Annex 1. Aspectes bàsics i sistemes de coordenades

Joan Trias Pairó

PID_00150792

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Objectius

Aspectes bàsics

En aquest apartat recordarem algunes nocions bàsiques de la geometria i de l'àlgebra necessàries per a seguir el curs. Algunes de les nocions, especialment les del càlcul vectorial i matricial bàsic, es poden consultar en aquest apartat. No tenim pretensions d'exhaustivitat ni esperit de generalitzar per generalitzar: indicarem el que és estrictament imprescindible. També donem per fet que el lector ja ha assimilat aquests conceptes en algun moment de la seva vida. L'objectiu és servir de recordatori i per a alguna consulta eventual. Se suposa que el lector té coneixements previs de geometria en general, de geometria analítica i trigonometria, i també de rudiments de càlcul vectorial.

Sistemes de coordenades

En aquest apartat revisem alguns rudiments de vectors i bases de l'espai vectorial. Hi introduïm les coordenades i el concepte important del vector de posició, que permet vectorialitzar la geometria. Alguns dels aspectes importants són la parametrització de la recta, el segment, la circumferència i l'esfera, i tot plegat amb la finalitat de tenir exemples d'objectes, des del principi, amb els quals es pugui fer càlcul geomètric.

1. Aspectes bàsics

1.1. Nombres reals

En geometria necessitem treballar constantment amb **quantitats numèriques**: magnituds angulars per a fer rotacions, factors d'escala per a dur a terme canvis d'escala, expressió de les coordenades d'un punt o dels components d'un vector.

Els nombres **reals** (R) que formen part dels nombres utilitzats són els següents:

Els nombres **naturals**: 0, 1, 2, 3...

Els nombres **enters**: ...–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3... (que contenen els naturals).

Els nombres **racionals**: 3,2, 5/6, 0,5... (que contenen els enters).

La resta de nombres: π, 2π, $\pi/2$, $\pi/4$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$...

1.1.1. Notació decimal

No hi ha unanimitat per a l'expressió de decimals. En alguns contextos, com en el llenguatge de programació ActionScript de Flash, s'ha de fer amb punt: 3.56. En d'altres, s'ha d'usar la notació de coma.

En l'ús de qualsevol programari, el lector ha de tenir en compte aquest detall i mirar de saber sempre quins són els convenis en ús en cada cas concret; fins i tot quan es produeix algun error ha de tenir present la possibilitat d'haver introduït incorrectament alguna quantitat numèrica amb decimals.

1.1.2. Constants numèriques: el nombre π

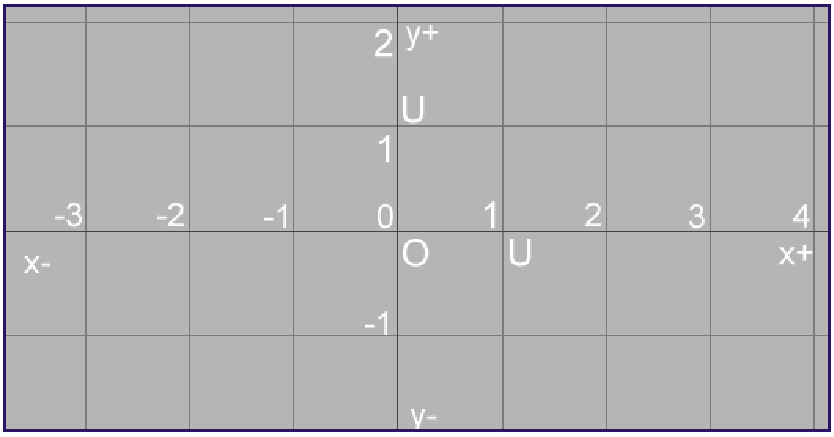
Els llenguatges de programació solen tenir incorporades, per mitjà de paraules clau que pot utilitzar el programador, diverses constants numèriques especialment interessants per la freqüència d'ús. Això passa, per exemple, en el cas d'ActionScript, en què el valor de π és dins de l'objecte Math i s'hi pot fer referència com a Math.PI. Es pot usar d'aquesta manera en tota classe d'expressions i de fórmules matemàtiques.

1.1.3. Recta real

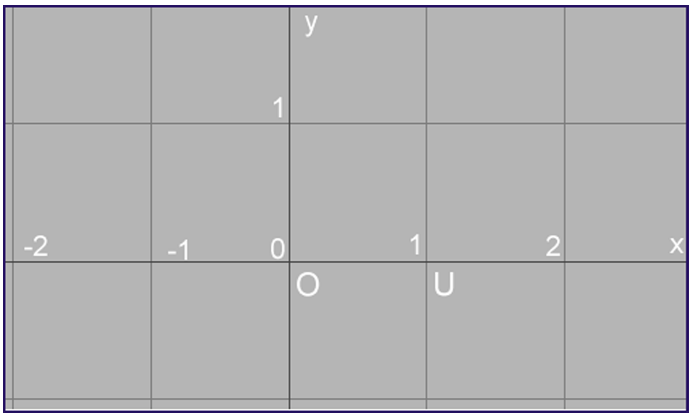
És ben sabut que es poden representar els nombres reals com a punts sobre una recta, que és la recta real.

Dibuixem una recta. En seleccionem un punt qualsevol, punt amb què representem el nombre 0. Fixem un altre punt arbitrari (per exemple, a la dreta del punt que representa el 0, encara que podria ser a l'esquerra), punt amb què representem el nombre 1. D'aquesta manera fixem sobre la recta la **unitat de mesura** (i també una orientació sobre la recta, de les dues possibles). Una vegada fixada aquesta unitat de mesura de longituds sobre la recta, podem representar els nombres per punts.

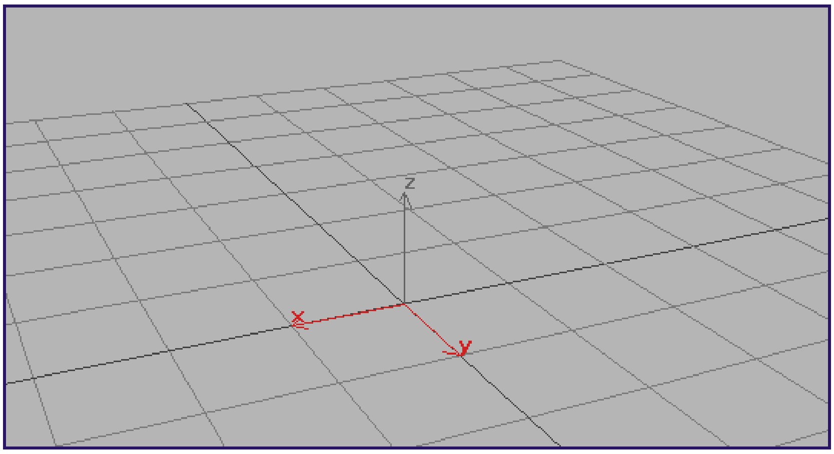
Els múltiples enters de la longitud produeixen la representació dels nombres naturals i els seus simètrics respecte al 0, la resta dels nombres enters. Aquest fet es pot dur a terme en dues dimensions, la qual cosa dóna lloc a una quadrícula en el pla que permet situar els punts. En essència, un sistema de coordenades, en què es té un origen, uns eixos mútuament perpendiculars, una unitat de mesura sobre els eixos (en general la mateixa) i un sentit d'avanç, de recorregut o d'orientació de cadascun d'aquests eixos.



No hi ha cap problema conceptual a l'hora de triar altres mesures sobre la recta per a la **unitat** de mesura:



Aquest procediment es pot generalitzar al pla de punts, o a l'espai tridimensional, la qual cosa dóna lloc a les coordenades i els sistemes de coordenades.



1.1.4. Interval numèric i conjunts

Recordeu que la notació $x \in A$ significa que l'element x és de A, pertany a A, i que la notació $x \notin A$ significa que l'element x no pertany al conjunt A.

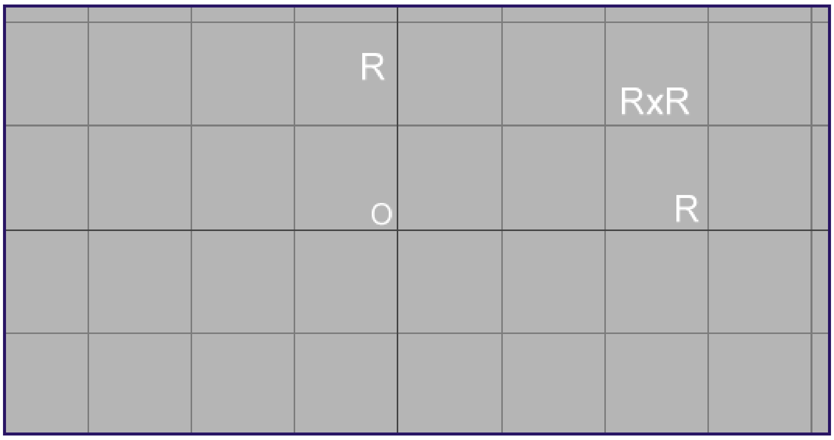
A vegades expressarem els punts d'una corba (trajectòria d'animació) o els d'una superfície en termes de paràmetres, quantitats numèriques que varien en el conjunt dels nombres (reals), normalment des d'un valor inicial t_1 fins a un valor final t_2 (amb $t_1 \leq t_2$). És a dir, que si t és el paràmetre es compleix $t_1 \leq t \leq t_2$. Se suposa implícitament la idea d'una variació **contínua** al llarg de l'interval. El conjunt dels valors numèrics compresos entre els valors anteriors és l'interval numèric $I = [t_1, t_2]$. S'expressa de manera equivalent, en el nivell de notació, $t \in [t_1, t_2]$. Recordeu que el símbol $\in$ significa 'pertany'.

- **Conjunts**

Per $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ indiquem el conjunt dels punts del pla bidimensional, conjunt de **parells** ordenats de nombres reals, és a dir,

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

De vegades s'indica com a $\mathbb{R}^2$.



Mitjançant $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ indiquem el conjunt dels punts de l'espai tridimensional, conjunt de **ternes** ordenades de nombres reals, és a dir,

De vegades s'indica com a $\mathbb{R}^3$

De vegades, per a descriure els punts d'una forma geomètrica, és còmode expressar-los en termes de conjunts. Hi expressem els punts utilitzant algun tipus de relació o relacions que els caracteritzen o, equivalentment, de propietats que satisfan els punts del conjunt, i només aquests punts. Vegem a continuació alguns exemples importants de la descripció formal conjuntista amb propòsits purament de pràctica.

- **Exemples**

Exemple 1

Com s'ha d'expressar el conjunt dels punts d'una circumferència en el pla?

Els punts $P = (x,y)$ de la circumferència C de centre l'origen de coordenades O i radi R són els que disten R de l'origen, circumstància que es tradueix a satisfer la propietat $x^2 + y^2 = R^2$. Partint d'aquesta base, vegem com podem expressar com a conjunt, en termes formals, la circumferència:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = R^2\}$$

Els punts de la circumferència C es caracteritzen per aquesta relació: $x^2 + y^2 = R^2$. És l'equació de la circumferència indicada.

Exemple 2

L'eix Ox del sistema de coordenades del pla de coordenades bidimensional.

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = 0\}$$

Per aquesta raó es diu que $y = 0$ és l'equació de l'eix x en el pla bidimensional, ja que és la propietat que caracteritza els punts d'aquest eix.

Exemple 3

El semieix de les *x*+ del sistema de coordenades del pla bidimensional.

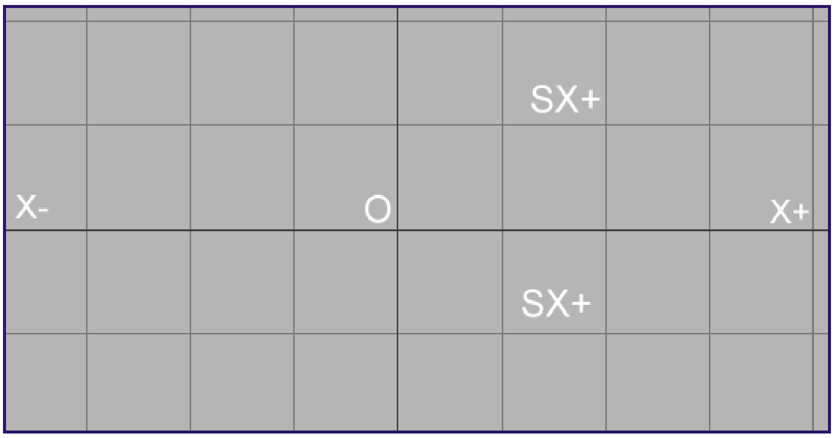
$$X^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = 0;\ x \geq 0\}$$

Anàlogament, el semieix de les *x*– del sistema de coordenades del pla bidimensional es pot expressar de la manera següent:

$$X^- = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = 0;\ x \leq 0\}$$

Exemple 4

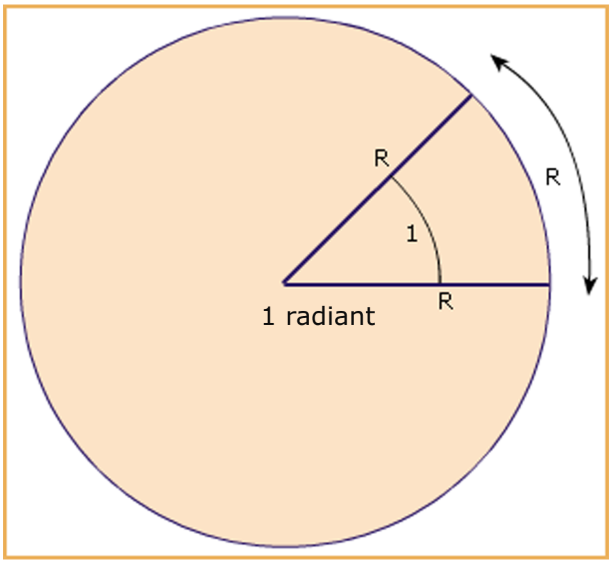
Com s'ha d'expressar el semiplà de les *x* positives en el pla bidimensional?



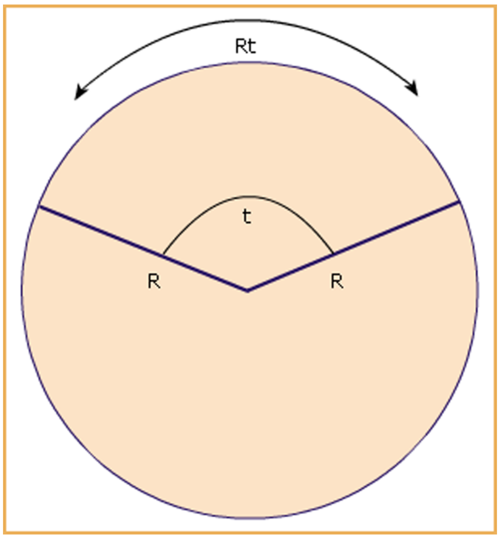
1.2. Magnituds angulars

Hi ha diverses maneres, que coexisteixen barrejades, de mesurar i d'expressar els angles. La unitats de mesura més usuals són el **radiant** i el **grau sexagesimal**.

- **Radiants**
  Considerem una circumferència de radi *R*, de centre *C*. Es consideren angles de vèrtex *C*, determinats per dos punts diferents sobre la circumferència. Considerant un recorregut antihorari, cada angle determina un arc de la circumferència, que té una longitud *s*.



Un **radiant** és l'angle l'arc del qual té una longitud igual que el radi de la circumferència. En l'esquema anterior es mostra aquesta situació.
En general, si tenim un angle t, segons la descripció anterior, en una circumferència de radi R, la longitud de l'arc corresponent és $s = Rt$:



- **Graus sexagesimals**
  Si considerem la circumferència de centre el punt C i la dividim en 360 parts iguals, un grau sexagesimal és l'angle corresponent a dues subdivisions consecutives A,B, amb vèrtex a C (és a dir, l'angle ACB). Això vol dir que un angle recte són 90 graus, i un angle pla, 180. La circumferència completa correspon a 360 graus.
  Quan parlem de graus ens referirem sempre als graus sexagesimals (hi ha una altra unitat de mesura, la dels graus centesimals, corresponents a la divisió de la circumferència en 400 parts iguals, però que no considerem aquí).
  Tots els angles en Flash s'expressen en **radiants**.

- **Interconversió**

Convertir graus en radiants i viceversa és molt senzill, tenint en compte que 180 graus són π radiants.

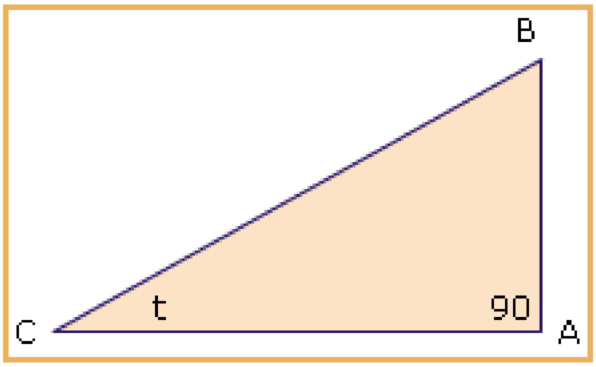
La raó $gpr = \frac{180}{\pi}$ ens dóna el nombre de graus per radiant i, en conseqüència, hem de multiplicar per aquesta raó si volem convertir radiants en graus. Per tant, *R* radiants són *gprR* graus, és a dir, $\frac{180}{\pi}R$ graus.

De manera anàloga, la raó $rpg = \frac{\pi}{180}$ ens dóna els radiants per grau i, per tant, passem de graus a radiants multiplicant per aquesta raó. Per tant, *G* graus són *rpg*G* radiants, és a dir, $\frac{\pi}{180}G$ radiants.

1.3. Trigonometria bàsica

La trigonometria que usarem és absolutament elemental.

Considerem el triangle rectangle de la figura, en el qual l'angle recte és el corresponent al vèrtex *A*. Tenim que *t* és l'angle en el vèrtex *C*, és a dir, l'angle *ACB*. En aquest cas, *AB* és el catet oposat a l'angle en qüestió, i *CA* és el catet contigu. El costat *CB* és la hipotenusa del triangle rectangle *ABC*.



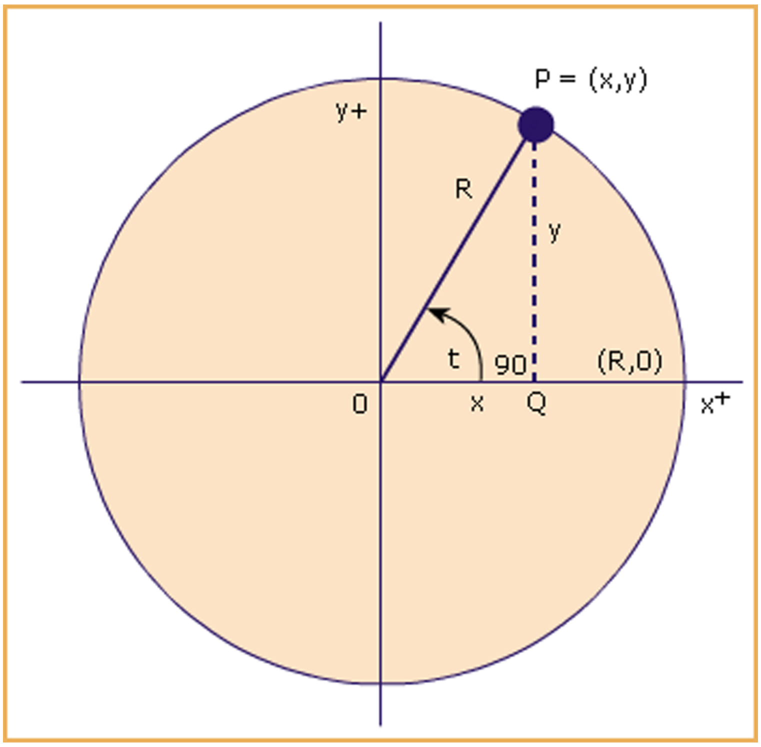
Llavors podem definir el **sinus**, el **cosinus** i la **tangent** de l'angle *t* (usarem indistintament les notacions sin, cos i tan):

$$\sin t = \frac{AB}{CB}, \ \cos t = \frac{CA}{CB}, \ \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{AB}{AC}$$

Sovint, aquestes relacions s'utilitzen per a calcular *AB* i *AC*, ja que normalment som en un context en què les funcions trigonomètriques són calculables i calculades pel sistema. Així, tenim:

$$AB = CB\sin t; AC = CB\cos t$$

Un primer exemple d'ús de les funcions trigonomètriques, molt pràctic per a aplicacions posteriors, és l'expressió de les coordenades dels punts de la circumferència en termes de funcions paramètriques, usant l'angle que s'indica en el gràfic, angle polar del punt *P*:



Analitzant l'esquema, hi veiem un triangle rectangle, *POQ*, amb angle recte en *Q*. Expressem les coordenades *x*, *y* del punt *P* segons l'angle *t*. El fet d'escriure *x,y* segons *t* no és més que un exercici senzill de trigonometria bàsica:

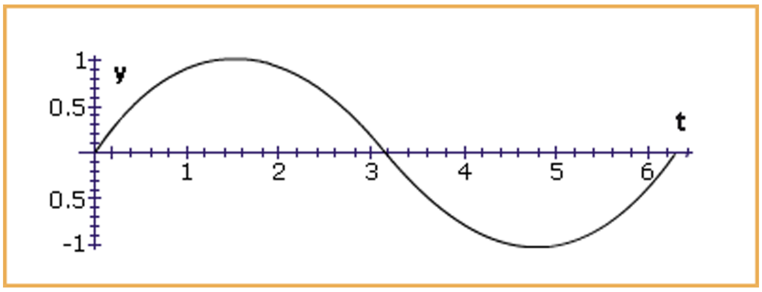
$$x = R\cos t,\ y = R\sin t$$

Aquesta fórmula és molt còmoda per a obtenir l'expressió dels punts de la circumferència, circumstància que permet generar-los.

- **Taula de les raons trigonomètriques més usuals**
  És útil disposar d'alguns valors directament, a punt per a usar-los.

graus	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º,-90º	360º
radiants	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0		0

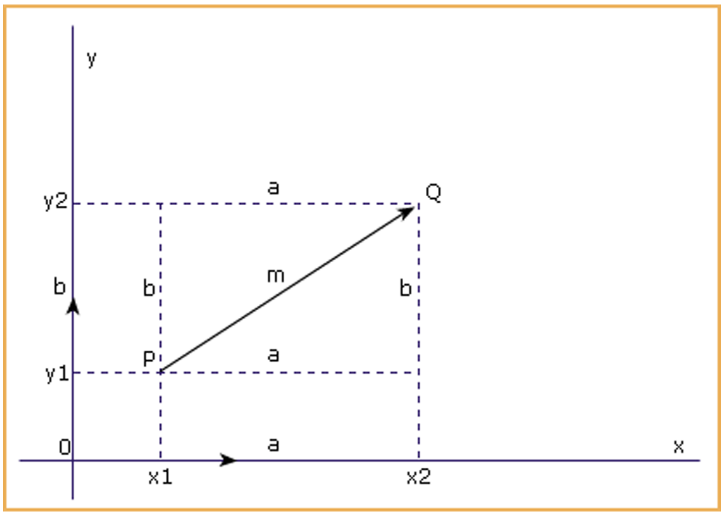
Les raons trigonomètriques es poden calcular per als valors *t* d'un interval o de la recta. Aquest fet dóna lloc a les funcions trigonomètriques, com ara *sin t*, *cos t* i d'altres. Fixeu-vos, per exemple, en un gràfic de la funció **sinus** en l'interval [0,2π] (periòdica, de període 2π), és a dir, de $y = \sin t$:



1.4. Vectors i càlcul vectorial bàsic

En múltiples contextos es fa referència a quantitats (variables, constants) **escalars** i, anàlogament, **vectorials**. En el primer cas, les quantitats són simplement **numèriques**. Així, doncs, en tot el que segueix un escalar és un nombre, no un vector. En el segon cas, les "quantitats" són parells o ternes de nombres, escalars, ordenats, com passa quan expressem punts de l'espai tridimensional com a ternes escalars, com per exemple $w = (2, 4, -6)$. Són ternes ordenades, ja que els punts $(2, 4, -6)$ i $(4, 2, -6)$ no són el mateix punt.

- **Components**
  Si tenim el vector $w = (a, b, c)$, llavors a, b, c són els seus **components** ordenats. Si $w = (2, 5, -3)$, el **primer component** de w és 2, el **segon component** de w és 5 i el **tercer component** de w és -3. En geometria, els components d'un vector són sempre quantitats o magnituds escalars. Un vector és una magnitud no escalar.
  El nombre de components és la dimensió del vector. Així, el vector $(2, -4, 6)$ és un vector 3-dimensional, tridimensional; el vector $(0, -3)$ és un vector bidimensional, de dimensió 2. Els vectors tridimensionals són fonamentals per a l'estudi de la geometria en dimensió 3, geometria que és en la base del grafisme i l'animació 3D.
  En el cas del vector $m = PQ$, l'expressió en components és $m = (a, b)$.



1.4.1. Operacions vectorials bàsiques

Les operacions més bàsiques amb vectors són la **suma** i el **producte per escalars**. La suma de vectors només es pot fer amb vectors de la mateixa dimensió. Es defineix com la suma "component a component", i resulta en concret:

En dimensió 2: $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$.

En dimensió 3: $(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$.

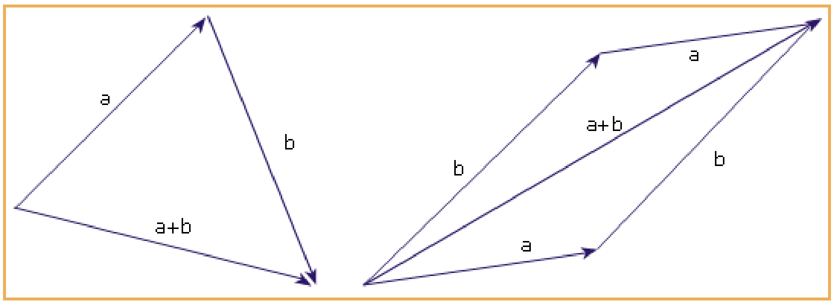
El producte per escalars també és per components: si t és un escalar i $w = (a, b, c)$ és vector, es defineix $t\,w = t\,(a, b, c) = (ta, tb, tc)$. Així, doncs:

En dimensió 2: $t\,(a, b) = (ta, tb)$.

En dimensió 3: $t\,(a, b, c) = (ta, tb, tc)$.

Per exemple, 3 (5, 6) = (15, 18) o bé –(5, 6) = (–5, –6).

En tot això anterior hem exposat quines són les operacions amb vectors en termes analítics o numèrics. En termes geomètrics, vegem què significa la suma de vectors. La suma de vectors, tant en el cas bidimensional com en el tridimensional, funciona segons la regla del paral·lelogram, tal com s'indica en el gràfic següent:



1.5. Matrius i càlcul matricial bàsic

Essencialment utilitzarem el càlcul matricial en dimensió 2 i 3, i especialment en dimensió 3, per a les aplicacions a la geometria tridimensional. D'acord amb aquest criteri, donarem les fórmules específiques de manera separada per dimensions.

1.5.1. Què és una matriu?

A efectes d'operacions matricials, considerem una matriu una capsa formada de *n* files i *m* columnes, la qual cosa produeix una col·lecció de *nxm* posicions, que són ocupades per nombres reals. Si, per exemple, la matriu s'indica per *A*, indiquem per a_{ij} l'element que ocupa la fila *i* i la columna *j*. En general considerem que la primera fila és la de dalt, i la primera columna, la de l'esquerra.

- **Matrius 2 × 2**
  En el cas de la matriu següent, es tracta d'una matriu quadrada, de 2 × 2, en què tenim:

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

  Si, per exemple, és $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, llavors és $a_{11} = 2; a_{12} = -3; a_{21} = 4; a_{22} = 0$.

- **Matrius 3 × 3**
  La matriu següent és una matriu quadrada, de 3 × 3, és a dir, de tres files i tres columnes:

  $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  Si, per exemple, és $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & -2 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, llavors és:

  $a_{11} = -1; a_{12} = 2; a_{13} = 5; a_{21} = 4; a_{22} = -3; a_{23} = -2a;_{31} = 7; a_{32} = 6; a_{33} = 0$.

- **Vector columna 3 × 1**
  No hi ha res que impedeixi considerar matrius amb diferents nombres de files i de columnes. Un exemple d'ús en àlgebra i geometria és la **matriu columna**, la de dimensions 3 × 1, de tres files i una columna, amb la qual de vegades expressem els vectors de l'espai tridimensional, en general amb la finalitat de fer operacions matricials, com es veu en l'apartat següent.
  Així, el vector $w = (a,b,c)$ es pot expressar en format matricial de la manera següent:

  $$W = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

  Es tracta d'un vector columna o, de manera equivalent, d'una matriu columna.

- **Matrius com a reservori de vectors**

  A vegades, especialment en relació amb transformacions geomètriques, es poden utilitzar matrius per a emmagatzemar vectors en forma compacta, tant en el cas bidimensional com en el tridimensional. La manera en què ho fem és per columnes: se suposa que tenim una col·lecció ordenada de vectors, de manera que té sentit parlar del primer vector, del segon, etc., i el fet d'intercanviar l'ordre significa considerar coses diferents; doncs bé, el primer vector forma la primera columna; el segon vector, la segona, i així successivament.

  Si, per exemple, $u = (a, b, c)$, $v = (a', b', c')$, $w = (a'', b'', c'')$, la matriu associada a la terna ordenada de vectors $\{u,v,w\}$ és

  $$M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

  és la **matriu associada** als **vectors** $\{u,v,w\}$.

1.5.2. Operacions matricials

Suma de matrius

La idea és que la suma de dues matrius es fa element a element, de manera que, separadament per dimensions, tenim les definicions següents:

En dimensió 2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

En dimensió 3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Exemples

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \\ 4 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

- **Notació**

Si A,B són matrius, la suma s'expressa $A + B$, i sempre es poden sumar.

- **Propietats de la suma de dues matrius**
  1 Commutativa: $A + B = B + A$
  2 Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
  Observació. Perquè tingui sentit l'operació de suma de matrius, tant l'una com l'altra han de tenir el mateix nombre de files i el mateix nombre de columnes.
  La suma de dos vectors es correspon amb la suma de dues matrius columna, és a dir, que la suma $(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$ es pot expressar de manera equivalent en termes matricials de la manera següent:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}$$

Aquesta és la situació en què normalment hem de sumar en el context d'aquesta geometria bàsica.

- **Producte per un escalar**
  Multiplicar una matriu per un (nombre) escalar consisteix a multiplicar cada element per l'escalar en qüestió:

$$mA = m\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} \\ ma_{21} & ma_{22} \end{pmatrix}$$

$$mA = m\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}$$

- **Producte de matrius**
  Per a matrius quadrades 2 × 2, tenim:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

El producte AB, en l'ordre donat, es defineix de la manera següent:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Imaginem-nos que tenim les matrius quadrades 3 × 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

El producte de matrius, en l'ordre que s'indica, es defineix d'aquesta manera:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Perquè es pugui fer el producte matricial en l'ordre indicat no fa falta que les dues matrius siguin quadrades. La condició que s'ha de complir és que el nombre de columnes de *A* coincideixi amb el nombre de files de *B*.

Definició general. En general, si *A* és una matriu de *n* files i *m* columnes, i *B* és una matriu de *m* files i *r* columnes, si *C* = *AB*, i c_{ij} és el terme general de la matriu producte, llavors és:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$$

Fixeu-vos que s'ha usat la fila *i* de *A* i la columna *j* de *B*.

Associativitat. El producte matricial és associatiu. Això vol dir que el producte *ABC* es pot calcular de manera equivalent com a *A(BC)* o *(AB)C*.

No commutativitat. En general, el producte de matrius no és commutatiu. Llevat de casos especials, els productes matricials *AB, BA* no coincideixen. Per tant, cal respectar l'ordre dels factors. Una traducció d'aquest fet és que les transformacions geomètriques que es poden aplicar a un objecte en general no commuten.

És fàcil trobar exemples de no commutativitat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicar una matriu a un vector. En el curs de fer construccions geomètriques mitjançant transformacions geomètriques, hem d'aplicar la transformació a un vector, i això es pot fer matricialment, circumstància que ens condueix a multiplicar una matriu per un vector columna. És un simple **cas ordinari de producte de matrius** que, no obstant això, explicitem:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

La notació escollida habitualment és la següent (encara que pot variar segons textos): AX.

Exemples:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}$$

A través de la matriu columna, columna d'un vector, les operacions vectorials es poden expressar matricialment.

2. Sistemes de coordenades

2.1. Vectors i base de l'espai vectorial

Podem considerar el conjunt dels vectors de la forma *(x, y)*, de $R \times R$, amb les regles habituals de suma i producte per escalars component a component, conjunt dels vectors de l'espai bidimensional. De manera anàloga, es pot considerar el conjunt dels vectors de la forma (x, y, z), de $R \times R \times R$ amb les regles habituals d'operacions component a component.

Combinació lineal

Donats els vectors $u_1,...,u_n$, una **combinació lineal** d'aquests vectors, d'escalars respectius a_1, ..., a_n, és el vector $u_1a_1 +...+ u_na_n$. Per exemple, 2 (1, 2, 0) – (–1, 2, 3) + 5 (–1, 2, 7) és una combinació lineal dels vectors *V1 = (1, 2, 0)*, *V2 = (–1, 2, 3)*, *V3 = (–1, 2, 7)*. El vector és 2 (1, 2, 0)– (–1, 2, 3) + 5 (–1, 2, 7) = (2, 4, 0) + (1, –2, –3) + (–5, 10, 35) = (–2, 12, 32). Per tant, el vector (–2, 12, 32) és una combinació lineal dels vectors *V1*, *V2*, *V3*. Anàlogament, podem veure exemples en el cas bidimensional.

Generadors

Fixeu-vos que $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x(1, 0, 0) + y (0, 1, 0) + z$ 0, 0, 1). Si indiquem per $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, llavors tot vector de $R \times R \times R$ es pot escriure com a combinació lineal dels anteriors, com s'ha vist, de manera que es genera la resta dels vectors. A part dels vectors anteriors, n'hi pot haver d'altres per als quals es compleix la mateixa propietat, la de "generar" tots els vectors de l'espai. En aquest cas, es diu que els vectors $\{e_1,e_2,e_3\}$ **generen l'espai de vectors**, o bé són generadors, o constitueixen un sistema de generadors de l'espai.

Dependència i independència lineal

D'altra banda, si considerem els vectors anteriors $\{e_1,e_2,e_3\}$, és fàcil veure que no n'hi ha cap que es pugui escriure com a combinació lineal dels altres: aquest és el concepte d'**independència lineal**, i els vectors són **linealment independents**.

Un vector no nul defineix una direcció. Dos vectors no nuls són linealment independents si no defineixen la mateixa direcció, si no estan alineats. En el cas de l'espai tridimensional, tres vectors són linealment independents si, a més de l'anterior, "no n'hi ha cap que pertany al pla determinat pels altres dos".

Base d'un espai vectorial

Una **base** de l'espai és un conjunt de vectors (ordenats) $\{u_1,u_2,u_3\}$ per als quals es compleix:

1) Són generadors de l'espai vectorial. Tot vector de l'espai es pot expressar com a combinació lineal dels vectors $\{u_1,u_2,u_3\}$.

2) Són linealment independents. Tots els vectors són no nuls i no n'hi ha cap que es pugui expressar com a combinació lineal dels altres.

Determinants

El determinant de dos vectors bidimensionals $u = (a_{11},a_{21})v = (a_{12},a_{22})$ es defineix de la manera següent:

$$\det(u,v) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Dos vectors bidimensionals són linealment independents si el seu determinant és no nul. En aquest cas, n'hi ha prou d'això perquè siguin base.

El determinant de tres vectors tridimensionals es calcula de la manera següent.

Si $u = (a_{11},a_{21},a_{31}),v = (a_{12},a_{22},a_{32}),w = (a_{13},a_{23},a_{33})$, és

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

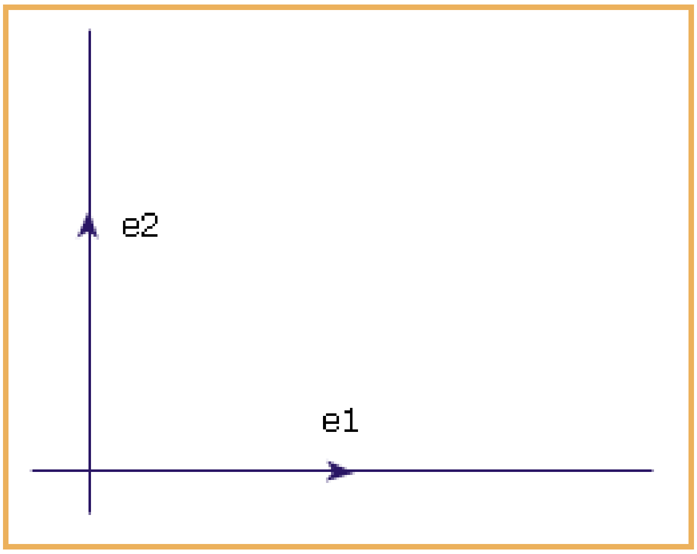
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Aquesta quantitat s'indica també mitjançant det(u, v, w).

Es pot mirar de saber si tres vectors tridimensionals són linealment independents en termes de l'anul·lació del determinant: **el determinant és nul només si els vectors són linealment dependents**. De manera equivalent, és no nul només si són linealment independents.

Cas del pla bidimensional

El vector arbitrari $w = (x, y)$ de l'espai bidimensional es pot expressar com a $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, és a dir, com a combinació lineal dels vectors. El parell ordenat de vectors $\{e_1,e_2\}$ és una base de l'espai vectorial $e_1 = (1,0),e_2 = (0,1)$ $R \times R$. És l'anomenada *base canònica* de l'espai bidimensional $R \times R$.

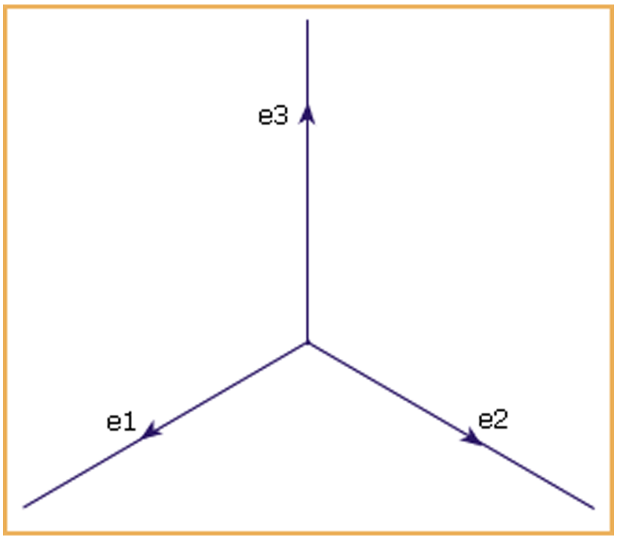


Es pot comprovar efectivament que

$$\det(e_1,e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

Cas de l'espai tridimensional

Una base de l'espai tridimensional $R \times R$ és $e_1 = (1,0,0),e_2 = (0,1,0),e_3 = (0,0,1)$. Aquesta és l'anomenada *base canònica*.



Si tenim tres vectors linealment independents en l'espai vectorial tridimensional, es pot provar que automàticament són generadors de l'espai, de manera que no cal fer la comprovació en aquest cas. Hi ha una manera simple de decidir si tres vectors de l'espai 3-dimensional són linealment independents o no: calculant-ne el **determinant**.

Exemple

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 0 - 0 - 0 - 4 = -8 \neq 0$$

Per tant, els vectors o = (0, 2, 1), v = (–1, 3, 1), w = (0, 4, –2) són linealment independents. Els vectors són base de l'espai vectorial.

Es pot comprovar en el cas dels vectors e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1). En efecte,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$$

2.2. Coordenades cartesianes

La geometria és la base del grafisme tridimensional i l'animació. Els objectes geomètrics estan constituïts, en última instància, per punts de l'espai. És imprescindible descriure la posició d'un punt per a tractar-lo analíticament, de tal manera que es pugui calcular amb aquest punt.

Per a això s'utilitzen els **sistemes de coordenades**.

Un sistema de coordenades $S = [0;\{e_1,\ldots,e_n\}]$ està format pels elements següents:

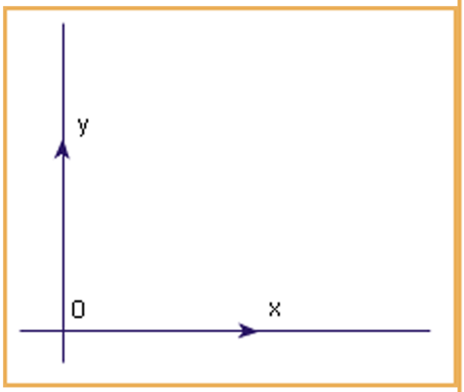
A) Un **origen** O, que és un punt de l'espai de punts.

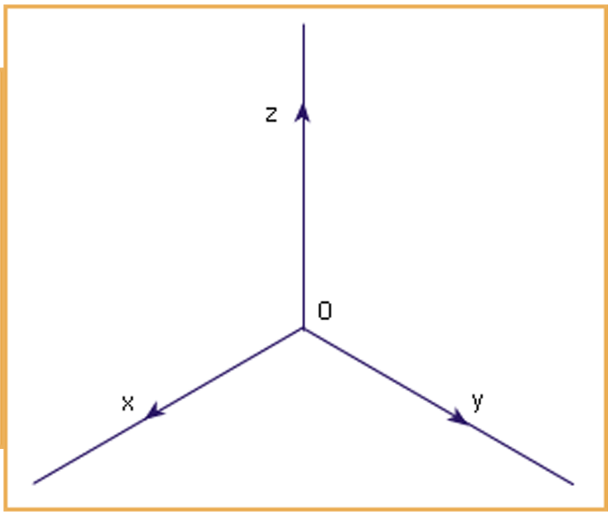
B) Una **base** $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de l'espai vectorial.

En dimensió 2, és $S = [0;\{e_1,e_2\}]$.

En dimensió 3, és $S = [0;\{e_1,e_2,e_3\}]$.

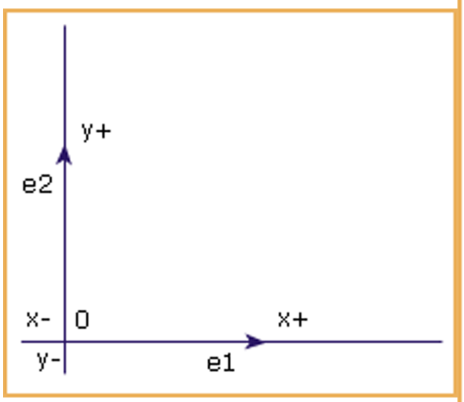
Donat un vector no nul w, aquest vector defineix una direcció de l'espai, direcció orientada per aquest vector mateix. Així queden infinites rectes definides paral·leles, totes de la mateixa direcció, la que determina el vector esmentat. Quan d'aquestes infinites rectes considerem la que passa per un punt A, llavors tenim la recta que passa pel punt *A* i és de "direcció" o "vector directriu" *w*. Els **eixos de coordenades** d'un sistema de coordenades són les rectes que passen per l'origen *O* i tenen direccions donades pels vectors de la base del sistema de coordenades. Els eixos són ordenats de manera concordant amb l'ordenació dels vectors de la base. En els gràfics següents podem observar en dimensió 2 i 3 els sistemes de coordenades habituals:

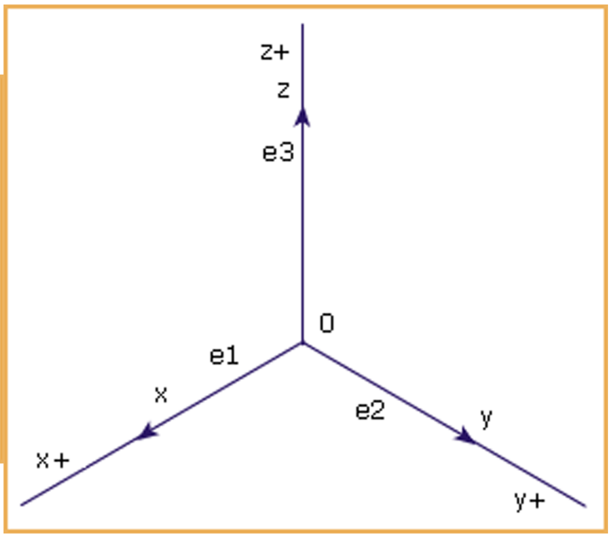




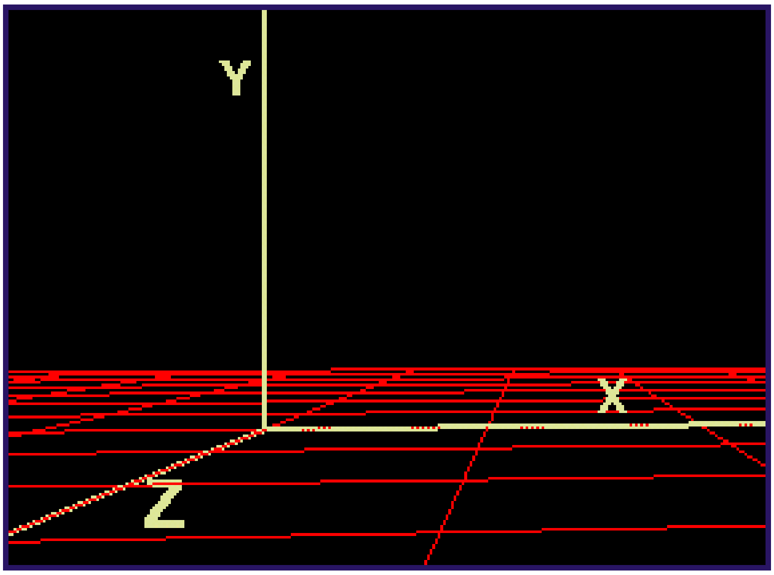
En el pla bidimensional considerem els eixos de coordenades ordenats *x, y* (també s'indiquen, respectivament, per *Ox, Oy*). En el cas tridimensional, els eixos de coordenades ordenats són *x, y, z* (també s'indiquen, respectivament, per *Ox, Oy, Oz*).

Donat un eix de coordenades, l'origen descompon la recta corresponent en dues semirectes, els **semieixos de coordenades**. D'altra banda, els **eixos estan orientats**, hi tenim definit un sentit de recorregut donat pel vector de la base que defineix aquest eix, al qual també orienta. Per aquesta raó es consideren els semieixos positius de coordenades, *x*+, *y*+, *z*+, en el cas tridimensional, i anàlogament en el cas bidimensional:





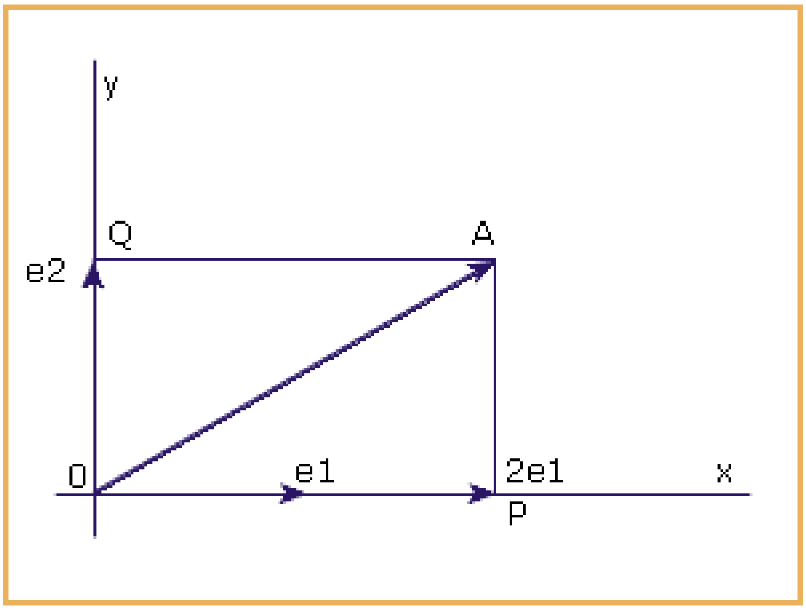
En l'espai tridimensional els eixos de coordenades no tenen sempre la mateixa distribució que en el cas habitual. Una de les diferències més importants que es plantegen és quin és l'eix corresponent a la "verticalitat". En el sistema habitual, la verticalitat la dóna l'eix z.



Un sistema de coordenades és **cartesià** si els eixos són mútuament perpendiculars i les unitats de mesura sobre els eixos coincideixen. Els vectors de la base orienten els eixos respectivament i defineixen la unitat de mesura sobre cadascun d'aquests eixos. En tornarem a parlar en el mòdul següent.

Coordenades de punts

Donat el punt A, es considera el vector OA, que s'expressa com a combinació lineal dels vectors de la base. Els coeficients ordenats corresponents són les coordenades del punt A en el sistema de coordenades esmentat.



En aquest cas, és *OA* = 2e1 + e2. L'expressió en coordenades del punt *A* és *A* = *(2, 1)*.

Eixos de coordenades

Cas del pla bidimensional

L'eix de coordenades *Ox* és el conjunt dels punts de la forma *(x, 0)*, en què *x* varia en el conjunt dels nombres reals. Com que la propietat que caracteritza aquests punts és $y = 0$, aquesta és precisament l'equació de l'eix *Ox*. La recta d'equació $y = a$ és el conjunt de punts de la forma (*x*, *a*), i és la recta paral·lela a l'eix *Ox* que dista de l'origen (o, de manera equivalent, de l'eix *x*). També és la recta paral·lela a l'eix *x* que passa pel punt (0, *a*).

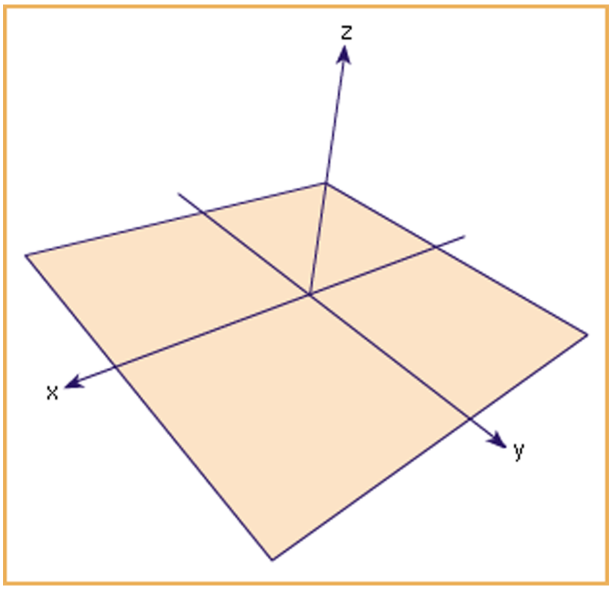
L'eix de coordenades *Oy* és el conjunt dels punts de la forma *(0, y)*. La propietat que caracteritza els punts de l'eix és $x = 0$, per la qual cosa aquesta és la seva equació. Les rectes paral·leles a l'eix *Oy* tenen l'equació $x = b$.

Cada recta del pla bidimensional determina dos **semiplans**. En el cas de l'eix *Oy*, queden determinats dos semiplans: el dels punts (*x*, *y*), per als quals $x \geq 0$, i el dels punts (*x*, *y*), per als quals $x \leq 0$. En el cas de l'eix *Ox*, queden determinats dos semiplans: el dels punts *(x, y)*, per als quals $y \geq 0$, i el dels punts (*x*, *y*), per als quals $x \leq 0$. També es pot considerar, per exemple, el semiespai dels punts del pla per als quals $y \geq 2$, conjunt de tots els punts de coordenada *y* positiva la distància a l'eix *Ox* dels quals és superior o igual a 2.

A vegades s'han de situar punts sobre els eixos de coordenades en una determinada distància de l'origen. Per exemple, el punt del semieix *x*+ que dista 400 unitats de l'origen és el punt (400, 0). El punt del semieix *y* – que dista 10 unitats de l'origen és (0, –10).

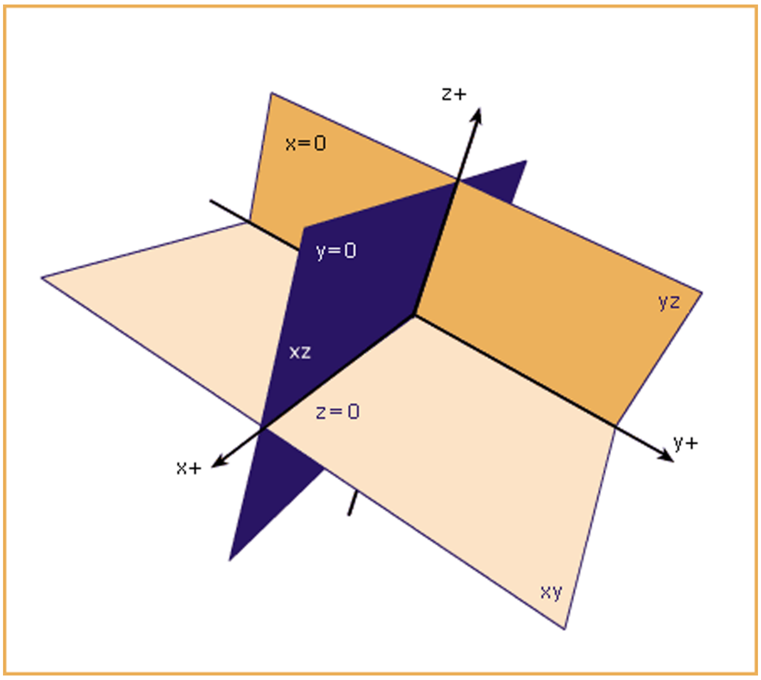
En el sistema de coordenades cartesianes habitual, la projecció ortogonal d'un punt $P = (x, y)$ sobre l'eix de coordenades Ox és la intersecció de l'eix Ox amb la recta que passa per P i és perpendicular a aquest eix. El resultat és $P' = (x, 0)$. De manera anàloga, la projecció ortogonal de P sobre l'eix Oy és $P'' = (0, y)$.

Cas de l'espai tridimensional



L'eix de coordenades Ox és el conjunt dels punts de la forma $(x, 0, 0)$. L'eix de coordenades Oy és el conjunt dels punts $(0, y, 0)$. L'eix de coordenades Oz és el conjunt dels punts $(0, 0, z)$.

Plans de coordenades



En el cas de l'espai tridimensional, a més dels eixos de coordenades podem considerar els plans de coordenades, que estan determinats pels parells d'eixos de coordenades. Per tant, tenim el següent:

1) El pla de coordenades xy, determinat pels eixos Ox, Oy. És el conjunt dels punts $(x, y, 0)$, amb x, y arbitraris. Es caracteritza per la condició $z = 0$, que és l'equació del pla. Es correspon amb el pla horitzontal. L'eix z és ortogonal a aquest pla de coordenades. Determina dos **semiespais**: el dels punts (x, y, z), per als quals $z \geq 0$, i el dels punts (x, y, z), per als quals $z \leq 0$.

Sovint és còmode identificar el pla bidimensional amb el pla $z = 0$, cosa que correspon a una immersió del pla 2D xy en l'espai tridimensional, que assigna "altura" 0 a tots els punts.

Els plans paral·lels al de coordenades xy són els d'equació $z = c$.

2) El pla de coordenades xz és el pla determinat pels eixos Ox, Oz. És el conjunt dels punts de la forma $(x, 0, z)$, amb x, z arbitraris. Es caracteritza per la condició $y = 0$, equació del pla. És un dels plans de coordenades verticals. L'eix de coordenades Oy és perpendicular a aquest pla. Determina dos semiespais: el dels punts per als quals $y \geq 0$, i el corresponent a la propietat $y \leq 0$.

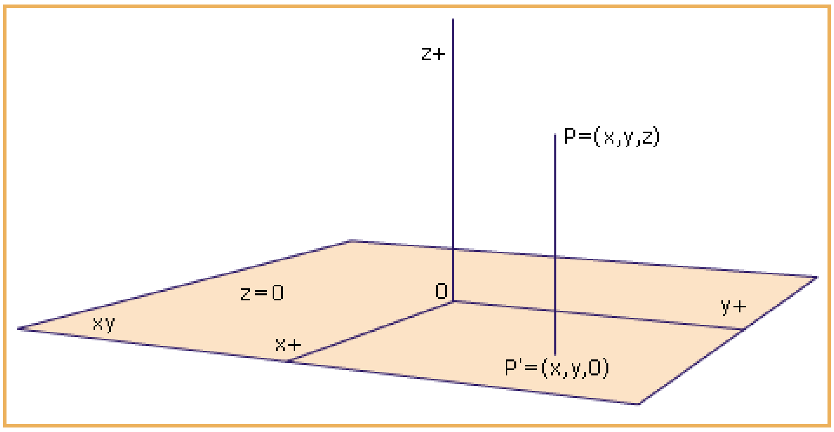
Els plans paral·lels al de coordenades xy són els d'equació $y = b$.

3) El pla de coordenades yz és el pla determinat pels eixos Oy, Oz. És el conjunt dels punts $(0, y, z)$, amb y, z arbitraris. Es caracteritza per la condició $x = 0$, que és l'equació d'aquest pla. És un dels plans de coordenades verticals. L'eix de coordenades Ox és perpendicular a aquest pla. Determina dos semiespais: el dels punts per als quals $x \geq 0$, i el dels punts per als quals es compleix que $x \leq 0$.

Els plans paral·lels al de coordenades yz són els d'equació $x = a$.

2.2.1. Projecció ortogonal sobre els plans de coordenades

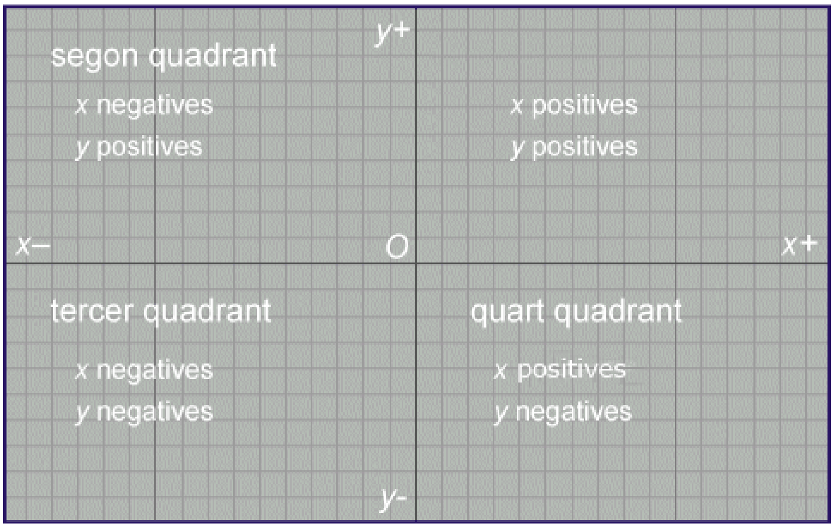
Donat un punt P, la projecció ortogonal sobre un pla de coordenades és la intersecció del pla amb la recta que passa per P i que és perpendicular a aquest pla (de la mateixa manera, és paral·lel a l'eix de coordenades perpendicular al pla de projecció).

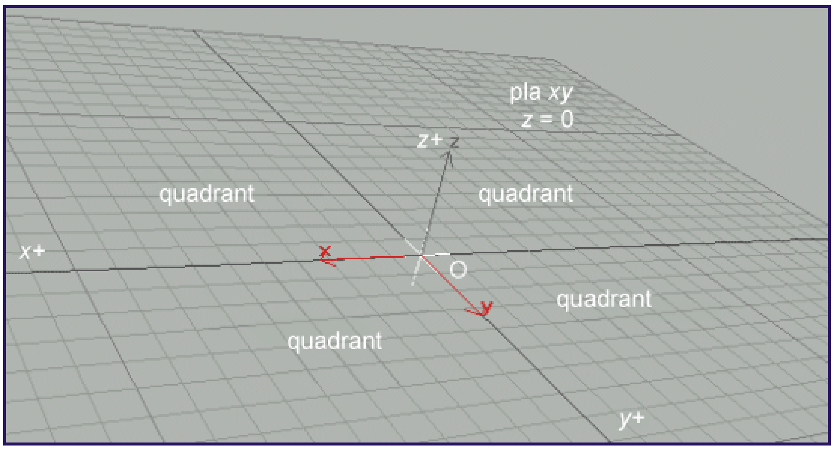


La projecció ortogonal de $P = (x, y, z)$ sobre el pla xy és $P' = (x, y, 0)$; sobre el pla yz, $P' = (0, y, z)$; sobre el pla xz, $P''' = (x, 0, z)$.

Quadrants

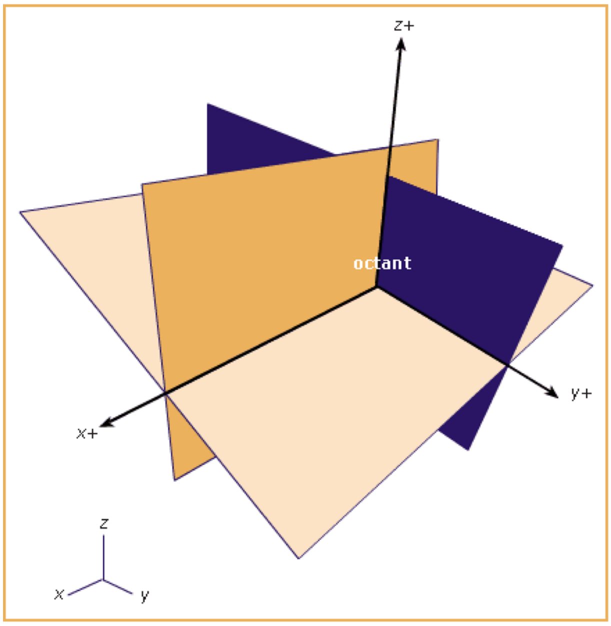
Són porcions del pla bidimensional, definides segons l'esquema següent. Atenent el criteri del signe de les coordenades, també es pot parlar de quadrants sobre els plans de coordenades de l'espai tridimensional.





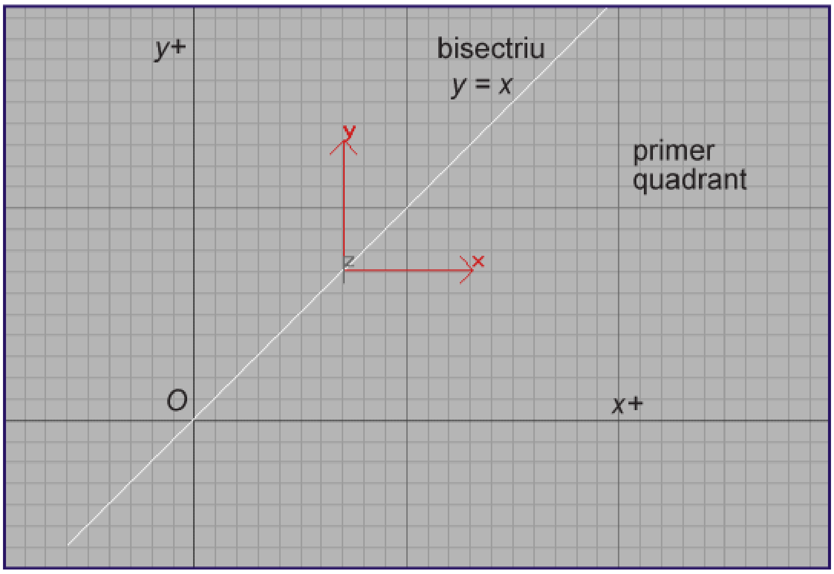
Octants

Són porcions de l'espai delimitades pels plans de coordenades. Per exemple, el conjunt dels punts (x, y, z) de coordenades positives és un octant.



Rectes especials

Una de les rectes que considerem és la **bisectriu** *r* del primer-tercer quadrant del pla bidimensional. La recta forma angles iguals, de 45 graus, amb els semieixos de coordenades $x+$, $y+$. La seva equació és $y = x$. Els seus punts són els de la forma (x, x). Un vector directriu és $(1, 1)$.



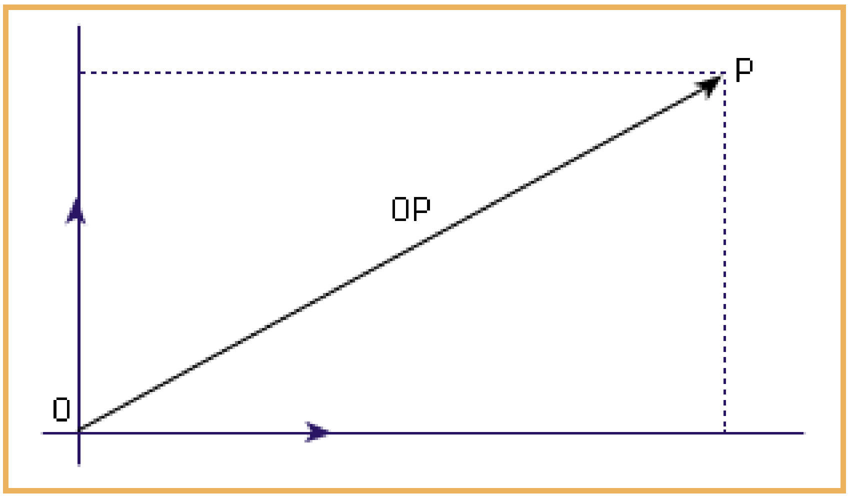
La bisectriu del segon-quart quadrant és la recta $y = -x$. Són els punts de la forma $(x, -x)$. Un vector directriu és $(1, -1)$.

En el cas tridimensional podem considerar la bisectriu del quadrant de les *x*, *y* positives del pla $z = 0$. Els seus punts són els de la forma $(x, x, 0)$. Un vector directriu és (1, 1, 0). És la recta del pla *xy*, que forma angles de 45 graus amb els semieixos *x*+, *y*+.

Les bisectrius es poden definir anàlogament per als plans de coordenades verticals.

2.2.2. Vector de posició d'un punt

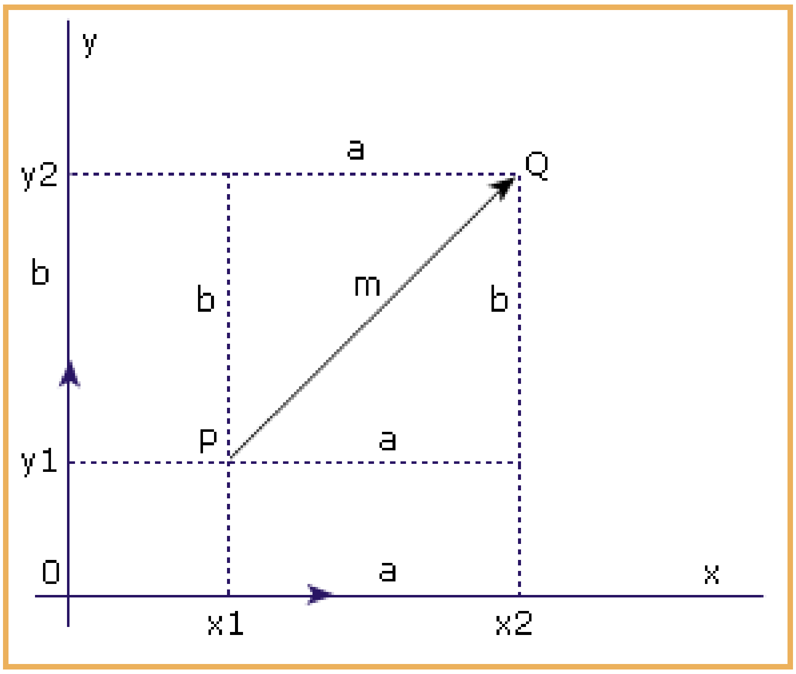
Fixat un sistema de coordenades *S*, amb origen *O*, donat un punt *P*, es defineix el **vector de posició** del punt *P* com el vector *OP*. També s'indica per $\vec{p}$.



En general, els vectors d'un espai vectorial es consideren lliures, "lliscants paral·lelament a si mateixos". No passa així en el cas dels vectors de posició de punts: aquests vectors es consideren fixos.

Identifiquem un punt *P* amb el vector de posició corresponent $OP = \vec{P}$, en un sistema de coordenades. Aquesta identificació permet tractar en termes vectorials tota classe de problemes geomètrics sense haver de recórrer a les coordenades. En particular, podem fer operacions algebraiques amb punts (diferència, suma, etc.).

Donats dos punts, *A*, *B*, considerem els vectors de posició respectius $\vec{A}, \vec{B}$. Es defineix el vector *AB*, determinat pels punts *A*, *B* en l'ordre donat, com a $AB = \vec{B} - \vec{A}$. Si $A = (2, 3, 4)$, $B = (-1, 0, 1)$, és $AB = B - A = (-1, 0, 1) - (2, 3, 4) = (-3, -3, -3)$. I $BA = A - B = -AB = (3, 3, 3)$. L'esquema següent incorpora detalls sobre això.



Vegem en la secció següent un primer exemple molt important, el de l'expressió paramètrica o parametrització d'un segment i d'una recta.

2.2.3. Segments i rectes: parametrització

Un dels objectes més simples és el segment o la recta. Una de les trajectòries més simples per a una animació és la trajectòria rectilínia, al llarg d'una recta, limitadament a un segment.

Un dels aspectes que hem de tenir en compte és el sentit de recorregut sobre un segment o una recta. Si, per exemple, un segment és determinat pels punts A, B, és diferent recórrer-lo de A a B que de B a A, encara que en tots dos casos el conjunt dels punts és el mateix.

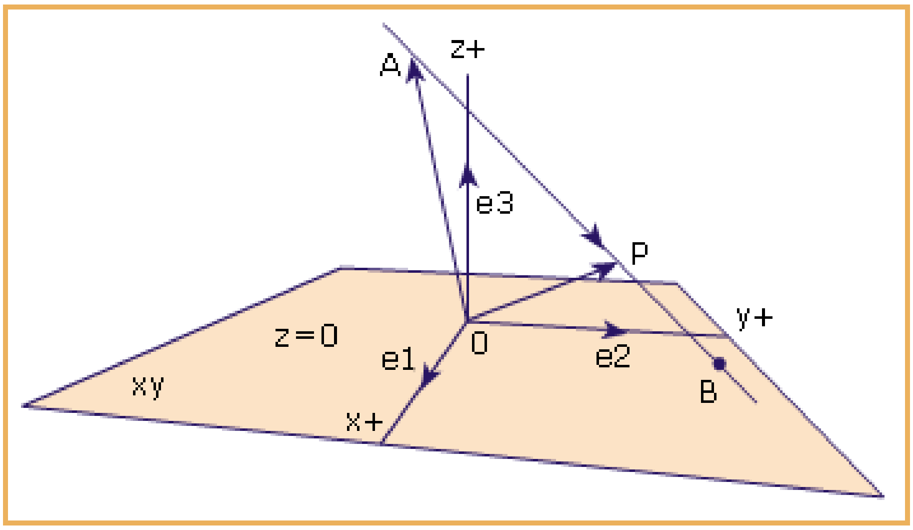
Considereu l'esquema següent del segment AB, que volem recórrer de A a B, i en el qual P és un punt intermedi del segment. Un vector directriu de la recta AB és, entre infinites possibilitats alternatives, justament el vector $w = AB = B - A$, vector no nul, que orienta la recta AB de A a B. Qualsevol vector de la mateixa direcció es pot escriure com a múltiple escalar de $w = AB$, és a dir, de la forma $tw = tAB = t\,(B - A)$, per a un escalar t adequat.

Identificant els punts amb els seus vectors de posició, fixeu-vos que tenim:

$$\vec{P} = OP = OA + AP = \vec{A} + AP = \vec{A} + t(AB) = \vec{A} + t(\vec{B} - \vec{A})$$

Sovint prescindim de la notació vectorial i escrivim:

$$P = A + t\,(B - A)$$



Ara ens fixem en l'escalar t. Observeu que com que varia t s'obtenen punts de la recta que passa pels punts A, B. Si es vol explicitar la dependència respecte a t, s'ha d'indicar amb l'expressió següent:

$$P(t) = A + t(B - A)$$

L'expressió anterior permet obtenir els punts de la recta AB segons el paràmetre t. És una expressió paramètrica d'aquesta recta. Variant t en el conjunt de tots els nombres reals s'obtenen tots els punts de la recta.

Aquest tipus d'expressions, en les quals s'obtenen els punts de l'objecte (corbes, superfícies) segons un paràmetre que varia, són una **parametrització** de l'objecte. Tota parametrització implica una elecció del paràmetre, una fórmula que permet obtenir els punts de l'objecte segons el paràmetre i, finalment, una explicitació del domini de variació del paràmetre.

Estudiem el cas del segment d'extrems A, B. Si $t = 0$, és $P(0) = A + t(B - A) = A$, un dels extrems, el primer segons el sentit de recorregut d'aquest extrem (que tradueix l'ordre segons el qual es generen els punts). Si $t = 1$, és $P(1) = A + (B - A) = B$, l'extrem final. Per als valors intermedis $0 \leq t \leq 1$ s'obtenen els punts de AB, de A a B.

Per tant, una parametrització possible del segment AB, recorregut de A a B és aquest:

$$P(t) = A + t(B - A), 0 \leq t \leq 1$$

Aquestes fórmules paramètriques són vàlides en qualsevol dimensió. La diferència és quan es desglossa per coordenades.

Es poden obtenir alguns punts especials. Per exemple, el punt mitjà del segment AB s'obté a partir de la parametrització anterior agafant $t = 1/2$, és a dir:

$$M = P\left(\frac{1}{2}\right) = A + \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}(A + B)$$

En el cas de la recta que passa pel punt A i té vector directriu w, una parametrització possible és aquesta:

$$P(t) = A + tw \; t \in R$$

Restringint la variació de t obtenim parts de la recta. Per exemple, si $P(t) = A + tw$, $t \geq 0$, llavors s'obté una semirecta que té com a origen el punt A.

2.3. Coordenades polars

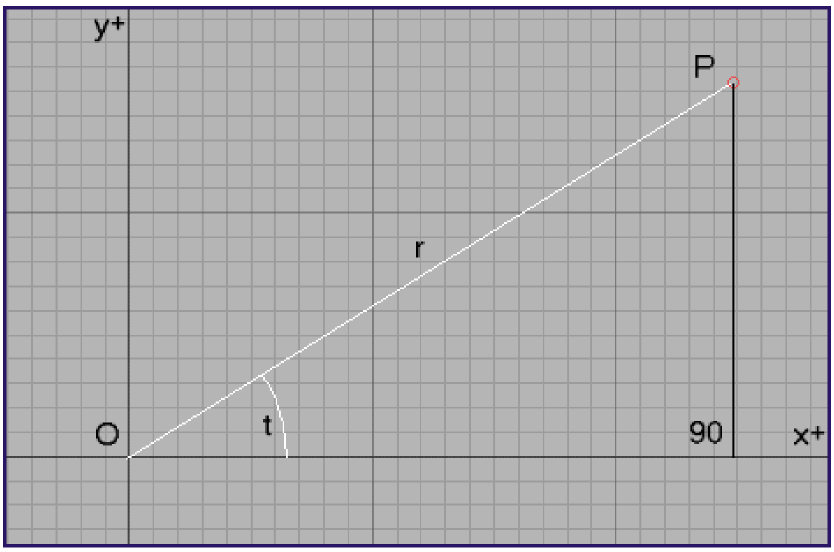
Hi ha altres mitjans possibles per a expressar la posició d'un punt del pla, a més de les coordenades cartesianes. Un d'aquests mitjans és el de les **coordenades polars** del pla.

Tenim el sistema de coordenades cartesianes habituals del pla, amb origen O i els eixos de coordenades Ox, Oy, perpendiculars. Els eixos de coordenades estan orientats, amb la qual cosa tenim els semieixos $x+$ i $y+$.

P és un punt diferent de l'origen de coordenades. La seva posició queda definida i dóna els elements següents:

1) La distància r de P a O.

2) L'angle t que formen OP i $x+$, agafant el semieix $x+$ com a origen d'angles, els quals es mesuren en sentit antihorari. Aquest angle és l'**angle polar** de P.



Les coordenades polars de P són el parell ordenat (r, t).

Va bé saber que hi ha aquesta possibilitat, tenint en compte que certes corbes, que es poden utilitzar com a trajectòries d'animació, s'expressen de manera natural en coordenades polars, o com a mínim és com s'expressen clàssicament. Per exemple, l'espiral d'Arquímedes s'expressa en coordenades polars com a $r = at$.

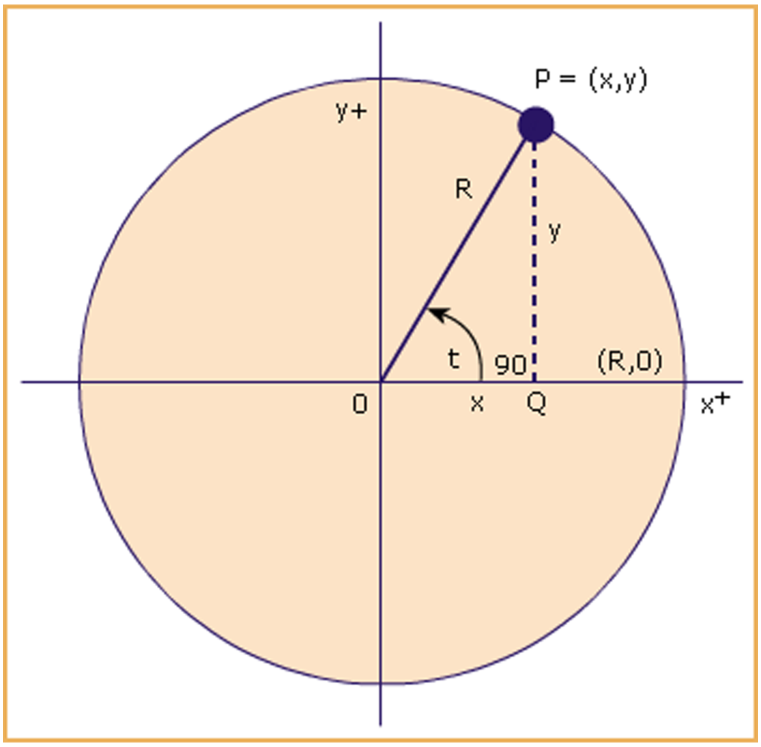
2.3.1. Conversió de coordenades polars a coordenades cartesianes

És fàcil obtenir les coordenades cartesianes d'un punt les coordenades polars del qual coneixem, ja que és un simple exercici de trigonometria:

$$x = r \cos t,\ y = r \sin t$$

2.3.2. Parametrització de la circumferència i de l'esfera

Un exemple fonamental és el de la parametrització de la circumferència, que podem derivar de les fórmules de conversió de coordenades polars a cartesianes.



Considerem el cas més simple, en el pla bidimensional, de la circumferència de centre $C = (0, 0)$ i de radi R. Triem com a paràmetre l'angle polar t del punt P, punt genèric de la circumferència.

Una parametrització derivada d'aquest esquema és aquesta:

$$P(t) = (R\cos t, R\sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

Desglossada per coordenades, P(t) = (x(t), y(t)), x(t) = Rcost, y(t) = Rsint.

A partir d'aquesta parametrització bàsica es poden obtenir parametritzacions de circumferències de centre diferent de l'origen. Si *C* = (*a, b*) és el centre de la circumferència, una parametrització possible és la següent:

$$P(t) = (a + R\cos t, b + R\sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

Una altra via de generalització és per a formular parametritzacions de circumferències sobre els plans de coordenades en l'espai tridimensional, o paral·lels a aquests plans.

Considerem la circumferència de radi *R*, de centre *O* = (0, 0, 0), continguda en el pla de coordenades *xy*, és a dir, *z* = 0. Triem l'angle polar *t* del pla *xy*, agafant com a origen d'angles el semieix *x*+, que es mesura de manera antihorària mirant des de *z*+. Així, la parametrització derivada és la següent:

$$P(t) = (R\cos t, R\sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi$$

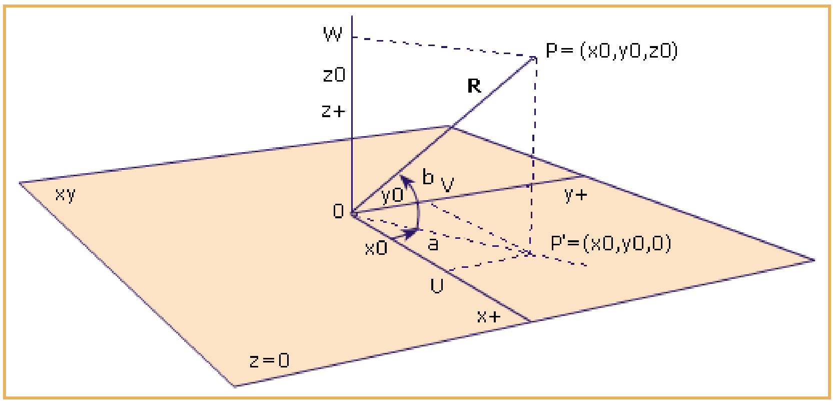
Si el centre és *C* = (*a*, *b*, 0), tenim:

$$P(t) = (a + R\cos t, b + R\sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi$$

Com a exemple, una parametrització de la circumferència de centre l'origen de coordenades, de radi *R*, continguda en el pla vertical de coordenades *yz*, és la següent:

$$P(t) = (0, R\cos t, R\sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

- **Parametrització de l'esfera**
  Considerem l'esquema següent. Resolem l'exercici d'expressar les coordenades de *P* segons *R*, distància de *P* a l'origen *O*, i dels angles *a* (longitud, segons el símil geogràfic) i *b* (latitud).



És un exercici de trigonometria, en el qual es consideren els triangles rectangles *OPP', OUP'*. En aquest esquema, *P'* és la projecció ortogonal de *P* sobre el pla *xy*. El punt *o* és la projecció ortogonal de *P'* sobre *Ox*.

Així, tenim:

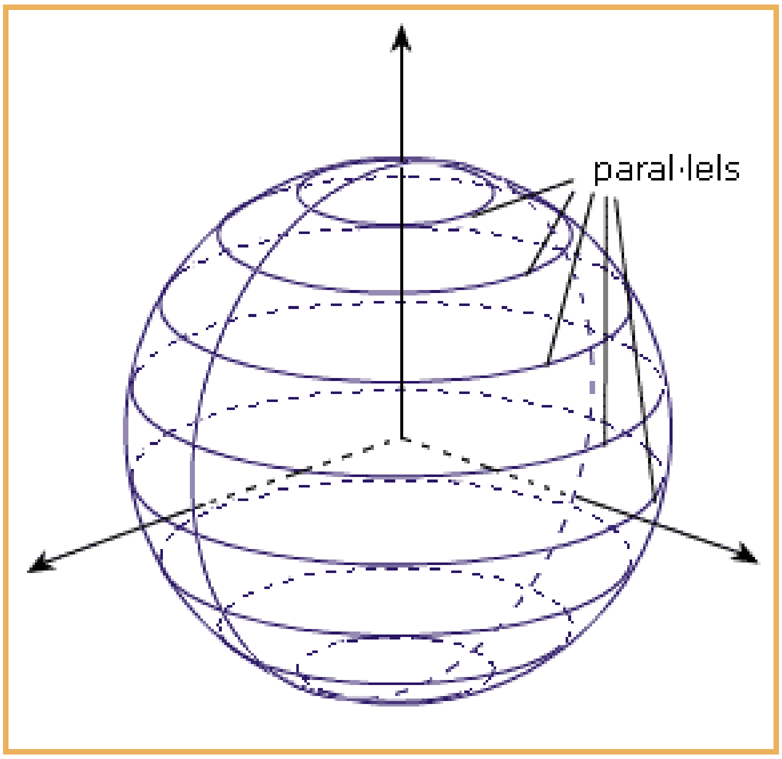
$$x0 = Rcosb\ cos\ a,\ y0 = Rcos\ b\ sin\ a,\ z0 = Rsin\ b$$

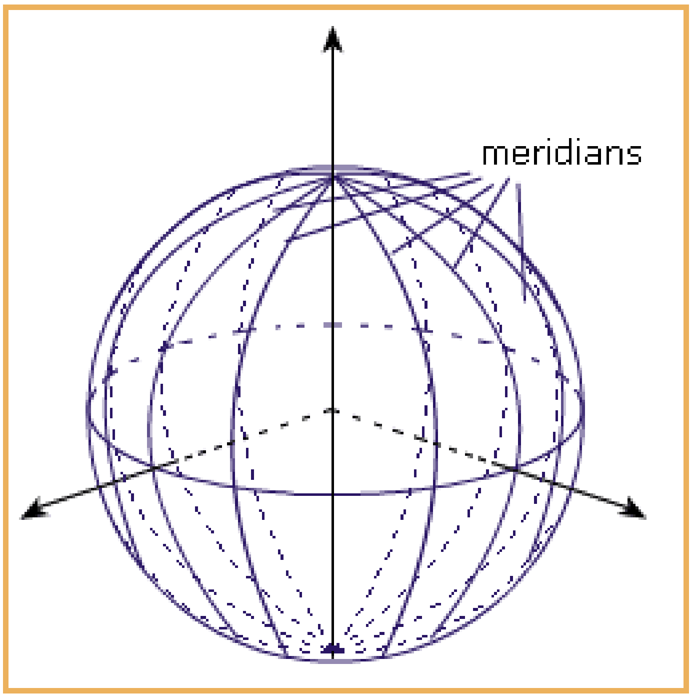
Vegem com podem aplicar aquest desenvolupament per a obtenir una parametrització de l'esfera. Considerem l'esfera de centre $O = (0, 0, 0)$ i de radi R, en què $P = (x, y, z)$ és un punt genèric de l'esfera. Triem com a paràmetres per a descriure la superfície els angles *a, b* de l'esquema, segons els quals expressem:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(a,b) & = & R\cos b\cos a \\ y(a,b) & = & R\cos b siba \\ z(a,b) & = & R\sin b \end{array}\right\},0 \le a \le 2\pi; -\frac{\pi}{2} \le b \le \frac{\pi}{2}$$

Aquest exemple és un primer exemple de parametrització o descripció paramètrica d'una superfície.

Fixeu-vos que és fàcil descriure corbes importants sobre l'esfera, com són els paral·lels i els meridians. Els meridians són les circumferències de l'esfera (suposem que l'origen és el seu centre) que corresponen a *a* constant. Els paral·lels són circumferències que corresponen a *b* constant.

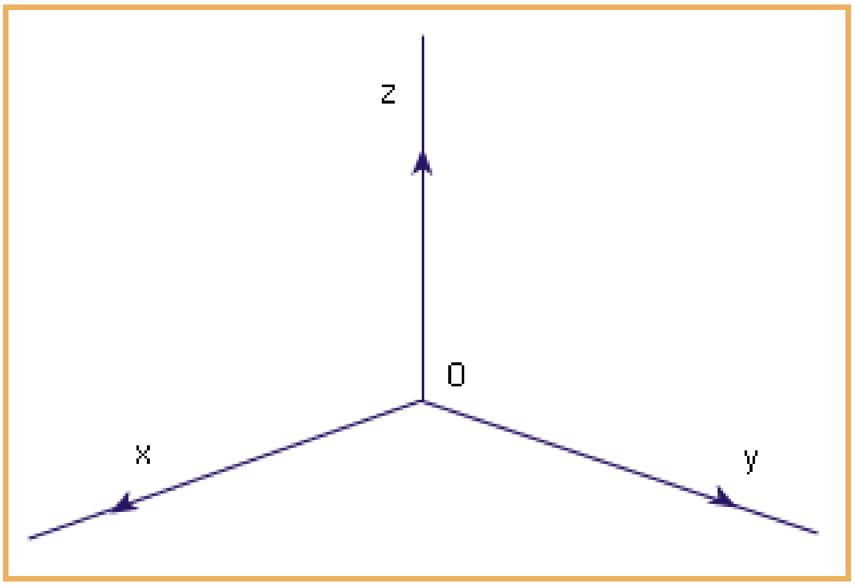




2.4. Orientació

Un concepte important és el de l'orientació de bases (i, per tant, de sistemes de coordenades), propietat global relacionada amb la base de l'espai vectorial. El concepte precís correspon a definir una mateixa orientació per part de dues bases. No obstant això, no entrarem en tecnicismes.

El sistema habitual, que s'indica a continuació, és el sistema que considerem directe pel que fa a l'orientació.

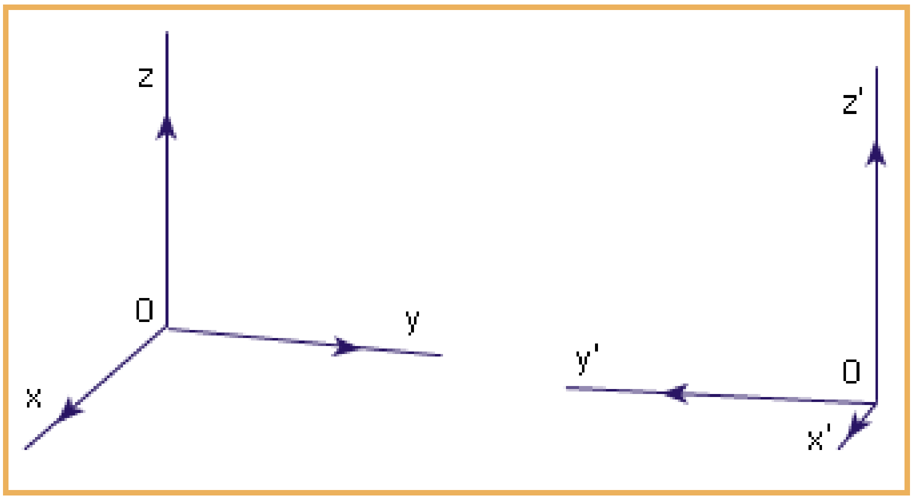


Hi ha dues orientacions possibles; una s'escull arbitràriament com a directa o positiva. Aquí presentem una versió intuïtiva en el cas de les coordenades cartesianes, de les quals tractarem a continuació. Intuïtivament, el concepte està relacionat amb les **orientacions dels eixos individuals**, en la seva **ordenació**, i en la manera com això produeix una **orientació global** del sistema d'eixos, a causa de les interrelacions mútues.

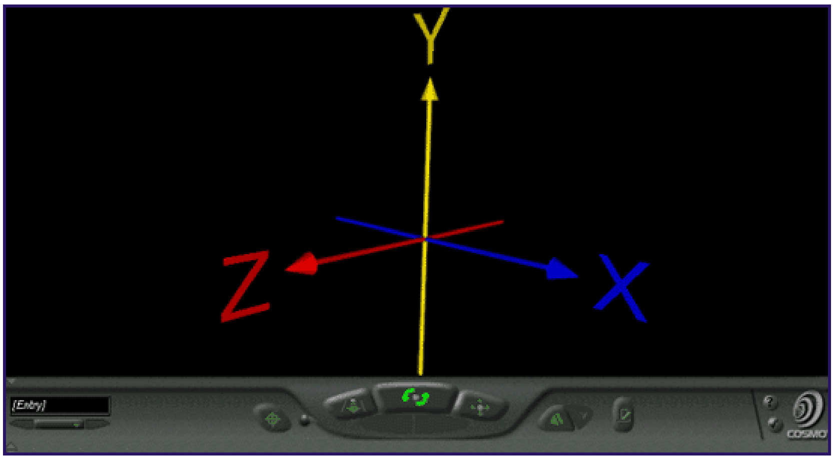
Intuïtivament, la descripció següent correspon a l'orientació positiva del sistema de coordenades anterior i d'altres de la mateixa orientació: l'observador situat sobre *z*+ (tercer eix de coordenades positiu), que "mira" al pla *xy* (determinat pels dos primers eixos de coordenades), veu de manera **antihorària** sobre *xy* la rotació de 90 graus que transforma el primer eix de coordenades positiu *x*+ sobre el segon eix de coordenades positiu *y*+ pel camí més curt.

El criteri anterior ens permet reconèixer immediatament si un sistema de coordenades és de la mateixa orientació que l'anterior.

Es pot utilitzar el determinant per a saber si una base determina la mateixa orientació que l'habitual. Una base u_1,u_2,u_3 té la mateixa orientació que la base ordinària si $\det(u_1,u_2,u_3) > 0$ (anàlogament en dimensió 2). Es pot observar fàcilment que les bases corresponents als sistemes següents de coordenades tenen una orientació diferent.



El sistema universal absolut de VRML també té la mateixa orientació que l'habitual.


Y
Z
X
[Entry]

3. Alguns objectes geomètrics

3.1. Rectes

Una recta és determinada per un punt pel qual passa i per la seva direcció, donada per un vector no nul, que es diu *vector directriu*.

Així, podem descriure la recta en forma paramètrica, és a dir, expressar la posició dels seus punts en termes d'un paràmetre. Si passa per A i té vector directriu w, tenim:

$$P(t)A + tw; -\infty < t < \infty$$

Fixeu-vos que el vector directriu orienta automàticament la recta, amb la qual cosa de l'expressió anterior en resulta un sentit d'avanç (i no al contrari) si t agafa valors creixents. En la mesura en què es planteja vectorialment, la parametrització anterior és l'*equació parametricovectorial de la recta*. Si descrivim la parametrització amb coordenades, obtenim les dites *equacions paramètriques escalars*.

En el cas bidimensional, si suposem que la recta passa pel punt $A = (a_1,a_2)$ i té vector directriu $W = (w_1,w_2)$, podem descriure un punt de la recta en terme de coordenades, la qual cosa dóna lloc a les equacions següents:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & a_1 + tw_1 \\ y(t) & = & a_2 + tw_2 \end{array}\right\}, t \in R$$

En el cas tridimensional, si suposem que passa pel punt $A = (a_1,a_2,a_3)$ i té vector directriu $W = (w_1,w_2,w_3)$, podem descriure un punt de la recta en termes de coordenades, la qual cosa dóna lloc a les equacions següents:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & a_1 + tw_1 \\ y(t) & = & a_2 + tw_2 \\ z(t) & = & a_3 + tw_3 \end{array}\right\}, t \in R$$

Segons una altra manera alternativa, una recta és determinada per dos punts. En aquest cas, si els punts són A,B, podem passar a la manera descrita inicialment i considerar-la com la recta que passa pel punt A i té vector directriu $w = B - A$. També es poden considerar altres alternatives. La parametrització corresponent és aquesta:

$$P(t) = A + t(B - A); t \in R$$

3.2. Plans

Hi ha diverses maneres d'expressar els punts d'un pla.

Equació implícita: $ax + by + cz + d = 0$.

Equació paramètrica:

Un pla es pot determinar de diferents maneres. Un pla queda determinat per un punt pel qual passa i dues direccions sobre el pla (és a dir, dos vectors no nuls, linealment independents, la qual cosa vol dir que determinen direccions diferents, no coincidents). Si A és el punt pel qual passa el pla, i u,v són vectors directrius del pla, una parametrització possible (*equació parametricovectorial*) és la següent:

$$P(r, s) = A + ru + sv; r, s \in R$$

Passant a coordenades, si:

$$A = (a_1, a_2, a_3), u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$$

tenim:

$$\left.\begin{aligned} x(r, s) &= a_1 + ru_1 + sv_1 \\ y(r, s) &= a_2 + ru_2 + sv_2 \\ z(r, s) &= a_3 + ru_3 + sv_3 \end{aligned}\right\}$$

Una altra manera de determinar un pla és amb tres punts no alineats. En aquest cas, si A,B,C són els punts no alineats, podem passar immediatament a la manera parametricovectorial que hem vist abans: es pot considerar el pla com el pla que passa per un dels punts, per exemple el punt A, i té vectors de direcció $u = B - A$, $v = C - A$, linealment independents perquè els punts no estan alineats. Per tant, podem escriure la parametrització següent:

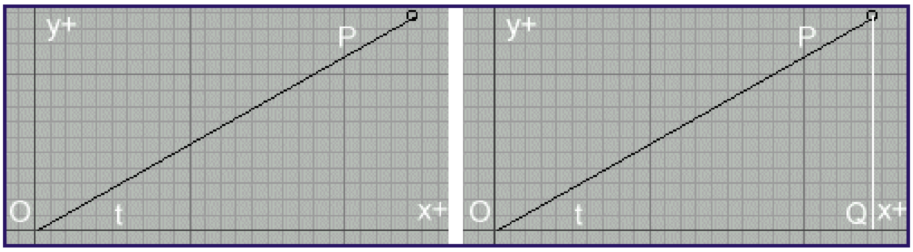
$$P(r, s) = A + r(B - A) + s(C - A); r, s \in R$$

Activitats

Exercicis

Exercici 1

Considereu el punt P del pla bidimensional. Suposem que dista 3 unitats de l'origen de coordenades i que l'angle que forma l'eix $x+$ amb OP és de 30 graus. Obteniu les coordenades de P



Resposta

És un problema de trigonometria. Projectem el punt $P = (x, y)$ ortogonalment sobre l'eix Ox. La projecció és Q. Considerem el triangle rectangle OPQ. Llavors tenim:

$$x = OQ = OP\cos t = 3\cos 30 = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = PQ = OP\sin t = \sin 30 = 3\frac{1}{2}$$

Exercici 2

Calculeu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Resposta

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x+4y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+5 \\ -x+4y+6 \end{pmatrix}$$

Exercici 3

Expresseu en termes conjuntistes el semiplà dels punts de coordenades i negatives en el pla bidimensional.

Resposta

$$SY^{-} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y \leq 0\}$$

Problemes

Problema 1

Un punt mòbil és inicialment a $A = (4, 6, 3)$. Es desplaça paral·lelament a l'eix de coordenades, fins a interceptar el pla $y = -2$. Quin és el punt d'intercepció?

Resolució:

Es pot desplaçar segons la semirecta d'extrem A, orientada per $w = (0, 1, 0)$, paral·lela a l'eix de coordenades Oy. En aquest cas, el punt s'allunya del pla $y = -2$ i, per tant, no hi ha intersecció. En cas contrari, si la trajectòria és orientada per $u = (0, -1, 0)$, hi ha intersecció efectiva de la semirecta amb el pla $y = -2$. El punt $A' = (x', y', z')$ d'intersecció també és la projecció ortogonal de A sobre el pla $y = -2$. Les coordenades x', z' són les mateixes que les de A. La coordenada y' és la comuna a tots els punts del pla $y = -2$. La projecció és $A' = (4, -2, 3)$.

Problema 2

Escriviu una parametrització per a la trajectòria d'animació rectilínia que consisteix a recórrer el segment d'extrems $A = (1, 1, 1)$ i $B = (1, 0, 2)$, des de A cap a B.

Resolució:

De teoria general sabem que la parametrització corresponent és, seguint termes vectorials, $P(t) = A + t(B - A)$, en què $0 \le t \le 1$. En termes escalars, en resulta: $P(t) = A + t(B - A) = (1, 1, 1) + t((1, 0, 2) - (1, 1, 1)) = (1, 1, 1) + t(0, -1, 1) = (1, 1, 1) + (0, -t, t) = (1, 1-t, 1+t)$. Desglossat per coordenades:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 1 \\ y(t) &= 1 - t \\ z(t) &= 1 + t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 1$$

Problema 3

Considereu una trajectòria d'animació circular segons una circumferència C en el pla $z = 0$. La circumferència C és de radi R i el centre coincideix amb l'origen de coordenades. Suposeu que el mòbil comença el recorregut en l'eix Oy, en sentit antihorari vist des de $z+$. Escriviu una parametrització per a aquesta trajectòria.

Resolució:

Hi ha més d'una parametrització possible. Pel fet d'estar continguda en el pla $z = 0$, en resulta $z(t) = 0$. L'expressió de x, y es pot escriure de manera similar a la parametrització d'una circumferència de les mateixes característiques en el pla bidimensional. Agafem com a paràmetre l'angle polar t en el pla xy, amb origen d'angles en el semieix $x+$, i amb sentit antihorari, vist el pla xy des de $z+$.

Sense condicions addicionals, és $x(t) = R\cos t$, $y(t) = R\sin t$, $z(t) = 0$. Amb la condició de començar el recorregut en l'eix Oy, aquest fet s'ha de traduir en un desfasament angular de 90 graus, de manera que una parametrització possible és la següent:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= R\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ y(t) &= R\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ z(t) &= 0 \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

Problema 4

Donada la parametrització $P(t) = A + t(B - A)$, $0 \le t \le 1$, la trajectòria correspon a un recorregut:

1. Circular.

2. Rectilini de A a B.

3. Rectilini de B a A.

4. Del punt mig del segment AB a l'extrem B.

5. Cap dels anteriors.

Resolució:

2, rectilini de A a B.

Problema 5

Es considera la parametrització d'una trajectòria d'animació $P(t) = (2 + 3t, -1 + 2t, 4 - 4t)$, en què $0 \leq t \leq 1$. Descriviu el tipus de trajectòria, el començament i el final.

Resolució:

La reescrivim, separant les parts amb paràmetre de les que no en contenen: $P(t) = (2, -1, 4) + (3t, 2t, -4t) = (2, -1, 4) + t(3, 2, -4)$. Correspon a una trajectòria rectilínia, sobre la recta que passa pel punt $A = (2, -1, 4)$ i té vector directriu $w = (3, 2, -4)$. Algunes altres característiques concretes depenen del paràmetre i de la variació que té. Com que el paràmetre varia en un interval, l'interval [0, 1], la trajectòria recorreguda és un segment, d'extrem inicial $I = P(0) = A$ i d'extrem final $B = P(1) = (5, 1, 0)$. La trajectòria es recorre, doncs, de A a B.

Problema 6

Suposeu una esfera animada el centre de la qual descriu la trajectòria donada per:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 2 + 5\cos t \\ y(t) &= -2 \\ z(t) &= 3 + 5\sin t \end{aligned}\right\},\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

Descriviu com és el recorregut, incloent-hi el començament i el final.

Resolució:

La corba és plana, continguda en el pla $y = -2$, pla perpendicular a l'eix de coordenades y, o bé paral·lel al pla de coordenades xz que passa pel punt (0, –2, 0). Correspon a una circumferència de radi $R = 5$ i de centre $C = (2, -2, 3)$. Donada la variació del paràmetre, la circumferència es recorre completament, de manera que coincideixen el començament i el final de l'animació de translació. El començament és $I = (x(0), y(0), z(0)) = (7, -2, 3)$. Un darrer detall descriptiu correspon al sentit de gir, vist, per exemple, des del semieix $y+$: si tenim la circumferència (5 cost, 0, 5sint), el començament és a (5, 0, 0), punt del semieix $x+$; per a $t = 90°$, el punt corresponent és (0, 0, 5), punt del semieix $z+$. El comportament de la nostra trajectòria és del mateix tipus. Per tant, vist des de $y+$, el sentit de gir és horari.

Problema 7

Escriviu una parametrització de la circumferència continguda en el pla $x = 0$, el centre del qual és el punt $C = (0, d, 0)$, que passa per l'origen de coordenades.

Resolució:

Hi ha diverses parametritzacions possibles. En vista de la posició del centre, $C = (0, d, 0)$, el radi de la circumferència, atesa la condició d'haver de passar per l'origen de coordenades, és $R = d$. Podem escriure la parametrització següent:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= d + d\cos t \\ z(t) &= d\sin t \end{aligned}\right\},\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

Problema 8

Considereu un mòbil que fa una animació formada per dos trams. En el primer tram l'animació es dóna sobre una circumferència en el pla $z = 0$, el seu centre és l'origen de coordenades i el radi R. El començament de l'animació és a l'eix $x+$, i es fa de manera antihorària, vista des de $z+$, per a finalitzar, quan s'ha girat 60 graus, en el punt A. El segon tram és una animació rectilínia que comença a A i s'acaba a B, punt del semieix $z+$ que dista 10 unitats de l'origen de coordenades.

Resolució:

La parametrització demanada és $P(t) = A + t(B - A)$, con $0 \leq t \leq 1$. El problema és obtenir A, B:

Per la descripció s'escriu de seguida $B = (0, 0, 10)$. Per a obtenir A, n'hi ha prou de fer servir la parametrització usual de la circumferència: $C(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$, en què $t = 60°$, o per càlcul trigonomètric directe:

$$A = C(60) = (R \cos 60,\ R \sin 60,\ 0) = \left(R\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{R}{2}, 0\right)$$

Per tant,

$$P(t) = \left(R\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{R}{2}, 0\right) + t\left((0, 0, 10) - \left(R\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{R}{2}, 0\right)\right)$$

Problema 9

El centre d'un dodecaedre segueix una trajectòria donada per la parametrització:

$$\begin{cases} x(t) = 6 \\ y(t) = 3 + 4\cos t, 0 \le t \le 2\pi \\ z(t) - 3 + 4\sin t \end{cases}$$

Descriviu completament la trajectòria d'animació del dodecaedre.

Resolució:

Com que *x(t)* = 6 la trajectòria està continguda en el pla d'equació $x = 6$, perpendicular a l'eix *Ox*, passant pel punt (6, 0, 0). És un pla paral·lel al de coordenades *yz*. De la comparació amb les parametritzacions conegudes, en resulta que la trajectòria és una circumferència, de centre $C = (6, 3, -3)$, de radi $R = 4$. Es recorre completament, atesa la variació del paràmetre *t*, de manera que el començament i el final coincideixen. El punt d'inici correspon al valor $t = 0$ del paràmetre; per tant, és $I = (x(0), y(0), z(0)) = (6, 3 + 4\cos 0, -3 + 4\sin 0) = (6, 7, -3)$. Vista la trajectòria des del semiespai $x > 6$, es recorre en sentit antihorari (o, si es vol, de manera equivalent, des de $x+$, en què $x > 6$).

Problema 10

Parametritzeu la circumferència del pla $y = 4$, de radi $R = 5$ i centre $C = (3, 4, 2)$.

Resolució:

Tots els punts de la circumferència són en el pla $y = 4$, de manera que *y(t)* = 4. Una parametrització és la següent:

$$\begin{cases} x(t) = 3 + 5\cos t \\ y(t) = 4 \\ z(t) = 2 + 5\sin t \end{cases}$$

en què $0 \le t \le 2\pi$.

Problema 11

Parametritzeu la trajectòria d'un punt que recorre el paral·lel corresponent a la latitud de 45 graus de l'esfera de radi $R = 4$ i centre $C = (0, 0, 0)$. El començament del recorregut ha de ser el punt de longitud 0. El sentit de recorregut és lliure, entre els dos possibles que hi ha.

Resolució:

Considerem un punt $P = (x, y, z)$ del paral·lel, en què tots els seus punts són a latitud $L = 45°$. La longitud del punt *P* és *t*. Si *R* és la distància de *P* a l'origen *O*, podem escriure, per trigonometria elemental:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos L\cos t = 4\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t = 2\sqrt{2}\cos t \\ y(t) = R\cos L\sin t = 4\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t = 2\sqrt{2}\sin t \\ z(t) = R\sin L = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Falta indicar el domini de variació del paràmetre t: $0 \leq t \leq 2\pi$. Es fa una volta completa, amb començament en el punt $A = (R, 0, 0) = (4, 0, 0)$. Fixant-nos en la trajectòria des de $z+$, en què $z \geq R \sin L = 2\sqrt{2}$, aquesta trajectòria es recorre de manera antihorària.

Problema 12

Parametritzeu la circumferència del pla $x = 2$, de radi $R = 5$ i de centre $C = (2, 4, 3)$.

Resolució:

Hi ha diverses possibilitats, depenent d'on volem que comenci i com volem que es faci la rotació, és a dir, la generació dels punts de la corba. Vegem-ne una:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 2 \\ y(t) &= 4 + 5\cos t \\ z(t) &= 3 + 5\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Problema 13

Un cub fa una animació rectilínia de manera que el centre parteix del punt $A = (1, 1, 0)$ i segueix sobre la bisectriu del primer quadrant del pla xy, amb la qual cosa s'allunya de l'origen de coordenades. Escriviu una parametrització de la trajectòria.

Resolució:

El punt inicial de la trajectòria és sobre la bisectriu del primer quadrant del pla de coordenades horitzontal xy. En aquest problema la trajectòria no és limitada a un segment, sinó que partint de A pot seguir de manera indefinida. Necessitem, per tant, un vector directriu w de la recta trajectòria que l'orienti de manera que la parametrització $P(t) = A + tw$, $t \geq 0$ produeixi l'animació indicada en l'enunciat.

Hi ha moltes solucions possibles. Triem, per exemple, $w = (2, 2, 0)$ (o fins i tot $w = (1, 1, 0)$). No és correcte triar, per exemple, $w = (-1, -1, 0)$, ja que el moviment es produiria en sentit contrari al que es pretén.

Així, doncs, $P(t) = A + tw = (1, 1, 0) + t(2, 2, 0)$, $t \geq 0$.

Si la volem desenvolupar per a obtenir una parametrització en termes escalars:

$P(t) = (1, 1, 0) + t(2, 2, 0) = (1, 1, 0) + (2t, 2t, 0) = (1 + 2t, 1 + 2t, 0)$. Així,

$x(t) = 1 + 2t$, $y(t) = 1 + 2t$, $z(t) = 0$.

Problema 14

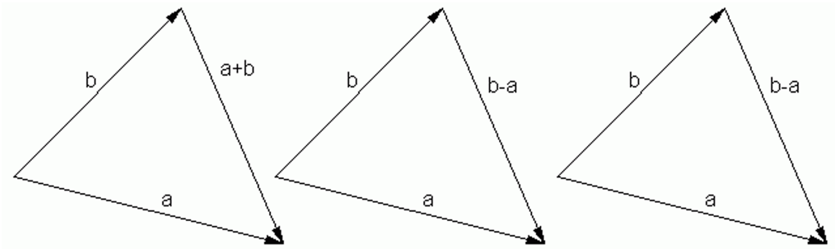
Un dodecaedre comença una animació rectilínia de manera que el centre parteix del punt $A = (2, 2, 0)$ i segueix sobre la bisectriu del primer-tercer quadrant del pla xy, cap al tercer quadrant de coordenades negatives $-xy-$. Escriviu una parametrització de la trajectòria.

Resolució:

El mòbil es desplaça al llarg d'una semirecta d'origen $A = (2, 2, 0)$, punt de la bisectriu del primer-tercer quadrant. Per tant, una parametrització possible és $P(t) = A + tw$, $t \geq 0$, en què w és vector directriu de la bisectriu indicada, a fi que l'orientació sigui la que es requereix. N'hi ha prou d'agafar $w = -(1, 1) = (-1, -1)$. La parametrització corresponent és $P(t) = (2, 2, 0) + t(-1, -1, 0) = (2 - t, 2 - t, 0)$. Desglossat per coordenades, $x(t) = 2 - t$, $y(t) = 2 - t$, $z(t) = 0$.

Exercicis d'autoavaluació

1. Indiqueu quina de les figures següents és correcta:



a) Dreta.
b) Esquerra.
c) Centre.
d) No es pot determinar.
e) Cap de les opcions anteriors.

2. El producte d'un escalar per un vector...

a) conserva la direcció.
b) no conserva la direcció.
c) sempre conserva l'orientació o el sentit.
d) Cap de les opcions anteriors.

3. Quin és el vector w si $(4,3) + 2w = (10,1)$?

a) $(2,-4)$
b) $(3,-1)$
c) $(-1,0)$
d) $(2,4)$
e) Cap de les opcions anteriors.

4. El vector $-3w$, en què w és no nul...

a) té de la mateixa direcció i sentit que w.
b) no té de la mateixa direcció que w.
c) té la mateixa direcció que w, però el sentit és oposat.
d) No es pot determinar ni la direcció ni el sentit en comparació de w.
e) Cap de les opcions anteriors.

5. Si un angle és de 63 graus, la mida en radiants és la següent:

a) $63(180/\pi)$
b) $63(\pi/180)$
c) $63(360/\pi)$
d) $180/(\pi 63)$

6. L'interval [2,3] de la recta és el conjunt dels valors numèrics...

a) compresos entre 2 i 3.
b) més petits que 2 i més grans que 3.
c) més petits que 3.
d) més grans que 2.
e) Cap de les opcions anteriors.

7. El vector $-(a,b)$ és el següent:

a) $(-a,-b)$
b) (a,b)
c) No té sentit.
d) No es pot determinar.
e) Cap dels opcions anteriors.

8. Una roda de bicicleta vertical de radi R gira sense patinar i produeix un desplaçament segons una recta del pla de coordenades horitzontal. El punt de la roda que al començament toca a terra és P. Suposem que P fa una rotació de 120 graus al voltant del centre de la roda (circumferència). Quina distància lineal s'ha recorregut?

a) 120R
b) 120 (π/180)R
c) 120(180/π)R
d) No es pot calcular.
e) Cap de les opcions anteriors.

9. Una roda de bicicleta vertical de radi *R* gira sense patinar i produeix un desplaçament segons una recta del pla de coordenades horitzontal. El punt de la roda que al començament toca a terra és *P*. Suposem que es recorre una distància lineal de 200 unitats. L'angle que ha girat *P* al voltant del centre de la circumferència (roda) és...

a) No es pot calcular.
b) 200/R radiants.
c) 200/*R* graus.
d) *R*/200 radiants.
e) Cap de les opcions anteriors.

10. En una rotació d'una roda respecte del seu centre, una rotació de p/4 radiants correspon a...

a) mitja volta.
b) un quart de volta.
c) un vuitè de volta.
d) una volta completa més un quart.
e) Cap de les opcions anteriors.

11. *A* és una matriu de *n* files i *m* columnes. *B* una matriu de *p* files i *q* columnes. El producte *AB* es pot fer...

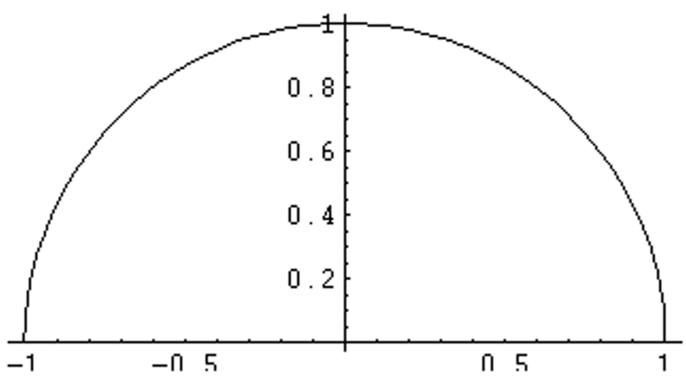
a) només si es pot calcular *BA*.
b) sempre.
c) només si $m = p$.
d) només si $n = q$.
e) Cap de les opcions anteriors.

12. Si escrivim 0≤t≤1, volem indicar...

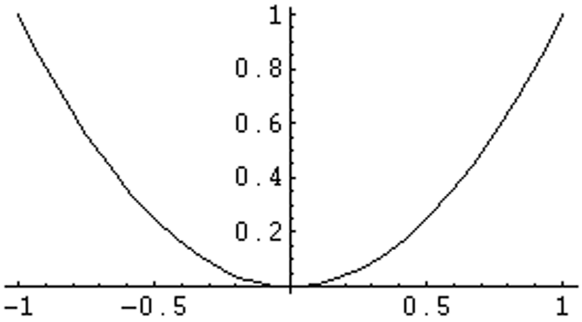
a) que *t* és un nombre comprès entre 0 i 1.
b) que *t* és el punt mitjà de l'interval.
c) que *t* és més gran que 1.
d) Cap de les opcions anteriors.

13. De les corbes següents, identifiqueu-ne una de sinusoïdal:

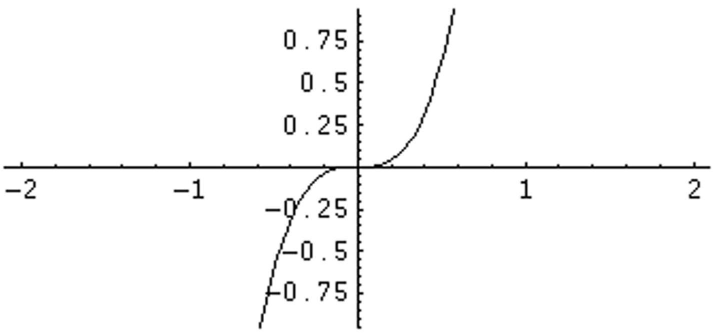
a)



b)



c)



d) Cap de les opcions anteriors.

14. Si considerem el recorregut de la circumferència de radi R i centre O segons l'expressió donada ($R\cos t$, $R\sin t$) en termes d'angle t, la figura es recorre en sentit...

a) horari.
b) antihorari.
c) No és determinat.
d) No es pot afirmar res, ja que depèn dels arcs.
e) Cap de les opcions anteriors.

15. Si expressem la circumferència de centre O i radi R mitjançant ($R\cos t$, $R\sin t$), en què t varia entre 0 i 2p, el recorregut sobre la circumferència...

a) comença en el punt (R,0).
b) comença sobre el semieix y+.
c) s'acaba en el semieix y–.
d) Cap de les opcions anteriors.

16. El producte de matrius *A(BC)*...

a) implica, de primer, calcular *BC* i, després, multiplicar per l'esquerra per *A*.
b) no es pot calcular.
c) implica, de primer, calcular *AB* i, després, multiplicar per la dreta per *C*.
d) Cap de les opcions anteriors.

17. El producte *DT*, amb $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$...

a) és *A*.
b) depèn de quina sigui la matriu *A*.
c) és 0.
d) depèn de la dimensió.
e) Cap de les opcions anteriors.

18. Si $\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, tenim:

a) $a = 1$, $b = 0$
b) $a = 0$, $b = 1$
c) $a = 2$, $b = 0$
d) $a = -1$, $b = 1$
e) Cap de les opcions anteriors.

19. El producte de matrius *AB*...

a) pot no ser igual que *BA*.
b) sempre és igual que *BA*.
c) no és mai igual que *BA*.
d) Cap de les opcions anteriors.

20.$\cos^2 a + \sin^2 a =$

a) 1
b) 0
c) Depèn de l'angle *a*.
d) No es pot afirmar res.
e) Cap de les anteriors.

21. El punt $(a,0,0)$, en què *a* és no nul, és un punt...

a) de l'eix *x*.
b) de l'eix *y*.
c) del pla $y = 7$.
d) del pla $z = -1$.
e) Cap de les opcions anteriors.

22. El punt $(0,b,0)$, en què *b* és no nul, pertany...

a) al pla de coordenades *xy*.
b) a la bisectriu del quadrant de *x,y* positives del pla $z = 0$.
c) al pla bisector $x = y$.
d) al pla $y = x$.
e) Cap de les opcions anteriors.

23. El punt (3,–5,7) és...

a) la projecció ortogonal del punt (3,–5,13) sobre el pla $z = -7$.
b) la projecció ortogonal del punt (3,–5,12) sobre el pla $z = 7$.
c) la projecció ortogonal del punt (3,5,12) sobre el pla $z = 7$.
d) la projecció ortogonal del punt (3,5,13) sobre el pla $z = -7$.
e) Cap de les opcions anteriors.

24. El punt (3,0,3)...

a) pertany a l'eix *x*.
b) pertany a la bisectriu d'un dels plans de coordenades verticals.
c) és de la bisectriu del quadrant de les coordenades *x,z* positives del pla *xz*.
d) és de l'eix *z*.
e) Cap de les opcions anteriors.

25. Tenim que $P = (a,b,c)$. La projecció ortogonal de *P* sobre el pla *xy* és (3,4,0). La projecció ortogonal sobre el pla *xz* és (3,0,6). El punt *P* és el següent:

a) (4,3,6)
b) (6,3,4)
c) (3,4,6)
d) (6,4,3)
e) Cap de les opcions anteriors.

26. L'equació $y = 6$ en l'espai tridimensional correspon...

a) a un punt.

b) a un pla.
c) a una recta.
d) No es pot determinar.
e) Cap de les opcions anteriors.

27. L'equació $y = x$ en l'espai tridimensional és l'equació...

a) d'una recta.
b) d'un pla.
c) de la bisectriu del primer quadrant del pla $z = 0$ de l'espai tridimensional.
d) No es pot determinar.
e) Cap de les opcions anteriors.

28. L'equació $y = -x$ correspon...

a) a una recta.
b) a un pla.
c) a un punt.
d) Depèn de la dimensió de l'espai en què es consideri.
e) Cap de les opcions anteriors.

29. El punt (0,0,3) pertany...

a) al pla de coordenades $z = 0$.
b) al pla $z = 3$.
c) al pla $z = -3$.
d) a l'eix de coordenades x.
e) Cap de les opcions anteriors.

30. Donat el punt $P = (4,5,0)$:

a) no hi ha cap punt que es projecti ortogonalment a $z = 0$ sobre P.
b) només hi ha un punt que es projecti ortogonalment a $z = 0$ sobre P.
c) hi ha infinits punts que es projecten ortogonalment a $z = 0$ sobre P.
d) és la projecció ortogonal sobre el pla xz del punt (4,5,–4).
e) Cap de les opcions anteriors.

31. Els punts del pla de coordenades xz són de la forma següent:

a) $(a,0,c)$
b) $(0,b,c)$
c) $(a,b,0)$
d) Cap de les opcions anteriors.

32. Els punts del pla paral·lel al pla de coordenades xy i que passa pel punt (2,3,4) són de la forma següent:

a) $(a,b,4)$
b) $(2,3,c)$
c) $(a,b,-4)$
d) (2,3,4)
e) Cap de les opcions anteriors.

33. El pla de coordenades xz és el següent:

a) $z = 0$
b) $x = y$
c) $x = z$
d) $x = 0$
e) Cap de les opcions anteriors.

34. El pla paral·lel al de coordenades xy, de z positives, que dista 3 unitats de l'origen és el següent:

a) $x = 3$
b) $z = 3$
c) $z = -3$
d) $y = 3$
e) Cap de les opcions anteriors.

35. L'origen d'un sistema de coordenades de l'espai tridimensional té, en aquest sistema, coordenades:

a) (–1,–1,–1)
b) Depèn del sistema.
c) (0,0,0)
d) No es pot determinar.
e) Cap de les opcions anteriors.

36. Donat el punt P = (3,4,5):

a) es projecta ortogonalment sobre el pla xy en el punt (3,4,5).
b) es projecta ortogonalment sobre el pla xy en el punt (3,–4,0).
c) es projecta ortogonalment sobre el pla xy en el punt (0,4,0).
d) Cap de les opcions anteriors.

37. La projecció ortogonal del punt $P = (a,b,c)$ sobre el pla de coordenades xz és la següent:

a) $(a,b,0)$
b) $(a,0,c)$
c) $(0,b,0)$
d) $(0,b,c)$
e) Cap de les opcions anteriors.

38. El segment d'extrems A,B, orientat de B a A, el dóna la parametrització següent:

a) $P(t)= A + t(B - A)$, $0 = t = 1$
b) $P(t) = B + t(B - A)$, $0 = t = 1$
c) $P(t) = (1 - t)A + tB$, $0 = t = 1$
d) Cap de les opcions anteriors.

39. El punt de l'eix z+ que dista 200 unitats de l'origen de coordenades és el següent:

a) (200,0,0)
b) (0,0,–200)
c) (0,0,200)
d) (200,200,200)
e) Cap de les opcions anteriors.

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. c

2. a

3. b

4. c

5. b

6. a

7. a

8. b

9. b

10. c

11. c

12. a

13. d

14. b

15. a

16. a

17. a

18. b

19. a

20. a

21. a

22. a

23. b

24. c

25. c

26. b

27. b

28. d

29. b

30. c

31. a

32. a

33. e

34. b

35. c

36. d

37. b

38. a

39. c