Simetria i disseny

Pere Cruells
Germán Sáez

PID_00150791

Universitat Oberta
de Catalunya

Índex

1. Aplicacions del pla

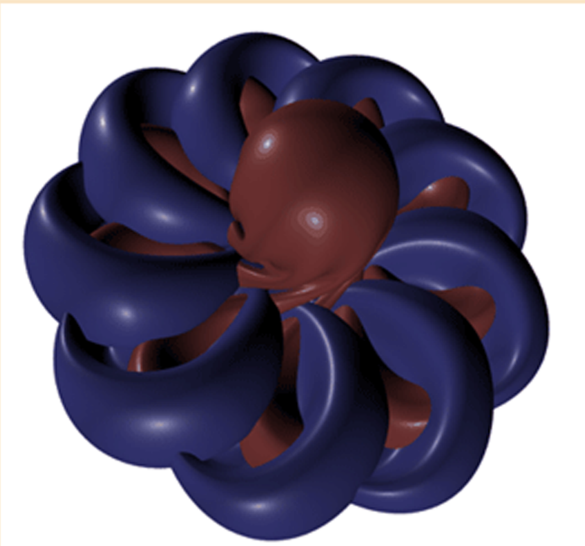
1.1. Introducció

El significat que es dóna a la paraula **simetria** en matemàtiques no és exactament el mateix que s'hi dóna en el llenguatge col·loquial.

En general, la gent entén que una figura és simètrica quan la seva meitat esquerra és un reflex de la meitat dreta, encara que la majoria de les persones associa algun tipus de simetria a les aspes d'un molí o d'un ventilador que, tanmateix, no compleixen aquesta regla. Malgrat això, la paraula *simetria* té un sentit més ampli en el llenguatge col·loquial que en matemàtiques: en matemàtiques només s'accepta la simetria quan és perfecta.

La simetria ha tingut un paper molt important en el disseny i en l'art al llarg de la història: als mosaics de l'època romana, en l'arquitectura àrab i hindú, a les rosasses de les esglésies catòliques o ortodoxes, a les rajoles d'un bany, etc. trobem diferents formes de simetria.

Quan percebem algun tipus de simetria en un objecte, això es deu al fet que hi apreciem una certa repetició harmoniosa.



Aquesta figura exemplifica una simetria basada en un patró repetit.

1.2. Tipus de simetria

Podem apreciar diferents formes de repetició, diferents tipus de simetria:

- Un patró repetit diverses vegades.
- Un patró repetit com si es reflectís en un mirall.
- Un patró repetit com si fossin les aspes d'un molí que se centren en un punt.

Qui no ha jugat mai amb un mirall?

Què veiem en mirar-nos en un mirall?

Per què les ambulàncies porten les lletres de la part davantera escrites simètricament?

Què ocorre quan ajuntem dos miralls en una mateixa cantonada formant un angle recte?

En aquest capítol ens dedicarem a estudiar diferents tipus de simetria i quines possibilitats ens ofereix en el disseny.

WEB

Recurs interactiu
accessible només al web.

Podem apreciar simetria en objectes molt variats: parets, mosaics, plats, tasses, cartells, targetes, etc. També en la naturalesa trobem aquestes mateixes simetries: una fila d'ànecs que neden, un reflex en aigües tranquil·les, els pètals d'una margarida, etc.

L'ús de la simetria en l'art i el disseny crida l'atenció del públic en crear efectes de gran bellesa: als logotips d'empreses, als símbols religiosos o de partits polítics es pot observar l'ús de la simetria amb aquesta finalitat.

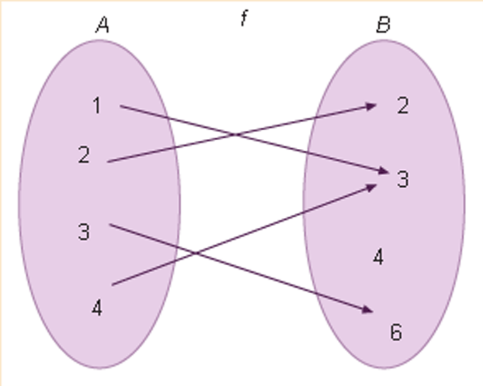
Molts artistes (pintors, escultors, arquitectes, etc.) han usat la simetria a la seva obra, l'han seguit o l'han trencat, sempre amb la intenció d'atreure l'atenció del públic, de concentrar l'atenció en algun punt.

1.3. Aplicacions del pla: simetria i gir

Abans de definir els conceptes de simetria, gir, etc., ens detindrem en el concepte d'**aplicació** i en la notació més freqüent per referir-nos-hi.

Donats dos conjunts A i B, denominarem aplicació f de A en B una forma d'assignar a cada element de A un element de B, i el denotarem com a $f\colon A \to B$.

Suposem que $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,4,6\}$ i l'aplicació definida per les assignacions:



Aplicació entre el conjunt A i el conjunt B

En aquest diagrama, les fletxes relacionen cada element de *A* amb el seu element corresponent o assignat en *B*.

Si per mitjà de l'aplicació *f* assignem a l'element *x* de *A* l'element *y* de *B*, diem que *y* és la imatge de *x* per l'aplicació *f* i ho escrivim així: $y = f(x)$. També es diu que *x* es transforma en *y*.

Podem descriure l'aplicació *f* enumerant les assignacions de la manera següent:

$f(1) = 3$, $f(2) = 2$, $f(3) = 6$, $f(4) = 3$.

Una aplicació sol ser determinada per la llista d'elements i les seves imatges corresponents, o per una regla o fórmula que permeti calcular la imatge de cada element. Aquesta última forma és la més utilitzada a causa de la seva brevetat; també és la que s'utilitza per a descriure les aplicacions que ens permetran expressar el concepte de simetria d'una manera més còmoda.

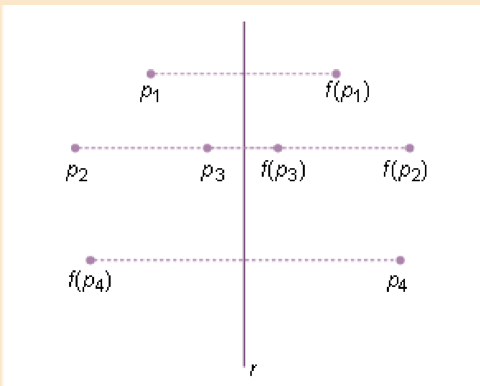
Suposem que *A* és el conjunt de tots els punts del pla. I que *B*, també, és el conjunt de tots els punts del pla. Fixem una recta en el pla que anomenarem *r* i considerem l'aplicació *f* definida per la regla següent:

$f(p)$ = punt simètric del punt *p* per la simetria respecte de la recta *r*

Dit d'una altra manera, la imatge d'un punt *p* és el punt que està situat simètricament a l'altre costat de la recta. És a dir, en la mateixa distància i en direcció perpendicular.

Així, obtenim:

Aplicació que assigna a cada punt del pla el seu simètric respecte a la recta r



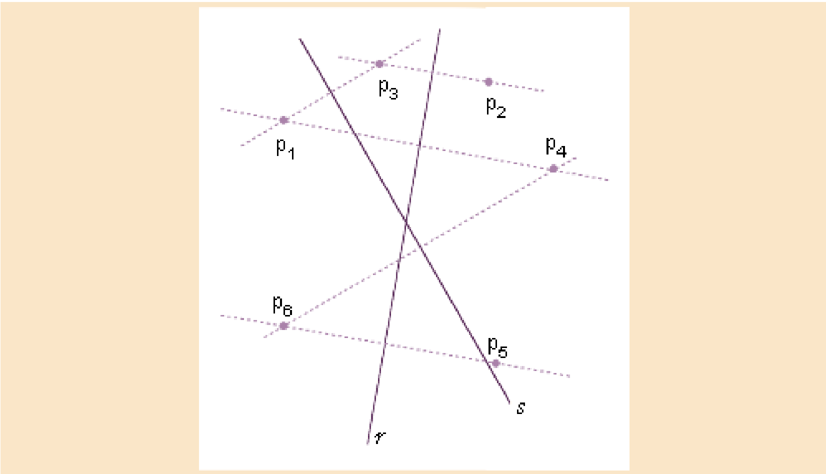
Aquesta aplicació la denominem **simetria axial d'eix *r*** o, simplement, *simetria determinada per la recta r*.

Els noms que se solen utilitzar per a les aplicacions són *f*, *g*, *h* etc. De vegades també s'utilitzen subíndexs. Per exemple, la simetria axial d'eix *r* se sol denotar mitjançant S_r.

Activitat

Exercici 1

Considerem les rectes r,s, les simetries axials S_r,S_s i els punts p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6 col·locats segons el dibuix:



a) Calculeu $S_r(p_1)$,$S_s(p_1)$,$S_r(p_2)$,$S_r(p_3)$
b) Calculeu $S_r(S_s(p_1))$,$S_s(S_r(p_1))$
c) De les igualtats següents, indiqueu quines són falses i quines són certes: $S_r(p_1) = p_4$,$S_r(p_3) = p_1$

Observant el dibuix $S_r(p_1) = p_4$, $S_s(p_1) = p_3$, $S_r(p_2) = p_3$, $S_r(p_3) = p_2$.

Calculem, en primer lloc, $S_s(p_1) = p_3$ i, per tant, $S_r(S_s(p_1)) = S_r(p_3) = p_2$. De la mateixa manera, calculem $S_r(p_1) = p_4$ i, per tant, $S_s(S_r(p_1)) = S_s(p_4) = p_6$.

La primera igualtat $S_r(p_1) = p_4$ és certa si observem el dibuix. La segona igualtat és falsa, ja que $S_r(p_3) = p_2$.

Exercici 2

a) Calculeu $S_s(p_6)$,$S_r(p_6)$,$S_r(p_5)$
b) Calculeu $S_r(S_r(p_3))$,$S_s(S_s(p_3))$,$S_s(S_r(p_3))$
c) De les igualtats següents, indiqueu quines són falses i quines són certes:
$S_s(p_1) = p_3$,$S_r(p_1) = p_3$,$S_r(p_3) = S_s(p_6)$

1.4. Aplicacions bijectives

D'entre les aplicacions destaquen les anomenades **aplicacions bijectives**, en les quals tot element del conjunt B és imatge d'un element de A, i de només un. A partir d'ara només considerarem aplicacions bijectives.

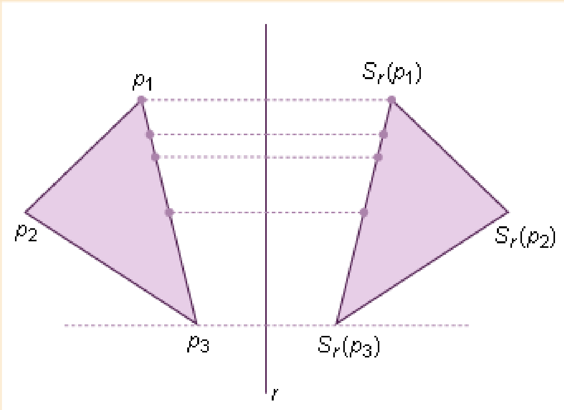
L'aplicació definida en el primer exemple de l'apartat "Aplicacions del pla: simetria i gir" no és bijectiu, ja que no verifica que tot element del conjunt B sigui imatge d'un element de A i de només un. Només és necessari fixar-se en l'element 3 de B que és imatge dels elements 1 i 4 del conjunt A. En el cas de l'aplicació definida en el segon exemple de l'apartat "Aplicacions del pla: simetria i gir", és a dir, una simetria respecte de la recta r, es tracta d'una aplicació bijectiva, ja que tot punt del pla és el simètric d'un sol punt a l'altre costat de la recta r.

1.5. Imatge

Amb una aplicació també podem calcular la imatge d'un subconjunt de *A* com la col·lecció de les imatges dels elements del subconjunt, i n'obtenim un altre de *B*. També es diu que l'aplicació transforma un subconjunt en la seva imatge. Sovint denominarem objecte o dibuix un subconjunt del pla o de l'espai.

En el cas d'una simetria, la imatge del subconjunt és l'anomenada **imatge reflectida**, ja que es pot entendre com la imatge especular que s'obté per un mirall situat en la recta *r*. Considerarem, per exemple, la imatge dels punts d'un triangle:

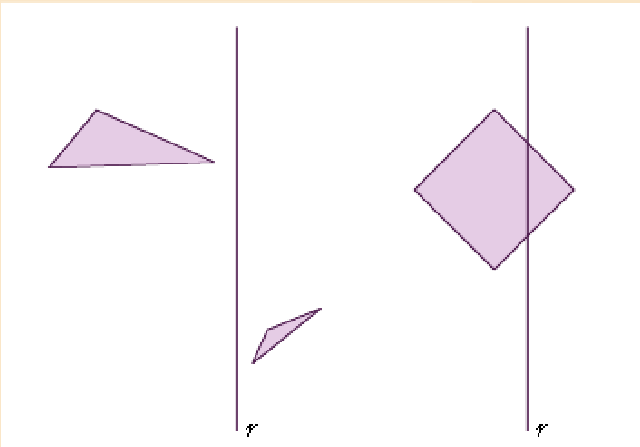
Simetria d'un triangle respecte a la recta *r*



Es tracta d'un nou triangle reflectit amb l'ajuda de la recta *r* com si es tractés d'un mirall. Un mètode fàcil per a obtenir la imatge reflectida és tenir el triangle i la recta dibuixats en un paper, doblegar el paper per la recta *r* i, a continuació, en una finestra a contraclaror, resseguir la imatge que es transparenta.

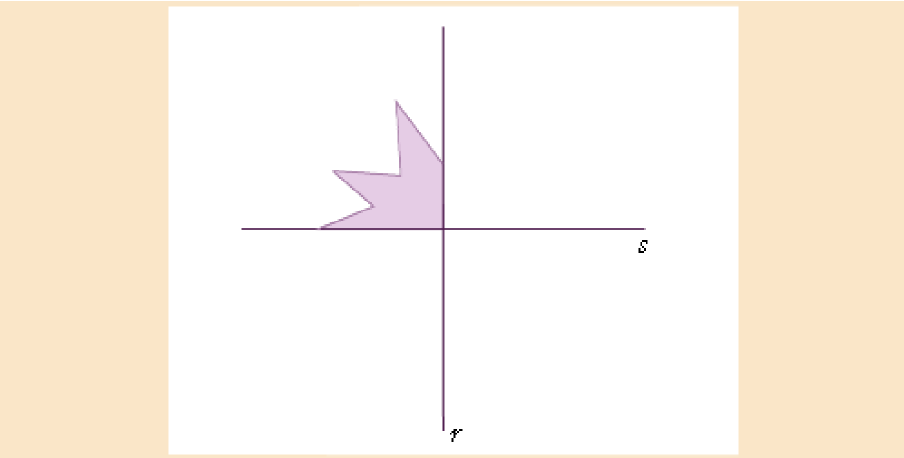
Exercici 1

Trobeu les imatges per la simetria S_r dels objectes (subconjunts del pla) indicats en cada dibuix:



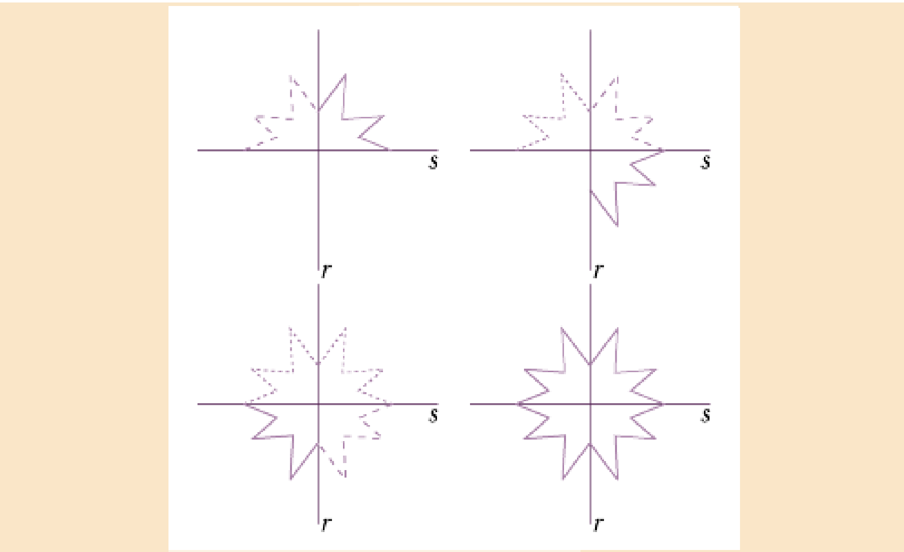
Exercici 2

Trobeu la imatge per la simetria S_r de la figura. A continuació, trobeu la imatge d'aquest nou conjunt per la simetria S_s. Repetiu la mateixa operació amb l'últim conjunt, però ara amb la simetria S_r. Acabeu fent el mateix procés, però amb S_s.



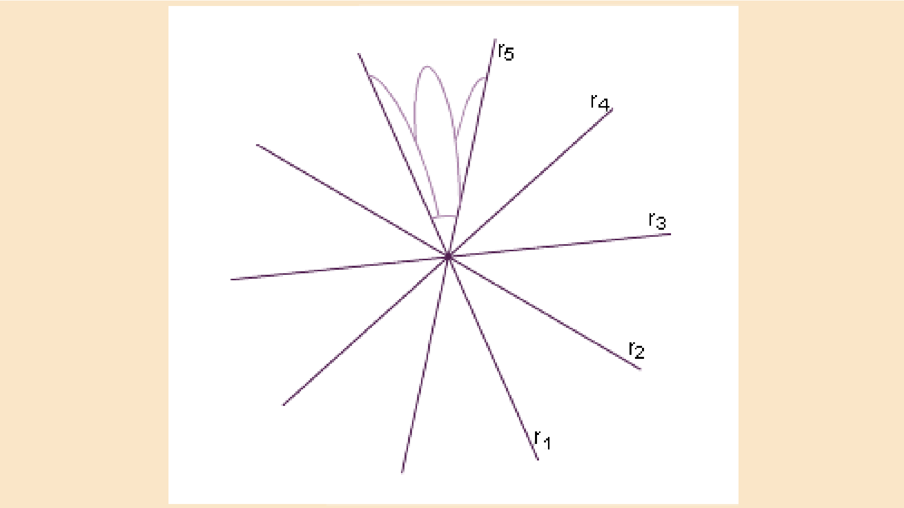
Solució:

Les imatges que anem obtenint es detallen a continuació:



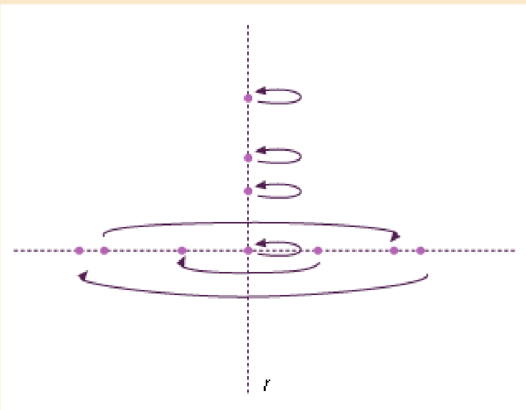
Exercici 3

Trobeu, seguint el procediment de l'exercici anterior, les imatges successives per les simetries S_{r_1}, S_{r_2}, S_{r_3}, S_{r_4}, S_{r_5} de l'objecte (subconjunt del pla) següent:



En cas que els conjunts A i B siguin iguals, com és el cas de les simetries, de vegades es dóna un fenomen curiós i útil: el fenomen de l'existència dels elements fixos. Es denomina un **punt fix** per f un punt tal que la seva imatge sigui ell mateix, això és, el punt fix p ha de verificar $f(p) = p$. Aquest concepte també es pot estendre a subconjunts fixos: denominem **subconjunt fix** el subconjunt la imatge del qual és ell mateix.

En el cas d'una simetria S_r els únics punts fixos són els que formen la recta r. Si ens preguntem quines són les rectes fixes, les respostes són dues: la recta r i qualsevol recta perpendicular a r. Observem que una recta perpendicular és fixa però només té un punt fix, a saber, el punt d'intersecció amb la recta r. Tots els altres punts tenen imatges que se situen a l'altre costat de la recta r.

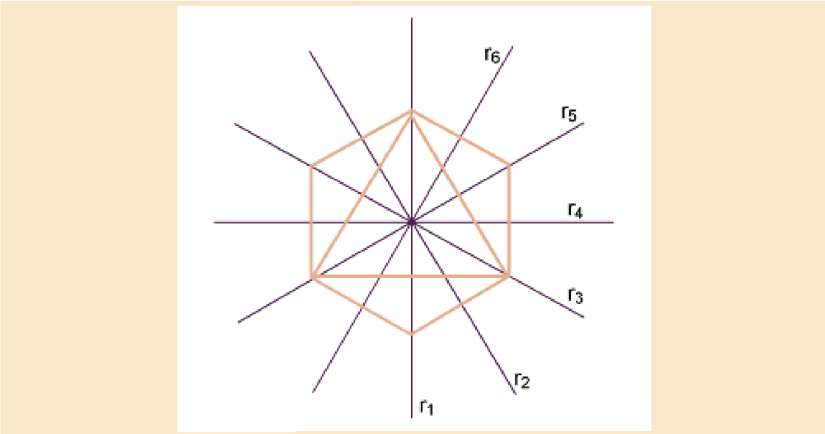


La simetria respecte a una recta deixa tots el punts d'aquesta recta fixos. Aquesta recta s'anomena eix de simetria. Les rectes perpendicular a l'eix són rectes fixes, encara que només tenen un punt fix.

Activitat

Exercici

Donat el subconjunt del pla (en color crema):



Per quines de les aplicacions següents resulta fix?

$S_{r_1}, S_{r_2}, S_{r_3}, S_{r_4}, S_{r_5}, S_{r_6}$

1.6. Composició d'aplicacions

En els exemples proposats sembla útil la iteració en el càlcul d'imatges a l'hora de generar objectes molt simètrics. Aquesta iteració en l'acció de calcular imatges per una aplicació rep el nom de **composició d'aplicacions**. Donades dues aplicacions f i g definides del conjunt A en si mateix, anomenarem composició de g amb f la nova aplicació $f\circ g$ definida per $(f\circ g)(x) = f(g(x))$. Aquesta concatenació d'aplicacions se sol escriure amb una notació més gràfica de la manera següent:

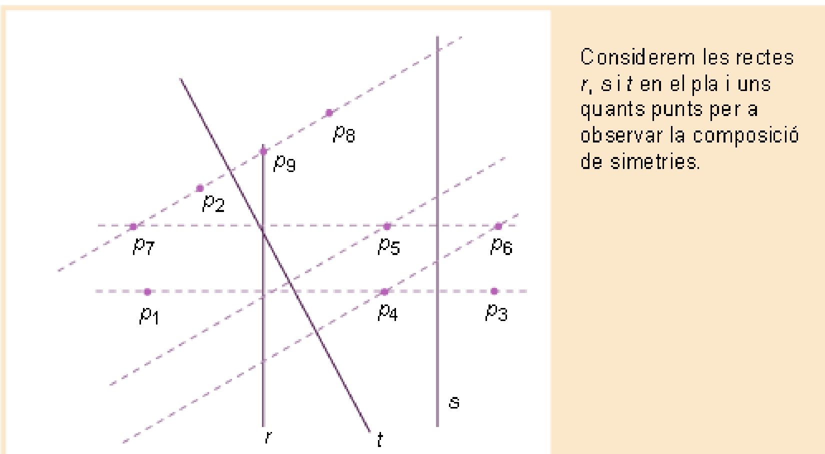
$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

Exemple 1

Calculem les imatges indicades per les composicions

$(S_s\circ S_r)(p_1),(S_s\circ S_r)(p_7),(S_r\circ S_t)(p_8),(S_r\circ S_t)(p_2),(S_r\circ S_s)(p_6),$

en què les simetries S_r,S_s,S_t són definides per:



Per calcular la primera d'aquestes imatges, aplicarem la definició de **composició**: $(S_s\circ S_r)(p_1) = S_s(S_r(p_1))$. En segon lloc, ja que $S_r(p_1) = p_4$, podem reduir el nostre càlcul a: $(S_s\circ S_r)(p_1) = S_s(S_r(p_1)) = S_s(p_4) = p_3$, usant l'asseveració que la imatge del punt p_4 per la simetria S_s és

p_3. Fixem-nos que es tracta de concatenar una simetria després d'una altra: de primer, fem el simètric amb la simetria S_r i, després, amb la simetria S_s. Aquesta composició també es pot escriure així:

$$p_1 \xrightarrow{S_r} p_4 \xrightarrow{S_s} p_3$$

Per a la resta de les imatges es procedeix de la mateixa manera:

$(S_s \circ S_r)(p_7) = S_s(S_r(p_7)) = S_s(p_5) = p_6$

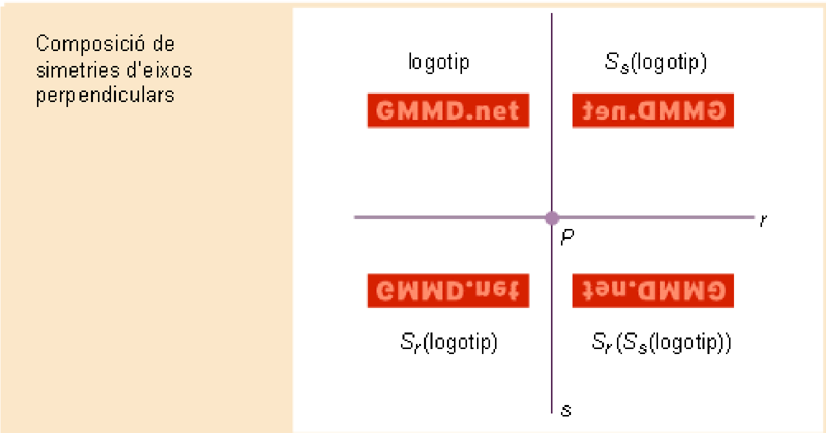
$(S_r \circ S_t)(p_8) = S_r(S_t(p_8)) = S_r(p_7) = p_5$

$(S_r \circ S_t)(p_2) = S_r(S_t(p_2)) = S_r(p_9) = p_9$

$(S_r \circ S_s)(p_6) = S_r(S_s(p_6)) = S_r(p_5) = p_7$

Exemple 2

També podem generar les imatges d'objectes per composicions d'aplicacions. En aquesta figura es poden observar els objectes que s'obtenen en fer imatges per les simetries de rectes *r* i *s*:



En aquest exemple s'ha col·locat el logotip de GMMD en la part superior esquerra, i s'hi ha aplicat la simetria respecte de la recta *s*, i després respecte de la recta *r*. La imatge inferior esquerra es pot obtenir de dues maneres: simplement aplicant al logo original la simetria respecte de la recta *r*, o bé amb la composició de tres simetries: simetria respecte a la recta *s*, simetria respecte a la recta *r* i simetria respecte de la recta *s*.

1.7. Característiques de la composició d'aplicacions

Així, la composició d'aplicacions és una eina per a fabricar noves aplicacions. Per exemple, es pot observar en l'exemple anterior que la composició $S_r \circ S_s$ ens proporciona un moviment de les figures que les gira 180° entorn del punt *P*. Un gir de 180° també es denomina **simetria central**, ja que es pot considerar com una simetria respecte d'un punt, és a dir, la imatge d'un punt *A* s'obté com el punt *S(A)* a l'altre costat del punt *P*, de manera que *A*, *S* (*A*) i *P* estan alineats, i la distància entre *S* (*A*) i *P* és la mateixa que la distància entre *A* i *P*. L'exemple anterior seria una simetria central respecte del punt *P*.

Un altre fet important sobre la composició d'aplicacions és que no és commutativa, és a dir, no sempre s'obté el mateix resultat si es componen $g \circ f$ o $f \circ g$. Per exemple, es pot observar en el primer exercici del subapartat "Aplicacions del pla: simetria i gir", que $S_r \circ S_s \neq S_s \circ S_r$, ja que les imatges de p_1 són diferents (i si fossin la mateixa aplicació, haurien de tenir les mateixes imatges per a originals iguals):

$$(S_r \circ S_s)(p_1) = S_r(S_s(p_1)) = S_r(p_3) = p_2$$

$$(S_s \circ S_r)(p_1) = S_s(S_r(p_1)) = S_s(p_4) = p_6$$

1.8. Aplicació identitat

Dins de la classe de les aplicacions bijectives, en tenim una de privilegiada que es denomina **aplicació identitat** i que simbolitzarem amb *Id*. Aquesta aplicació és definida de la manera següent: $Id(x) = x$, és a dir, la imatge d'un element és ell mateix. Així, també la imatge d'un objecte és ell mateix. Podem observar que si fem la composició $S_r \circ S_r$ per a qualsevol simetria, obtindrem l'aplicació identitat, això és, $S_r \circ S_r = Id$. La raó és òbvia: si trobem la imatge d'un punt per una simetria en tornar a trobar la seva imatge per la mateixa simetria, retornem al punt inicial, és a dir, al final la imatge de cada punt és ell mateix.

L'aplicació identitat verifica una propietat fonamental amb qualsevol aplicació f bijectiva:

$$f \circ Id = Id \circ f = f$$

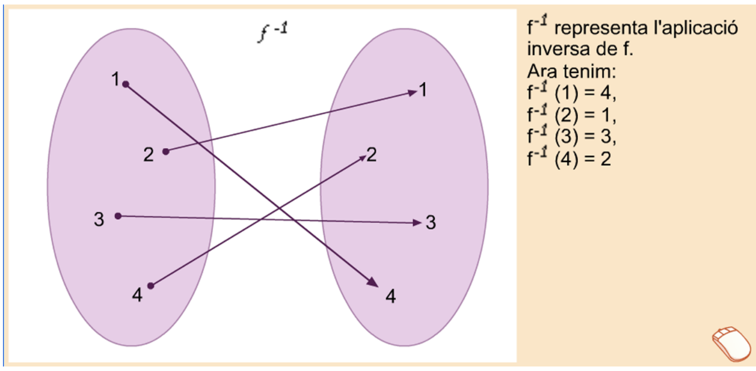
És a dir, l'efecte de compondre amb l'aplicació identitat és nul; per aquesta raó, es denomina **element neutre de la composició**.

1.9. Aplicació inversa

Per a una aplicació bijectiva f tenim definida l'**aplicació inversa** f^{-1} de la manera següent: si $x \xrightarrow{f} y$ llavors $y \xrightarrow{f^{-1}} x$. Simplificant, moltes vegades es diu que és l'aplicació que intercanvia el paper d'imatge pel d'original i original per imatge. És a dir, és la que assigna a un element l'element del qual seria imatge per l'aplicació f.

Exemple 1

L'aplicació inversa s'obté simplement girant les fletxes de l'aplicació:



Exemple 2

L'aplicació inversa d'una simetria S_r és ella mateixa, ja que si per a un punt donat ens preguntem de quin punt seria imatge per la simetria S_r, la resposta és del seu simètric per la recta r.

Una de les propietats principals que verifica l'aplicació inversa és la següent:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id,$$

la qual cosa resulta evident, ja que en fer la composició d'una aplicació f que assigna $x \xrightarrow{f} y$ amb una altra f^{-1} que assigna $y \xrightarrow{f^{-1}} x$ obtenim, $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{f^{-1}} x$ és a dir, que cada element x té per imatge el mateix element x per la composició d'aplicacions $f^{-1} \circ f$. De la mateixa manera, ocorre que $y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{f} y$, és a dir, que $f \circ f^{-1} = Id$.

1.10. Propietats de la composició d'aplicacions bijectives

Resumim les propietats que verifica la composició d'aplicacions bijectives. La composició d'aplicacions bijectives definides en un conjunt ens proporciona una aplicació bijectiva nova, de manera que es verifiquen els elements següents:

Associativa	Per a qualssevol aplicacions bijectives f, g, h tenim que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
Existència d'element neutre	Existeix l'aplicació identitat Id, que verifica que $f \circ Id = Id \circ f = f$ per a tota aplicació bijectiva f.
Existència d'aplicació inversa	Per a tota aplicació bijectiva f existeix la seva aplicació inversa f^{-1}, que verifica: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$.

Una manera de resumir aquestes propietats en una sola paraula és dir que el conjunt de les aplicacions bijectives amb l'operació composició és un **grup**. La raó per la qual es denota aquestes propietats amb un nom especial és perquè en situacions molt diferents es repeteix el fet de tenir un conjunt amb una operació que verifiqui aquestes tres propietats. La composició d'aplicacions no és commutativa en general. És a dir, l'ordre en el qual es componen les aplicacions proporciona resultats diferents: $f \circ g \neq g \circ f$.

Grup

Quan tenim un conjunt G amb una operació "∘" que permet operar dos elements qualssevol de G, de manera que s'obté un altre element de G i que verifica les propietats:

- **associativa:** per a qualssevol elements a, b, c de G tenim que $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- **existència d'element neutre:** hi ha un element e de G que verifica $a \circ e = e \circ a = a$ per a tot element a de G;
- **existència d'element invers:** per a tot element a de G existeix el seu invers a^{-1}, que verifica: $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Quan pretenem operar amb tres elements, es pot fer l'operació $a \circ b$ i, després, es pot procedir a utilitzar aquest resultat per a calcular $(a \circ b) \circ c$, o bé es pot calcular $b \circ c$ i després operar obtenint $a \circ (b \circ c)$. S'observa que la propietat associativa ens afirma que, de les dues maneres, el resultat és el mateix. És a dir, la propietat associativa proporciona la manera d'entendre l'operació de tres elements sense cap ambigüitat ni incorrecció. En alguns grups es verifica que l'ordre en el qual s'operen els elements no altera el resultat, això és, es verifica la propietat:

commutativa: per a qualssevol elements a, b de G tenim que $a \circ b = b \circ a$;

En aquest cas, es diu que el grup és commutatiu o abelià. El grup de les aplicacions bijectives amb la composició d'aplicacions no és commutatiu perquè, en general, no es verifica la propietat commutativa.

Exemple

Exemple 1

El conjunt dels nombres reals amb la suma és un **grup commutatiu**:

- **associativa:** per a qualssevol nombres reals a, b, c, tenim que $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- **existència d'element neutre:** existeix el nombre real 0 que verifica que $a + 0 = 0 + a = a$ per a tot nombre real a;
- **existència d'element invers:** per a tot nombre real a existeix el seu oposat $-a$ que verifica: $a + (-a) = -a + a = 0$.

A més, es tracta d'una operació commutativa, això és, per a tot parell de nombres reals a, b tenim $a + b = b + a$.

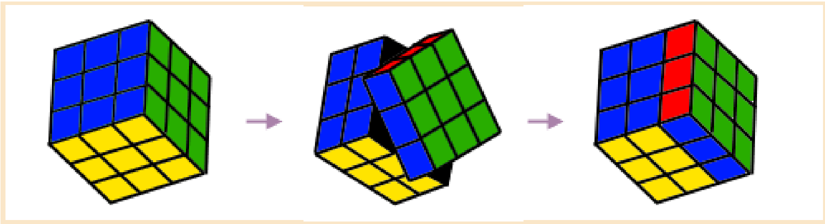
Exemple 2

El conjunt dels nombres naturals amb la suma no és un grup, ja que no existeix element oposat per a tots els nombres naturals: per exemple, l'oposat de 2 és el –2, que no és un nombre natural.

Exercici

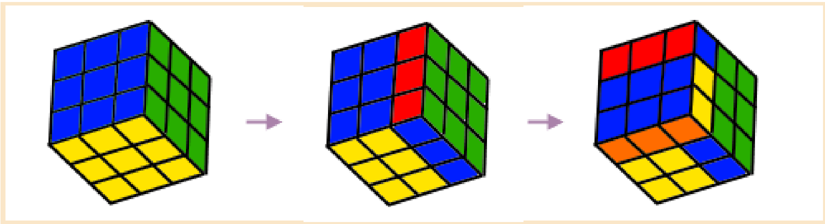
El mecanisme del cub de Rubik permet fer una sèrie de moviments que són composició d'uns quants moviments elementals. Per a fixar idees, suposem que tenim el cub inicial (el que té cada cara d'un sol color) i que girem la cara de color verd 90° en sentit antihorari. Si no el teniu en aquesta posició, desmunteu el cub amb compte i torneu-lo a muntar en la posició correcta. Per als qui no vulguin arriscar el cub o per als qui no en tinguin cap, ho poden fer amb un dels cubs virtuals que es poden trobar a Internet. En podeu trobar un en http://www.javaonthebrain.com/java/rubik/.

Si feu el moviment indicat obtindreu:



Anomenarem aquest moviment *V*.

Quan es mou una cara, es fa una permutació de les peces que formen el cub. Els moviments es poden concatenar (direm *compondre*) els uns darrere dels altres. Per exemple, si primer girem la cara verda i després la blava (moviment *A*), obtenim:



Aquestes operacions sobre el cub inicial les representarem com a AV, seguint la mateixa notació de la composició d'aplicacions. El conjunt dels moviments diferents que es poden fer amb el cub de Rubik es denomina **grup del cub de Rubik**. Aquest grup té:

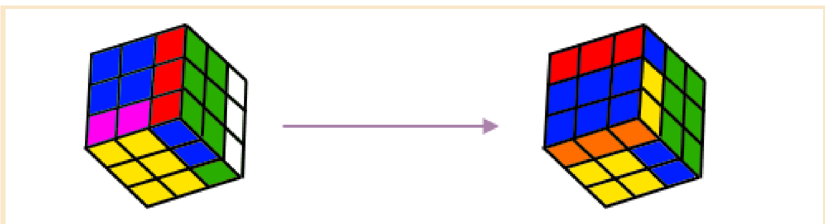
$$43.252.003.227.489.856.000$$

elements que s'obtenen com a composició dels moviments elementals V (girar 90° en sentit antihorari la cara verda), A (girar 90° en sentit antihorari la cara blava), Y (girar 90° en sentit antihorari la cara groga), R (girar 90° en sentit antihorari la cara vermella), N (girar 90° en sentit antihorari la cara taronja), B (girar 90° en sentit antihorari la cara blanca). Així, per exemple, girar la cara groga 180° és el mateix que fer Y dues vegades seguides, que escriurem en forma de potència:

$$YY = Y^2$$

Cal pensar que no obtenim moviments infinits, ja que, per exemple si fem Y^4 és com si no féssim res al cub, és a dir, ens dóna el moviment identitat, és a dir, $Y^4 = Id$.

Es pot veure que aquest grup no és commutatiu fent la composició del moviment de dues cares que comparteixen una aresta. Per exemple, vegem que $VA \neq AV$, ja que el resultat final és diferent:



Per tant, ens trobem davant d'un grup no commutatiu.

S'anomena **resoldre el cub de Rubik** tornar el cub a la seva posició original a partir d'una posició qualsevol del cub. En termes de grups, podem dir que si el cub ha estat desordenat pel moviment M (composició de moviments de cares), resoldre el cub és aplicar el moviment invers M^{-1}, que tornarà el cub a la posició original. Per exemple, comproveu experimentalment que:

a) $(VA)^{-1} = A^{-1}V^{-1}$, és a dir, comproveu que si s'ha aplicat VA al cub, llavors l'acció $A^{-1}\,V^{-1}$ el resol.

b) $(AY)^{-1} = Y^{-1}A^{-1}$.
c) $(Y^2)^{-1} = Y^2$.
d) Comproveu que $(AV)^{-1} = V^{-1}A^{-1}$.

Apliqueu el moviment AY al cub. Torneu-l'hi a aplicar, amb la qual cosa haureu calculat $(AY)^2$. Repetiu l'operació fins que es torni a la posició original del cub (és a dir, s'ha buscat el nombre n de manera que $(AY)^n = Id$).

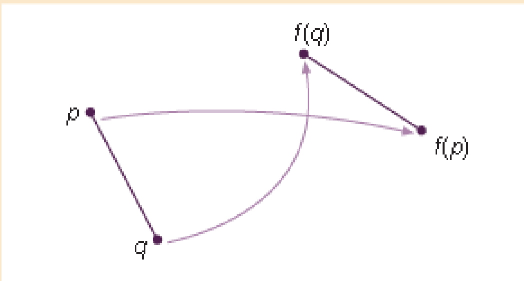
2. Isometries del pla

2.1. Concepte d'isometria

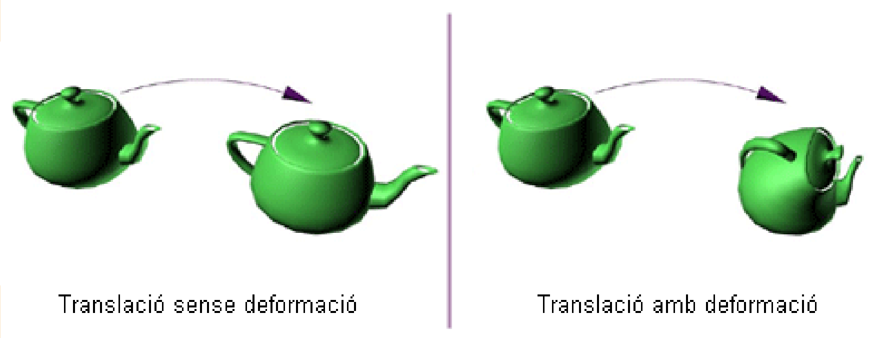
Per tal d'estudiar les simetries d'un objecte del pla, hem definit què entenem per una aplicació bijectiva i els principals conceptes que té associats. Ara ens centrarem en unes aplicacions bijectives del pla que ens ajudaran a generar figures i a estudiar les simetries de què gaudeixen. Ja n'hem introduït una, la simetria definida a partir d'una recta. També com a composició de dues simetries d'eixos perpendiculars hem obtingut un gir de 180°. Aquestes dues aplicacions tenen en comú una propietat molt important que adoptarem com a desitjable en el nostre marc d'estudi: no deformen els objectes, només els canvien de posició.

Matemàticament, denominarem **isometria** tota aplicació bijectiva del pla que conservi les distàncies, això és, que la distància entre dos punts i la distància entre les seves imatges respectives sempre sigui la mateixa.

Isometria



Observem quin és l'efecte de l'aplicació d'una isometria sobre un objecte del pla: es canvia la posició de l'objecte sense deformar-lo. És a dir, sempre la distància entre dos punts p i q és el mateix que entre les seves imatges $f(p)$ i $f(q)$.

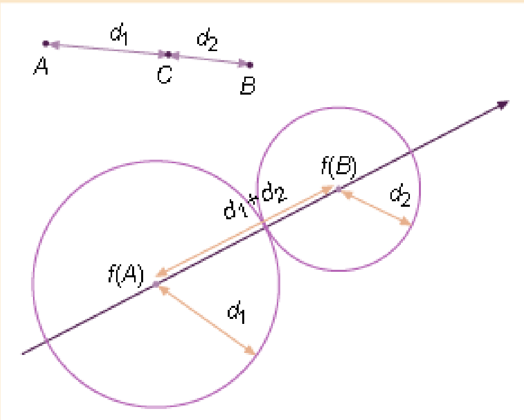


És una aplicació bijectiva a qualsevol del pla, les distàncies no s'han de conservar necessàriament i, per tant, es poden obtenir deformacions de l'objecte en aplicar-li la transformació.

Aquestes aplicacions que no conserven les distàncies també tenen la seva utilitat en disseny assistit per ordinador com a font de noves formes o modificació de formes preexistents (entre aquestes, destaquen els *zooms*), però ara no ens ocuparem d'aquest assumpte.

Les isometries també s'utilitzen en **animació per ordinador**. El moviment d'objectes se simula per mitjà d'isometries. També la posició de la càmera és recalculada en cada unitat de temps segons una transformació que, en general, serà una isometria.

Una propietat important de les isometries és que la imatge d'una recta és una recta. Això és cert, ja que si tenim una recta determinada per dos punts A i B i un punt C en la mateixa recta a distància d_1 de A i a distància d_2 de B, llavors la imatge $f(C)$ ha d'estar a distància d_1 de $f(A)$ i a distància d_2 de $f(B)$. Ara bé, només hi ha un punt que es trobi en aquestes distàncies i se situï en la recta determinada per $f(A)$ i $f(B)$:



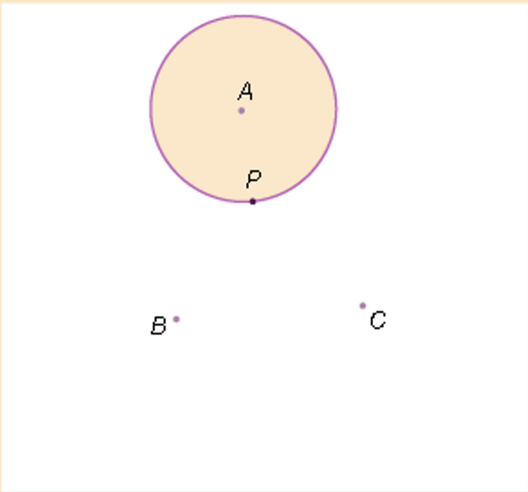
$f(C)$ és a la recta determinada per $f(A)$ i $f(B)$.

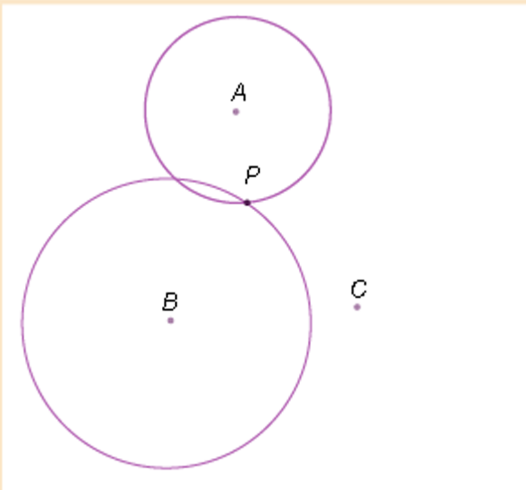
Ara determinarem les isometries del pla; per aconseguir-ho, ens fixarem en quins són els seus punts fixos.

2.2. Isometries amb tres o més punts fixos no alineats

Suposem que tenim tres punts fixos no alineats A, B, C. Intentem trobar la imatge d'un punt qualsevol P.

Com $f(A)$ i la distància A i P ha de ser la mateixa que entre $f(A)$ i $f(P)$ podrem afirmar que la imatge del punt P estarà situada en la circumferència de centre A que passa per P.

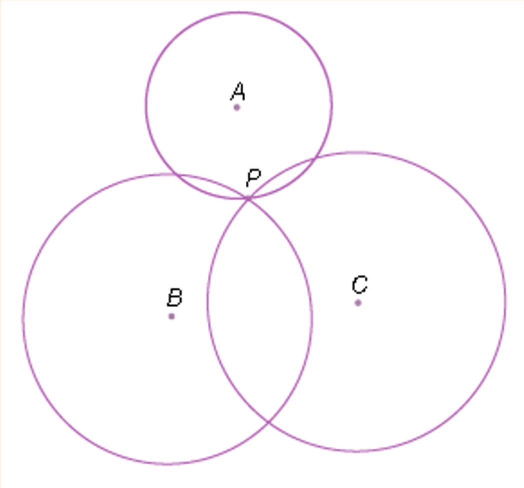




Procedint de la mateixa manera amb el punt B, tindrem que la imatge del punt P haurà d'estar situada en la circumferència de centre B que passa per P.

Aquestes dues circumferències es tallen, com a màxim, en dos punts, uns dels quals ha de ser la imatge del punt P.

Si repetim el mateix raonament amb el punt *C* obtenim una tercera circumferència que talla les dues anteriors només en el punt *P*.

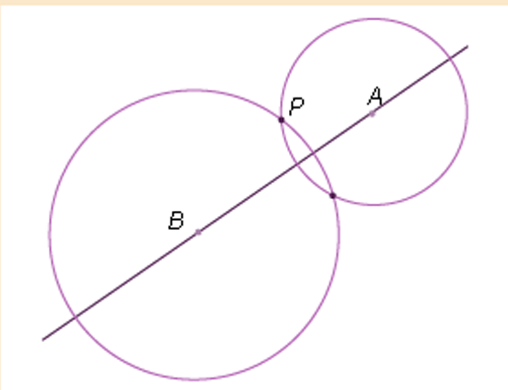


Per tant, aquest és l'únic punt que pot ser la imatge, és a dir, $f(P) = P$. Aquest raonament serveix per a qualsevol punt *P* del pla, així tots els punts del pla són fixos i, per tant, aquesta isometria haurà de ser la **identitat**.

Resumint, tota isometria amb un mínim de tres punts fixos no alineats és la identitat.

2.3. Isometries amb dos punts fixos

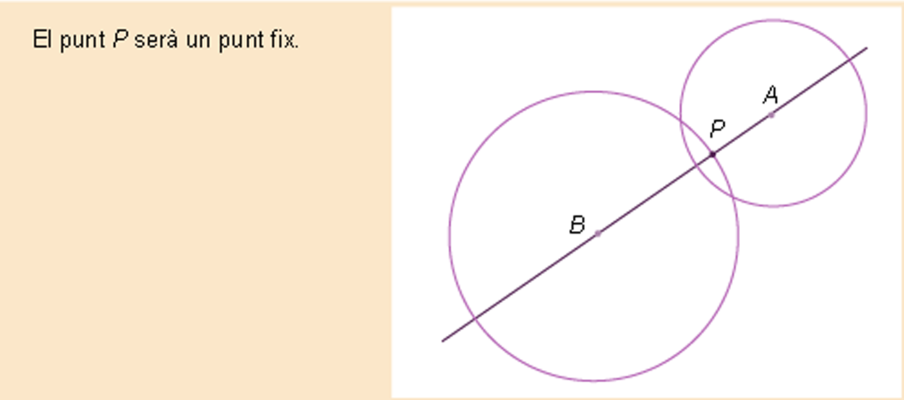
Suposem que *A* i *B* són dos punts fixos. I que *P* és un punt qualsevol exterior a la recta determinada per aquests dos punts fixos. La imatge de *P* ha de mantenir la distància amb el punt *A* i amb el punt *B*. Hi ha dos punts que mantenen aquestes distàncies: el mateix punt *P* i el punt simètric respecte a la recta que formen els punts *A* i *B*.



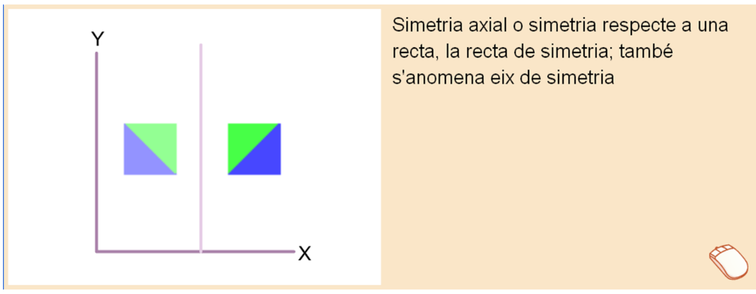
El punt *P* no pot ser, ja que tindríem tres punts fixos no alineats, i això ens portaria al cas anterior.

Per tant, la imatge ha de ser el punt simètric. Així, doncs, aquesta isometria és una **simetria axial** i el seu eix de simetria és la recta determinada pels dos punts fixos.

S'observa que tots els punts de l'eix de simetria són també fixos. Per a veure-ho n'hi ha prou amb prendre el punt *P* de la recta formada pels dos punts fixos. Llavors, raonant d'una manera anàloga obtenim dues circumferències tangents i, per tant, només es tallen en un punt.



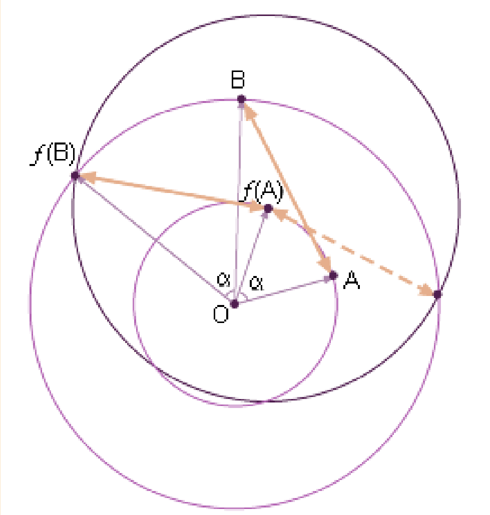
També podem observar que totes les rectes perpendiculars a l'eix de simetria seran rectes fixes, ja que la imatge de la recta és la mateixa recta. No són rectes de punts fixos.



2.4. Isometries amb un sol punt fix

Anomenem *O* l'únic punt fix i considerem un punt *A* qualsevol i la seva imatge *f*(*A*); aquesta haurà de ser sobre la circumferència centrada en *O* que passa per *A*. Vegem quines possibilitats tenim per a la imatge d'un altre punt *B*. En conservar-se les distàncies per la isometria, podem afirmar que *f*(*B*) se situarà sobre la circumferència centrada en *O* que passa per *B* i, al seu torn, haurà de pertànyer a la circumferència centrada en *f*(*A*) de radi la distància entre *A* i *B*. Aquestes dues circumferències es tallaran en dos punts, que seran les possibles imatges del punt *B*. Si mantenim l'orientació de l'angle que forma cadascun dels punts amb el punt fix i amb la seva imatge, haurem d'escollir la imatge de *B*, tal com mostra la figura.

Es pot comprovar que si s'escull l'altre punt d'intersecció de les dues circumferències, apareix una recta de punts determinada per *O* i el punt mitjà de *A* i *f (A)*.



Això comporta una contradicció amb la suposició que la isometria només té un punt fix.

Així, doncs, és fàcil apreciar que arribem a la isometria coneguda com a **gir** o **rotació**, en què el punt fix és el centre de gir i α, l'angle de gir. Aquest angle s'obté simplement amb la imatge d'un sol punt i és l'angle format pels punts *A*, *O* i *f*(*A*).

Els girs no mantenen cap recta fixa, ja que els únics objectes fixos són les circumferències centrades en el centre de gir, excepte en cas que l'angle de gir sigui de 180°.

La imatge següent mostra amb una animació un gir en el pla:

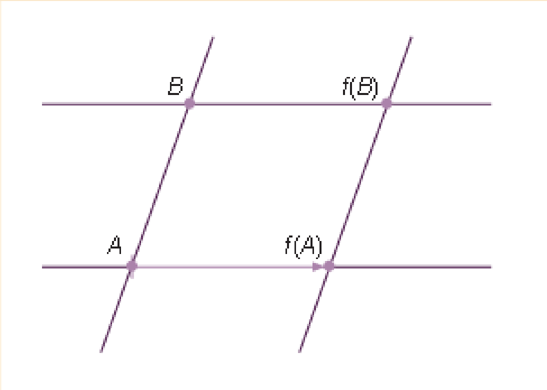
WEB

Recurs interactiu
accessible només al web.

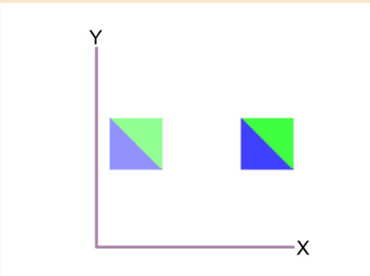
2.5. Isometries sense punts fixos

En aquest cas, es pot deduir que les úniques isometries del pla sense punts fixos són les **translacions** i els **lliscaments**. Començarem descrivint una translació. Donat un punt qualsevol *A* i la seva imatge *f*(*A*), si la recta formada per aquests dos punts és una recta fixa, aquesta ens marcarà una direcció i un sentit per a la translació.

Per a buscar la imatge d'un altre punt *B*, n'hi haurà prou de construir una recta paral·lela a aquesta direcció i, seguint el mateix sentit, assenyalar la imatge *f*(*B*) com el punt que es troba de *B* a la mateixa distància que es troben *A* i *f*(*A*).

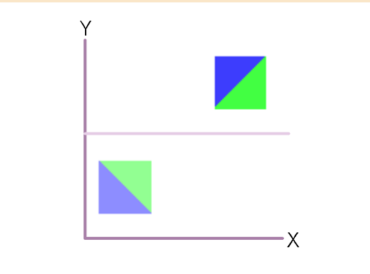


Per a assenyalar la translació d'una manera còmoda, utilitzarem **els vectors**. El vector **d'origen** en *A* i **extrem** en *f*(*A*) ens assenyalarà la **direcció** i **sentit** de la translació. Representarem el vector mitjançant una fletxa.



La translació és una isometria sense punts fixos. Tota recta paral•lela a la direcció de la translació és una recta fixa.

Clarament, tota composició d'isometries serà una isometria. En el cas de compondre una simetria amb una translació de vector paral·lel a l'eix de simetria, s'obté un moviment anomenat **lliscament**. Aquest moviment serà una altra isometria sense punts fixos.



El lliscament és una isometria sense punts fixos que s'obté de la composició d'una isometria amb una translació.

2.6. Classificació d'isometries del pla i de l'espai

Amb això concloem l'estudi de totes les isometries del pla, ja que totes les composicions que es puguin fer entre isometries comportaran alguna de les isometries que hem descrit fins a aquest moment.

Com hem comentat, les translacions no tenen punts fixos. Totes les rectes que segueixen la mateixa direcció que el vector de la translació són rectes fixes (però no de punts fixos).

Els lliscaments tampoc no tenen punts fixos. En ser una composició d'una simetria amb una translació paral·lela a l'eix de simetria, l'únic element fix és la recta de simetria. Aquesta recta és fixa, encara que no de punts fixos.

Resumint podem dir que, a part de la introducció d'isometries útils en el pla, acabem de veure un resultat molt més transcendent: tota isometria del pla és una de les descrites. Escriguem-ho en forma de teorema:

Teorema: les úniques isometries del pla són les translacions, els lliscaments, els girs i les simetries axials.

Les simetries axials es poden considerar com un cas particular dels lliscaments, en què es pren el vector de translació com a nul. La identitat també es pot considerar com a cas particular d'una translació de vector nul o com un gir d'angle 0°.

Les **isometries en l'espai** es defineixen de la mateixa manera, és a dir, són aplicacions bijectives que conserven les distàncies. Es pot obtenir un teorema equivalent a l'anterior per a les isometries en 3D. Les isometries elementals amb què es construeixen totes les isometries de l'espai són les translacions, els girs i les simetries especulars. Fem-ne una breu descripció.

Una **translació en l'espai** es defineix de la mateixa manera que en el pla: tots els punts es modifiquen desplaçant-se una distància fixada en una mateixa direcció i sentit. Com es pot imaginar, la translació és una de les isometries més simples que es poden utilitzar en l'animació per ordinador. Aquest és el mateix cas que el que es dóna quan en 3D Studio es mou la càmera segons una línia recta: cada seqüència de la imatge s'obté movent la càmera segons una translació i recomponent l'escena.

Un **gir en l'espai** entorn d'una recta és el resultat de girar tots els punts un cert angle fixat entorn de la recta, la qual anomenarem **eix de gir**. Cada punt de l'espai gira dins del pla que el conté, que és perpendicular a l'eix del gir, de la mateixa manera que un gir en dues dimensions.

Una **simetria especular**, o simetria respecte d'un pla, transforma cada punt de l'espai com si el pla fos un mirall. Per a determinar la imatge d'un punt qualsevol, s'ha de considerar la recta perpendicular al pla que passa per aquest punt. La imatge del punt se situa sobre aquesta recta a la mateixa distància del pla, encara que al costat oposat.

A partir d'aquests tres tipus d'isometries, podem construir-ne la resta per composició entre elles, de manera que podem enunciar el teorema següent.

Teorema: les úniques isometries de l'espai són translacions, girs respecte a una recta, simetries especulars i les composicions entre totes aquestes.

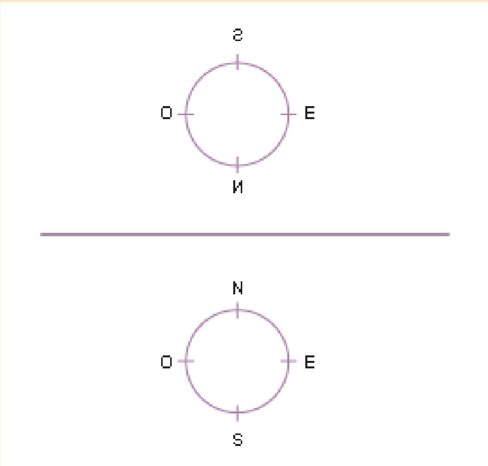
Algunes isometries de l'espai: translació, gir axial i simetria especular

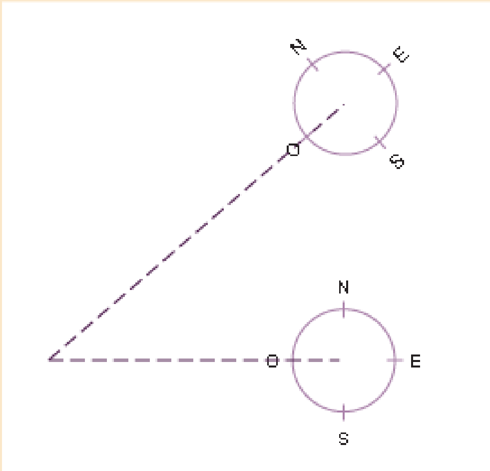
Una traducció d'aquest teorema en termes d'animació per ordinador en 3D ens indica que les úniques transformacions que es poden i s'han d'utilitzar per a simular animacions són les translacions, els girs respecte a una recta, simetries respecte a un pla i les composicions entre totes aquestes. Suposem que volem crear una animació en la qual una tetera es mou en l'espai. L'objecte no s'ha de deformar, només moure's, per a obtenir un efecte més realista en l'animació. Per tant, les úniques transformacions que es poden utilitzar són les translacions, els girs respecte a una recta, simetries respecte a un pla i les composicions entre totes aquestes. Un altre aspecte molt diferent es dóna quan el programa de generació d'imatges ens mostra una vista frontal, lateral o en perspectiva per a la qual utilitza deformacions que permetran obtenir l'efecte tridimensional (més informació en: http://www.scienceu.com/library/articles/isometries/grail.html).

Per tot això, les transformacions sense deformacions que ofereixen els menús de programes de tractament d'imatges en 3D són només les indicades en el teorema.

Una altra característica que se sol estudiar en les isometries del pla és si conserven l'orientació dels objectes o si la inverteixen. Lluny de fer una definició formal de què s'entén per conservar o invertir l'orientació, observem l'efecte de les isometries del pla sobre una rosa dels vents simplificada.

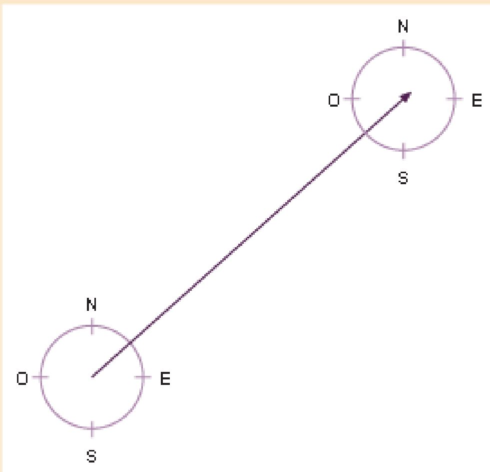
La simetria axial en el pla inverteix l'orientació dels objectes

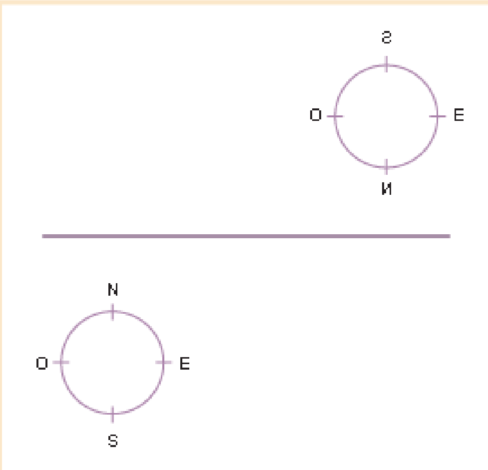




Els girs conserven l'orientació

Les translacions també conserven l'orientació dels objectes





Els lliscaments, en ser composició d'una simetria amb una translació, inverteixen l'orientació dels objectes

Observem que l'orientació de l'objecte queda invertida per l'acció d'un lliscament i d'una simetria axial, mentre que les altres isometries mantenen l'orientació. Igualment, per a les isometries en l'espai es pot definir el concepte de conservació o inversió de l'orientació.

Per a les isometries del pla podem resumir en una taula quins són els elements fixos i si es tracta d'isometries que inverteixen o conserven l'orientació:

	Punts fixos	Rectes fixes	Orientació
Simetria axial	Tot l'eix de simetria	L'eix de simetria (de punts fixos) i totes les rectes perpendiculars a l'eix de simetria	Inverteix
Gir	Un (el centre)	Cap	Conserva
Translació	Cap	Tota recta paral·lela a la direcció del vector translació	Conserva
Lliscament	Cap	Tota recta paral·lela a la direcció del vector translació	Inverteix

La isometria identitat es pot considerar com un cas particular de qualsevol de les isometries que conserven l'orientació.

Ara bé, si només hi ha aquests quatre tipus d'isometries en el pla, la composició de dues d'elles ens n'ha de tornar a donar una de la família. Vegem com es calcula la composició de dues simetries. En fer una composició de dues simetries, l'orientació s'inverteix per la primera simetria però és corregida per la segona.

WEB
Recurs interactiu accessible només al web.

WEB
Recurs interactiu accessible només al web.

Per tant, si consultem la taula anterior, el resultat ha de ser un gir o una translació. També podem observar que el resultat és l'un o l'altre en funció de si els eixos de les simetries axials són paral·lels o no. En cas que es tallin, el punt de tall dels dos eixos serà un gir amb centre, ja que serà l'únic punt fix per la composició.

Web complementari

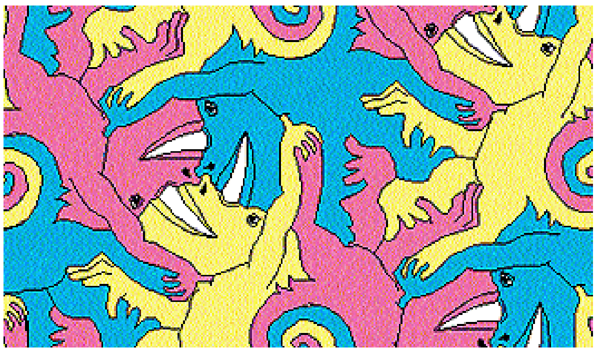
Més informació a: http://www.scienceu.com/library/articles/isometries/closing.html

Abans hem descrit breument les isometries en l'espai tridimensional. En fer composicions entre les isometries descrites, obtindrem altres isometries que no hem definit, com són la **simetria rotacional** (simetria seguida d'un gir d'eix perpendicular al pla de simetria) o el **moviment helicoïdal** (gir compost amb translació de vector paral·lel a l'eix de gir).

3. Simetria de figures, sanefes i mosaics

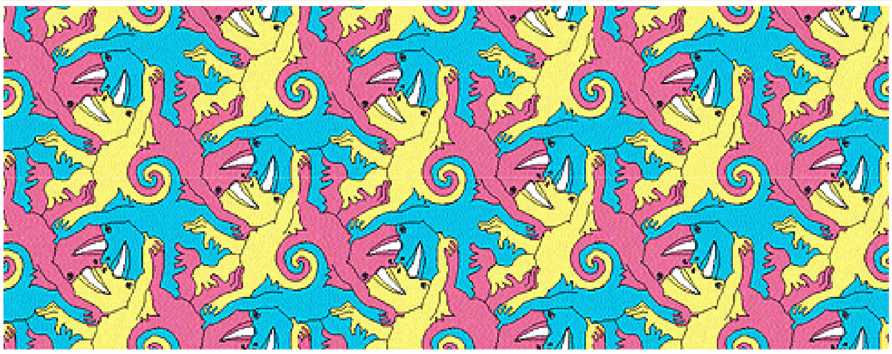
3.1. Grup de simetria d'una figura plana

Com hem comentat anteriorment, les isometries s'utilitzen molt en disseny d'objectes en 3D, a més de ser molt útils per a conferir moviments als objectes i a la càmera en una seqüència animada per ordinador. Tanmateix, no solament s'utilitzen les isometries en el disseny 3D. En el disseny gràfic més bàsic, sovint es dóna un ritme i un moviment que hi proporciona la utilització d'un patró i de l'aplicació de diferents isometries; per exemple, la utilització del patró creat pel dissenyador M. C. Escher:

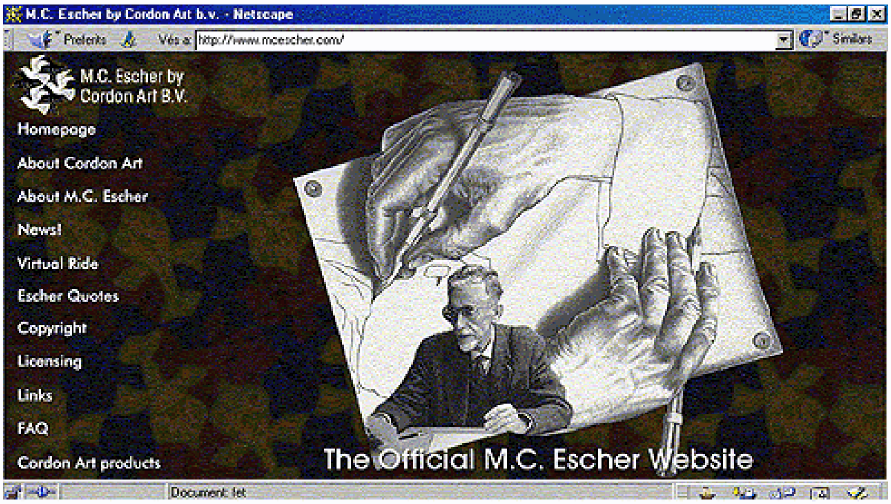


Patró creat per M.C. Escher

i la seva repetició per mitjà d'una translació produeix l'efecte següent:

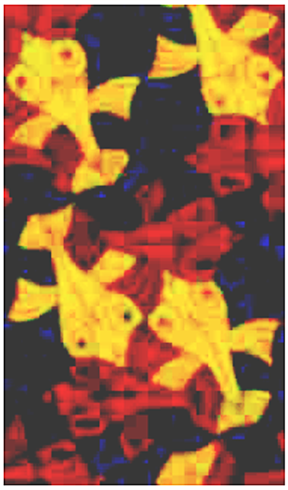


Aquí juga també el disseny del mateix patró, que connecta perfectament cada peça.



Aquest mètode tan simple és el que s'utilitza en els visualitzadors de pàgines web.

Patrón utilizado en "The Official M.C. Escher Website"



De fet, es pot observar que el mateix patró està dissenyat amb una peça elemental a què s'ha aplicat un desplaçament. Atès que l'estàndard que estableix el llenguatge HTML és repetir el patró a partir del marge superior esquerre, només amb dues translacions (una horitzontal i una vertical), el dissenyador s'ha vist obligat a incloure en el patró el mateix motiu que cal repetir amb el patró desplaçat (dues vegades), de manera que s'ha obtingut un efecte de repetició amb desplaçaments, cosa que no està prevista en l'estàndard de definició del llenguatge HTML. En aquest cas, el dissenyador també s'ha vist obligat a retallar la figura per obtenir un patró rectangular, ja que és la manera d'introduir imatges com a fons en pàgines web.

També quan es vol destacar l'efecte 3D d'una representació plana d'un objecte en tres dimensions, s'utilitzen trames i materials construïts per repetició d'un patró; això sí, amb unes tècniques més complicades.

Un exemple és aquesta escena creada amb el 3D Studio d'un tub toroïdal en la superfície amb un mosaic.

Des de l'antiguitat s'han utilitzat les isometries estudiades, de manera que es dissenyen mosaics repetint uns patrons, sanefes, etc. per a decorar objectes.

Disseny inspirat en art celta

Abans d'estudiar aquest tipus de dissenys d'una manera detallada, veurem que el grup de simetria d'una figura plana és l'entitat matemàtica que ens indicarà fins a quin punt és simètrica una figura i quin tipus de simetria té.

Ara que hem introduït la noció d'isometria del pla, podem definir l'anomenat **grup de simetria d'una figura** com la manera de mesurar i estudiar el grau de simetria d'una figura.

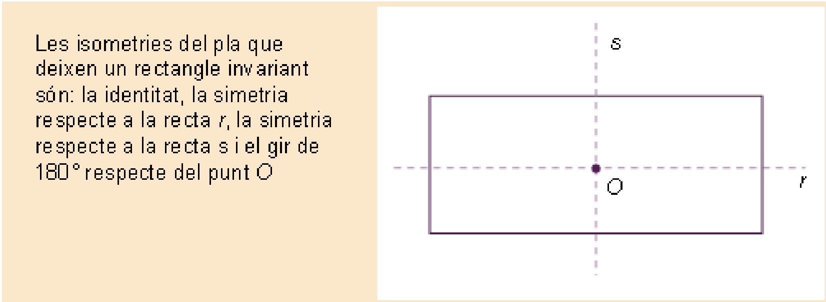
Anomenarem grup de simetria d'una figura el conjunt de les isometries del pla que deixen fixa la figura. Matemàticament, per a una figura F del pla (és a dir, un subconjunt de punts del pla), es pot escriure com a:

$$G_F = \{f \text{ de manera que la isometria és } f(F) = F\}$$

Aquest simbolisme vol dir que el conjunt de totes les isometries del pla que deixen fixa la figura F es denomina mitjançant G_F. Amb la composició d'isometries es pot raonar que aquest conjunt és un grup.

Exemple 1

Tenim el rectangle (no quadrat):



Comencem per identificar quines isometries deixen el rectangle invariant. Això ho podem fer simplement consultant la llista de les úniques isometries del pla. La identitat *Id* és la primera isometria que s'ha de considerar; a continuació, la simetria S_r d'eix *r*, i també la simetria S_s. Quant als girs, només tenim $G_O^{180°}$, el gir de 180° i centre *O*. Ara discutirem si la composició entre aquestes isometries ens en produeix alguna que no hàgim tingut en compte. El resultat el representarem amb una taula de doble entrada:

°	***Id***	$\boldsymbol{S_r}$	$\boldsymbol{S_s}$	$G_O^{180°}$
Id				
$\boldsymbol{S_r}$				
$\boldsymbol{S_s}$				
$G_O^{180°}$				

Per emplenar la taula de la composició seguirem el conveni que si *f* és una entrada horitzontal i *g* una vertical, llavors a la casella corresponent es col·locarà $g \circ f$, és a dir, de primer s'aplica la *f* i després la *g*. Part de la taula és molt fàcil d'emplenar, ja que sabem que l'aplicació identitat verifica $Id \circ f = f \circ Id = f$. A més, també sabem que la composició de S_r, S_s, $G_O^{180°}$ amb elles mateixes dóna la identitat. Així, ja podem emplenar part de la taula:

°	***Id***	$\boldsymbol{S_r}$	$\boldsymbol{S_s}$	$G_O^{180°}$
Id	*Id*	S_r	S_s	$G_O^{180°}$
$\boldsymbol{S_r}$	S_r	*Id*		
$\boldsymbol{S_s}$	S_s		*Id*	
$G_O^{180°}$	$G_O^{180°}$			*Id*

Per emplenar la resta de taula de la composició observarem que, en general, no serà el mateix la composició de dues isometries en un ordre que en l'invers. Així, si hem de compondre la simetria S_s amb la S_r obtenim el gir, $G_O^{180°}$ que quedarà reflectit en la taula de la manera següent:

°	***Id***	$\boldsymbol{S_r}$	$\boldsymbol{S_s}$	$G_O^{180°}$
Id	*Id*	S_r	S_s	$G_O^{180°}$

$\circ$	***Id***	$\boldsymbol{S_r}$	$\boldsymbol{S_s}$	$G_O^{180°}$
$\boldsymbol{S_r}$	S_r	*Id*	$G_O^{180°}$	
$\boldsymbol{S_s}$	S_s		*Id*	
$G_O^{180°}$	$G_O^{180°}$			*Id*

Si fem $G_O^{180°}$ amb la S_r obtenim el gir S_s, y si fem S_r amb la S_s, obtenim el gir $G_O^{180°}$:

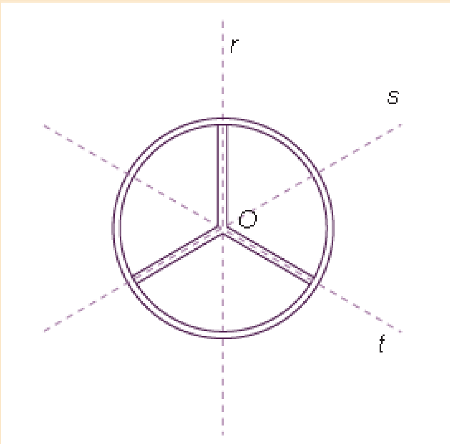
$\circ$	***Id***	$\boldsymbol{S_r}$	$\boldsymbol{S_s}$	$G_O^{180°}$
Id	*Id*	S_r	S_s	$G_O^{180°}$
$\boldsymbol{S_r}$	S_r	*Id*	$G_O^{180°}$	S_s
$\boldsymbol{S_s}$	S_s	$G_O^{180°}$	*Id*	
$G_O^{180°}$	$G_O^{180°}$			*Id*

La resta de la taula s'obté fent les composicions $S_s \circ G_O^{180°} = S_r$, $G_O^{180°} \circ S_r = S_s$, $G_O^{180°} \circ S_s = S_r$, de manera que la taula, finalment, queda:

$\circ$	***Id***	$\boldsymbol{S_r}$	$\boldsymbol{S_s}$	$G_O^{180°}$
Id	*Id*	S_r	S_s	$G_O^{180°}$
$\boldsymbol{S_r}$	S_r	*Id*	$G_O^{180°}$	S_s
$\boldsymbol{S_s}$	S_s	$G_O^{180°}$	*Id*	S_r
$G_O^{180°}$	$G_O^{180°}$	S_s	S_r	*Id*

Encara que hem pres moltes precaucions en l'ordre amb què hem fet les operacions, s'observa que, en aquest cas, el grup és commutatiu; és a dir, que l'ordre en les composicions no importa. Es pot comprovar ràpidament la commutativitat observant la simetria de la matriu de les composicions.

Exemple 2



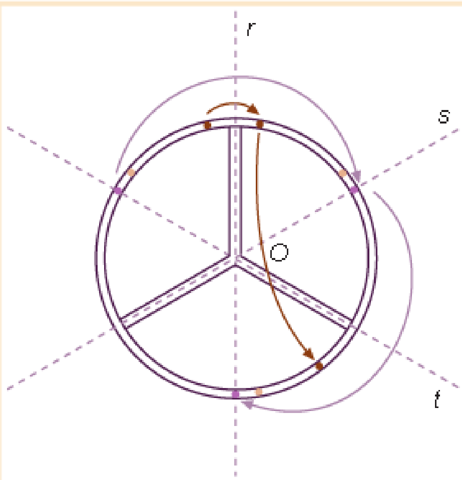
Estudiem el grup de simetria d'aquesta figura

Com en l'exemple anterior, comencem per identificar quines isometries deixen la figura invariant. En aquest cas, són les tres simetries d'eixos les rectes *r*, *s*, *t*, a part, és clar, de l'aplicació identitat. Quant a girs, tenim els girs $G_O^{120°}, G_O^{240°}$ de centre *O* i angle 120° i 240°, respectivament. El càlcul de la taula de composició ens permetrà veure si per composició ens hem oblidat alguna isometria que deixi la figura fixa i que s'obtingui per composició de les anteriors:

°	***Id***	S_r	S_s	S_t	$G_O^{120°}$	$G_O^{240°}$
Id	*Id*	S_r	S_s	S_t	$G_O^{120°}$	$G_O^{240°}$
S_r	S_r	*Id*	$G_O^{240°}$	$G_O^{120°}$	S_t	S_s
S_s	S_s	$G_O^{120°}$	*Id*	$G_O^{120°}$	S_r	S_t
S_t	S_t	$G_O^{240°}$	$G_O^{240°}$	*Id*	S_s	S_r
$G_O^{120°}$	$G_O^{120°}$	S_s	S_t	S_r	$G_O^{240°}$	*Id*
$G_O^{240°}$	$G_O^{240°}$	S_t	S_r	S_s	*Id*	$G_O^{120°}$

Vegem, per exemple, per què $G_O^{120°} \circ S_r = S_s$, en què obtenim la imatge d'uns punts:

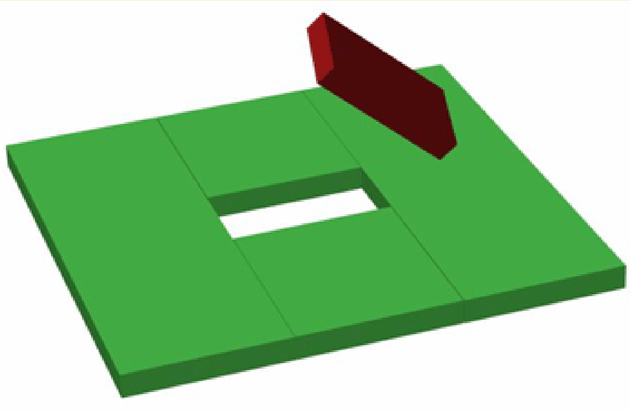
La composició d'una simetria amb un gir és una altra simetria



De l'observació de la taula es pot deduir quina és la isometria inversa de cada element del grup. De cada simetria, la inversa és ella mateixa i, dels girs, l'un és invers de l'altre, això és $(G_O^{120^\circ})^{-1} = G_O^{240^\circ}$, $(G_O^{240^\circ})^{-1} = G_O^{120^\circ}$.

També s'observa que el grup no és commutatiu, ja que, per exemple, $S_r \circ S_s \neq S_s \circ S_r$.

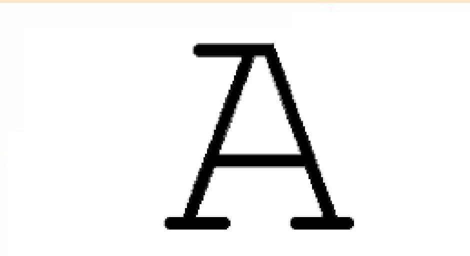
Si pensem la figura retallada en una matriu de cartró, el grup de les isometries ens proporciona les diferents maneres de tornar a encaixar la figura en aquesta matriu.



El grup de simetria d'un rectangle té tants elements com maneres possibles de tornar a col·locar aquest rectangle retallat a la seva posició original.

Com més simètrica sigui la figura, més possibilitats tindrem de fer-ho. Per aquest motiu, com més gran sigui el grup de simetria, més simètrica és la figura. Així, dels dos exemples exposats de grups de simetria d'una figura, el segon correspon a una figura més simètrica que el primer. Es pot donar el cas extrem en el qual el grup de simetria sigui format només per la isometria identitat, és a dir, que a la figura no s'hi observa cap simetria. Aquest és el cas, per exemple, de la lletra A majúscula de la font Kids:

Lletra A majúscula del tipus de lletra Kids



Exemple 3

Algunes figures planes poden tenir un grup de simetria amb moviments infinits. El cas més simple és el d'un cercle o, d'una manera anàloga, la figura següent, composta per uns cercles concèntrics. Aquesta figura queda fixa per qualsevol gir de centre dels cercles, sigui quin sigui l'angle de gir. A més, qualsevol simetria axial deixarà aquesta figura fixa si el seu eix passa pel centre.

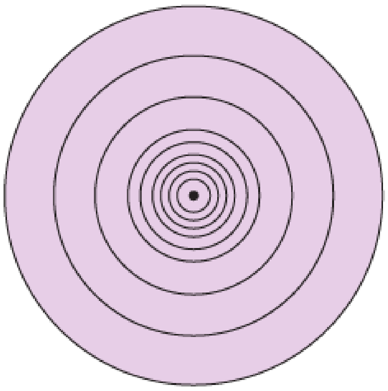
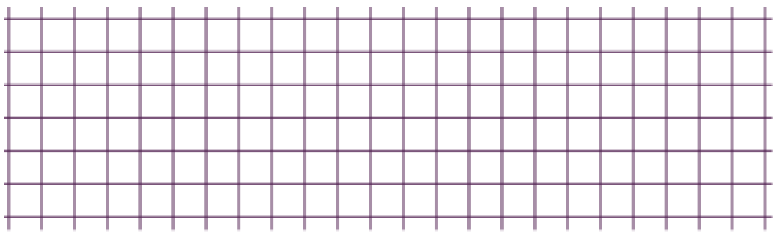


Figura amb infinites isometries que la deixen invariant, tant girs com simetries axials.

Exemple 4

La quadrícula infinita següent també té un grup de simetria amb elements infinits. En aquest cas, a més de girs i simetries, tindrem translacions. Les translacions que deixen aquesta figura fixa són les translacions que porten un vèrtex a un vèrtex. Qualsevol gir centrat en un vèrtex de la quadrícula d'angle 90°, 180° i 270° també deixarà la quadrícula fixa. Finalment, hem de considerar totes les simetries els eixos de les quals siguin: una recta de la mateixa quadrícula, una recta que passi pels centres dels quadrats d'una mateixa fila o una mateixa columna i, finalment, una recta diagonal a un quadrat de la quadrícula.



Suposeu que aquesta quadrícula s'estén de manera infinita cobrint tots els plans. El seu grup de simetria té infinits elements.

Exercici 1

Trobeu el grup de simetria de la lletra A majúscula de l'Arial Narrow:

Solució:

Identifiquem les isometries que deixen la figura invariant:

- La identitat Id.
- La simetria respecte l'eix vertical Sv.
- Cap gir.

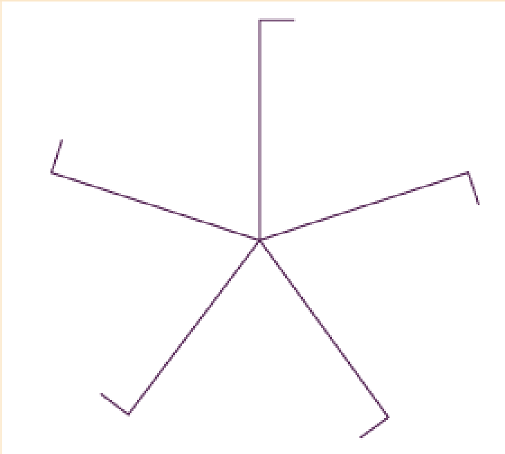
Discutim si la composició d'aquestes isometries ens en produeix alguna que no hàgim considerat:

	Id	**Sv**
Id	Id° Id = Id	Sv° Id = Sv
Sv	Id° Sv = Sv	Id

És grup diedral amb 1 gir (la identitat) i 1 simetria.

Exercici 2

Trobeu el grup de simetria de la figura del pla següent:



Solució:

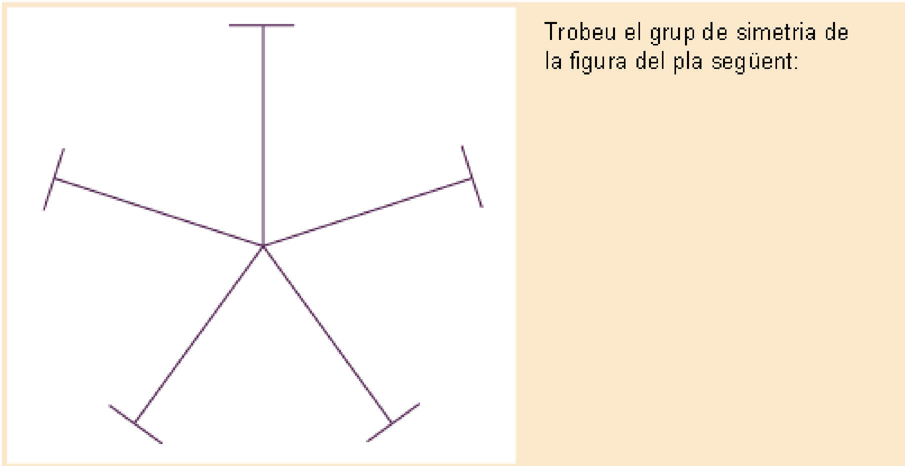
Identifiquem les isometries que deixen la figura invariant:

- La identitat Id.
- Cap simetria.
- Els girs de 72, 144, 216, 288 graus.

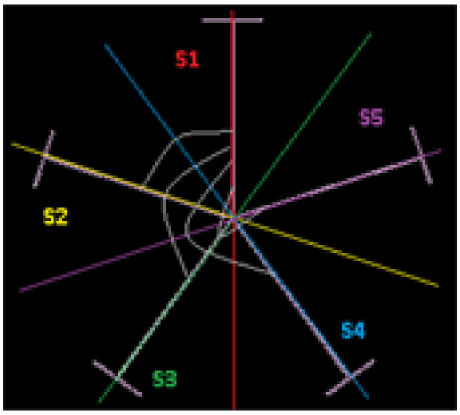
	Id	**G72**	**G144**	**G216**	**G288**
Id	Id° Id = Id	G72° Id = G72	G144° Id = G144	G216° Id = G216	G288° Id = G288
G72	Id° G72 = G72	G72° G72 = G144	G144° G72 = G216	G216° G72 = G288	G288° G72 = Id
G144	Id° G144 = G144	G72° G144 = G216	G144° G144 = 288	G216° G144 = Id	G288° G144 = G72
G216	Id° G216 = G216	G72# G216 = G288	G144° G216 = Id	G216° G216 = G72	G288° G216 = G144
G288	Id° G288 = G288	G72° G288 = Id	G144° G288 = G72	G216° G288 = G144	G288° G288 = G216

No és grup diedral, és cíclic d'ordre 5.

Exercici 3



Solució:



Identifiquem les isometries que deixen la figura invariant:

- La identitat Id.
- Cinc simetries S1,S2,S3,S4,S5.
- Els girs de 72, 144, 216, 288 graus.

Discutim si la composició d'aquestes isometries ens en produeix alguna que no hàgim considerat:

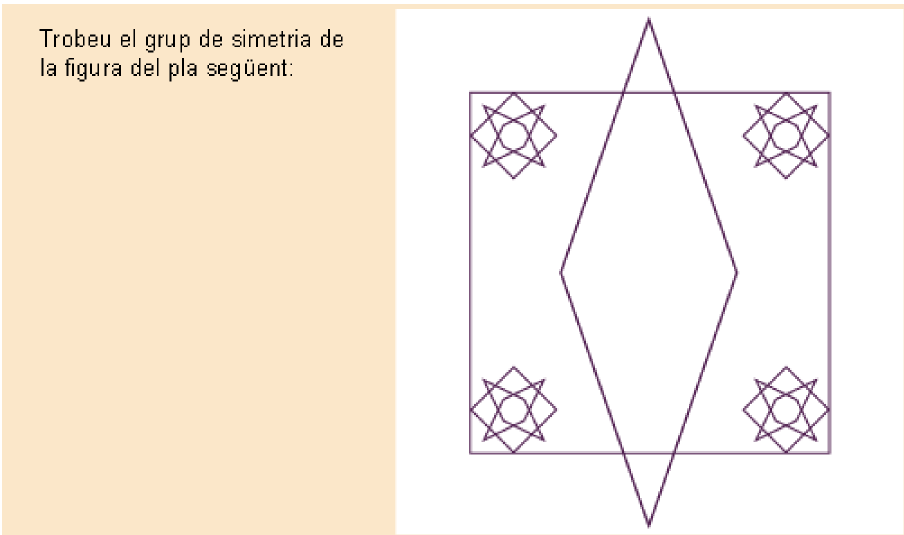
	Id	**G72**	**G144**	**G216**	**G288**	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**
Id	Id° Id = Id	G72° Id = G72	G144° Id = G144	G216° Id = G216	G288° Id = G288	S1° Id = S1	S2° Id = S2	S3° Id = S3	S4° Id = S4	S5° Id = S5
G72	Id° G72 = G72	G72° G72 = G144	G144° G72 = G216	G216° G72 = G288	G288° G72 = Id	S1° G72 = S3	S2° G72= S4	S3° G72 = S5	S4 ° G72 = S1	S5° G72 = S2
G144	Id° G144 = G144	G72° G144 = G216	G144° G144 = 288	G216° G144 = Id	G288° G144 = G72	S1° G144 = S5	S2° G144 = S1	S3° G144 = S2	S4° G144 = S3	S5° G144 = S4
G216	Id° G216 = G216	G72° G216= G288	G144° G216 = Id	G216° G216 = G72	G288° G216 = G144	S1° G216= S2	S2° G216 = S3	S3° G216 = S4	S4° G216 = S5	S5° G216 = S1

	Id	G72	G144	G216	G288	S1	S2	S3	S4	S5
G288	Id° G288 = G288	G72° G288 = Id	G144° G288 = G72	G216° G288 = G144	G288° G288 = G216	S1° G288 = S4	S2° G288 = S5	S3° G288 = S1	S4° G288 = S2	S5° G288 = S3
S1	Id° S1 = S1	G72° S1 = S4	G144° S1 = S2	G216° S1 = S5	G288° S1 = S3	S1° S1 = Id	S2° S1 = G144	S3° S1 = G288	S4° S1 = G72	S5° S1 = G216
S2	Id° S2 = S2	G72° S2 = S5	G144° S2 = S3	G216° S2 = S1	G288° S2 = S4	S1° S2 = G216	S2° S2 = Id	S3° S2 = G144	S4° S2 = G288	S5° S2 = G72
S3	Id° S3 = S3	G72° S3 = S1	G144° S3 = S4	G216° S3 = S2	G288° S3 = S5	S1° S3 = G72	S2° S3 = G216	S3° S3 = Id	S4° S3 = G144	S5° S3 = G288
S4	Id° S4 = S4	G72° S4 = S2	G144° S4 = S5	G216° S4 = S3	G288° S4 = S1	S1° S4 = G288	S2° S4 = G72	S3° S4 = G216	S4° S4 = Id	S5° S4 = G144
S5	Id° S5 = S5	G72° S5 = S3	G144° S5 = S1	G216° S5 = S4	G288° S5 = S2	S1° S5 = G144	S2° S5 = G288	S3° S5 = G72	S4° S5 = G216	S5° S5 = Id

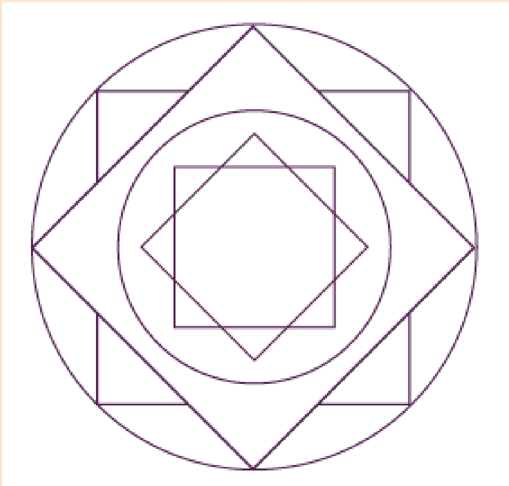
És grup diedral amb 5 girs (comptant la identitat) i 5 simetries.

Fixeu-vos que si no haguéssim pensat en la simetria S2, en calcular G144° S1 hauríem obtingut aquesta isometria, i l'hauríem hagut d'afegir a la taula.

Exercici 4



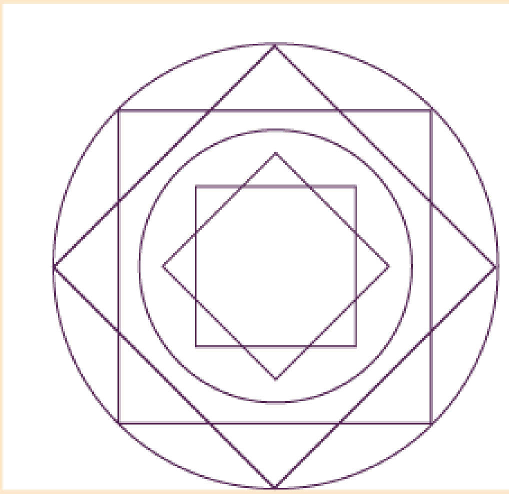
Exercici 5



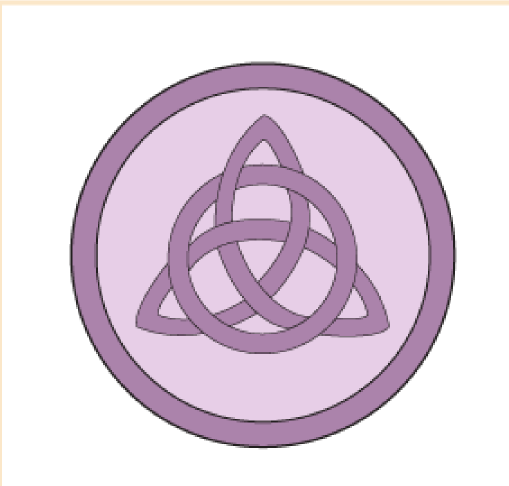
Trobeu el grup de simetria de la figura del pla següent:

Exercici 6

Trobeu el grup de simetria de la figura del pla següent:



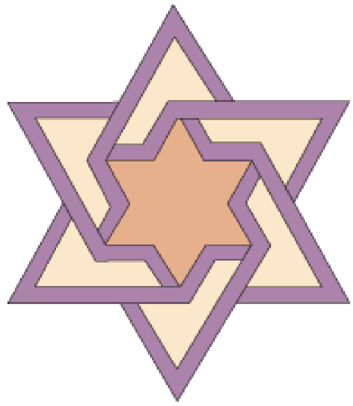
Exercici 7



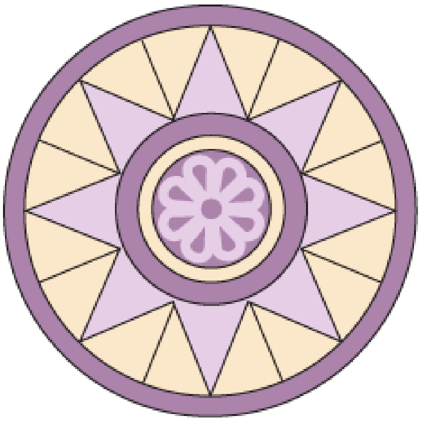
Trobeu el grup de simetria del dibuix següent (entenent que una isometria del pla deixa un dibuix fix si tampoc no canvia els colors):

Exercici 8

Trobeu el grup de simetria del dibuix següent (entenent que una isometria del pla deixa un dibuix fix si tampoc no canvia els colors):



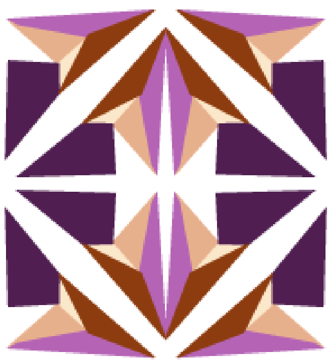
Exercici 9



Trobeu el grup de simetria del dibuix següent (entenent que una isometria del pla deixa un dibuix fix si tampoc no canvia els colors):

Exercici 10

Trobeu el grup de simetria del dibuix següent (entenent que una isometria del pla deixa un dibuix fix si tampoc no canvia els colors):

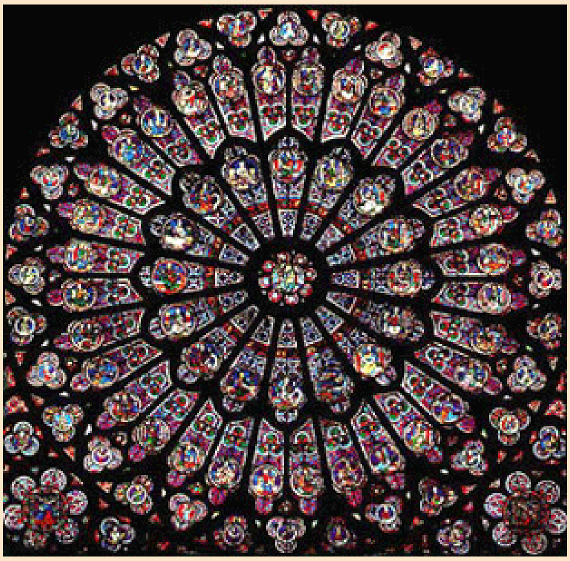


3.2. Rosasses

Quan el grup de simetria d'una figura és finit, se solen destacar dues grans famílies: els anomenats grups cíclics i els grups diedrals. En aquest cas, totes les figures tindran sempre un punt fix. Els **grups cíclics** són els formats únicament per un gir i les seves composicions. Es denominen cíclics perquè, a partir d'un gir, es pot generar tot el grup d'una manera cíclica a força d'efectuar composicions successives d'aquest gir elemental. Els **grups diedrals** són els que són formats per girs i simetries. Es pot justificar que en un grup diedral sempre coincideix el nombre de girs i el nombre de simetries. Aquestes dues grans famílies de grups es denominen conjuntament **grups puntuals de simetria** o **grups de simetria de Leonardo**, nom posat en honor a Leonardo da Vinci, que els va estudiar i els va utilitzar en el disseny arquitectònic de plantes de capelles. Els grups de simetria de Leonardo són els únics que tenen en comú la propietat següent: tot grup de Leonardo és un grup finit i totes les isometries del grup tenen un punt fix comú. En disseny, es pot destacar un punt determinat fent que sigui el punt fix comú de les isometries. Entre els exemples i exercicis es poden distingir grups de simetria puntual.

Els dissenys en forma de rosassa s'han utilitzat molt sovint en la història de l'art. Una **rosassa** és formada per un patró que es repeteix per mitjà d'un gir de centre fixat i de manera que les successives repeticions recobreixin un cercle sense solapaments i sense deixar espais entre ells. Destaquen per la seva bellesa la utilització de rosasses en mosaics grecs i romans, i també en vidrieres d'esglésies gòtiques.

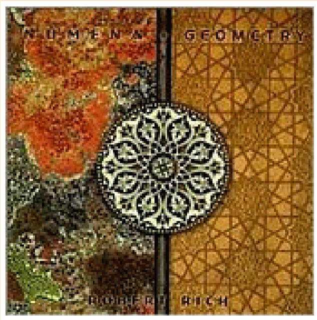
Rosassa



Vitrall gòtic

Actualment podem trobar exemples de dissenys inspirats en els dissenys clàssics en forma de rosassa. Per exemple, en la portada del disc Numena & Geometry, que el dissenyador Ferenc Dobronyi va fer per al treball del músic de New Age, Robert Rich, es combina una rosassa amb un mosaic de clara inspiració àrab:

Portada del disc *Nurena & Geometry*, dissenyat per Ferenc Dobrony



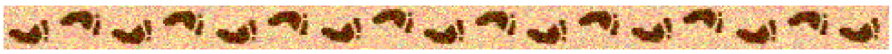
Activitat

Exercici

Doblegant un paper diverses vegades, mantenint el centre al plec, se'n poden retallar les vores de manera que, en desplegar-lo, obtenim una rosassa. Experimenteu amb diferents retalls i estudieu quins grups de simetria tenen aquestes rosasses depenent del retall que es produeixi.

3.3. Frisos i sanefes

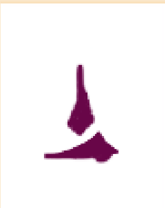
Un element decoratiu molt utilitzat en disseny gràfic i en disseny arquitectònic és el **fris** o **sanefa**. Es tracta del disseny d'una banda rectangular produïda per repetició d'un cert motiu que usa determinades isometries. L'ús d'un conjunt d'isometries determinat conferirà un cert ritme i disseny a la sanefa.



Un exemple és aquest fris utilitzat com a separador en pàgines web.

Per a omplir una banda infinita, podem utilitzar algunes isometries del pla. Les úniques translacions possibles han de seguir la direcció de la banda i la seva longitud coincidirà amb la longitud del patró. Els eixos de les simetries només podran ser la recta que segueix la direcció i que es troba en posició central a la banda (eix central de la banda) i les rectes perpendiculars a aquesta, que parteixen el patró simètricament. Els girs hauran de ser de 180°, i els seus centres s'escolliran sobre l'eix central. Finalment, també podrem utilitzar lliscaments, que s'obtenen a partir d'una simetria respecte de l'eix central i una translació paral·lela a la banda amb longitud del vector de translació igual que la meitat de la longitud del patró.

Amb totes aquestes restriccions, resulta que, pel cap alt, es poden crear **set frisos diferents** a partir d'un patró qualsevol, sense tenir en compte la coloració del patró. Fem una descripció dels set possibles grups que podem utilitzar per a construir frisos a partir del patró següent, que no té cap tipus de simetria:



Patró sense cap tipus de simetria

WEB

Recurs interactiu
accessible només al web.

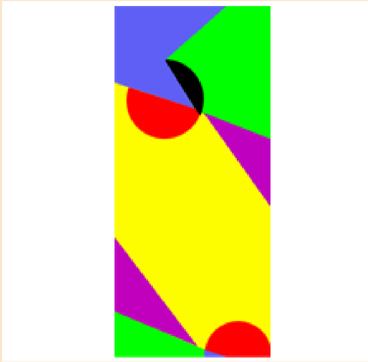
En estudiar el grup de simetria d'aquests frisos, s'observa que coincideixen amb el conjunt d'isometries utilitzades per a construir-lo.

Es verifica que aquests grups són els únics grups de simetria que deixen la recta central de la sanefa fixa i, alhora, les úniques translacions que contenen són una translació unitat fixada (en la direcció de la banda) i la seva repetició consecutiva.

L'estudi de quines isometries es poden utilitzar per a dissenyar sanefes, això és, per a omplir una banda infinita amb un motiu usant isometries, demostra que només es poden utilitzar les isometries corresponents a un dels set grups de simetria determinats: els set grups de frisos.

Creem totes les sanefes possibles a partir del patró següent:

Frisos i sanefes



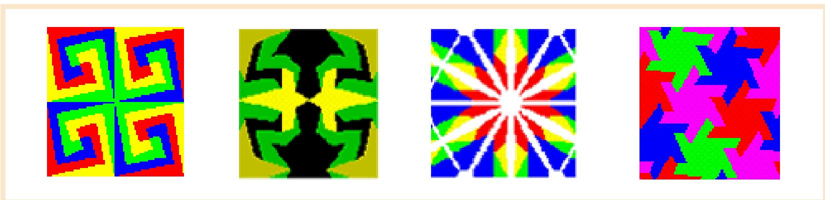
Aquest patró no té cap tipus de simetria, amb la qual cosa podrem crear set sanefes diferents. Seguint el mateix ordre amb què s'han presentat abans les sanefes en construirem totes les possibles:

WEB
Recurs interactiu accessible només al web.

WEB
Recurs interactiu accessible només al web.

Activitat

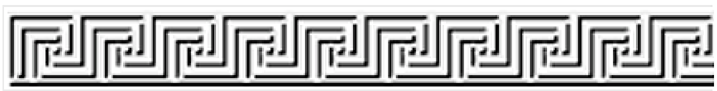
Construïu totes les sanefes possibles amb els patrons següents. En cada cas, comenteu el nombre de sanefes diferents obtingudes tenint en compte la simetria del patró.



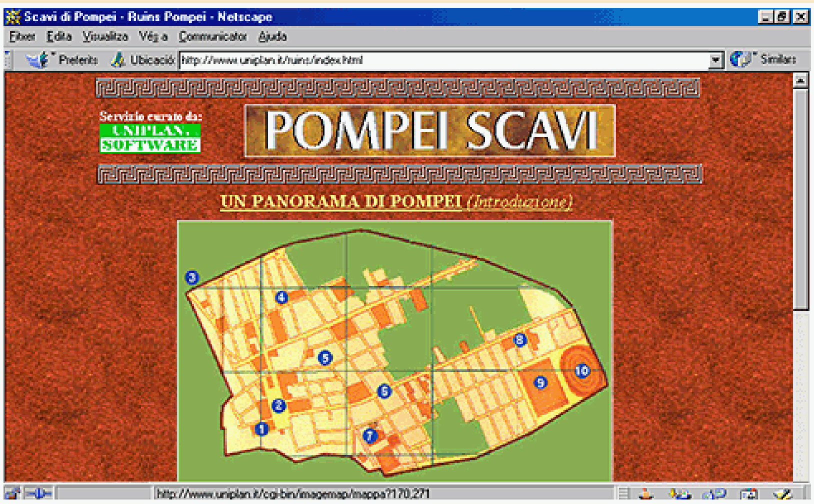
Aquests motius han estat utilitzats àmpliament en l'art des de l'antiguitat. De fet, el nom de **grup dels frisos** és motivat per l'ús que es fa en el disseny dels frisos arquitectònics. L'ús de sanefes en disseny gràfic també ha estat utilitzat profusament. Aquests motius han estat utilitzats per a limitar el pas d'un element artístic a un altre o, simplement, per a delimitar-lo.

La sanefa s'utilitza per a limitar la portada d'un llibre.

L'ús a Internet de les sanefes està molt estès, ja sigui per a remarcar títols, encapçalaments o les mateixes pàgines. Per exemple, s'ha utilitzat la sanefa:



per destacar el títol de la pàgina web següent:



Més exemples de frisos i sanefes a:

http://library.thinkquest.org/16661/gallery/thumbnails.html
Celtes: http://sd.znet.com/~wchow/j32.htm
Interactives en JAVA:
http://home6.inet.tele.dk/bergmann/10galleri/idx10.htm#Galleriet

Activitat

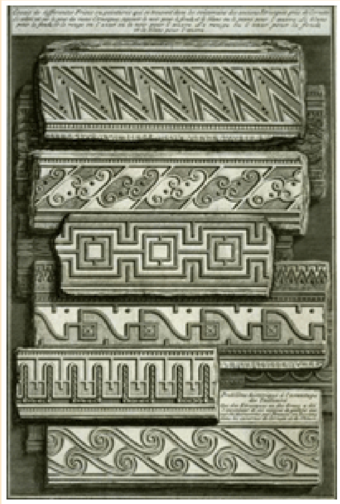
Exercici 1

Doblegant una banda paper en forma d'acordió, retalleu-ne les vores de manera que, en desplegar-la, obtinguem una sanefa. Experimenteu amb diferents retalls i estudieu quins tipus de sanefes es poden obtenir segons el retall que es produeixi.

Exercici 2

Identifiqueu el patró i el grup de simetria amb què s'ha construït cadascuna de les sanefes següents:

Detalls de pintures etrusques reproduïdes per Giovanni Batista Piranesi (1720-1778) en un llibre de 1765.



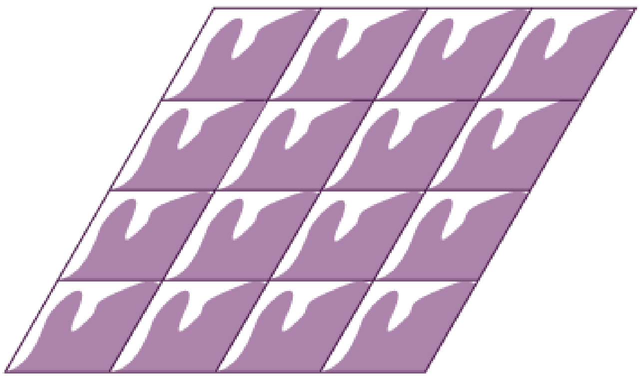
3.4. Mosaics

A les rosasses i als frisos, es pretén omplir un cercle o una banda infinita per mitjà d'un patró i la seva imatge, per un conjunt d'isometries. Quan volem omplir tot el pla a partir d'un patró elemental i un conjunt d'isometries prefixades, obtenim un **mosaic**. Evidentment, per tal d'omplir correctament el pla, ho farem de manera que no quedin forats ni es produeixin solapaments entre les còpies del patró.

Les isometries que podrem utilitzar per a crear un mosaic queden fixades de manera anàloga a les sanefes. En aquest cas, podrem usar translacions amb dues direccions principals de longituds dependents del patró, juntament amb totes les translacions que s'obtenen a partir de les repetides composicions d'aquestes dues. Quant als girs, es pot demostrar que els únics possibles són els girs de 60°, 90°, 120°, 180° i 240°. Aquesta afirmació rep el nom de **restricció cristal·logràfica**, a causa de la seva aplicació en aquest camp. Quant a simetries, tindrem diversos eixos que podrem triar per a la creació del mosaic. Finalment, també es podran utilitzar alguns lliscaments. Per a crear qualsevol mosaic, començarem usant simetries, girs o lliscaments fins a crear un primer paral·lelogram, que estendrem per tot el pla amb translacions.

Estudiant detalladament els grups de simetria de tots els mosaics que es poden crear a partir d'un patró sense simetries, es pot veure que **només hi ha disset grups d'isometries per a construir mosaics**, sense tenir en compte la coloració del patró. Cadascun d'aquests disset grups rep un nom que va ser assignat l'any 1952 per la Unió Internacional de Cristal·lografia, ja que, com hem comentat, també apareixen en la cristal·lització dels minerals. Per a crear un mosaic, cal prendre un patró i aplicar-hi les isometries d'un d'aquests disset grups i omplir un paral·lelogram que, per repetició, s'estendrà per tot el pla.

Descriguem dos d'aquests disset grups. El més simple de tots és el que només utilitza les translacions. Per a això, n'hi ha prou amb escollir un patró i fixar dues direccions de translació. Aquestes dues direccions crearan una malla al mosaic formada per paral·lelograms, que denominarem **malla fonamental**.

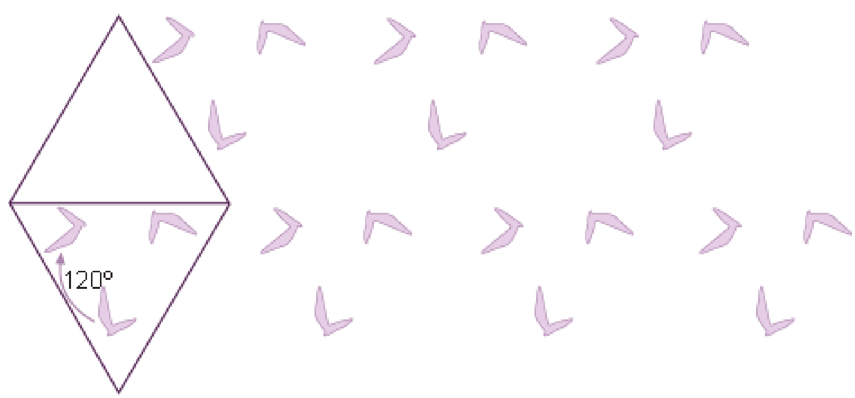


Mosaic creat a partir d'un patró amb la utilització de les dues translacions i girs de 120°

Aquesta és la forma de creació de mosaics més simple i la que usa el llenguatge HTML per a crear fons en pàgines web. En el cas de fons per a pàgines web, el patró sempre serà de forma rectangular i les translacions que s'usen seran verticals i horitzontals, seguint els costats del patró.

Presentem un altre dels disset grups per a construir mosaics. Si usem algun dels girs possibles per a mosaics, llavors podrem crear mosaics d'un altre tipus. En l'exemple següent s'ha aplicat al patró un gir de 120° i de 240°, i no s'ha aplicat cap simetria ni lliscament. Amb això hem creat un paral·lelogram que, per translació, recobrirà tot el pla.

Una vegada hàgim construït el mosaic, podem comprovar que el seu grup de simetria únicament conté translacions i girs de 120° i 240°, però no conté ni simetries ni lliscaments.



Mosaic creat a partir d'un patró amb la utilització de dues translacions i girs de 120°

Web complementari

Per tal de veure amb detall la construcció per mitjà dels disset grups d'isometries de mosaics, es pot consultar la pàgina:

http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/wallpaper.html

Altres dels disset grups usen girs de 60°, 90° o 180°; introduint simetries o lliscaments obtindrem els disset grups de simetria dels mosaics. Evidentment, el grup de simetria del mosaic que s'obté coincideix sempre amb el grup que s'ha utilitzat per a construir-lo.

Sembla ser que els àrabs coneixien bé la construcció de mosaics geomètrics; prova d'això és l'aparició dels disset grups de simetria en els diferents mosaics de l'Alhambra de Granada. Els mosaics amb motius geomètrics són utilitzats àmpliament en l'arquitectura àrab, ja que la seva religió prohibeix la utilització de figures humanes a les seves mesquites.

Si a més s'acoloreixen els mosaics, el seu estudi geomètric es complica en excés i llavors ja no tenim solament els disset grups de simetria, sinó molts més.

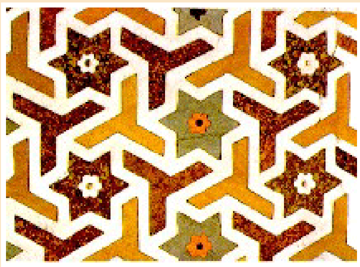
Activitat

Exercici 1

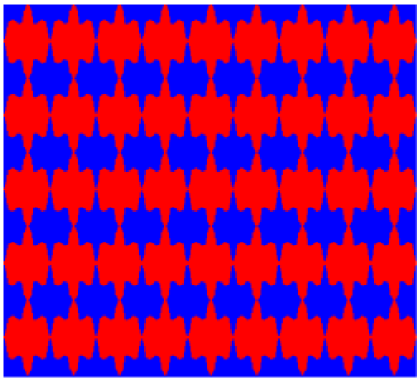
Aquests tres mosaics pertanyen a l'Alhambra de Granada. Feu un estudi de quins han estat els grups de simetria que s'han utilitzat per a crear-los.

Exercici 2

Sense tenir en compte el color d'aquest mosaic, feu una descripció de les isometries del seu grup de simetria.



Exercici 3



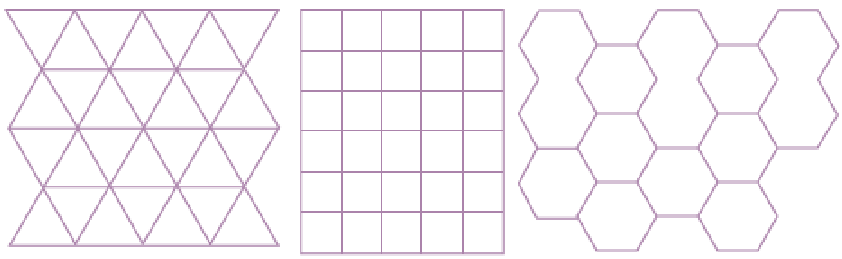
Descriviu el grup de simetria del mosaic:

Exercici 4

Construïu un patró qualsevol i creeu un mosaic usant com a base girs de 120° i 240° i translacions.

3.5. Mosaics regulars i semiregulars

Independentment del patró que vulguem usar per a crear un mosaic, podem pensar quines peces seran aptes per a omplir tot el pla. El més lògic és intentar-ho fer amb totes les peces iguals i regulars. Quan un mosaic és format per polígons regulars, es diu que el **mosaic és regular**. Un **polígon regular** és una figura plana formada per un determinat nombre de costats, tots de la mateixa longitud i amb els angles interiors iguals. Així, tenim triangles equilàters, quadrats, pentàgons regulars, hexàgons regulars, etc.

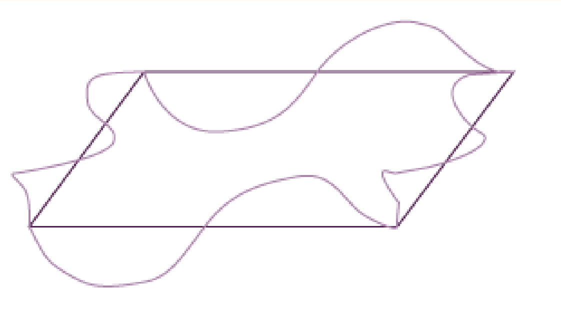


Observant els angles interiors dels polígons regulars, es poden veure que els únics aptes per a la construcció de mosaics són els triangles equilàters, els quadrats i els hexàgons.

En el cas d'acceptar més d'un tipus diferent de polígons en un mateix mosaic, es poden crear vuit tipus de mosaics diferents: usant hexàgons i triangles; octàgons i quadrats; dodecàgons i triangles; hexàgons, quadrats i triangles; etc. Aquests són els anomenats **mosaics semiregulars**.

3.6. Mosaics de M. C. Escher

L'artista holandès M. C. Escher, després d'estudiar els disset grups de simetria de mosaics en els dissenys de les rajoles de l'Alhambra de Granada, va crear els seus propis mosaics, en els quals el patró generador era sotmès a una sèrie de transformacions. Per exemple, escollint un paral·lelogram, Escher aplica el criteri que tota part retallada en un costat es trasllada paral·lelament al costat oposat paral·lel.



D'aquesta manera aconseguim crear peces que no són paral·lelograms però que encaixen perfectament entre si i amb les quals també podem recobrir tot el pla.

Una altra possibilitat per a crear mosaics tipus Escher és considerar una malla de triangles, amb els quals també es pot recobrir tot el pla. A cadascun dels triangles, s'hi aplica la modificació següent. Es determina el punt mitjà de cadascun dels seus tres costats; des d'aquest punt fins a un dels seus vèrtexs es retalla un tros de la peça triangular, i mitjançant un gir de 180° respecte al centre d'aquest costat, s'afegeix la part retallada en aquest mateix costat. Així, obtenim peces que també són aptes per a omplir tot el pla. Escher va inventar diverses tècniques per a crear mosaics amb aquests mateixos trucs, però introduint simetries, girs o lliscaments als retalls que feia a cadascuna de les peces bàsiques que usava.

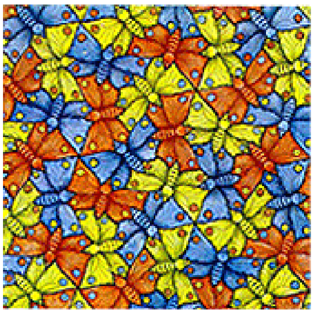
Web complementari

Més informació sobre l'obra de M. C. Escher a:

http://www.WorldOfEscher.com
http://www.mcescher.com
http://www.sfc.keio.ac.jp/~aly/escher/

Fish & Boats

Sky & Water



Symmetry E70

La majoria dels mosaics que va crear Escher formen part d'algunes de les seves obres d'art, de manera que es poden observar mosaics que formen part de pintures i dibuixos d'aquest autor.

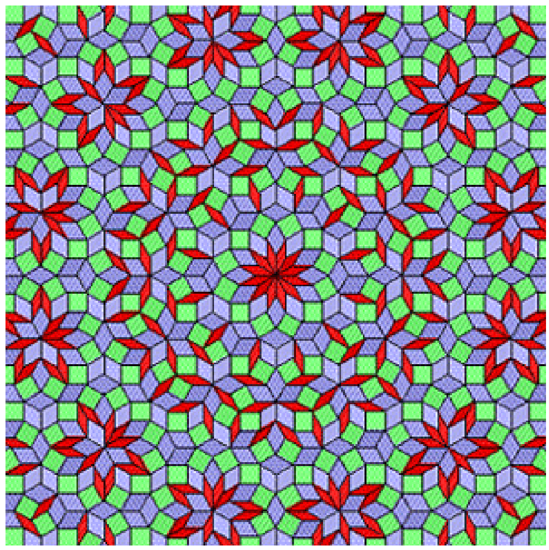
Activitat

Exercici

Creeu un mosaic amb un dels dos procediments descrits per als mosaics d'Escher.

3.7. Mosaics de Penrose

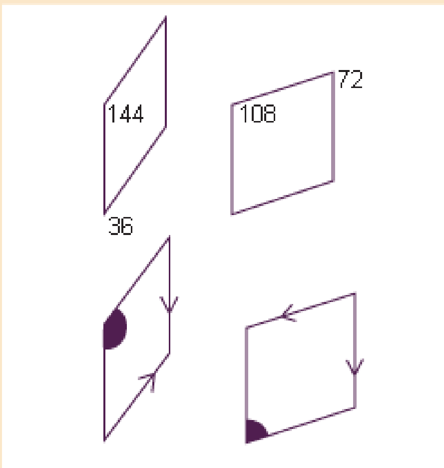
Mosaic de Penrose



Un tipus de mosaics que no són periòdics, en el sentit que el seu grup de simetria no inclou translacions, són els anomenats **mosaics de Penrose**. A part de la bellesa d'aquests mosaics, la seva complexa estructura geomètrica és utilitzada en l'estudi cristal·logràfic dels quasicristalls (una nova classe de materials d'alta tecnologia descoberts el 1984).

Els mosaics de Penrose van ser inventats pel matemàtic d'Oxford Roger Penrose. De la mateixa manera que els mosaics es construeixen utilitzant un patró i fent-ne còpies per mitjà d'un grup d'isometries, els mosaics de Penrose es poden construir seguint unes regles de formació determinades aplicades a dos patrons.

Els dos patrons són els següents:



És a dir, dos rombes: un de més estret amb angles de 36° i 144°, i un altre de més ample, amb angles de 72° i 108°.
S'han marcat els rombes amb unes fletxes en els costats i un color blanc o negre en els vèrtexs per a descriure més fàcilment les regles de formació.

Les regles per a construir un mosaic de Penrose són les següents:

1) Dos vèrtexs adjacents han de ser del mateix color (o els dos negres o els dos blancs).

2) Dos costats adjacents han de ser blancs els dos o han de tenir dues fletxes que apuntin en el mateix sentit.

Activitat

Exercici

Imprimiu els dos patrons de Penrose tantes vegades com sigui necessari i construïu un mosaic de Penrose utilitzant les regles descrites.

Webs complementaris

Més informació sobre mosaics de Penrose:

http://www.cs.uidaho.edu/~casey931/seminar/rhombs.html

Més informació sobre tot tipus de mosaics a la pàgina:

http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/index.html

Exercicis d'autoavaluació

1. Tenim una aplicació f de la que sabem que $f(1) = 5$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$, $f(5) = 1$. Llavors, $f(f(2))$ és...

a) 1.
b) 4.
c) 3.

2. Tenim una simetria axial del pla i dos punts A i B diferents. Si $S_r(A) = B$, llavors $S_r(B)$ és:

a) A.
b) B.
c) Depèn de quin sigui l'eix de simetria r.

3. La composició de dues simetries axials en el pla respecte d'eixos que formin un angle de 45° és...

a) la identitat.
b) una simetria axial.
c) un gir de 90°.

4. Tenim dos girs de centre O i angles α i β respectivament. La seva composició, en general, és...

a) una simetria.
b) un gir d'angle $\alpha \cdot \beta$.
c) un gir d'angle $\alpha + \beta$.

5. Quina de les afirmacions següents és falsa?

a) L'únic gir que té rectes fixes és el gir de 180°.
b) Les translacions no tenen cap element fix.
c) Una simetria té una sola recta de punts fixos.

6. L'aplicació inversa d'una simetria és...

a) la mateixa simetria.
b) una simetria d'eix perpendicular a l'eix de la simetria donada.
c) un lliscament.

7. Quina de les isometries de l'espai següents **no** té algun pla fix?

a) Simetria especular.
b) Gir axial.
c) Moviment helicoïdal.

8. Un cilindre queda fix per...

a) una translació de vector perpendicular a l'eix del cilindre.
b) un gir d'eix perpendicular al del cilindre.
c) una simetria respecte un pla que contingui l'eix del cilindre.

9. Les úniques isometries del pla que conserven l'orientació són...

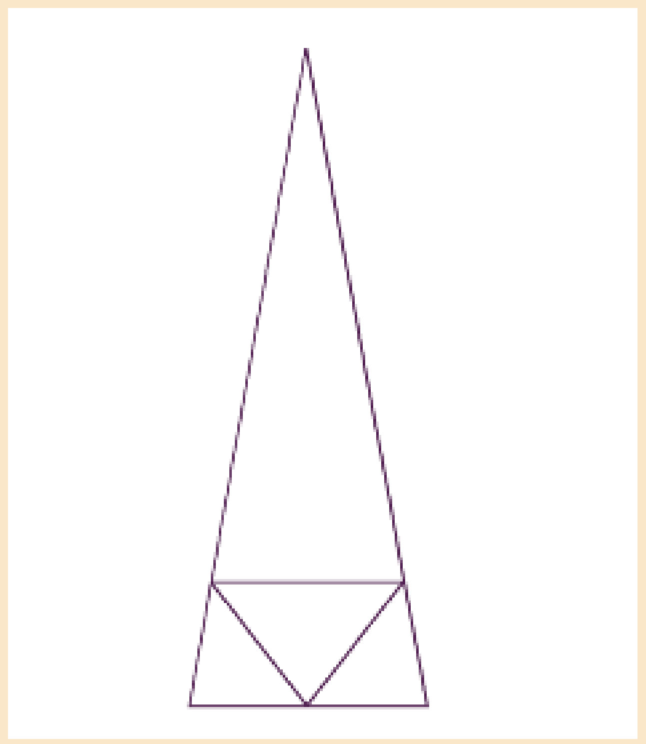
a) els girs i les simetries axials.
b) les translacions i els girs.
c) els lliscaments i les translacions.

10. El grup de simetria d'un quadrat és format per...

a) quatre simetries, tres girs i la identitat.
b) tres simetries, tres girs i la identitat.
c) dues simetries, un gir i la identitat.

11. El grup de simetria de la figura següent:

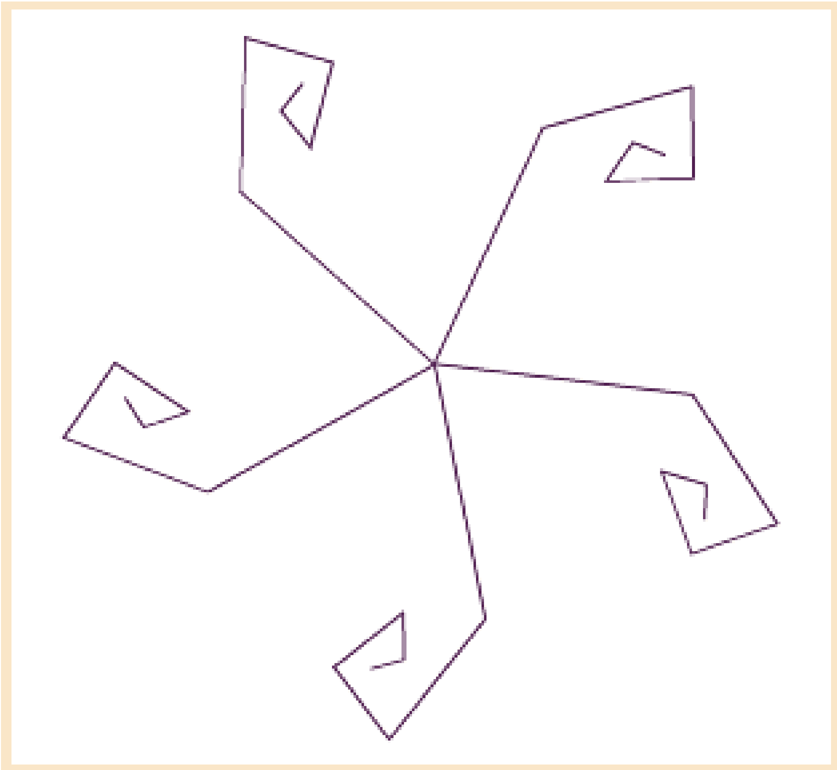
és format per...



a) tres simetries, dos girs i la identitat.
b) tres simetries i la identitat.
c) una simetria i la identitat.

12. El grup de simetria de la figura següent:

és format per...



a) cinc simetries i la identitat.
b) cinc girs i la identitat.
c) quatre girs i la identitat.

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. b
a) Incorrecta. Incorrecte, ja que $f(f(2)) = f(3) = 4$ perquè $f(2) = 3$ i $f(3) = 4$.
c) Incorrecta. Incorrecte, ja que $f(f(2)) = f(3) = 4$ perquè $f(2) = 3$ i $f(3) = 4$.

2. a
b) Incorrecta. Cal tenir en compte que si es fa el simètric d'un punt A i s'obté el punt, llavors el simètric de B és A.
c) Incorrecta. No depèn de quin sigui l'eix de simetria. Feu un dibuix amb una recta qualsevol i un punt A qualsevol.

3. c
a) Incorrecta. Això només ocorre quan es compon una simetria amb si mateixa.
b) Incorrecta. La composició de dues simetries no dóna mai una altra simetria.

4. c
a) Incorrecta. La composició de dos girs no dóna una simetria.
b) Incorrecta. En compondre girs del mateix centre, se sumen els angles.

5. b Aquesta afirmació és la falsa.
a) Incorrecta. Aquesta afirmació és vertadera.
c) Incorrecta. Aquesta afirmació és vertadera.

6. a
b) Incorrecta. Feu un dibuix de la composició de dues simetries d'eixos perpendiculars i comproveu que el resultat no és la identitat.
c) Incorrecta. Repasseu la definició de lliscament per convèncer-vos que no és certa. Teniu en compte que estem parlant d'un lliscament amb vector no nul.

7. c
a) Incorrecta. El pla de simetria és de punts fixos, i els plans perpendiculars al pla de simetria són plans fixos.
b) Incorrecta. Els plans perpendiculars a l'eix de gir són plans fixos.

8. c
a) Incorrecta. Això seria correcte si el vector de translació fos nul, però llavors aquesta isometria és la identitat.
b) Incorrecta. Això seria correcte només si el gir fos d'angle 0°, 180° o els seus múltiples, però no per a un gir en general.

9. b
a) Incorrecta. Les simetries axials no conserven l'orientació.

10. a
c) Incorrecta. Aquestes isometries correspondrien a un rectangle, però no a un quadrat.

11. c
a) Incorrecta. L'únic gir que pot deixar fixa aquesta figura seria de 0°, és a dir, la identitat.
b) Incorrecta. Si una figura admet tres simetries axials en el seu grup de simetria, automàticament ha de tenir les seves composicions i, per tant, tres girs (comptant la identitat com un gir d'angle 0°).

12. c
a) Incorrecta. Aquesta figura no té cap simetria axial en el seu grup de simetria.
b) Incorrecta. L'angle mínim de gir és de $360°/5 = 72°$. Els seus múltiples també donaran girs que deixen aquesta figura fixa. Expliqueu quants n'hi ha.