). *Finanzas en administración.* Mèxic: Ed. Iberoamericana.

S. Gronchi (1986) "On investment criteria based on the internal rate of return". *Oxford Economic Series*, *New Series* (vol. 1, núm. 38, pàg. 174-180).

M. Bridier; S. Michaïloff (1987). *Guide practique d'analyse de projects* (4a. ed.). París: Ed. Economica.

J. P. Gittinger (1987). *Análisis económico de proyectos agrícolas*. Madrid: Instituto de Desarrollo Económico del Banco Mundial / Ed. Tecnos.

D. S. Remer; A. P. Nieto (1995). "A compendium and comparison of 25 project evaluation techniques". *International Journal of Production Economics* (vol. 1, núm. 42, pàg. 79-96 i 101-129).

S. R. Ross (1995). "Uses, abuses, and alternatives to the net-present-value rule". *Financial Management* (vol. 3, núm. 24, pàg. 96-102).

P. Belli (1996). *Handbook on economic analysis of investment operations research*. Washington DC: Policy Department / The World Bank.

J. W. Petty i altres (1996). *Basic financial management*. Nova Jersey: Prentice-Hall.

R. J. Brent (1998). *Cost-benefit analysis for developing countries*. Cheltenham / Northampton, MA: Edward Elgar.

Z. Bodie; R. C. Merton (2000). *Finance*. Nova Jersey: Prentice-Hall.

R. E. Just; D. L. Hueth; A. Scmitz (2004). *The welfare economics of public policy*. Cheltenham: Edward Elgar.

R. O. Zerbe; A. S. Bellas (2006). *A premier for benefit-cost analysis*. Northampton, MA: Edward Elgar Publishing.

R. A. Brealey; S. C. Myers; F. Allen (2008). *Principles of corporate finance* (9a. ed.). Auckland: Ed. McGraw-Hill.

D. Castelo (2001). "Anomalies in net present value caltulations?". *Economics Letters* (núm. 72, pàg. 127-129).

H. S. Rosen (2008). *Hacienda Pública*. Madrid: McGraw-Hill.

Una mostra de la diversitat de procediments usats per a determinar la rendibilitat d'un projecte són els vint-i-cinc criteris analitzats en Remer i Nieto (1995); no obstant això, la majoria d'aquests vint-i-cinc criteris són descartables utilitzant la lògica més elemental (Pasqual, 1999), de manera que es redueix el ventall de criteris defensables als analitzats habitualment en les referències citades anteriorment.

Referències bibliogràfiques

D. S. Remer; A. P. Nieto (1995). "A compendium and comparison of 25 project evaluation techniques". *International Journal of Production Economics* (vol. 1, núm. 42, pàg. 79-96 i 101-129).

J. Pasqual Rocabert (1999). *La evaluación de políticas y proyectos*. Barcelona: Icaria.

El criteri les virtuts del qual són generalment destacades per sobre de la resta és el valor actual net (VAN), mentre que les crítiques als altres criteris es fonamenten en les suposades incoherències d'aquests amb el VAN. Serveixi com a exemple de la conclusió de la major part de la bibliografia sobre la qüestió la citació de Ross següent:

> "De fet, no és rar gastar una quantitat considerable de temps a classe assegurant-se que l'estudiant entén totes les maneres incorrectes de pensar sobre la presa de decisió en les inversions –des de la regla de la taxa interna de rendibilitat (TIR) fins al període de recuperació de la inversió. Erronis, sens dubte, perquè no coincideixen amb la regla del VAN."
>
> S. R. Ross (1995). "Uses, abuses, and alternatives to the net-present-value rule". *Financial Management* (vol. 3, núm. 24, pàg. 96).

El fet que permetria descartar un criteri com a criteri adequat seria la seva falta de concordança amb el que es considera el criteri bàsic, el VAN.

Un primer problema que faria considerar un criteri com a inadequat seria la possibilitat que doni una resposta diferent del VAN sobre la rendibilitat o no d'un projecte determinat. Bona part de la discussió entorn d'aquest problema se centra en la TIR, el segon criteri més popular quant a la seva aplicació pràctica. De fet, la majoria de les referències citades anteriorment indiquen l'inconvenient de la possible existència de múltiples TIR per a un projecte determinat, i assenyalen que en aquest cas el criteri no dóna una solució adequada.

Petty i altres afirmen que quan hi ha diverses TIR

> "[...] cap solució no és vàlida. Encara que cadascuna s'ajusta a la definició de TIR, no ofereixen cap perspectiva sobre els vertaders rendiments del projecte". Afirmen que, en aquest cas, la interpretació normal de la TIR perd el seu significat i que "per a projectes els fluxos dels quals canvien de signe en més d'una ocasió, recomanem el VAN com la regla de decisió més fiable".
>
> J. W. Petty i altres (1996). *Basic financial management* (pàg. 249 i 255). Nova Jersey: Prentice-Hall.

En el mateix sentit, Brent afirma que

> "es donen dues dificultats tècniques amb la TIR. La primera és que pot no existir TIR [...]. La segona és que n'hi pot haver massa", i no hi ha resposta a "quina TIR s'hauria d'utilitzar per a comparar amb el tipus d'interès", amb la qual cosa la regla deixaria de funcionar.
>
> **R. J. Brent** (1998). *Cost-benefit analysis for developing countries* (pàg. 32). Cheltenham / Northampton, DT.: Edward Elgar.

Així, per exemple, Gronchi afirma que la TIR només es pot utilitzar sense ambigüitat en la presa de decisions si és única, la qual cosa sembla una conclusió bastant general en la bibliografia, mentre que si n'hi ha diverses, la resposta habitual és que "la solució és usar el valor actual net" (Brealey i altres).

Referències bibliogràfiques

S. Gronchi (1986). "On investment criteria based on the Internal Rate of Return". *Oxford Economic Series, New Series* (vol. 1, núm. 38, pàg. 174-180).

R. A. Brealey; S. C. Myers; F. Allen (2008). *Principles of corporate finance* (9a. ed., pàg. 126). Auckland: Ed. McGraw-Hill.

No obstant això, Pasqual i altres demostren que el suposat conflicte en els resultats del VAN i la TIR respecte a la rendibilitat d'un projecte pot ser fàcilment superat si es tenen en consideració les característiques de la funció VAN i es defineix clarament què és una inversió i què és un crèdit. Els autors mostren que, d'aquesta manera, totes les arrels de la funció VAN tenen sentit econòmic i que, quan hi ha almenys una TIR, les recomanacions d'ambdós criteris coincideixen.

Referència bibliogràfica

J. Pasqual Rocabert; J. A. Tarrío; M. J. Pérez (2005). "Anomalies in net present value calculations. A solution". *Hacienda Pública Española / Revista de Economía Pública* (núm. 173, pàg. 47-60).

Un problema addicional en l'aplicació de la TIR succeeix quan hi ha diferents taxes de descompte rellevants per als diferents fluxos que implica un projecte. Problema que analitza i al qual es presenta una solució satisfactòria en aquesta investigació.

Un altre criteri l'aplicació del qual pot implicar problemes és el termini de recuperació de la inversió, ja que només és aplicable en projectes en els quals únicament hi ha un canvi de signe en el corrent temporal de fluxos nets del projecte. En aquest treball es presenta una nova variant que permet obtenir un criteri com el termini de recuperació d'inversió però amb una aplicabilitat més general.

Un segon problema que fa que es consideri inadequat un criteri és la possibilitat que comporti una ordenació entre projectes mútuament excloents diferent de la que indicaria el VAN. Aquest problema succeeix en criteris com la TIR o el quocient benefici/cost (QBC). L'inconvenient es planteja en l'afirmació següent de Bodie i Merton:

> "Per a entendre millor per què la TIR no és una bona mesura per a ordenar projectes mútuament excloents, fixeu-vos que la TIR d'un projecte és independent de la seva escala. El projecte places d'aparcament té una TIR molt alta, però la seva escala és petita comparada amb el projecte edifici d'oficines."
>
> Z. Bodie; R. C. Merton (2000). *Finance* (pàg. 180). Nova Jersey: Prentice-Hall.

O, de manera similar, en el cas del quocient B/C, com plantegen Zerbe i Bellas:

> "Una debilitat de la ràtio B/C és que no permet a l'analista escollir entre projectes mútuament excloents quan els seus costos són diferents [...]. El projecte amb la ràtio B/C més gran no és necessàriament el que té el VAN més alt". En general, aquests indicadors es rebutgen i es recomana l'ús del VAN.
>
> R, O. Zerbe; A. S. Bellas (2006). *A premier for benefit-cost analysis* (pàg. 228). Northampton, DT: Edward Elgar Publishing.

No obstant això, la solució a aquest problema ja s'ofereix, de manera intuïtiva, en Gittinger, Brent, i Brealey i altres, els quals assenyalen que la manera apropiada de seleccionar entre projectes excloents amb la TIR seria aplicar el criteri al projecte diferència. Lamentablement, no presenten cap demostració sobre aquest tema i limiten aquesta recomanació al criteri de la TIR, i ignoren la possibilitat d'aplicar el mateix mètode a altres criteris, com el QBC. En aquest treball s'avança en aquest aspecte, i es demostra que l'aplicació d'ambdós criteris al projecte diferència és sempre consistent amb el VAN, i s'estén, a més, el resultat als altres criteris.

Referències bibliogràfiques

J. P. Gittinger (1987). *Análisis económico de proyectos agrícolas*. Madrid: Instituto de Desarrollo Económico del Banco Mundial / Ed. Tecnos.

R. J. Brent (1998). *Cost-benefit analysis for developing countries*. Cheltenham / Northampton, MA: Edward Elgar.

R. A. Brealey; S. C. Myers; F. Allen (2008). *Principles of corporate finance* (9a. ed., pàg. 126). Auckland: Ed. McGraw-Hill.

En l'apartat següent es mostra que, si l'aplicació dels principals criteris de rendibilitat utilitzats habitualment es fa de manera correcta, aquests són coherents amb l'aplicació del criteri VAN. Concretament, es mostra això per al cas de criteris clàssics de rendibilitat, com la TIR, el QBC, que la bibliografia assenyala habitualment com a criteris que poden estar en conflicte amb el VAN. El treball mostra que la concordança també ocorre en el cas d'altres criteris clàssics com el valor final net (VFN), l'anualitat equivalent (Æ) i altres de nous, proposats en aquest treball, com la demora màxima de beneficis (DMB) i el termini de recuperació de costos (TRC). El treball representa, doncs, una extensió i generalització als criteris més rellevants de la concordança entre TIR i VAN ja demostrada. A continuació, es demostra que, per a triar entre dos projectes mútuament excloents, l'aplicació dels criteris esmentats al projecte diferència o incremental és una condició suficient perquè ocorri la desitjada concordança amb el VAN. Finalment, en l'últim apartat es recullen les principals conclusions del treball.

1. Criteris per a determinar la desitjabilitat d'un projecte

Un projecte $P_X(X_t, r)$ depèn d'unes quantitats periodificades X_t, $t = M, \ldots, M+T$, en què M és el moment d'execució del projecte, T la seva durada i r_t les taxes de descompte. Si no s'indica el contrari, es convé que $r_t = r$ i $M = 0$.

Hi ha quatre tipus de projecte –inversió, crèdit, regal i pèrdua–, com es defineixen a continuació:

Inversió: si hi ha fluxos estrictament positius i negatius, el projecte es comporta com una inversió en $[r^a, r^b]$, $a \leq b$, si $\partial VAN/\partial r < 0$ en $[r^a, r^b]$.

Crèdit: si hi ha fluxos estrictament positius i negatius, el projecte es comporta com un crèdit en $[r^a, r^b]$, $a \leq b$, si $\partial VAN/\partial r > 0$ en $[r^a, r^b]$.

Regal: tots els fluxos són no negatius i almenys un és estrictament positiu.

Pèrdua: tots els fluxos són no positius i almenys un és estrictament negatiu.

2. El valor actual net (VAN)

La funció VAN mesura l'augment de la quantitat de riquesa neta en el moment actual, que seria equivalent a executar el projecte.

Definició de VAN:

$$\text{VAN}(X_t;\ r) = X_0 + X_1(1+r)^{-1} + X_2(1+r)^{-2} + \ \dots\ + X_{T-1}(1+r)^{-(T-1)} + X_T(1+r)^{-T} \qquad (40)$$

en què $r \neq -1$. En el que segueix, es considerarà només el cas $r > -1$.

Acceptació d'un projecte X:

S'accepta el projecte se acepta el proyecto $X \Leftrightarrow \text{VAN}(X) \geq 0$ i com més gran sigui el VAN, millor, per a qualsevol tipus de projecte.

3. El valor final net (VFN)

La funció VFN mesura l'augment de la quantitat de riquesa neta en el moment final T, que seria equivalent a executar el projecte.

Definició de VFN:

$$\text{VFN}(X_t;\ r) = X_0(1+r)^{T} + X_1(1+r)^{T-1} + \dots + X_{T-1}(1+r) + X_T \ \ \forall\, r \qquad (41)$$

Acceptació d'un projecte X:

S'accepta el projecte se acepta el proyecto $X \Leftrightarrow \text{VFN}(X) \geq 0$ i com més gran sigui el VAN, millor, per a qualsevol tipus de projecte.

Concordança amb el VAN:

$$\text{VFN}(X) = (1+r)^{T} \cdot \text{VAN}(X) \qquad (42)$$

$$(1+r)^{T} \cdot \text{VAN}(X) \geq 0 \Leftrightarrow \text{VAN}(X) \geq 0 \forall\, r \neq -1 \qquad (43)$$

$$\text{VFN}(X) \geq 0 \Leftrightarrow \text{VAN}(X) \geq 0 \forall\, r \neq -1 \qquad (44)$$

4. La taxa interna de rendiment (TIR)

La TIR mesura el creixement del capital en termes relatius i determina la taxa de creixement del capital per període.

Definició de TIR:

$$\text{toda } r^*{}_j \text{tal que VAN}(X_t,\ r^*{}_j) = 0 \qquad (45)$$

Ni l'existència ni la unicitat de la TIR estan garantides. Pot ser que no hi hagi cap TIR, que n'hi hagi només una o que n'hi hagi més d'una.

Acceptació d'un projecte X:

En què la TIR r_j^* i la taxa de descompte r^0, s'accepta el projecte X si i només si:

$$r_j^* - r^o \geq 0 \text{ si } \partial VAN/\partial r < 0 \text{ en el punto } r_j^* - \varepsilon \qquad (46)$$

$$r^o - r_j^* \geq 0 \text{ si } \partial VAN/\partial r > 0 \text{ en el punto } r_j^* + \varepsilon \qquad (47)$$

en què $\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0$.

Quan la taxa de descompte no és constant, no sempre es pot aplicar aquest criteri i és necessari recórrer a la TIR neta.

Casos amb més d'una TIR:

Quan hi ha més d'una TIR s'aplica la mateixa regla de decisió, una vegada trobada la TIR rellevant. Si $r_1^* \leq r_2^* \leq \ldots r_M^*$ són les TIR del projecte i r^0 la taxa de descompte, la TIR rellevant és:

$$r_1^*,\ \text{si } r^o \leq r_1^* \qquad (48)$$

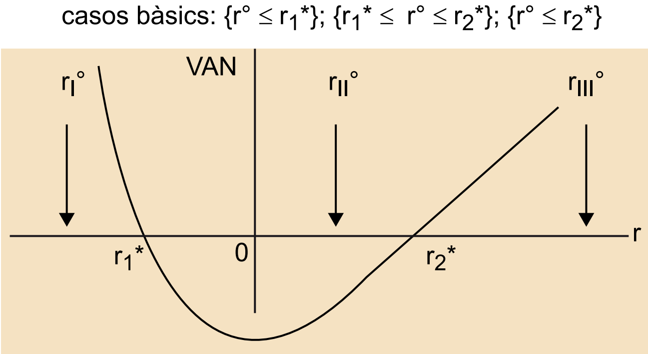
$$r_M^*,\ \text{si } r^o \geq r_M^* \qquad (49)$$

$$r_j^* \text{ o } r_{j+1}^* \text{ indistintamente, si } r_j^* \leq r^o \leq r_{j+1}^* \qquad (50)$$

Concordança amb el VAN:

Si r^o és la taxa de descompte usada per a calcular el VAN i $r^*{}_j$ les TIR, els casos rellevants són els expressats en (11), (12) i (13) i es reflecteixen en les figures següents.

Concordança del criteri TIR amb el del VAN



Cas I

$r^o \leq r_1^*$, es pren la TIR r_1^*. En aquest punt, el projecte es comporta com una inversió, r_1^* mesura la rendibilitat i, com que és més gran que la taxa de descompte r^o, s'accepta el projecte. Com que el VAN és positiu en el tram $(-\infty,\ r_1^*)$, els dos criteris concorden.

Cas II

$r_1^* \leq r^o \leq r_2^*$, és indiferent agafar la TIR r_1^* o la r_2^*. Si es parteix de r_1^*, la rendibilitat és inferior a la taxa r^o i es descarta el projecte. Si es pren la r_2^*, el projecte es comporta com un crèdit, r_2^* en mesura el cost i, com que supera el cost del capital r^o, també es rebutja el projecte. En el tram $(r_1^*,\ r_2^*)$, el VAN és negatiu i la recomanació coincideix amb la del criteri TIR.

Cas III

$r^o \geq r_2^*$, es pren la TIR r_2^*. En el punt r_2^* el projecte es comporta com un crèdit, el cost d'aquest crèdit és r_2^*, que és inferior al cost del capital i, per tant, el projecte és acceptable. En el tram $(r_2^*,\ \infty)$, el VAN és positiu, la qual cosa concorda amb l'anàlisi mitjançant la TIR.

Si multipliquem els fluxos del projecte representat en la figura 1 per menys u, llavors s'obté un projecte com el de la figura 2 i l'anàlisi de la concordança entre els criteris VAN i TIR és perfectament simètric.

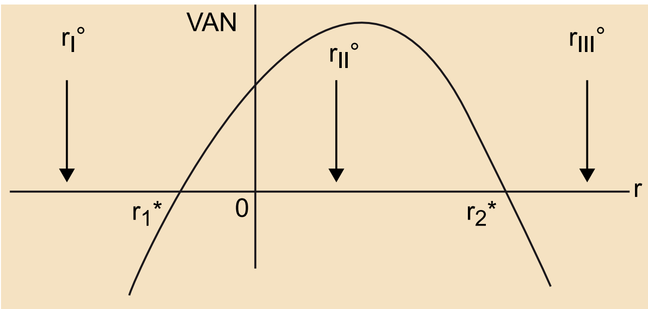
Es conclou, doncs, que el resultat de l'aplicació del criteri TIR coincideix amb el del VAN.

Referència bibliogràfica

Vegeu la demostració completa i una explicació econòmica detallada en:

J. Pasqual Rocabert; J. A. Tarrío; M. J. Pérez (2005). "Anomalies in net present value calculations. A solution". *Hacienda Pública Española / Revista de Economía Pública* (núm. 173, pàg. 47-60).

Concordança del criteri TIR amb el del VAN. Cas simètric al de la figura anterior



5. La taxa interna de rendiment neta (TIR neta)

La funció $VAN(X_t;\ r)$ opera amb uns fluxos X_t que no són nets perquè no inclouen el cost del capital r^o. La TIR convencional r* és bruta i per a determinar la desitjabilitat d'un projecte es compara amb la taxa de descompte r^o. Però el $VAN(X_t;\ r)$ també es pot calcular partir dels fluxos descomptats $n_t(r)$, $n_t = X_t/(1+r)^t$, i queda:

$$VAN(n_t(r)) = \Sigma n_t \qquad (51)$$

Definició de TIR neta:

$$\text{Toda } \lambda_j \text{ tal que } \Sigma n_t/(1+\lambda_j)^t = 0 \qquad (52)$$

amb (14) = (15) si i només si $\lambda = 0$.

Com que els fluxos n_t ja incorporen el cost del capital r^o, les TIR netes $\lambda^*{}_j$ ja no s'han de comparar amb r^o, i n'hi ha prou amb saber si són positives o negatives.

Acceptació d'un projecte X:

S'accepta X si i només si:

$$\lambda_j^* \ \geq\ 0 \text{ si } \partial VAN/\partial\lambda < 0 \text{ en el punto } \lambda_j^* - \varepsilon \qquad (53)$$

$$-\lambda_j^* \ \geq\ 0 \text{ si } \partial VAN/\partial\lambda < 0 \text{ en el punto } \lambda_j^* + \varepsilon \qquad (54)$$

Si hi ha més d'una TIR neta s'opera com amb la TIR convencional.

Concordança amb el VAN:

Sabem que l'ús d'una TIR concorda amb el criteri VAN. Com que la TIR neta és una TIR, es manté la concordança necessàriament.

Aplicacions:

La TIR neta és aplicable sempre que ho és la TIR convencional. A més, es pot aplicar encara que hi hagi més d'una taxa de descompte.

El quocient benefici/cost (QBC) i el QBC net

El QBC és el quocient entre el valor actual dels beneficis bruts, B, i el dels costos, C.

Definició del QBC:

$$QBC = B/C \qquad (55)$$

És aplicable sempre que almenys hi hagi un flux estrictament positiu i un altre de negatiu.

Acceptació d'un projecte X:

S'accepta el projecte X si i només si:

$$QBC(X) = B/C \geq 1 \qquad (56)$$

i com més alt sigui el QBC, millor. El QBC és brut però es pot expressar en termes nets amb facilitat a partir de (19):

$$QBC\text{-net} = QBC - 1 \geq 0 \qquad (57)$$

L'equació (50) es pot expressar també com a:

$$QBC\text{-net} = (B - C)/C \geq 0 \qquad (58)$$

que indica el benefici net actualitzat que s'obté per unitat d'inversió actualitzada.

Concordança amb el VAN:

Tant el QBC com el QBC net concorden amb el criteri VAN:

$$X \text{ es deseable} \Leftrightarrow VAN(X) \geq 0 \qquad (59)$$

$$\Leftrightarrow B - C \geq 0 \qquad (60)$$

$$\Leftrightarrow B \geq C \qquad (61)$$

$$\Leftrightarrow B/C \geq 1 \qquad (62)$$

$$\Leftrightarrow QBC \geq 1 \qquad (63)$$

$$\Leftrightarrow QBC - 1 \geq 0 \qquad (64)$$

$$\Leftrightarrow QBC\text{-net} \geq 0 \qquad (65)$$

Demora màxima admissible dels beneficis(D_{max})

D_{max} mesura la demora màxima dels beneficis compatible amb VAN $\geq$ 0, és a dir:

$$D \text{ tal que } C = B/(1+r)^D \qquad \text{con } r > 0 \qquad (66)$$

de la qual:

$$D_{max} = (\ln B - \ln C)/\ln(1+r) \qquad (67)$$

fórmula que coincideix amb l'anticipació màxima A dels costos compatibles amb VAN $\geq$ 0 definida com a:

$$A \text{ tal que } C(1+r)^A = B \qquad (68)$$

en què $A = D_{max}$

També es pot entendre D_{max} com la combinació d'una anticipació (c) dels costos i (b) un retard en els beneficis, de manera que VAN $\geq$ 0. És a dir, la distància o separació màxima admissible (b + c) entre costos i beneficis que és compatible amb VAN $\geq$ 0:

$$D_{max} = b + c \text{ tal que } C(1+r)^c = B(1+r)^{-b} \qquad (69)$$

de la qual:

$$C(1+r)^{b+c} = B \qquad (70)$$

$$C = B(1+r)^{-(b+c)} \qquad (71)$$

en què $b + c = D_{max}$.

Acceptació d'un projecte X:

S'accepta el projecte X si i només si:

$$D_{max}(X) \geq 0 \qquad (72)$$

i com més gran sigui D_{max}, millor, per a qualsevol tipus de projecte.

Concordança amb el VAN:

$$D_{max} = (\ln B - \ln C)/\ln(1+r), \; r > 0 \qquad (73)$$

com que $\ln(1+r) > 0$

$$\operatorname{sgn} D_{max} = \operatorname{sgn}(\ln B - \ln C) \qquad (74)$$

$$(\ln B - \ln C) \geq 0 \Leftrightarrow B - C \geq 0 \qquad (75)$$

$$(\ln B - \ln C) \geq 0 \Leftrightarrow VAN \geq 0 \qquad (76)$$

7. L'anualitat equivalent (Æ)

La Æ és un flux constant æ que proporciona el mateix valor actual que els fluxos periodificats del projecte.

Definició de Æ:

Donat un projecte X amb:

$$\begin{aligned} &VAN(X_t;\, r) = X_0 + X_1(1+r)^{-1} + \ldots + X_T(1+r)^{-T}, \text{ la Æ } h_{t'} = æ,\ t' = \\ &= M',\ \ldots,\ M'+T', \text{ és tal que } VAN(h_{t'} = æ;\, r) = VAN(X_t;\, r) VAN(æ;\, r) = æ\ \Phi_M \end{aligned} \qquad (77)$$

en què:

$$\Phi_M = \sum 1/(1+r)^{t'},\ t' = M',\ \ldots,\ M'+T' \qquad (78)$$

$$\Phi_M = [1/r(1+r)^M][1+r - 1/(1+r)^T] \qquad (79)$$

amb:

$$\Phi_{M=1} = 1/r - 1/r(1+r)^T \qquad (80)$$

$$\Phi_{M=0} = (1+r)/r - 1/r(1+r)^T \qquad (81)$$

$$VAN(X_t;\ r) = VAN(æ;\ r) \Leftrightarrow æ\Phi = VAN(X_t;\ r) \qquad (82)$$

de la qual:

$$æ = VAN(X_t;\ r)/\Phi \qquad (83)$$

Acceptació d'un projecte X:

S'accepta el projecte X si i només si:

$$æ \geq 0 \qquad (84)$$

i com més gran sigui æ, millor, per a qualsevol tipus de projecte.

Concordança amb el VAN:

$$æ = VAN(X_t;\ r)/\sum 1/(1+r)^{t'},\ t' = M',\ \ldots,\ M'+T' \qquad (85)$$

$$\text{com que} \sum 1/(1+r)^{t} > 0\ \forall\ r > -1 \qquad (86)$$

$$\text{sgn}(æ) = \text{sgn}VAN. \qquad (87)$$

6. Termini de recuperació de costos (TRC)

El TRC és una reinterpretació del popular criteri termini de recuperació de la inversió que amplia l'àmbit d'aplicació del criteri.

Definició:

Donat un projecte X amb fluxos $c_t \leq 0$ i $b_t \geq 0, t = 0, \ldots, T$, es defineixen:

$$C = VA(c_t) \text{ i } h_{t'} = æ,\ t' = 0,\ \ldots,\ P,\ \text{tals que } VA(h_{t'}) = VA(b_t) \qquad (88)$$

L'esquema és simple: a partir del projecte X es forma el X' amb el VA(C) en el moment 0 i l'anualitat equivalent æ entre els períodes 0 i P.

El TRC és el període més petit P* per al qual el VAN entre 0 i P* sigui no negatiu, com es mostra en la taula 1 per a un projecte rendible.

El PRC d'un projecte rendible

Projecte	0	1	...	P*	...	T
X	a_0	a_1	...	a_{T*}	...	a_T
X'	VA(C) + æ	æ	æ	æ	...	æ
VAN(X')	< 0	< 0	< 0	≥ 0	> 0	> 0

En altres paraules, el TRC és el temps més petit P* de manera que:

$$C = æ\ \Phi_{M=0} \qquad (89)$$

$$C = æ\left[(1+r)/r - 1/r(1+r)^{P^*}\right] \qquad (90)$$

$$rC/æ = 1+r - 1/(1+r)^{P^*} \qquad (91)$$

$$rC/æ - 1 - r = -1/(1+r)^{P^*} \qquad (92)$$

$$\ln[1+r - rC/æ] = \ln(1) - \ln\left[(1+r)^{P^*}\right] \qquad (93)$$

De (93), es pot aplicar el TRC sempre que $r > 0$ i $C/æ > (1+r)/r$.

Acceptació d'un projecte X:

S'accepta el projecte X, definit en $[0, T]$ si i només si:

$$PRC \leq T \qquad (94)$$

$$T - PRC \geq 0 \qquad (95)$$

i com més petit sigui el TRC, millor.

Com que el TRC és una mitjana, pot ser positiu, zero o fins i tot negatiu, com s'observa en els exemples de la taula següent.

Exemples de PRC de diferent signe

Projecte	0	1	VAN(r = 1)	æ	PRC
X_1	–1	4	1	1,33	-0,32
X_2	-1	3	0,5	1	0
X_3	-1	2	0	0,66	1
X_4	-1	1,6	-0,2	0,53	3

Concordança amb el VAN:

Per construcció, l'anualitat equivalent æ entre 0 i P* és igual al VA dels beneficis. Si el TRC no és superior a T, significa que, amb les quantitats æ entre els períodes 0 i P, com a mínim es cobreix el VA dels costos C. És a dir que:

$$\text{VAN} \geq 0 \forall \text{P} \geq \text{P}^* \Leftrightarrow \text{P}^* \leq \text{T} \qquad (96)$$

8. Teorema de concordança del VAN

Suposem que $\zeta = \{\text{VAN, VFN, TIR, TIR} - \text{neta,CBC,CBCnet, D}_{\text{max}}, \text{PRC}\}$. Els criteris ζ concorden entre si ja que l'aplicació de qualsevol d'aquests criteris condueix sempre a la mateixa decisió que el VAN.

L'elecció entre dos projectes mútuament excloents X i Y

Suposem un criteri de valoració $\zeta_h \in \zeta$ de manera que:

$$\text{un projecte X és desitjable} \Leftrightarrow \zeta_h(\text{X}) \geq 0 \qquad (97)$$

Llavors es convé que, donats dos projectes X i Y mútuament excloents, X és preferit que Y si i només si el *projecte diferència* o *incremental* $(\text{X} - \text{Y})$ és desitjable, és a dir:

$$\text{X} > \text{Y} \Leftrightarrow \text{el projecte } \zeta_h(\text{X} - \text{Y}) \geq 0 \qquad (98)$$

El projecte diferència $(\text{X} - \text{Y})$:

Suposem el projecte X amb fluxos x_t, t = M, ..., M+T i el projecte Y amb fluxos $y_{t'}$, t' = M', ..., M'+T'. El projecte diferència $(\text{X} - \text{Y})$ es caracteritza pels fluxos $(x_t - y_{t'})$ i un àmbit temporal format per la unió dels dos àmbits: $[\text{mín}\{\text{M, M'}\}; \text{màx}\{\text{M+T; M'+T'}\}]$.

El criteri de decisió $\zeta(\text{X} - \text{Y})$ aplicat al projecte diferència mesura el guany net, mesurat en els termes del criteri, d'executar X en lloc de Y.

Ús del projecte diferència (X – Y). Necessitat i suficiència

Alguns dels criteris ζ es poden aplicar a dos projectes X i Y separadament i comparar directament els resultats, com es justifica a continuació.

Proposició:

$$\exists \zeta_A \in \zeta \text{ tal que } \text{X} > \text{Y} \Leftrightarrow \zeta_A(\text{X}) \geq \zeta_A(\text{Y}) \Leftrightarrow \zeta_A(\text{X} - \text{Y}) \geq 0 \qquad (99)$$

Demostració:

Suposem que el VAN és el criteri ζ_A; llavors:

$$X > Y \Leftrightarrow VAN(X) \geq VAN(Y) \qquad (100)$$

$$X > Y \Leftrightarrow VAN(X) - VAN(Y) \geq 0 \qquad (101)$$

$$X > Y \Leftrightarrow VAN(X - Y) \geq 0 \text{ per la propietat additiva del VAN} \qquad (102)$$

però aquesta característica desitjable no és general.

Proposició:

$$\exists \zeta_B \in \zeta \text{i uns projectos X i Y tals que no s'acompleix } X > Y \Leftrightarrow \zeta_B(X) \geq \zeta_B(Y) \qquad (103)$$

Demostració:

Suposem que el QBC o la TIR són el criteri ζ_B. Si els projectes X i Y són com els de la taula següent, llavors ocorre que $QBC_Y > QBC_X$ i $TIR_Y > TIR_X$, però $VAN_X > VAN_Y$, la qual cosa mostra la falta de concordança. No obstant això, l'aplicació dels mateixos criteris al projecte diferència $(X - Y)$ no presenta cap problema ja que els tres criteris coincideixen a assenyalar que el projecte X és preferible que el Y.

Elecció entre projectes excloents amb diferents criteris

Projecte	0	1	CBC	TIR	VAN(r = 0,1)
X	–100	200	1,8	100%	81,8
Y	–10	40	2,6	300%	26,4
X – Y	–90	160	1,6	77,8%	55,5

Aquest exemple mostra la necessitat d'utilitzar el projecte diferència quan el criteri usat no està expressat en termes absoluts com el VAN i el VFN, sinó relatius, com, per exemple, la TIR i el QBC.

Falta demostrar que l'aplicació dels criteris ζ al projecte diferència $(X - Y)$ és suficient per a garantir la concordança. Vegeu, per exemple, el cas del QBC.

Elecció entre els projectes X i Y amb el criteri QBC:

La condició de preferència entre X i Y es pot trobar de manera mecànica:

$$X > Y \Leftrightarrow VAN(X) = B_X - C_X \geq VAN(Y) = B_Y - C_Y \qquad (104)$$

$$B_X - B_Y \geq C_X - C_Y \qquad (105)$$

$$(B_X - B_Y)/(C_X - C_Y) \geq 1 \text{ si } C_X - C_Y > 0 \qquad (106)$$

o bé mitjançant l'aplicació directa del teorema de concordança del VAN:

$$X > Y \Leftrightarrow QBC_{X-Y} = B_{X-Y}/C_{X-Y} \geq 1 \qquad (107)$$

Encara que les dues condicions $(B_X - B_Y)/(C_X - C_Y) \geq 1$ si $C_X - C_Y > 0$ i $X > Y \Leftrightarrow CBC_{X-Y} = B_{X-Y}/C_{X-Y} \geq 1$ són correctes, és esperable que $B_{X-Y}/C_{X-Y} \neq (B_X - B_Y)/(C_X - C_Y)$, ja que en general $B_{X-Y} \neq B_X - B_Y$ i $C_{X-Y} \neq C_X - C_Y$.

La condició $X > Y \Leftrightarrow CBC_{X-Y} = B_{X-Y}/C_{X-Y} \geq 1$ és més simple d'aplicar que la $(B_X - B_Y)/(C_X - C_Y) \geq 1$ si $C_X - C_Y > 0$ i la interpretació quantitativa és més directa. Amb tot, si es tracta de comparar una sèrie llarga de projectes és més apropiada la condició $(B_X - B_Y)/(C_X - C_Y) \geq 1$ si $C_X - C_Y > 0$.

Nota

Per a aplicar la condició $X > Y \Leftrightarrow CBC_{X-Y} = B_{X-Y}/C_{X-Y} \geq 1$ es necessiten els fluxos periodificats de tots els projectes i, en canvi, per a la $(B_X - B_Y)/(C_X - C_Y) \geq 1$ si $C_X - C_Y > 0$ n'hi ha prou amb disposar del valor actual dels beneficis B_j i els costos C_j de cada projecte j, j = 1, ..., J, per a poder comparar-los tots dos per dos.

Proposició:

Per a triar el millor entre dos projectes mútuament excloents X i Y, l'aplicació d'un criteri qualsevol ζ al projecte diferència $(X - Y)$ és suficient per a obtenir el mateix resultat que aplicant el criteri VAN.

Demostració:

Pel teorema de concordança del VAN, l'aplicació de qualsevol criteri de decisió ζ és sempre coherent amb el VAN per a qualsevol projecte P. En particular, l'aplicació de qualsevol criteri ζ al projecte diferència $(X - Y)$ també serà necessàriament coherent amb el VAN.

9. Conclusions

En aquest treball s'ha evidenciat que bona part dels problemes denunciats repetidament en la bibliografia, que comporten que alguns criteris de decisió no es considerin adequats per a avaluar la rendibilitat d'un projecte, es poden resoldre amb una interpretació i aplicació correctes d'aquests criteris. És el cas dels suposats problemes causats per la multiplicitat de taxes internes de rendiment que, com s'ha mostrat, no invaliden el criteri si s'aplica de manera correcta. Respecte als problemes de multiplicitat de taxes de descompte, en el cas de la TIR, o del termini màxim de recuperació de la inversió, s'han suggerit alternatives com la TIR neta o el TRC, que també comportarien una recomanació que coincidiria amb el criteri VAN per a qualsevol projecte. A més, s'han proposat criteris nous que amplien la gamma de mesures de desitjabilitat d'un projecte, sense minvar la coherència de l'anàlisi, ja que tots aquests criteris concorden amb el criteri bàsic, el VAN. Els resultats es resumeixen en el teorema de concordança del VAN: l'aplicació de qualsevol combinació de vuit criteris ζ analitzats (VAN, VFN, TIR, TIR neta, QBC, QBC net, $D_{\text{màx}}$, Æ i TRC) per a determinar la desitjabilitat d'un projecte condueixen sempre al mateix resultat qualitatiu.

Quant al problema d'elecció entre projectes excloents, s'ha demostrat que el teorema de concordança del VAN s'estén al cas de l'elecció entre dos projectes mútuament excloents, X i Y, si els criteris ζ s'apliquen al projecte diferència $(X - Y)$. En altres paraules, l'aplicació de qualsevol dels criteris comentats comportaria el mateix resultat, sempre que s'apliqui el criteri al projecte diferència.

10. Referències bibliogràfiques

Belli, P. (1996). *Handbook on economic analysis of investment operations research*. Washington DC: Policy Department / The World Bank.

Bodie, Z.; Merton, R. C. (2000). *Finance*. Nova Jersey: Prentice-Hall.

Brealey, R. A.; Myers, S. C.; Allen, F. (2008). *Principles of corporate finance* (9a. ed.). Auckland: McGraw-Hill.

Brent, R. J. (1998). *Cost-benefit analysis for developing countries*. Cheltenham / Northampton, MA: Edward Elgar.

Bridier, M.; Michaïloff, S. (1987). *Guide practique d'analyse de projects* (4a. ed.). París: Economica.

Castelo, D. (2001). "Anomalies in net present value caltulations?". *Economics Letters* (núm. 72, pàg. 127-129).

Gittinger, J. P. (1987). *Análisis económico de proyectos agrícolas*. Madrid: Instituto de Desarrollo Económico del Banco Mundial. Ed. Tecnos.

Gronchi, S. (1986). "On investment criteria based on the Internal Rate of Return". *Oxford Economic Series, New Series* (vol. 1, núm. 38, pàg. 174-180).

Just, R. E.; Hueth, D. L.; Scmitz, A. (2004). *The welfare economics of public policy*. Cheltenham: Edward Elgar.

Pasqual Rocabert, J. (2003). *La evaluación de políticas y proyectos*. Barcelona: Icaria.

Pasqual Rocabert, J.; Tarrío, J. A.; Pérez, M. J. (2005). "Anomalies in net present value calculations. A solution". *Hacienda Pública Española / Revista de Economía Pública* (núm. 173, pàg. 47-60).

Petty, J. W. i altres (1996). *Basic financial management*. Nova Jersey: Prentice-Hall.

Peumans, H. (1974). *Valoración de proyectos de inversión*. Bilbao: Ed. Deusto.

Remer, D. S.; Nieto, A. P. (1995). "A compendium and comparison of 25 project evaluation techniques". *International Journal of Production Economics* (vol. 1., núm. 42, pàg. 79-96 i 101-129).

Rosen, H. S. (2008). *Hacienda Pública*. Madrid: McGraw-Hill.

Ross, S. R. (1995). "Uses, abuses, and alternatives to the net-present-value rule". *Financial Management* (vol. 3, núm. 24, pàg. 96-102).

Weston, J. F.; Brigham, E. F. (1984). *Finanzas en administración*. Mèxic: Ed. Iberoamericana.

Zerbe, R. O.; Bellas, A. S. (2006). *A premier for benefit-cost analysis*. Northampton, MA: Edward Elgar Publishing.

Annex 2. Avaluació econòmica de les galeries de serveis públics (nivell I)

Introducció

Aquest treball sobre la valoració econòmica de les galeries de serveis públics (GSP, d'ara endavant) s'ha elaborat a partir dels resultats aconseguits en el projecte de recerca sobre economia del subsòl urbà mitjançant conveni entre IMPU, SA, i la Universitat Autònoma de Barcelona. Van participar en el projecte els investigadors J. A. Acebillo, R. Arandes, J. M. Domènech, R. García-Bragado, X. Mas, C. Ocaña, J. A. Palacín, J. Pasqual (director), J. Pinyol, P. Riera, F. Ruiz i R. M. Sala.

Les GSP són unes galeries construïdes al subsòl urbà (l'espai situat per sota de la cota zero) destinades a situar les canalitzacions dels serveis públics, com ara aigua, electricitat o telefonia. Aquesta manera de situar els serveis públics substitueix la tradicional, que consisteix a enterrar canonades al subsòl sense més ordre ni llei que els dictats pel principi del mínim esforç per "al qui arriba primer".

> Com a resultat d'aquesta conducta, es pot parlar amb propietat de "la caótica situación en que se encuentran las canalizaciones de los servicios públicos enterrados en nuestras calles".
>
> J. A. Acebillo (1989). El subsuelo urbano y las técnicas de ordenación de los servicios públicos". *CEUMT* (núm. 109, pàg. 52-54).

Aquesta situació no és nova, com es pot llegir en el tom I de Cerdá (1867):

> "De esta ligera reseña se desprende fácilmente cuán y de qué mala manera se ha de hacer, y cuán expuesto a peligros, graves a veces, ha de estar un servicio emprendido y realizado en diversas épocas, bajo distintos planes y direcciones diferentes, sin combinación alguna con otras obras subterráneas más ó menos análogas, y que por consiguiente se entrelazan y amalgaman con él en la más confusa mescolanza, en el más inextricable laberinto."
>
> I. Cerdá (1867). *Teoría general de la urbanización, y aplicación de sus principios y doctrinas a la reforma del Ensanche de Barcelona* (pàg. 313 i 314). Madrid.

Malgrat l'antiguitat i la importància del problema del subsòl urbà, no es troben antecedents d'anàlisis econòmiques relacionades amb aquest espai peculiar. Per aquest motiu, abans d'abordar el problema de valorar les GSP (secció 3), en la secció següent descriurem en termes econòmics el subsòl urbà, amb la finalitat de disposar d'una base teòrica mínima, per mirar de respondre, si més no en part, a les qüestions que planteja l'ordenació dels serveis públics a la ciutat.

1. Caracterització i usos del subsòl

El subsòl urbà és un espai, escàs i valuós, que constitueix un conjunt de béns diferents des d'una perspectiva econòmica. Una descripció tècnica i detallada dels diversos usos del subsòl urbà es pot trobar en Arandes (1989 i 1990). Depenent del tipus d'utilització es poden distingir tres usos principals del subsòl:

- Com a contenidor d'estructures urbanes.
- Com a contenidor d'infraestructures urbanes.
- Com a reserva d'espai.

El subsòl urbà, com a contenidor d'estructures, és un bé privat, substitutiu de la volada (l'espai situat damunt de la cota zero) i molt més apreciat com més gran sigui l'escassetat de sòl edificable i com més restriccions d'utilització de la volada hi hagi. És un espai privilegiat per a la ubicació de magatzems, cambres frigorífiques i refugis, entre altres usos, mentre que la seva utilització com a habitacle és menys demanada.

El subsòl urbà, com a contenidor d'infraestructures urbanes –ferrocarril, xarxes de serveis, etc.– deixa de ser un bé privat (el consum d'una unitat disminueix el total disponible exactament una unitat) per a convertir-se en subprivat, ja

Referències bibliogràfiques

R. Arandes (1989). "La planificació del subsòl". *Papers de Seminari*, 2/88/ER/PAS. Barcelona: Institut d'Estudis Metropolitans de Barcelona / Universitat Autònoma de Barcelona.

R. Arandes (1990). "Problemàtica tècnica en la lluita per l'ús del subsòl urbà". A: *Actes del Congrés d'Urbanisme i Territori de Catalunya* (pàg. IV.B.55- IV.B.60). Barcelona: Federació de Municipis de Catalunya.

que l'ús d'una unitat de subsòl comporta la inutilització d'una quantitat més gran, a causa de les interferències –externalitats negatives– que una instal·lació provoca en les altres.

En conseqüència, la quantitat total de subsòl ocupat enfront de l'inutilitzat dependrà tant de la quantitat de serveis que albergui com, especialment, del model emprat per a la ubicació d'aquests serveis. La superioritat del model de GSP enfront del sistema tradicional rau precisament en la reducció del grau de subprivatització, definit com el quocient entre la disminució de la quantitat d'espai disponible per a altres usos i l'espai total ocupat, la qual cosa es tradueix directament en un estalvi d'espai.

La demanda de subsòl urbà com a contenidor d'infraestructures, en una zona determinada, és creixent respecte a la quantitat d'habitants i d'usuaris de la zona –depèn fortament de la densitat– i de la seva renda. Així mateix, les innovacions tecnològiques que es produeixen en els serveis públics i la sensibilitat cada vegada més gran per la qualitat del medi ambient, que impedeix situar determinats serveis a la volada, com torres d'alta tensió, provoquen forts desplaçaments positius de la demanda de subsòl a les ciutats.

Les xarxes de serveis públics presenten peculiaritats importants que cal tenir en consideració. El primer factor que cal destacar és l'antiguitat en l'ús del subsòl, no sols protagonitzada per la xarxa de sanejament sinó també per les de subministrament d'aigua potable i electricitat. L'existència d'instal·lacions més que centenàries, juntament amb la multiplicitat i diversitat d'actuacions al subsòl a càrrec d'agents diferents, juntament amb l'absència d'una regulació estricta de la ubicació de serveis al subsòl, obliga a plantejar-se la confecció d'un mapa del subsòl amb la finalitat de conèixer la ubicació de cada servei.

El segon factor rellevant és el fort condicionament que provoca una instal·lació en les següents. El problema de dues línies diferents de ferrocarril que discorren per una mateixa cota i coincideixen en un mateix punt, o fins i tot en una mateixa zona, no es pot solucionar sense incórrer en costos forts. En menor mesura, es planteja el mateix problema quan es creuen dues canalitzacions, sobretot quan han de guardar entre si una certa distància de seguretat.

Com a reserva d'espai, el subsòl urbà és un bé col·lectiu, la qual cosa significa que el consum (no consumptiu) d'un individu no disminueix el consum que en fan els altres. Sens dubte, quan s'utilitza efectivament aquesta reserva, disminueix la quantitat en reserva per a tots els consumidors. La ciutat necessita espais de reserva tant per a la ubicació provisional de serveis com per a ampliacions i, sobretot, per a redissenyar les trames urbanes a fi de permetre'n l'adaptació a necessitats noves.

Com que es tracta d'un bé col·lectiu, no és esperable que el mercat proporcioni cap quantitat d'espai a aquest efecte; pel mateix fet, el ciutadà mitjà no destinarà voluntàriament cap quantitat a finançar aquest bé. En tot cas, ha de ser el sector públic que, mitjançant l'instrument planificador i d'altres, es cuidi de la provisió d'un bé que pot arribar a constituir un factor limitatiu del desenvolupament i de la modernització de la ciutat. Cal, doncs, que la planificació urbanística tingui en consideració el subsòl, de la mateixa manera que es cuida d'ordenar la volada.

2. Preu i drets de propietat del subsòl

Una característica del subsòl urbà –i no sols a Europa– és la indefinició en els drets d'ús i propietat del subsòl públic de la ciutat. Els drets de propietat (DDP, d'ara endavant) del subsòl municipal no estan de manera clara a poder del municipi. Al nostre país, els DDP els té en part l'Estat espanyol, ja que regula legalment les condicions i el preu d'accés a l'ús del subsòl per part dels principals usuaris, les companyies de serveis públics (CDS, d'ara endavant).

D'altra banda, els mateixos usuaris directes, les CDS, tenen en bona mesura els DDP, ja que el municipi, a la pràctica, no pot impedir l'ús del subsòl per a situar serveis de primera necessitat, quan i en la forma que les CDS considerin necessari.

Les CDS competeixen entre elles per accedir als millors espais i, si una CDS situa una canalització en un espai determinat, aquest espai queda en el seu poder durant un temps il·limitat, encara que la instal·lació quedi fora de servei. Si per raons d'interès públic el municipi insta la CDS a traslladar la instal·lació, en general, és el mateix municipi el que haurà de finançar l'operació, ja que la CDS, d'alguna manera, té part dels DDP del subsòl de titularitat pública.

El conflicte d'interessos creixent que conflueixen al subsòl urbà de titularitat pública aconsella mirar de definir de la manera més nítida possible els DDP. D'una altra manera, els forts costos de transacció poden impedir actuacions públiques altament rendibles. En particular, la bona o mala definició dels DDP afecta les assignacions d'aquest espai en influir el preu del subsòl.

Si el subsòl urbà és un bé apreciat i escàs, tant el preu usat en les transaccions com el preu de compte o preu ombra per a valorar aquest espai en els projectes públics hauria de ser alt. No obstant això, quan un dels agents és el sector públic, hi ha la tendència d'assignar un preu nul al subsòl (no s'ha trobat cap referència al preu del subsòl en la bibliografia especialitzada, tampoc no s'ha trobat cap cas d'utilització).

Aquest fet comporta forts inconvenients. D'una banda, si el sector públic ha de triar entre dos projectes i, almenys un utilitza subsòl, la informació estarà distorsionada en favor del projecte que utilitza més quantitat de subsòl. En fer servir un factor productiu valorat a un preu nul, s'altera artificialment el cost real i la rendibilitat consegüent.

Un problema del mateix ordre, la valoració nul·la o inadequada de l'espai ocupat, es presenta en projectes que utilitzen espai en la volada sense ocupar els primers nivells. En conseqüència, la valoració de projectes alternatius, situat l'un a la volada i l'altre al subsòl, serà infidel. Un cas típic seria la comparació de dos projectes alternatius de línies d'alta tensió, un d'aeri i l'altre amb les línies instal·lades en una galeria subterrània.

D'altra banda, a Espanya, les companyies de serveis (CDS), paguen al municipi un percentatge predeterminat del total facturat, per l'ús de la volada i del subsòl públics. Amb independència que aquesta quantitat sigui o no gaire elevada, amb aquest sistema resulta que les CDS paguen un preu nul per l'ocupació del subsòl públic. En efecte, el preu, el que es paga per l'ocupació d'una unitat més, és nul, perquè les CDS no paguen cap quantitat per l'ús d'una porció addicional de subsòl ni per l'ocupació d'un espai determinat durant més temps. En conseqüència, l'ús del subsòl és necessàriament ineficient per excés, ja que s'utilitzarà com si fos un bé lliure.

Una manera pràctica de calcular el preu del subsòl en una zona determinada consisteix a aplicar la fórmula següent:

$$u = [p/(1+b)] - c \qquad (108)$$

en què u, el preu total de l'espai ocupat al subsòl, depèn del preu total d'una construcció al subsòl p, del benefici del promotor b que se suposa constant per a qualsevol edificació al subsòl o a la volada i del cost total d'aquesta construcció c.

Referència bibliogràfica

J. Pasqual; P. Riera (1990). "Considering urban underground land value in project evaluation studies. A practical way of estimating it". *Working Paper, 90.01*. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, Departament d'Economia Aplicada.

El preu u estimat d'aquesta manera és una aproximació al preu de mercat, el preu que determinaria el mercat específic que hi ha a la zona d'on es prenen les dades. Res no té a veure, doncs, amb el preu òptim en el sentit de Pareto ni amb el d'un mercat perfectament competitiu.

L'assignació eficient del subsòl urbà entre els diversos usos alternatius, en una economia guiada per preus, necessita un preu per al subsòl urbà a cada zona de la ciutat. Aquesta informació és necessària no sols per a la selecció de projectes públics sinó també per a l'assignació d'espais entre els diversos usuaris del subsòl.

3. Valoració econòmica de les galeries de serveis públics

La rendibilitat de les GSP s'ha determinat examinant la variació en els costos i beneficis provocada pel fet de situar les xarxes de serveis públics en les GSP en lloc de fer servir el sistema tradicional de conduccions enterrades. L'àmbit temporal del projecte de GSP s'estableix en cinquanta anys.

No s'ha calculat la desitjabilitat econòmica de les GSP enfront de les conduccions aèries, ja que la comparació d'un projecte s'ha de dur a terme en oposició al millor projecte alternatiu, per a no augmentar de manera artificial la rendibilitat. Es dóna per descomptat que el sistema de conduccions enterrades, en una ciutat, domina el de conducció aèria. Els agents econòmics involucrats són companyies de serveis (CDS), usuaris dels serveis, usuaris de la via pública, usuaris del subsòl i Administració local.

4. Costos i beneficis

S'han computat els conceptes de *cost* i *benefici tangibles i rellevants*; no s'han tingut en consideració els aspectes intangibles, ni els beneficis de tipus distributiu. Tots els fluxos s'expressen en pessetes constants de 1990. S'han valorat els elements de cost i benefici següents:

Referència bibliogràfica

P. Riera, **F. Ruiz** (1990). "Costes y beneficios del uso del subsuelo". A: *Actes del Congrés d'Urbanisme i Territori de Catalunya* (pàg. IV.B.21-IV.B.35). Barcelona: Federació de Municipis de Catalunya.

- **Estalvi en l'espai usat**. A l'espai efectivament ocupat s'hi afegeix l'espai hipotecat (el que queda inutilitzable per als altres usuaris, perquè es tracta d'un bé subprivat), per exemple per a respectar les distàncies de seguretat entre dues conduccions de mitjana tensió. S'ha calculat el preu del subsòl urbà utilitzant la fórmula presentada en l'apartat anterior, i s'escull com a millor alternativa la construcció d'aparcaments. El preu de venda d'una plaça d'aparcament és de P = 2.500.000 ptes. (preu mitjà net el 1989), el cost total és de c = 1.200.000 ptes. suposant una taxa de rendiment del 35% (segons estimacions de tècnics de DOYMO i d'empreses immobiliàries). Amb aquestes dades, resulta un preu total per al subsòl de u = 651.852 ptes. El preu per metre cúbic es troba considerant l'espai total ocupat per una plaça d'aparcament (que és igual a 2,44,51,9 m^3), i resulta un preu per al subsòl urbà de 31.767 ptes./m^3.
  La diferència de subsòl ocupat entre els dos sistemes depèn del volum de rases que la GSP pugui substituir. La capacitat total de la GSP no es fa servir des del primer període sinó que es va ocupant a poc a poc, a mesura que es van substituint els cables obsolets enterrats. Se suposa que en el primer any, la GSP estalvia l'única rasa per a servei telefònic i la meitat de les deu d'electricitat. En aquest primer període, es produeix un estalvi negatiu de 3,15 m^3 de subsòl per cada metre lineal de GSP.
  El cost d'aquest espai, en rigor, és privat. No obstant això, atesa la peculiar assignació dels DDP, té el caràcter de cost extern per als usuaris, ja que el preu que paguen pel consum de subsòl és nul.

- **Construcció**. Es consideren costos privats el cost de l'obra civil (que inclou els accessoris, com il·luminació, suports, entrades i sistemes de seguretat), la longitud diferencial entre el sistema de GSP i el tradicional. Es té també en consideració el cost extern que representen les pertorbacions que provoquen les obres. El cost de material se suposa idèntic en ambdós sistemes. Els costos externs, les molèsties causades per les obres, són més grans amb el sistema tradicional. S'ha estimat que el cost per als residents a la zona que està en obres és d'un terç del lloguer del seu habitatge o comerç. Com que la xifra resultant (unes 14.000.000 ptes. per al sistema tradicional) és molt petita en termes relatius, aquest cost extern que es redueix amb les GSP no s'incorpora al càlcul de la rendibilitat. Pel mateix motiu i en honor de la simplicitat, tampoc no es computa el cost per a conductors i vianants, que és favorable a les GSP encara que resulta fàcil de calcular, d'altra banda.

- **Manteniment**. Les companyies de serveis no fan treballs de manteniment preventiu en cap dels dos sistemes. Es tenen en consideració únicament els costos de manteniment de les mateixes GSP, que representen un milió de pessetes per quilòmetre l'any aproximadament, és a dir, poc més de 25.000.000 ptes. l'any. El cost de les avaries es redueix amb el sistema de GSP un 80% per a les conduccions elèctriques i un 70% per a comunicacions respecte al sistema tradicional.
  La reducció del nombre d'avaries i el temps usat en la seva reparació comporta una disminució dels efectes negatius causats per la interrupció del servei i per les obres de reparació. Amb tot, aquests costos externs no semblen gaire importants i no es computen.

- **Substitució**. S'estima que la vida mitjana dels cables és de trenta anys. A mesura que els cables situats mitjançant el sistema tradicional arriben al final de la seva vida útil es van substituint, i se situen en les GSP fins a ocupar-ne la capacitat total. Pel sistema tradicional, la substitució afectaria cinc rases de dos circuits de 25 kW cadascun, la qual cosa comporta obrir una rasa i reposar els dos circuits cada sis anys.
  El sistema de GSP estalvia costos de reposició en cadascun dels anys 2, 8, 14, 20, 26, 38 i 44. En l'any 30 caduquen les canalitzacions que es van instal·lar l'any 0; el cost dels materials és el mateix en ambdós sistemes, per la qual cosa l'estalvi es redueix al cost d'obrir i tornar a tancar cinc rases pel sistema tradicional i és favorable al sistema de GSP. Simultàniament, es va incrementant l'estalvi en la quantitat de subsòl ocupat amb cada canalització que se situa en la GSP en lloc de seguir-se el sistema tradicional en cadascun dels anys 2, 8, 14, 20 i 26.

5. Càlcul de la rendibilitat

Com a mesura de rendibilitat, es fa servir la taxa interna de rendiment (TIR, d'ara endavant; com és habitual, també en aquest cas la TIR existeix i és única). Es distingiran dos tipus de rendibilitat: la privada, que solament considerarà costos i beneficis privats, i la social o total, que tindrà en consideració també els costos i beneficis externs. En aquest cas, de tots els fluxos computats, únicament el valor del subsòl estalviat amb el sistema de GSP té caràcter d'extern.

La taxa real de rendibilitat privada (TIR*) és de prop del 7% i la social o total (TIR) resulta superior al 30%, expressada també en termes reals partint d'una ocupació del 6% de la capacitat de les GSP en el període u. La rendibilitat efectivament aconseguida és molt sensible al ritme d'ocupació de les GSP; així, en el cas d'ocupació completa des del primer any les taxes de rendibilitat privada i social serien de prop del 40% i 900%, respectivament.

6. Finançament de les GSP

El càlcul de la rendibilitat privada de les GSP ofereix un resultat positiu per al conjunt d'usuaris. La taxa de rendiment intern de la inversió segons hipòtesis molt modestes és del 7% en termes reals, sense comptar el benefici que comporta l'estalvi d'espai ocupat al subsòl. En conseqüència, els mateixos usuaris podrien finançar les galeries, almenys en part, seguint el principi impositiu del benefici.

No obstant això, la configuració peculiar dels DDP proporciona un resultat desigual per a cada usuari. En efecte, el sistema establert legalment per finançar les galeries, la Llei reguladora de la hisendes locals 39/88, obliga a repartir el cost entre els usuaris –les CDS– en proporció a l'espai ocupat, amb la qual cosa s'incompleix el principi d'equitat vertical. D'aquesta manera, els serveis de comunicacions obtindrien una rendibilitat molt alta perquè requereixen poc espai; per al subministrament d'aigua potable el càlcul és clarament negatiu i per a la resta s'obtenen resultats intermedis.

D'altra banda, l'estalvi al subsòl ocupat és un benefici extern a causa de la forma legal de pagament de les CDS als municipis. Si el titular d'aquest espai pogués negociar el preu d'ús, el benefici no tindria caràcter d'extern per a les CDS sinó que el computarien adequadament com a benefici propi, la qual cosa augmentaria de manera espectacular la rendibilitat privada. En conseqüència, superades les limitacions que imposa actualment el sector públic, la iniciativa privada estaria interessada en l'ús de les GSP.

En resum, encara que la rendibilitat potencial de les GSP és alta, la forma de finançament de les GSP establerta en la Llei comporta un fre important a l'establiment d'aquesta nova tecnologia urbana ja que imposa transferències econòmiques importants a les CDS que requereixen més espai (subministrament d'aigua potable) en benefici de les que en requereixen menys (comunicacions).

7. Conclusions

El subsòl urbà és un bé cada vegada més escàs i apreciat a mesura que augmenten la densitat de població, la renda i la preferència per la qualitat mediambiental. La demanda de subsòl urbà és extremament rígida per a determinats serveis, com ara xarxes de sanejament i canalització d'aigües pluvials o ferrocarrils, per esmentar dos serveis que imposen fortes servituds als altres usuaris del subsòl i per als quals qualsevol desviació respecte a la ubicació idònia comporta increments dels costos espectaculars.

La definició inadequada dels DDP, especialment per al subsòl de titularitat pública, comporta dificultats serioses. Destaca el fet que, a la pràctica, se cedeixi l'ús del subsòl públic a preu zero, la qual cosa comporta distorsions en l'assignació entre espais alternatius per a la ubicació de determinats béns i serveis. Alhora, l'ús del subsòl a preu nul provoca la concentració de xarxes de serveis en les cotes més properes a la superfície, que són les de més fàcil accés, de manera que queden infrautilitzades cotes més profundes.

A diferència de qualsevol espai situat per sobre de la cota zero (la volada), que és objecte de planificació, amb regulació detallada dels diversos usos possibles, el subsòl se sol obviar i deixa el camp lliure per a la competència no reglada entre els usuaris del subsòl. L'absència de normes efectives i la intensa competència per a situar en un mateix espai serveis que s'interfereixen mútuament (quan no són incompatibles) condueix a un resultat que ha estat qualificat reiteradament com a caòtic.

Les galeries de serveis públics (GSP) per a la ubicació de serveis ciutadans constitueixen un element innovador que permet racionalitzar l'ús del subsòl alhora que eviten, en gran manera, les interferències entre serveis de diferents companyies, característica pròpia del sistema tradicional de canalitzacions enterrades.

Les GSP estudiades presenten una alta rendibilitat, el benefici principal de les quals és l'estalvi d'espai al subsòl. Hi ha alguns beneficis que no s'han computat, com ara els costos mediambientals més baixos, la disminució en els costos causats per interrupcions del servei amb motiu d'avaries i les interferències que provoquen les obres en voreres i calçades. Per això, la xifra de rendibilitat social resultant s'ha de considerar una cota inferior a la vertadera.

L'assignació deficient dels DDP del subsòl públic, la inexistència d'un preu positiu per al subsòl (fins i tot com a mer preu de compte) i les restriccions legals sobre la forma de finançament de les GSP, constitueixen obstacles seriosos per a la realització de projectes d'aquest tipus malgrat la seva alta rendibilitat potencial.

Per fortuna, tots els obstacles esmentats són evitables: els DDP es poden reassignar, determinar el preu del subsòl és una tasca simple, i les limitacions a les formes de finançament de les GSP es poden relaxar, canviar per d'altres de més raonables o suprimir sense més ni més.

La rendibilitat de les GSP es pot mesurar mitjançant el càlcul de la taxa interna de rendibilitat (TIR). Per a l'estimació dels fluxos de costos i beneficis rellevants en cada període amb un bon grau d'aproximació, n'hi ha prou amb valorar únicament cinc impactes diferencials, els que s'han revelat com a més importants. Aquests factors són l'espai ocupat, el cost de construcció, els costos per manteniment preventiu i reparacions i el cost de substitució de les canalitzacions.

Convé recordar que la hipòtesi sobre el ritme d'ocupació de les GSP influeix decisivament en la rendibilitat, per la qual cosa no convé establir-la a la lleugera. No és tan important el supòsit sobre la durada total del projecte, atès que els principals impactes es concentren en els primers períodes.

La informació total necessària per a quantificar i valorar els impactes principals i estar en disposició de determinar la rendibilitat d'un projecte de GSP enfront del sistema tradicional es redueix a vuit dades. Per a cada sistema (GSP i sistema tradicional) es requereix la informació següent:

- Volum de subsòl ocupat per cada metre lineal (incloses les distàncies de seguretat).
- Longitud total de les canalitzacions.
- Preu del metre cúbic de subsòl.
- Preu de construcció per metre lineal.
- Cost del manteniment preventiu.
- Nombre d'avaries.
- Cost mitjà per reparació d'avaries.
- Temps mitjà de vida de les conduccions.

Com hem vist, una vegada feta una primera anàlisi d'un nou tipus de projecte, els costos de fer-ne d'altres es redueixen de manera significativa. Les anàlisis cost-benefici sobre ús del subsòl urbà es poden estandarditzar fàcilment de tal manera que n'hi hagi prou amb l'aplicació de la lògica econòmica a una rutina simple. És possible, doncs, passar d'una situació en la qual la valoració de projectes públics constitueix un fet excepcional a una altra en la qual les valoracions i les consegüents ordenacions de projectes alternatius es fan de manera sistemàtica, com ocorre en altres països amb els projectes d'infraestructures viàries, per exemple.

8. Referències bibliogràfiques

Acebillo, J. A. (1989). "El subsuelo urbano y las técnicas de ordenación de los servicios públicos". *CEUMT* (núm. 109, pàg. 52-54).

Acebillo, J. A. (1990). "Usos del subsòl" A: *Actes del Congrés d'Urbanisme i Territori de Catalunya* (pàg. IV.B.67-IV.B.69). Barcelona: Federació de Municipis de Catalunya.

Alabern, E. (1990). "L'ordenació del subsòl urbà". A: *Actes del Congrés d'Urbanisme i Territori de Catalunya* (pàg. IV.B.1-IV.B.8). Barcelona: Federació de Municipis de Catalunya.

Arandes, R. (1989). "La planificació del subsòl". *Papers de Seminari*, 2/88/ER/PAS. Barcelona: Institut d'Estudis Metropolitans de Barcelona / Universitat Autònoma de Barcelona.

Arandes, R. (1990). "Problemàtica tècnica en la lluita per l'ús del subsòl urbà". A: *Actes del Congrés d'Urbanisme i Territori de Catalunya* (pàg. IV.B.55-IV.B.60). Barcelona: Federació de Municipis de Catalunya.

Cerdá, I. (1867). *Teoría general de la urbanización, y aplicación de sus principios y doctrinas a la reforma del Ensanche de Barcelona*. Madrid.

Figueras, F. (1990). "L'urbanisme i els serveis". A: *Actes del Congrés d'Urbanisme i Territori de Catalunya* (pàg. IV.B.53-IV.B.54). Barcelona: Federació de Municipis de Catalunya.

García-Bragado, R. (1990). "Subsòl i dret urbanístic". A: *Actes del Congrés d'Urbanisme i Territori de Catalunya* (pàg. IV.B.61-IV.B.64). Barcelona: Federació de Municipis de Catalunya.

García-Bragado, R.; Pasqual, J.; Pinyol, J. (1990). *Barcelona, la ciudad y el 92. El subsuelo urbano y los servicios públicos*. Barcelona: Instituto Municipal de Promoción Urbanística S. A. (IMPUSA).

Girnau, G.; Blennemann, F. (1989). "Cost-Benefits in underground urban public transportation". *Tunnelling and Underground Space Technology* (vol. 1, núm. 4, pàg. 23-30).

Mas, X.; Sala, R. (1990). "El subsòl urbà (resultats d'una enquesta)". A: *Actes del Congrés d'Urbanisme i Territori de Catalunya* (pàg. IV.B.37-IV.B.52). Barcelona: Federació de Municipis de Catalunya.

Pasqual, J. (1990). "Caracterización económica del subsuelo urbano". A: *Actes del Congrés d'Urbanisme i Territori de Catalunya* (pàg. IV.B.9-IV.B.19). Barcelona: Federació de Municipis de Catalunya.

Pasqual, J.; Pinyol, J. (1990). "Introducción a la economía del subsuelo urbano". A: Ajuntament de Girona e. a. (1990). *Municipios y redes de servicios públicos* (pàg. 189-216). Girona: Editorial El Pont de Pedra.

Pasqual, J.; Riera, P. (1990a). "Considering urban underground land value in project evaluation studies. A practical way of estimating it". *Working Paper, 90.01*. Barcelona: Departament d'Economia Aplicada / Universitat Autònoma de Barcelona.

Pasqual, J.; Riera P. (1990b). "Underground Land Value". A: *Proceedings of the Urban Underground Planning*. IFHP International Conference. IFHP.

Pasqual, J.; Riera P. (1990c). "Valor del subsòl". A: *Actes del Congrés d'Urbanisme i Territori de Catalunya* (pàg. IV.B.65-IV.B.66). Barcelona: Federació de Municipis de Catalunya.

Riera P.; Pasqual, J. (1992). "The importance of Urban Underground Land Value in Project Evaluations: A Case Study of Barcelona's Utility Tunnel". *Tunnelling and Underground Space Technology* (vol. 3, núm. 7, pàg. 243-250).

Riera, P.; Ruiz, F. (1990). "Costes y beneficios del uso del subsuelo". A: *Actes del Congrés d'Urbanisme i Territori de Catalunya* (pàg. IV.B.21-IV.B.35). Barcelona: Federació de Municipis de Catalunya.