

Matemàtiques per a multimèdia I

Pere Cruells
Salvador Linares Mustarós
Germán Sáez
Joan Trias Pairó
Queralt Viladevall Valdeperas

PID_00212604

Material docent de la UOC

**Pere Cruells**

Professor de Matemàtiques a l'ETS d'Arquitectura de Barcelona de la UPC, consultor de Matemàtiques a la UOC i professor de matemàtiques a l'Escola de Fotografia de la UPC. Col·labora en projectes d'innovació docent per a l'ensenyament de les matemàtiques i fa cursos de formació a l'Institut de Ciències de l'Educació de la UPC. Ha publicat llibres de matemàtiques per a primers cursos universitaris.

**Salvador Linares Mustarós**

Professor ajudant de la Universitat de Girona. La seva recerca se centra en el camp del tractament de la incertesa, en què s'ha especialitzat en la creació de programes relacionats amb la mineria de dades. Llicenciat en Matemàtiques, col·labora habitualment amb editorials per produir software multimèdia.

**Germán Sáez**

Doctor en Matemàtiques i professor del Departament de Matemàtica Aplicada IV de la UPC. Imparteix docència a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona (UPC). Ha estat consultor dels cursos d'accés per a majors de 25 anys, de l'assignatura d'Àlgebra d'Enginyeria Tècnica d'Informàtica de la UOC i professor de matemàtiques a l'Escola de Fotografia de la UPC. El seu camp de recerca és la criptografia i la seguretat de les comunicacions.

**Joan Trias Pairó**

Doctor en Ciències (matemàtiques) i professor del Departament de Matemàtica Aplicada II de la UPC. Actualment desenvolupa la seva activitat docent a la Facultat d'Informàtica de Barcelona (FIB) i a la EUETIB, d'enginyeria de la UPC. Els seus interessos se centren en la geometria per a gràfics, per a sistemes multimèdia, per a animació 3D i per a desenvolupament de videojocs, i eines d'il·lustració i visualització geomètrica. Formen part també dels seus interessos i activitat docent els fonaments matemàtics, la matemàtica discreta i els problemes de la transició de secundària a la universitat.

Queralt Viladevall Valdeperas

Llicenciada en Belles Arts per la Universitat de Barcelona. Participa habitualment en projectes editorials d'il·lustració i animació per ordinador. Actualment desenvolupa un projecte propi sobre la incorporació d'elements de lògica borrosa en l'art conceptual.

La revisió d'aquest material docent ha estat coordinada per la professora: M. Antonia Huertas Sánchez (2014)

Segona edició: setembre 2014

© Pere Cruells, Salvador Linares Mustarós, Germán Sáez, Joan Trias Pairó, Queralt Viladevall Valdeperas

Tots els drets reservats

© d'aquesta edició, FUOC, 2014

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona

Disseny: Manel Andreu

Realització editorial: Oberta UOC Publishing, SL

Dipòsit legal: B-16.546-2014

Cap part d'aquesta publicació, incloent-hi el disseny general i la coberta, no pot ser copiada, reproduïda, emmagatzemada o transmesa de cap manera ni per cap mitjà, tant si és elèctric com químic, mecànic, òptic, de gravació, de fotocòpia o per altres mètodes, sense l'autorització prèvia per escrit dels titulars del copyright.

Continguts

Mòdul didàctic 1

Flash CS4 per a l'animació i el grafisme digital

Salvador Linares Mustarós i Queralt Viladevall Valldeperas

1. Animació en Flash i fotogrames
2. Capes
3. Pel·lícules dins de pel·lícules
4. Botons i camps de text
5. Action

Mòdul didàctic 2

Teoria de nombres per a disseny

Salvador Linares Mustarós

1. Tipus de nombres
2. Exercicis amb solució

Mòdul didàctic 3

Trigonometria aplicada al disseny gràfic

Salvador Linares Mustarós

1. Conceptes bàsics
2. Exercicis amb solució

Mòdul didàctic 4

Disseny i proporció

Pere Cruells

1. El concepte de *proporció*
2. Proporcions racionals i proporcions \sqrt{n}
3. El nombre d'or i aplicacions

Mòdul didàctic 5

Geometria fractal

Pere Cruells i Germán Sáez

1. Introducció a la geometria fractal
2. Dimensió fractal i altres construccions fractals

Mòdul didàctic 6

Matrius en el grafisme digital i en el desenvolupament de webs

Salvador Linares Mustarós

1. Conceptes bàsics
2. Exercicis amb solució

Mòdul didàctic 7

Simetria i disseny

Pere Cruells i Germán Sáez

1. Aplicacions del pla
2. Isometries del pla
3. Simetria de figures, sanefes i mosaics

Mòdul didàctic 8

Grafisme digital 2D i 3D

Salvador Linares Mustarós

1. Conceptes bàsics
2. Exercicis amb solució

Mòdul didàctic 9

Annex 1. Aspectes bàsics i sistemes de coordenades

Joan Trias Pairó

1. Aspectes bàsics
2. Sistemes de coordenades
3. Alguns objectes geomètrics

Mòdul didàctic 10

Annex 2. Transformacions geomètriques

Joan Trias Pairó

1. Geometria mètrica
2. Transformacions geomètriques 2D
3. Transformacions geomètriques 3D

Mòdul didàctic 11

Annex 3. Corbes i superfícies

Joan Trias Pairó

1. Corbes
2. Superfícies

Glossari

A-B Diferència de A menys B . Conjunt dels punts que són de A i no de B .

[a,b] Vegeu **interval [a,b]**.

animació f animate on (_).

angle m Donats els vectors u , v no nuls, l'angle que formen és $a = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$.

arc cosinus trigonomètric \arccos .

arc sinus trigonomètric m \arcsin .

arc tangent trigonomètrica m \arctan .

Arquímedes, espiral o hèlix espiral d' Vegeu **espiral d'Arquímedes i hèlix espiral d'Arquímedes**.

base f Una col·lecció de vectors és base si **a)** són vectors linealment independents i **b)** qualsevol vector es pot escriure com a combinació lineal dels vectors de la col·lecció.

base ortonormal f Base formada per vectors unitaris dos a dos ortogonals.

Bézier Corba simple que és en la base dels sistemes de disseny de corbes per ordinador, i manera de tractar els vèrtexs d'un *spline* en qüestions relacionades amb la suavització, la modificació i l'accés a les nanses de control de la tangència.

booleana, operació f Vegeu **operació booleana**.

CAD m Sigla de *computer aided design*, disseny assistit per ordinador.

cardioide Corba d'equació $r = a(1 + \cos t)$ en coordenades polars. La parametrització corresponent és
$$\left. \begin{aligned} x(t) &= a(1 + \cos t) \cos t \\ y(t) &= a(1 + \cos t) \sin t \end{aligned} \right\}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

cilindre circular recte m El cilindre circular recte de radi R i d'eix una recta e de l'espai tridimensional és la superfície que està formada per les rectes que són paral·leles a l'eix e , que passen per una circumferència de radi R , amb centre en l'eix e , i continguda en un pla perpendicular a l'eix.

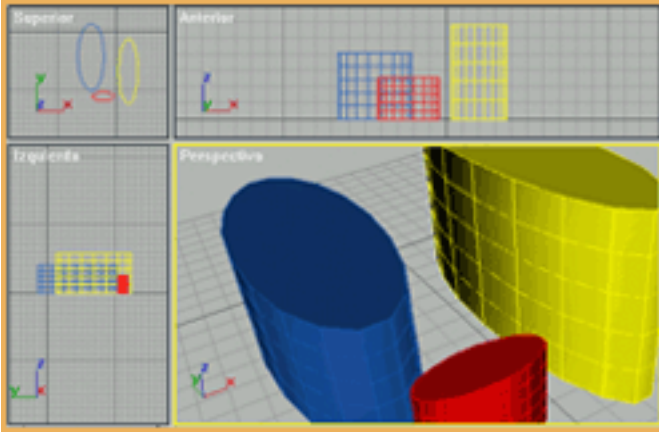
Parametrització del cilindre d'eix l'eix z de radi R , amb la base inferior sobre el pla $z = 0$, inclòs en el semiespai de les coordenades z positives o nul·les, i d'altura H :

$$\left. \begin{aligned} x(t, s) &= R \cos t \\ y(t, s) &= R \sin t \\ z(t, s) &= s \end{aligned} \right\}; 0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq s \leq H.$$

Parametrització del cilindre d'eix paral·lel a l'eix Oz , passant pel punt $(a, b, *)$, de radi R , amb la base inferior sobre $z = 0$:

$$\left. \begin{aligned} x(t, s) &= a + R \cos t \\ y(t, s) &= b + R \sin t \\ z(t, s) &= s \end{aligned} \right\}; 0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq s \leq H$$

cilindre el·líptic *m* El cilindre el·líptic d'eix l'eix de coordenades Oz i de directriu una el·lipse continguda en $z = 0$ amb centre en l'origen de coordenades és el conjunt de les rectes que són paral·leles a l'eix y que passen per l'el·lipse.



circumferència de radi R i centre (a, b) *f* Corba d'equació.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Parametrització:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= a + R \cos t \\ y(t) &= b + R \sin t \end{aligned} \right\}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

combinació lineal *f* Una combinació lineal dels vectors e_1, \dots, e_n és un vector de la forma $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, amb $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

components d'un vector *m pl* Si tenim el vector $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, el component i -èssim és x_i .

con circular recte *m* Superfície generada per les rectes que passen per una circumferència i per un punt V comú (vèrtex) no contingut en el pla de la circumferència. A més, la recta per V , que és perpendicular al pla de la circumferència, passa pel seu centre.

coordenades cartesianes *f pl* Coordenades corresponents a un sistema de coordenades cartesianes (eixos de coordenades respectivament perpendiculars, amb la mateixa unitat de mesura).

coordenades polars (en el pla bidimensional) *f pl* Les coordenades polars d'un punt P és el parell (r, t) , en què $r = d(P, O)$, distància de P a l'origen de coordenades del sistema usual de coordenades cartesianes, i t , angle antihorari que el semieix $x+$ forma amb el segment OP .

cosinus (trigonomètric) *m cos*

En un triangle rectangle, el sinus d'un angle és la raó (catet contigu)/hipotenusa.

corba de Bézier f Corba simple generada pel mètode de Bézier. Funcionalitat incorporada en la majoria dels programes de grafisme 2D i 3D.

corba en coordenades polars f Les corbes en coordenades polars es descriuen mitjançant l'equació $r = f(t), t_1 \leq t \leq t_2$. La parametrització genèrica que en resulta és

$$\begin{cases} x(t) = f(t) \cos t \\ y(t) = f(t) \sin t \end{cases}, t_1 \leq t \leq t_2n.$$

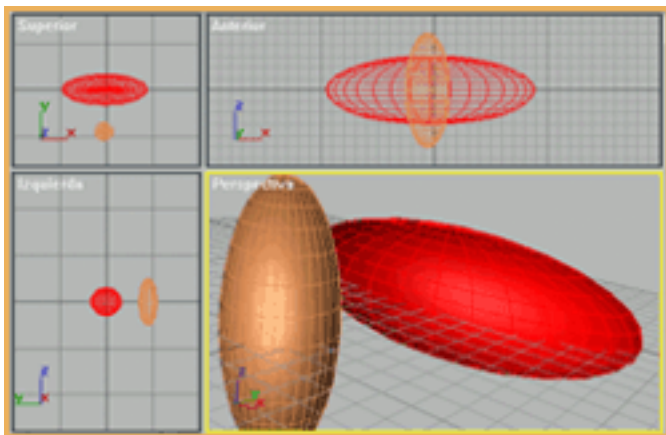
corba spline f Corba usada en la majoria dels programes de grafisme i CAD per a generar corbes de manera interactiva.

dependència lineal f Els vectors d'una col·lecció són linealment dependents si hi ha una combinació lineal d'aquests vectors igual a zero sense que tots els coeficients siguin nuls. De manera equivalent, n'hi ha un que es pot escriure com a combinació lineal dels altres.

diferència booleana f Operació booleana que s'aplica a dos conjunts A, B en ordre. La diferència $A-B$ és el conjunt dels punts de A que no pertany a B .

distància f Donats els punts $P = (x_1, \dots, x_n), Q = (Y_1, \dots, y_n)$, la distància entre l'un i l'altre és $d(P, Q) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$.

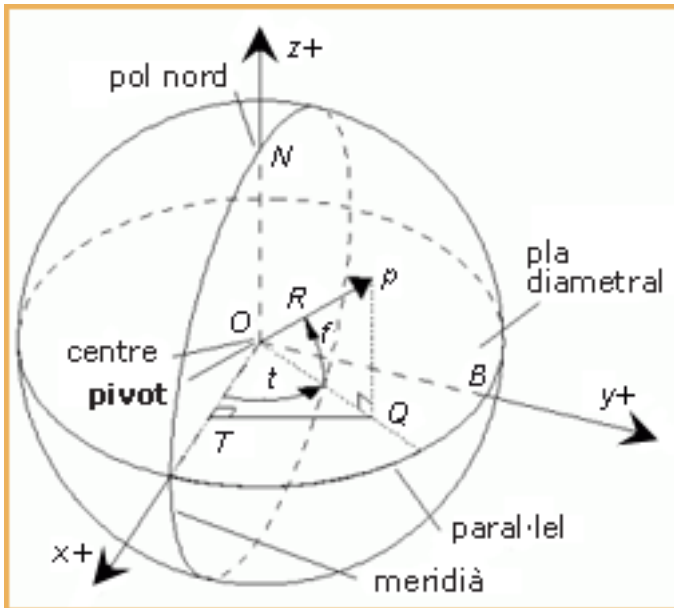
el·lipsoide m L'el·lipsoide de centre l'origen, eixos principals els eixos de coordenades i semieixos a, b, c , és la superfície d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



escala, canvi d' m Vegeu **canvi d'escala**.

esfera f L'esfera de radi R i de centre el punt $C = (a, b, c)$ és el conjunt dels punts $P = (x, y, z)$ de l'espai que estan a una distància R de C .

Equació: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$



Parametrització de l'esfera de radi R i centre $C = (a, b, c)$:

$$\left. \begin{aligned} x(t, f) &= a + R \cos f \cos t \\ y(t, f) &= b + R \cos f \sin t \\ z(t, f) &= c + R \sin f \end{aligned} \right\}; 0 \leq t \leq 2\pi; -\frac{\pi}{2} \leq f \leq \frac{\pi}{2}$$

espiral d'Arquímedes f La corba $r = at$ en coordenades polars.

Parametrització:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= at \cos t \\ y(t) &= at \sin t \end{aligned} \right\}, 0 \leq t \leq t_1$$

en què t és l'angle polar del punt $P = (x, y)$.

expressió paramètrica f Expressió matemàtica per la qual s'expressa una corba segons la variació d'un paràmetre, del qual també es descriu l'interval de variació. Per exemple, en el cas de la circumferència de centre l'origen, radi R , continguda en el pla de coordenades $z = 0$, és $P(t) = (R \cos t, R \sin t, 0)$, amb $0 \leq t \leq 2\pi$.

factor de conversió de radians a graus sexagesimals $f \frac{180}{\pi}$.

factor de conversió de graus sexagesimals a radians $f \frac{\pi}{180}$.

forma explícita f En aquesta forma la superfície és el conjunt dels punts de l'espai pels quals en podem expressar z segons les altres dues coordenades, és a dir, $z = f(x, y)$, en què x, y varia en intervals numèrics reals adequats.

Les corbes en forma explícita són les que es poden expressar com a $y = f(x)$, en què x varia en un determinat interval de la recta numèrica real.

forma implícita f Els punts de la corba es descriuen com els punts que satisfan una equació $F(x, y) = 0$.

En aquesta forma les superfícies es descriuen per una equació del tipus $F(x, y, z) = 0$.

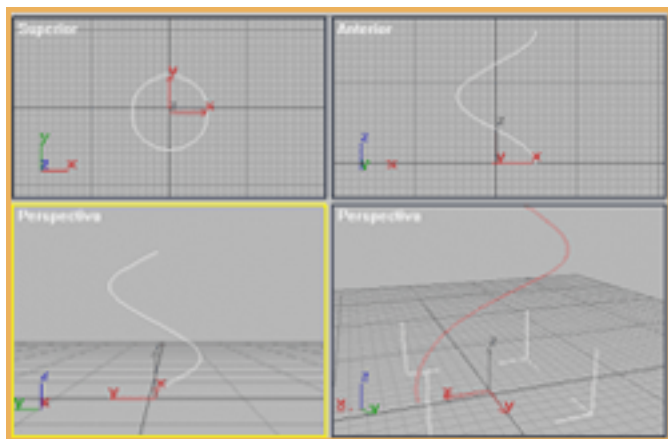
forma paramètrica En forma paramètrica expressem els punts de la superfície segons dos paràmetres. Així, $P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ és la fórmula paramètrica de la superfície (parametritzada), u, v són els paràmetres, que varien en sengles intervals de la recta numèrica real, és a dir, $u_1 \leq u \leq u_2, v_2 \leq v \leq v_2$.

generadors Una col·lecció de vectors són generadors de l'espai si tot vector es pot expressar com a combinació lineal dels vectors de la col·lecció.

generatriu, corba Corba que és la base de partida per a una superfície de revolució, la qual s'obté per rotació al voltant d'una recta de la corba donada.

grau sexagesimal Mesura d'angles. Dividint la circumferència en 360 parts iguals, (un grau sexagesimal) és l'angle que té de vèrtex el centre de la circumferència corresponent a dues subdivisions consecutives sobre la circumferència.

hèlix circular de radi a , de pas de rosca b i d'eix l'eix de coordenades z

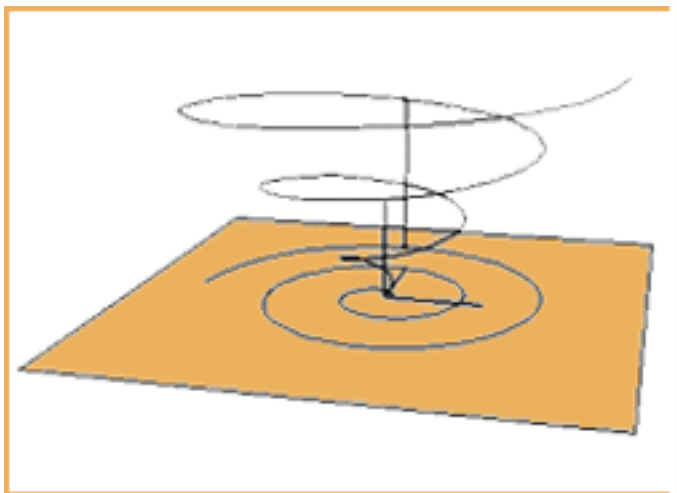


La parametrització és

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= a \cos t \\ y(t) &= a \sin t \\ z(t) &= bt \end{aligned} \right\}, t \geq 0$$

en què t és l'angle polar del punt de la projecció ortogonal $P' = (x, y, 0)$ sobre el pla xy del punt $P = (x, y, z)$ de la corba.

hèlix espiral d'Arquímedes m Una parametrització possible és



$$\left. \begin{aligned} x(t) &= at \cos t \\ y(t) &= at \sin t \\ z(t) &= bt \end{aligned} \right\}, t \geq 0.$$

independència lineal Una col·lecció de vectors són linealment independents si no són linealment dependents.

intersecció booleana Operació booleana que s'aplica a dos conjunts que consisteix en la col·lecció d'elements que són de tots dos conjunts.

interval $[a,b]$ Conjunt dels punts de la recta compresos entre a i b , aquests dos inclusivament.

longitud arc de circumferència tR , en què R és el radi, i t , l'angle corresponent a l'arc, en radianats.

longitud d'un vector Vegeu **norma d'un vector**.

mòdul d'un vector Vegeu **norma d'un vector**.

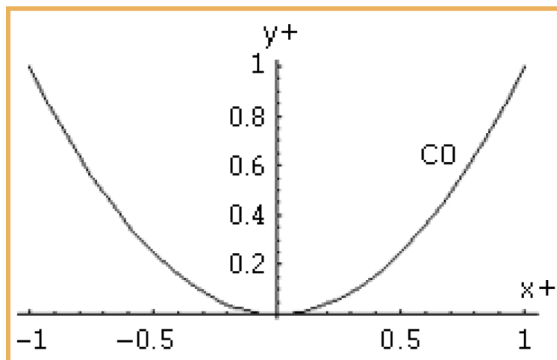
norma al pla $ax + by + cz + d = 0$ És el vector $N = (a,b,c)$.

norma d'un vector La norma del vector $W = (w_1, \dots, w_n)$ és

$$\|w\| = \sqrt{w_1^2 + \dots + w_n^2}.$$

normalitzar *v tr* Vegeu **unitaritzar**.

paràbola $y = ax^2 + bx + c$



Parametrització agafant $x = s$ com a paràmetre:

$$\left. \begin{aligned} x(s) &= s \\ y(s) &= as^2 + bs + c \end{aligned} \right\}, s_0 \leq s \leq s_1$$

parametrització Els punts de la corba s'expressen com a $P(t) = \gamma(t)$, $a \leq t \leq b$. La funció $\gamma(t)$ és la funció de parametrització, t és el paràmetre i $[a, b]$ és l'**interval de variació del paràmetre**. Desglossat per coordenades, tenim $P(t) = (x(t), y(t))$ en dimensió 2, en el pla bidimensional. En dimensió 3, és a dir, en l'espai tridimensional, tenim $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$, sempre amb indicació de la variació del paràmetre t .

parametrització de la circumferència La circumferència de centre l'origen i radi R es pot parametritzar per $P(t) = (R \cos t, R \sin t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$, en què t és l'angle polar del punt P .

parametrització de l'esfera Considerem l'esfera de centre l'origen i radi R . Si considerem un punt P de l'esfera, de longitud u i latitud v , l'esfera es parametritza per $P(u, v) = (R \cos v \cos u, R \cos v \sin u, R \sin v)$, amb $0 \leq u \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

parametrització de la recta La recta que passa pel punt A i té vector directriu w es parametritza per $P(t) = A + tw$, amb t nombre real.

parametrització del segment El segment d'extremes A, B es parametritza per $P(t) = A + t(B - A)$, en què t varia entre 0 i 1.

producte escalar $(u_1, \dots, u_n) \cdot (v_1, \dots, v_n) = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$.

producte d'un escalar per una matriu Si $A = (a_{ij})$, es $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

producte de matrius Si A és una matriu de n files i m columnes, i B és una matriu de m files i r columnes, si $C = AB$, i és el terme general de la matriu producte C , en l'ordre indicat, llavors és $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \dots + a_{im} b_{mj}$.

producte d'un escalar per un vector $\lambda(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, \lambda x_n)$.

producte vectorial Si $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, el producte vectorial és $u \wedge v = (u_2 v_3 - v_2 u_3, v_1 u_3 - u_1 v_3, u_1 v_2 - v_1 u_2)$.

projecció ortogonal sobre el pla xy La projecció ortogonal del punt (x, y, z) sobre el pla xy és el punt $(x, y, 0)$.

projecció ortogonal sobre el pla xz La projecció ortogonal del punt (x, y, z) sobre el pla xz és el punt $(x, 0, z)$.

projecció ortogonal sobre el pla yz La projecció ortogonal del punt (x, y, z) sobre el pla yz és el punt $(0, y, z)$.

radiant Mesura d'angles. Sobre una circumferència, 1 radiant és l'angle de vèrtex el centre de la circumferència de manera que la longitud de l'arc que subtendeix és igual al radi de la circumferència.

revolució, superfície de Vegeu **superfícies de revolució**.

rhodonea Corba d'equació polar $r = a \cos nt$. Parametrització:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= a \cos nt \cos t \\ y(t) &= a \cos nt \sin t \end{aligned} \right\}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

La variable n està relacionada amb el nombre de "pètals" de la "flor":



rotació positiva respecte de l'eix de coordenades Ox La matriu corresponent a una rotació positiva d'angle a respecte de l'eix x és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \cos a - z \sin a \\ z' = y \sin a + z \cos a \end{cases}$$

Amb aquestes equacions, si l'angle a és positiu, la rotació es veu com a antihorària (sobre el pla perpendicular a l'eix x , el pla yz , mirant-la des de z^+).

rotació positiva respecte de l'eix de coordenades Oy La matriu de la rotació positiva d'angle b respecte de l'eix Oy és

$$\begin{pmatrix} \cos b & 0 & \sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix} \begin{cases} x' = x \cos b + z \sin b \\ y' = y \\ z' = -x \sin b + z \cos b \end{cases}$$

rotació positiva respecte de l'eix de coordenades Oz La matriu de la rotació positiva d'angle c respecte de l'eix de coordenades z^+ és

$$\begin{pmatrix} \cos c & -\sin c & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} x' = x \cos c - y \sin c \\ y' = x \sin c + y \cos c \\ z' = z \end{cases}$$

rotació respecte de l'origen de coordenades, d'angle a Si a és positiu, amb l'expressió matricial següent s'obté una rotació antihorària, de sentit contrari a les agulles del rellotge.

$$R_a^O = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{cases} x' = x \cos a - y \sin a \\ y' = x \sin a + y \cos a \end{cases}$$

rotació respecte del punt C , d'angle a $E_C^a = T_C \circ E_C^a \circ T_{-C}$

sinus (trigonomètric) En un triangle rectangle, el sinus d'un angle és la raó (catet oposat) / hipotenusa.

sexagesimal, grau Vegeu **grau sexagesimal**.

simetria central en el pla respecte d'un punt C Gir de 180 graus respecte de C .

L'expressió de la transformació com a concatenació de transformacions és

$$S_C = R_C^{180} = T_C \circ R_O^{180} \circ T_{-C}.$$

simetria especular respecte del pla xy Si $P = (x, y, z)$ és un punt genèric de l'espai, el simètric P' , simètric respecte del pla xy , és $P' = (x, y, -z)$. Les equacions corresponents són

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$$

simetria especular respecte del pla xz Si $P = (x, y, z)$ és un punt genèric de l'espai, el simètric P' , simètric respecte del pla xz , és $P' = (x, -y, z)$. Les equacions corresponents són

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$

simetria especular respecte del pla yz Si $P = (x, y, z)$ és un punt genèric de l'espai, el simètric P' , simètric respecte del pla yz , és $P' = (-x, y, z)$. Les equacions corresponents són

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

spline Vegeu **corba spline**.

suma de matrius Si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, la matriu suma $C = A + B$ és la matriu $C = (c_{ij})$ de manera que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

superfícies de revolució Per a generar aquestes superfícies fan falta dos elements: una *corba* (corba directriu) i una *recta*, que és eix de rotació de la directriu. El resultat de la rotació completa de la corba directriu al voltant de l'eix és una superfície de revolució.

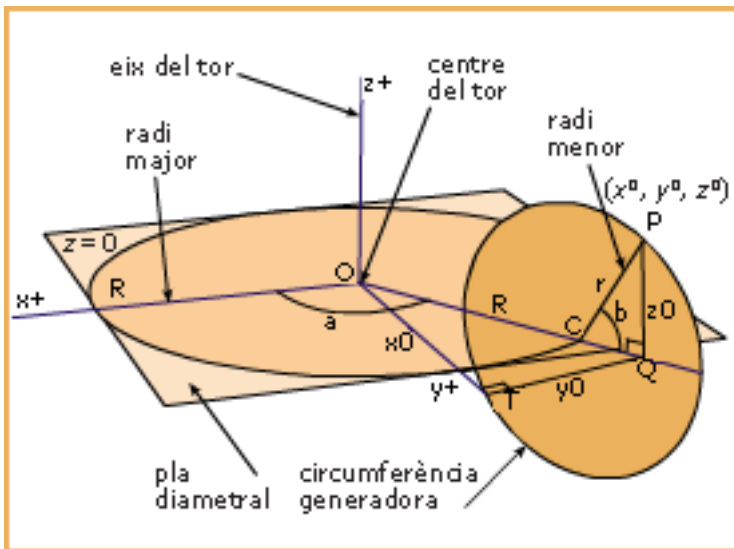
Una parametrització possible de la superfície generada per una rotació completa de la corba $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$; $a \leq t \leq b$ al voltant de l'eix Oz és

$$\left. \begin{aligned} x(t, \theta) &= \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \cos \theta \\ y(t, \theta) &= \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \sin \theta \\ z(t, \theta) &= z(t) \end{aligned} \right\}; a \leq t \leq b; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Superfície generada per rotació d'una corba al voltant d'una recta o eix. S'obté a partir d'una corba *spline* o *nurbs* i el modificador Torno.

tangent (trigonomètrica) Quocient sinus/cosinus.

toro Superfície que es genera per la rotació d'una circumferència al voltant d'una recta (*eix del toro*). Aquesta recta és exterior a la circumferència i les dues figures són coplanàries. El *pla diametral* del toro és el pla que passa pel mig de la circumferència generadora i és perpendicular a l'eix. La seva intersecció amb l'eix és el centre del toro. En la figura següent es mostren tots aquests elements.



A partir de la figura obtenim una parametrització possible del toro, utilitzant els paràmetres angulars a, b . Per a això, considerem els triangles rectangles OPQ, OQT . Fixem-nos que $OQ = OC + CQ = R + r \cos b$. Així, podem escriure x, y, z del punt $P = (x, y, z)$ segons a, b :

$$\left. \begin{aligned} x(a, b) &= (R + r \cos b) \cos a \\ y(a, b) &= (R + r \cos b) \sin a \\ z(a, b) &= r \sin b \end{aligned} \right\}; 0 \leq a \leq 2\pi, 0 \leq b \leq 2\pi$$

transformació afí Correspon a l'estructura $P' = f(P) = AP + W$, en què P, P' són vectors posició. En l'expressió anterior A és una matriu 3×3 , i W és un vector tridimensional. AP és la part lineal de la transformació afí, i W és el vector de translació, per raons que veurem en la secció següent. En termes matricials,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + w_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + w_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + w_3 \end{cases}$$

transformacions afins bidimensionals (expressió matricial) Transformacions geomètriques de la forma.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + w_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + w_2 \end{cases}$$

transformacions afins generals Transformacions geomètriques que corresponen a l'estructura $P' = f(P) = AP + W$, en què P, P' són vectors posició.

En l'expressió anterior A és una matriu 2×2 , i W és un vector bidimensional. AP és la *part lineal* de la transformació afí, i W és el *vector de translació*.

translació Donat un vector $w = (a, b)$, es defineix la translació de vector w , i s'assenyala T_w com la transformació

$$T_w(P) = P + w \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

I, donat un vector $w = (a, b, c)$, es defineix la translació de vector w , i s'assenyala

$$T_w \text{ com la transformació } T_w(P) = P + w \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

unió booleana S'aplica a dos conjunts i és el conjunt dels elements que són de l'un o l'altre.

unitari, vector Vector de norma 1.

unitaritzar Dividir per la norma, si el vector és no nul ($w_1 = \frac{1}{\|w\|}w$).

Bibliografia

Bibliografia: disseny i proporció

Alsina, C.; Trillas, E. (1994). *Lecciones de Álgebra y Geometría*. Barcelona: Editorial Gustavo Gili.

Alsina, C. (1996). *Matemàtiques per a fotògrafs*. Terrassa: Escola de Fotografia de la Fundació Universitat Politècnica de Catalunya.

Alsina, C.; Garcia, J. L.; Jacas, J. (1992). *Temes clau de geometria*. Barcelona: Edicions UPC.

Blackwell, L. (1993). *La tipografia del s. XX*. Barcelona: Editorial Gustavo Gili.

Bootello, J.; Thomas, I. (1998). *3D Studio Max*. Madrid: Editorial Anaya Multimedia, SA.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry*. Nova York: John Willey and Sons, Inc.

Ghyka, M. C. (1984). *El número de oro. Los ritmos. Los ritos* (2 vol.). Barcelona: Poseidón.

Ghyka, M. C. (1983). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Barcelona: Poseidón.

Matemàtica i disseny arquitectònic. Sant Jeroni de la Murtra (1988). Badalona: Museu de Badalona.

Pedoe, D. (1982). *La geometría en el arte*. Barcelona: Gustavo Gili.

Pla i Carrera, J. (1984). *Las Matemáticas. Una historia de sus conceptos*. Barcelona: Montesinos Editor, SA.

Singh, S. (1988). *El enigma de Fermat*. Barcelona: Planeta SA.

Bibliografia: simetria i disseny

Alsina, C.; Trillas, E. (1984). *Lecciones de Álgebra y Gemotría*. Barcelona: Gustavo Gili.

Alsina, C. (1996). *Matemàtiques per a fotògrafs*. Terrassa: Escola de Fotografia de la Fundació Universitat Politècnica de Catalunya.

Bootello, J.; Thomas, I. (1998). *3D Studio Max*. Madrid: Anaya Multimedia, SA.

Bossard, Y. (1977). *Rosaces, frises et pavages*. París: CEDIC.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemàtica*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry*. Nova York: John Willey and Sons, Inc.

Coxeter, H. S. M.; Emmer, M.; Penrose, R.; Teuber, M. L. (1986). *M. C. Escher: Art and Science*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers BV.

Fradera Veiga, R. (1983). *Atlas de los Estilos Artísticos*. Barcelona: Ediciones Jover.

Gardner, M. (1990). *Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas*. Barcelona: Idea Books.

Bibliografia: geometria fractal

Hearn, D.; Baker, M. P. (1997). *Computer Graphics. C Version*. Prentice Hall.

Schroeder, M. (1991). *Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from an Infinite Paradise*. W. H. Freeman and Company.

Mandelbrot, B. B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: Tusquets Editores.

Barnsley, M. F. (1993). *Fractals Everywhere*. Cambridge, EUA: Academic Press, MA.

Enllaços: geometría fractal

Miniaplicació en Java per a crear diverses fractals a partir d'un quadrat com a llavor. Es poden construir diferents iteracions. Quan se n'ha obtingut una, aquesta iteració es pot repetir fins a sis vegades: <http://darkwing.uoregon.edu/~koch/java/Fractal.html>

Miniaplicació en Java en què es poden veure diferents tipus de fractals (Koch, Sierpinski, etc.) amb diferents ampliacions i iteracions: <http://library.thinkquest.org/26242/full/progs/koch.html>

Una altra miniaplicació en Java per a una altra fractal famosa: el Dragon de Jurassic Park: <http://www.best.com/~ejad/java/fractals/jurassic.shtml>

Àrea fractal. Lloc web sobre fractals, que inclou una galeria de fractals, informació sobre programari per a crear fractals, etc.: <http://www.arrakis.es/~sysifus/>

Algunes lliçons sobre fractals: <http://math.rice.edu/~lanius/frac/>

Galeria de fractals de Mandelbrot. Permet ampliar i reduir parts d'una fractal: <http://www.softlab.ntua.gr/miscellaneous/mandel/>

