Annex 3. Corbes i superfícies

Joan Trias Pairó

PID_00150794

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Objectius

Corbes

En aquest apartat introduirem un dels objectes més importants de la geometria, en relació amb sistemes de grafisme 3D i animació: el concepte de *corba*. Aquesta introducció es limitarà a presentar els casos o exemples més importants o més usuals. No s'inclouen, en canvi, els tecnicismes propis d'aquest ampli camp de la geometria.

Superfícies

En aquest apartat presentem la teoria bàsica de superfícies. Es dedica especial atenció a la descripció de les més freqüents en termes que ens permetin efectuar càlcul geomètric: l'obtenció de parametritzacions.

1. Corbes

1.1. Corbes, per a què?

Les corbes són importants per a una considerable quantitat d'operacions creatives de composicions i d'animació:

- Les corbes poden servir de partida per a generar superfícies de revolució. Les superfícies de revolució s'obtenen per rotació al voltant d'una recta d'una corba "perfil".

- Les corbes poden servir d'eix o base per a generar superfícies molt complexes (*loft* o *solevado*), de tipus tubular, de secció fixa o variable (una nova corba), i d'eix, la corba donada.

- Les corbes poden ser la base de prismes generalitzats, obtinguts per extrusió.

- Les corbes editades interactivament poden ser la base de trajectòries d'animació d'objectes.

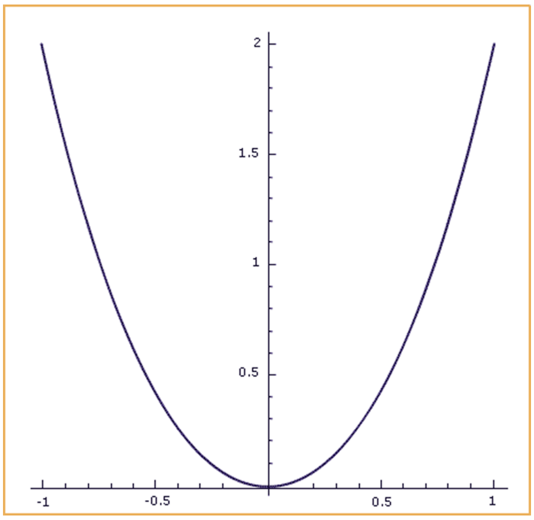
1.2. Descripció de corbes

Hi ha diversos mètodes per a descriure corbes, encara que no tots són aplicables a totes les corbes, sinó que depèn de la seva naturalesa.

1.2.1. Descripció en forma explícita

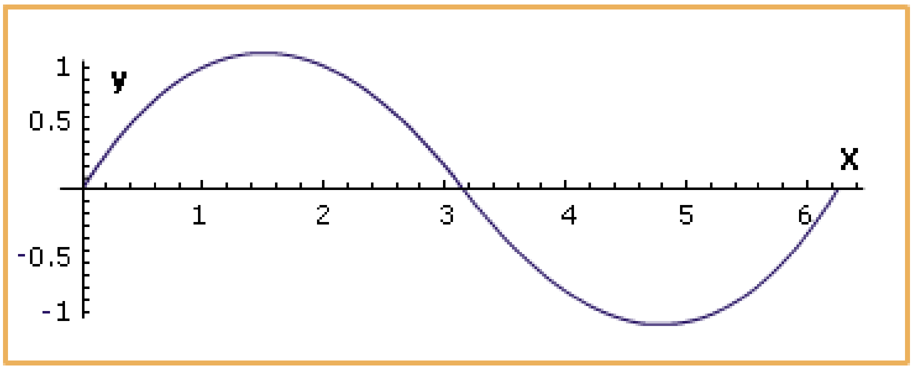
Les corbes en forma explícita són les que es poden expressar com a $y = f(x)$, variant x en un determinat interval de la recta numèrica real. Els punts de la corba són els de la forma $(x, f(x))$. Exemples ben coneguts són:

- La funció lineal $y = ax + b$, que correspon a una recta.
- La funció quadràtica, $y = ax^2 + bx + c$, que correspon a una *paràbola*. La figura següent és la gràfica, per a $-1 \le x \le 1$, de la paràbola $y = 2x^2$



El coeficient a de $y = ax^2$ és el coeficient d'obertura de la paràbola.

- Les funcions trigonomètriques $y = \sin x$, $y = \cos x$ (per exemple, $x \in [0, 2\pi]$ o un altre interval). Vegeu una gràfica de la funció sinus en l'interval indicat anteriorment:



La forma explícita és la més convenient, si en podem disposar, ja que permet calcular els punts de la corba amb facilitat. Aquests punts són necessaris a l'efecte de la representació gràfica, ja que finalment les corbes es representen com a poligonals.

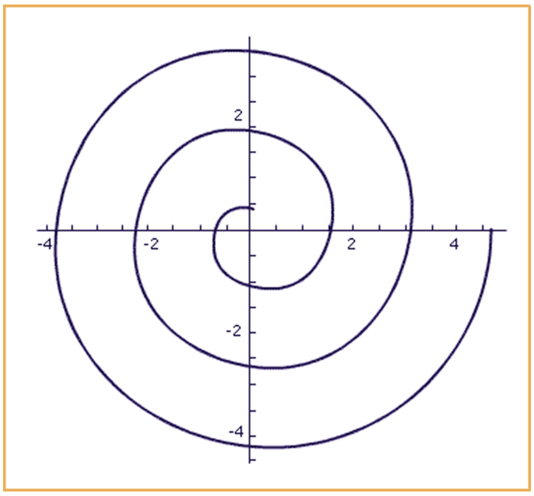
No obstant això, per a una gran quantitat de corbes d'interès no disposem de la forma explícita. En particular, aquest tipus d'expressió és només possible, si és el cas, per a corbes del pla bidimensional.

1.2.2. Descripció en forma implícita

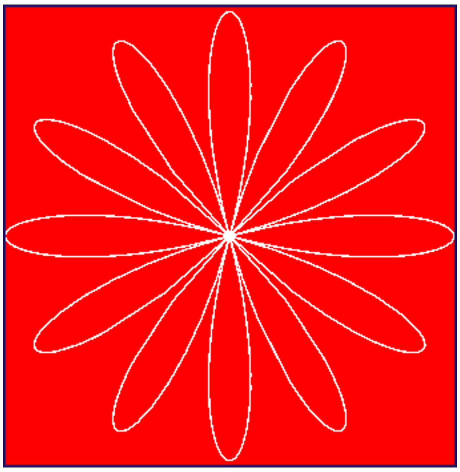
Els punts de la corba es descriuen com els punts que satisfan una equació $F(x, y) = 0$. Un dels exemples més senzills és el de la circumferència de centre l'origen i radi R, que és d'equació $x^2 + y^2 = R^2$. En aquesta modalitat, també per a corbes del pla bidimensional, pot resultar difícil calcular els punts de la figura.

1.2.3. Descripció en coordenades polars

Aquesta variant és vàlida només per a corbes del pla bidimensional. La corba es descriu mitjançant una equació que es planteja en termes de coordenades polars (r, t) del pla. Per exemple, la corba $r = at$ és una espiral d'Arquimedes (vegeu la figura posterior), amb t com a angle polar:



La següent és una *rhodonea* d'equació polar $r = a \cos mt$:



1.2.4. Descripció paramètrica

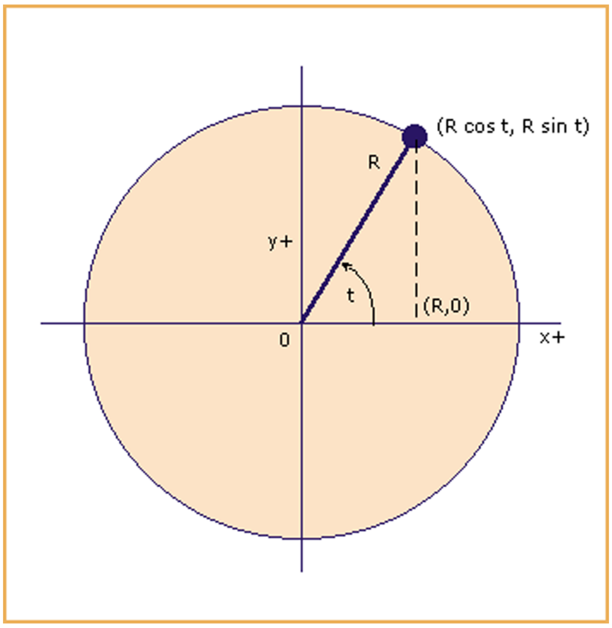
En aquesta descripció els punts de la corba s'expressen mitjançant un paràmetre adequat, que varia en un interval convenient.

Aquesta descripció és ideal per a obtenir fàcilment els punts de la corba. A més, és un dels mètodes més convenients per a expressar corbes tridimensionals.

En aquesta modalitat, els punts de la corba s'expressen com a $P(t) = \gamma(t), a \leq t \leq b$. La funció $\gamma(t)$ és la *funció de parametrització*, t és el paràmetre i [a, b] és l'interval *de variació del paràmetre*. Desglossat per coordenades, tindrem $P(t) = (x(t), y(t))$ en dimensió 2, en el pla bidimensional. En dimensió 3, és a dir, en l'espai tridimensional, serà $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$, sempre amb indicació de la variació del paràmetre t.

Un dels exemples ja vistos anteriorment és el del *segment* d'extrems A, B, que podem veure com a corba paramètrica: $P(t) = A + t(B - A), 0 \leq t \leq 1$. Un altre exemple important, ja vist anteriorment és el de la circumferència de centre l'origen de coordenades i radi R, que es parametritza mitjançant l'angle polar:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{array}\right\}, 0 \leq t \leq 2\pi$$



Podem considerar la circumferència en l'espai tridimensional, continguda en el pla $z = 0$, de centre l'origen i radi R. Per a formular una parametrització usarem les fórmules anteriors i assignarem una tercera coordenada 0, corresponent al fet d'estar continguda en el pla $z = 0$. Usant l'angle polar del pla xy, la parametrització corresponent seria:

$$\left.\begin{array}{r} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin(t) \\ z(t) = 0 \end{array}\right\}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Les corbes en forma explícita també es poden expressar en forma paramètrica. En efecte, $(x, f(x))$ és la forma paramètrica corresponent a l'explícita $y = f(x)$. Per exemple, la sinusoide es pot parametritzar com a $P(t) = (x, \sin x)$. La paràbola es pot parametritzar com a (x,x^2). Les corbes donades en coordenades polars es poden parametritzar fàcilment. Com que és $r = f(t)$, resulta:

$$\begin{cases} x(t) = f(t)\cos t \\ y(t) = f(t)\sin t \end{cases}$$

Per exemple, en el cas de l'espiral d'Arquimedes $r = at$ resulta:

$$\begin{cases} x(t) = at\cos t \\ y(t) = at\sin t \end{cases}$$

1.3. Algunes corbes importants

Donem a continuació algunes corbes paramètriques interessants per a propòsits de grafisme i animació. El lector pot experimentar amb algunes formes i amb les variables.

1.3.1. Circumferència

L'equació de la circumferència en el pla es pot obtenir fàcilment a partir de la seva definició: conjunt dels punts $P = (x, y)$ que estan a distància R (el radi) d'un punt fix $C = (a, b)$, el centre de la circumferència. Expressada aquesta propietat en termes mètrics, resulta: $d(P, C) = R$, d'on $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$. Elevant al quadrat, resulta l'equació:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

En el cas particular en el qual el centre sigui l'origen de coordenades, és a dir, $a = b = 0$, resulta:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Per a la circumferència de centre l'origen la parametrització usual és $P(t) = (R \cos t, R \sin t)$, amb $0 \le t \le 2\pi$. Si es vol generar un arc de circumferència, llavors cal restringir concordantment el domini de variació del paràmetre: $t_1 \le t \le t_2$.

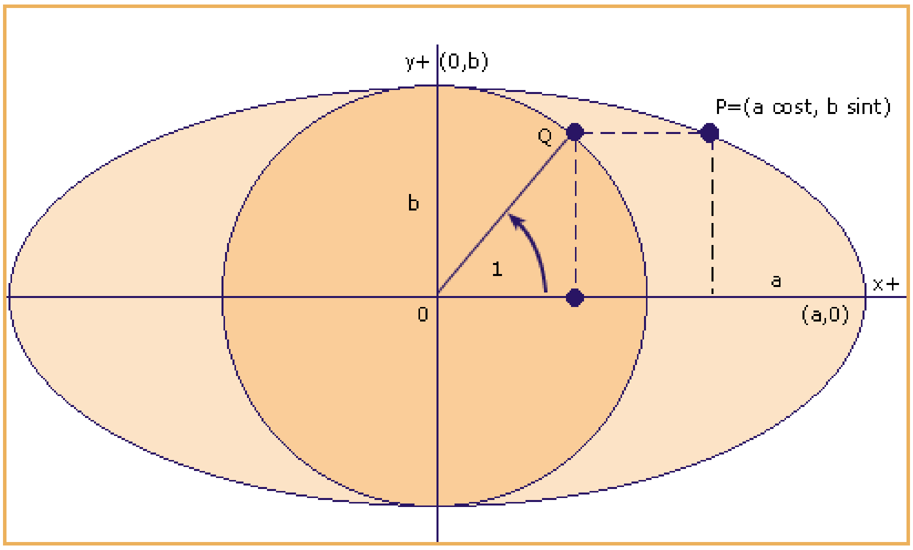
En el cas que la circumferència sigui de centre arbitrari $C = (a, b)$, obtenim una parametrització aplicant la translació T_c, amb la qual cosa resulta:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a + R\cos t \\ y(t) &= b + R\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

1.3.2. El·lipse

L'el·lipse de centre $C = (0, 0)$ (origen), d'eixos principals els eixos de coordenades i de semieixos respectius *a, b*, és la figura que es mostra a continuació, i la seva equació és:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$



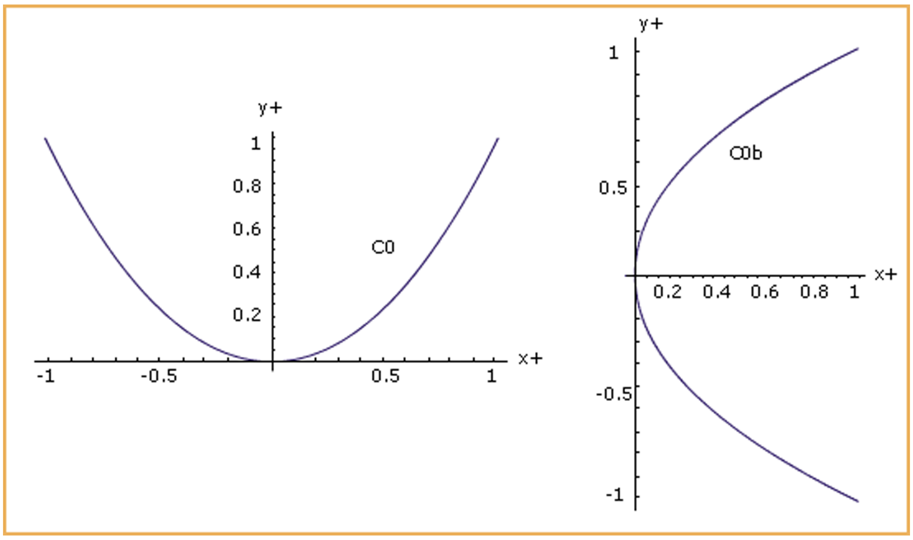
Es pot parametritzar mitjançant:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{array}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

Si el centre és el punt $C = (p, q)$; llavors, aplicant la translació corresponent, obtenim la parametrització:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = p + a\cos t \\ y(t) = q + b\sin t \end{array}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

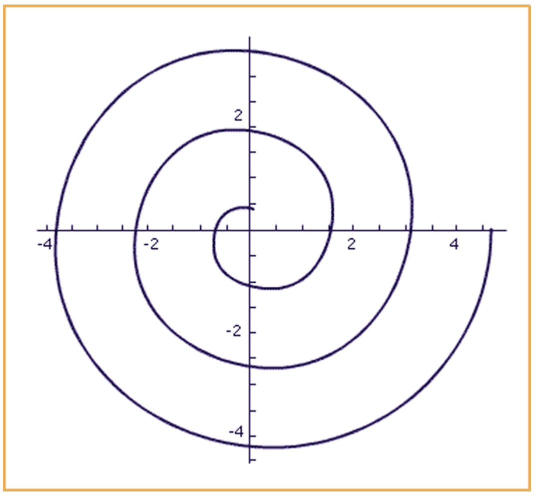
1.3.3. Paràbola



La figura de l'esquerra correspon a una paràbola, d'equació $y = ax^2 + bx + c$. Podem formular una possible parametrització prenent $x = s$ com a paràmetre:

$$\left.\begin{array}{r} x(s) = s \\ y(s) = as^2 + bs + s \end{array}\right\}, s_0 \leq s \leq s_1$$

1.3.4. Altres corbes bidimensionals



El gràfic anterior correspon a l'*espiral d'Arquimedes*, de parametrització:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= at\cos t \\ y(t) &= at\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le t_1,$$

si t és l'angle polar del punt $P = (x, y)$.

La variació del paràmetre controla el nombre de voltes.

Cardioide

La *cardioide* és la corba que en coordenades polars s'expressa com a $r = a(1 + \cos t)$. La parametrització corresponent és:

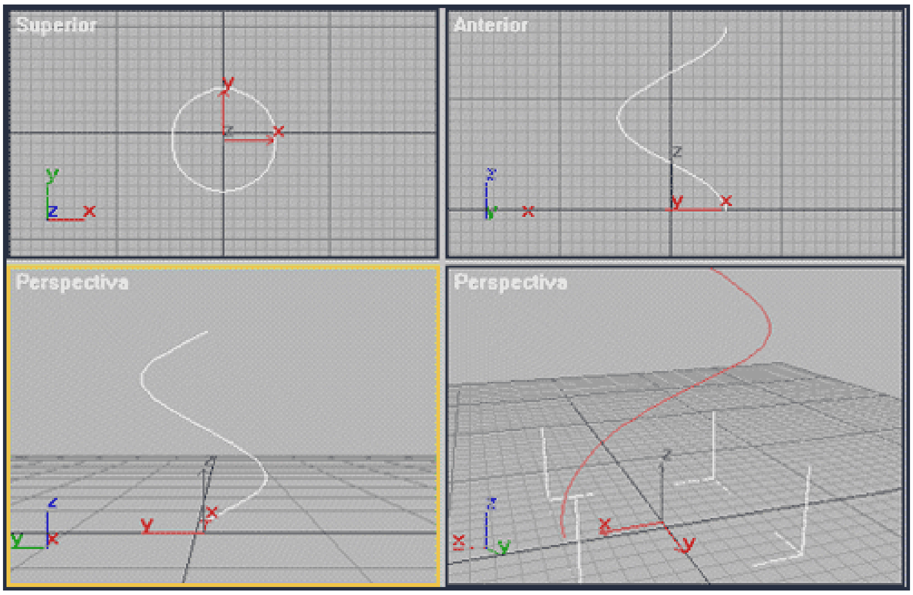
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a(1 + \cos t)\cos t \\ y(t) &= a(1 + \cos t)\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

La *rhodonea* és la corba parametritzada per:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos nt\cos t \\ y(t) &= a\cos nt\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

La variable n està relacionada amb el nombre de "pètals" de la "flor".

Hèlix circular



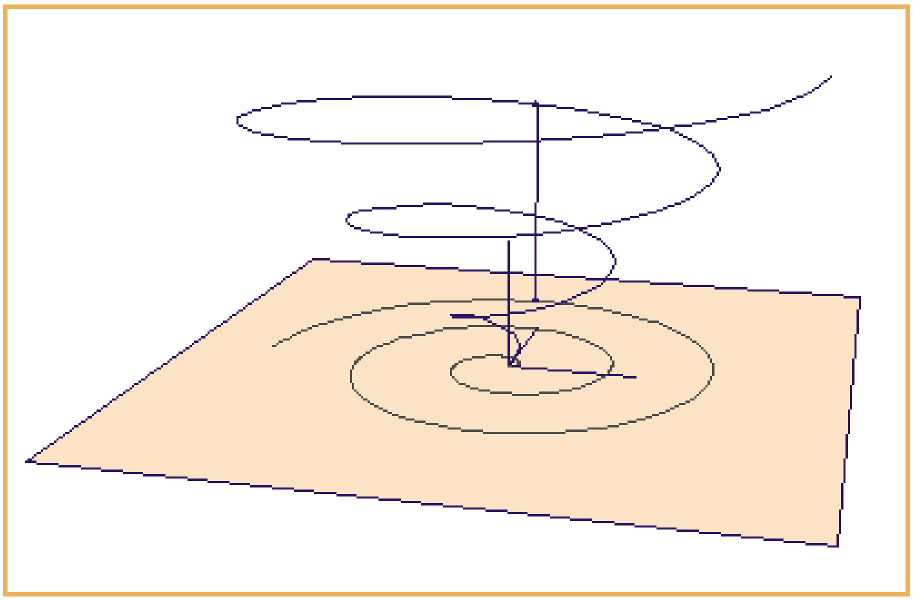
L'hèlix circular és una corba tridimensional. La parametrització

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos t \\ y(t) &= a\sin t \\ z(t) &= bt \end{aligned}\right\}, t \ge 0$$

correspon a l'hèlix circular de radi a, de "pas de rosca b", essent t l'angle polar del punt de la projecció ortogonal $P' = (x, y, 0)$ sobre el pla xy del punt $P = (x, y, z)$ de la corba. L'eix de coordenades z és l'eix de l'hèlix. Atenent les expressions de $x(t)$, $y(t)$, resulta que els punts de la corba es projecten en el pla xy sobre la circumferència de radi a, de centre l'origen de coordenades, continguda en $z = 0$. Per tant, la corba està continguda en el cilindre de radi a i d'eix l'eix de coordenades Oz. L'expressió $z(t) = bt$ ens indica com creix l'altura dels punts a mesura que s'incrementa l'angle t, és a dir, a mesura que es va girant entorn del cilindre.

La variació del paràmetre controla el nombre de voltes.

Hèlix espiral d'Arquimedes



La corba es projecta perpendicularment al pla xy sobre una espiral d'Arquimedes. El creixement en altura està controlat per una expressió idèntica a la corresponent a la de l'hèlix circular.

Una parametrització possible és:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= at\cos t \\ y(t) &= at\sin t \\ z(t) &= bt \end{aligned}\right\}, t \geq 0$$

La variació del paràmetre controla el nombre de voltes.

2. Superfícies

2.1. Expressió de superfícies

Les superfícies són objectes tridimensionals, de l'espai tridimensional. Depenent de la naturalesa de la superfície, hi ha diverses maneres de descriure una superfície, no totes sempre aplicables.

2.1.1. Forma explícita

En aquesta forma la superfície és el conjunt dels punts de l'espai per als quals podem expressar z en funció de les altres dues coordenades, és a dir $z = f(x, y)$, amb x, y variant en intervals numèrics reals adequats. Per exemple, $z = x^2 + y^2$ on $f(x,y) = x^2 + y^2$. No considerarem aquesta modalitat, ja que la majoria de les superfícies que ens interessen no es poden expressar d'aquesta manera.

2.1.2. Forma implícita

En aquesta forma les superfícies es descriuen per una equació del tipus $F(x, y, z) = 0$. Per exemple,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

és l'equació de l'esfera de centre l'origen de coordenades i radi R. En aquest cas és:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

L'equació del pla $ax + by + cz + d = 0$ és un altre exemple.

Aquest tipus d'expressions té l'inconvenient que no resulta fàcil, sobretot si F és una funció complicada, calcular les coordenades dels seus punts.

2.1.3. Forma paramètrica

En forma paramètrica expressem els punts de la superfície en funció de dos paràmetres. Així, $P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ és la fórmula paramètrica de la superfície (parametritzada), u, v són els paràmetres, que varien en els intervals corresponents de la recta numèrica real, és a dir $u_1 \leq u \leq u_2$, $v_1 \leq v \leq v_2$.

Per exemple, en el cas del pla que passa pel punt A i té vectors de direcció, w_1, w_2, llavors podem descriure els punts del pla com a superfícies paramètriques: $P(a,b) = A + aw_1 + bw_2$, amb a, b nombres reals.

Aquesta expressió és una de les més interessants, ja que permet obtenir fàcilment els punts de la superfície, a mesura que els paràmetres van variant.

2.2. Superfícies notables

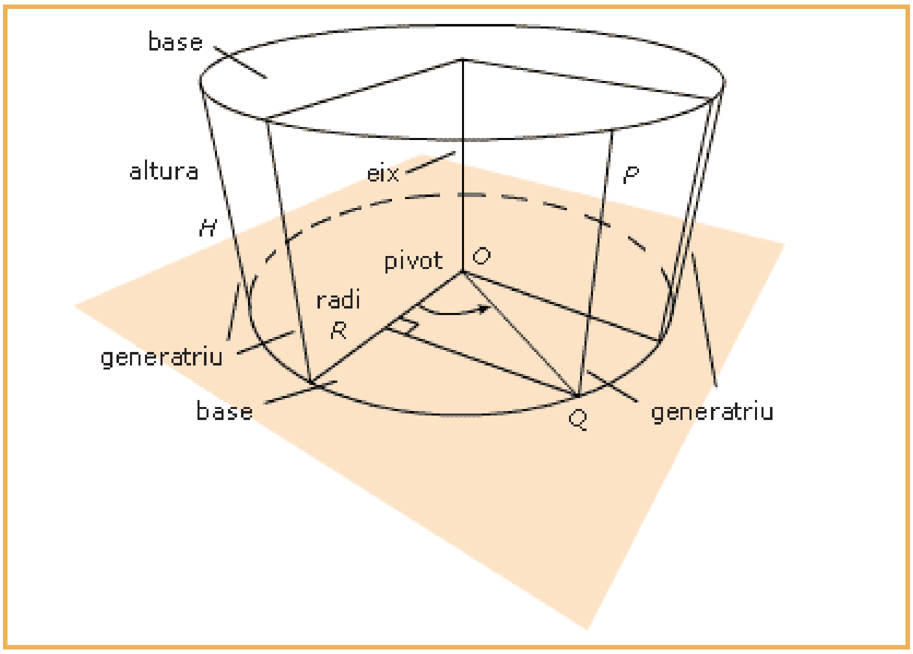
Ara descobrirem algunes de les superfícies notables.

2.2.1. Cilindre circular recte

El cilindre circular recte de radi R i d'eix una recta e de l'espai tridimensional és la superfície que està formada per les rectes que són paral·leles l'eix y, que passen per una circumferència de radi R, amb centre en l'eix y, i continguda en un pla perpendicular a l'eix.

El cas més senzill és el del cilindre de radi R, i d'eix l'eix de coordenades cartesianes Oz. Segons la definició anterior, en principi el cilindre seria una superfície no delimitada. En la pràctica se sol treballar amb porcions, les que estan compreses entre dos plans perpendiculars a l'eix del cilindre; la distància entre aquests plans és l'altura; les seccions dels plans esmentats amb el cilindre són circumferències, les seves bases.

En la figura següent es mostren alguns elements geomètrics constitutius del cilindre.



Estem interessats a formular una parametrització del cilindre d'eix l'eix z de radi R, amb la base inferior sobre el pla $z = 0$, inclòs en el semiespai de les coordenades z positives o nul·les, i d'altura H.

Necessitem dos paràmetres. En aquest tipus de problemes és recomanable, si és possible, analitzar quines quantitats, lligades a l'objecte, permeten descriure'n amb comoditat els punts. En aquest cas, si considerem el punt $P = (x, y, z)$ de la superfície, es pot descriure amb facilitat mitjançant dos paràmetres: t, angle polar en el pla xy del punt $Q = (x, y, 0)$, projecció ortogonal de P sobre el pla horitzontal $z = 0$. La projecció ortogonal del cilindre sobre aquest pla és la circumferència de radi R i centre l'origen, i amb això podem expressar les coordenades x, y en funció de t de manera similar al cas de la circumferència.

Tenim, per tant: $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = z$. Per a evitar confusions notacionals, introduïm un canvi en el nom del paràmetre altura: $s = z$. L'expressió completa de la parametrització que expressa la dependència respecte de tots dos paràmetres seria:

$$\begin{cases} x(t,s) = R\cos t \\ y(t,s) = R\sin t \\ z(t,s) = s \end{cases}$$

Tot i així, aquesta expressió és incompleta, perquè tota parametrització ha d'incloure l'expressió del domini de variació dels paràmetres:

$$\left.\begin{aligned} x(t,s) &= R\cos t \\ y(t,s) &= R\sin t \\ z(t,s) &= s \end{aligned}\right\} ; 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le s \le H$$

Noteu que si volem generar només una part del cilindre (un semicilindre, per exemple) n'hi haurà prou de restringir el domini de variació de paràmetres.

Resulta fàcil escriure la parametrització del cilindre d'eix paral·lel a l'eix Oz, passant pel punt $(a, b, *)$, de radi R, amb la base inferior sobre $z = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x(t,s) &= a + R\cos t \\ y(t,s) &= b + R\sin t \\ z(t,s) &= s \end{aligned}\right\} ; 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le s \le H$$

També resulta immediat escriure parametritzacions per a cilindres d'eix Ox (o paral·lel a l'eix esmentat), o similarment per a Oy. N'hi haurà prou d'intercanviar el paper de la coordenada que té el paper de l'altura. Per exemple, aquesta és una parametrització d'un cilindre d'eix l'eix de coordenades Ox.

$$\left.\begin{aligned} x(t,s) &= s \\ y(t,s) &= R\cos t \\ z(t,s) &= R\sin t \end{aligned}\right\};0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le s \le H$$

2.2.2. Esfera

L'esfera de radi R i de centre el punt $C = (a, b, c)$ és el conjunt dels punts $P = (x, y, z)$ de l'espai que estan a una distància R de C.

A partir d'aquesta definició podem obtenir fàcilment l'equació corresponent. En efecte, expressant en coordenades la condició de distància, $d(P, C) = R$, resulta

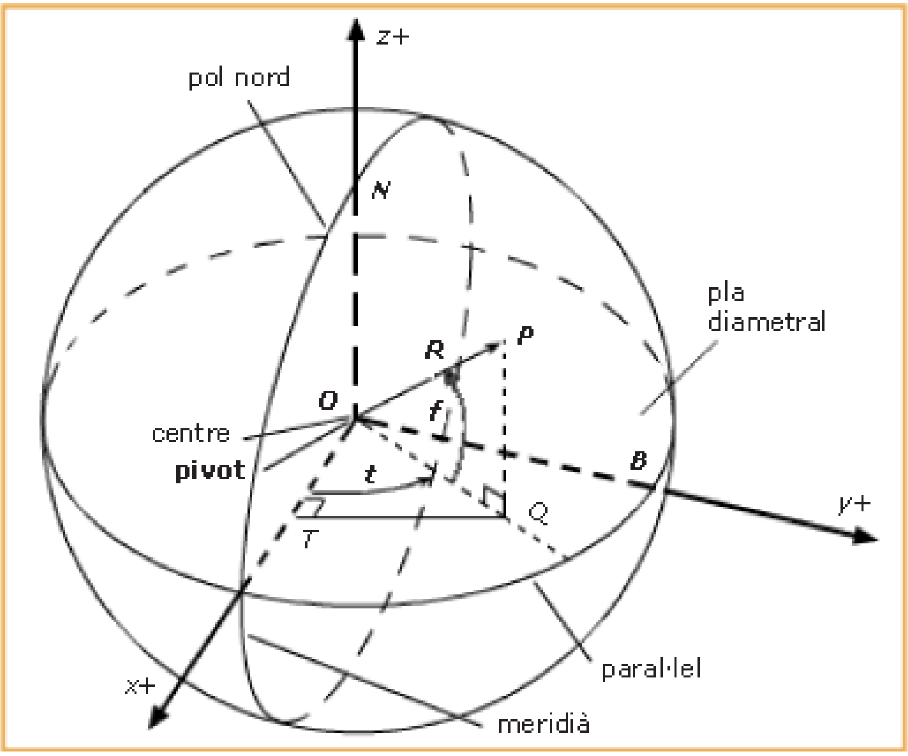
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

Elevant al quadrat resulta l'equació buscada:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Noteu que si $a = b = c = 0$, és a dir, si el centre coincideix amb l'origen de coordenades, obtenim l'expressió que ja s'havia indicat anteriorment.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



Estem interessats a parametritzar l'esfera de radi R i centre l'origen de coordenades.

Triem com a paràmetres els angles t ("longitud", per analogia en cartografia) i f ("latitud"). Obtenir les coordenades (x, y, z) del punt P sobre l'esfera en funció de t, f és un simple exercici de trigonometria prenent en consideració els triangles rectangles OPQ, OTQ. Resulta:

$P(t, f) = (R \cos f \cos t, R \cos f \sin t, R \sin f)$.

Aquesta expressió resulta insuficient, ja que no s'explicita la variació dels paràmetres. La versió completa seria:

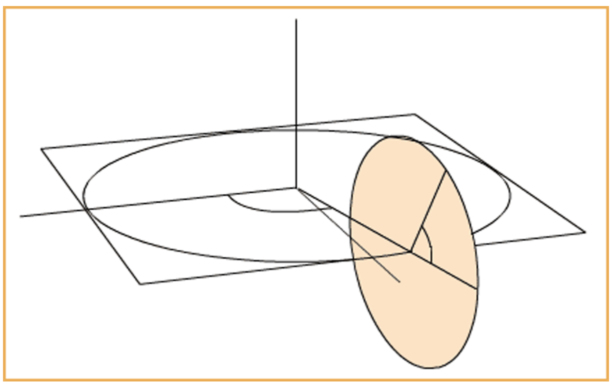
$$\left.\begin{aligned} x(t,f) &= R\cos f\cos t \\ y(t,f) &= R\cos f\sin t \\ z(t,f) &= R\sin f \end{aligned}\right\};0 \le t \le 2\pi;-\frac{\pi}{2} \le f \le \frac{\pi}{2}$$

Si volem la parametrització de l'esfera de radi R i de centre $C = (a, b, c)$, llavors n'hi haurà prou d'efectuar una translació T_C i s'obtindrà:

$$\left.\begin{aligned} x(t,f) &= a + R\cos f\cos t \\ y(t,f) &= b + R\cos f\sin t \\ z(t,f) &= c + R\sin f \end{aligned}\right\};0 \le t \le 2\pi;-\frac{\pi}{2} \le f \le \frac{\pi}{2}$$

2.2.3. Tor

El tor és la superfície que es genera per la rotació d'una circumferència al voltant d'una recta (*eix del tor*), i aquesta recta és exterior a la circumferència i totes dues figures coplanàries. El *pla diametral* del tor és el pla que passa pel centre de la circumferència generadora i és perpendicular a l'eix. La seva intersecció amb l'eix és el *centre* del tor. En les figures posteriors es mostren tots aquests elements.



A partir de la figura obtindrem una possible parametrització del tor, utilitzant els paràmetres angulars *a, b*. Per a això, considerarem els triangles rectangles *OPQ, OQT*. Noteu que $OQ = OC + CQ = R + r \cos b$.

Així, podem escriure *x*, *y*, *z* del punt $P = (x, y, z)$ en funció de *a, b*:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(a,b) & = & (R + r\cos b)\cos a \\ y(a,b) & = & (R + r\cos b)\sin a \\ z(a,b) & = & r\sin b \end{array}\right\} ; 0 \le a \le 2\pi,\ 0 \le b \le 2\pi$$

2.2.4. Con circular recte

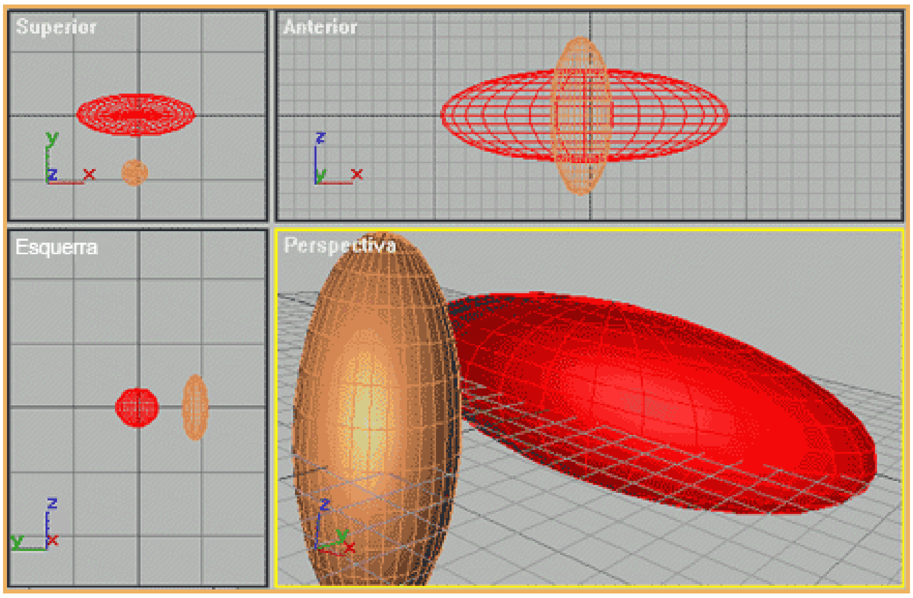
És la superfície generada per les rectes que passen per una circumferència i per un punt *V* comú (vèrtex) no contingut en el pla de la circumferència. A més, la recta per *V* que és perpendicular al pla de la circumferència passa pel seu centre.

2.2.5. Elipsoide

L'el·lipsoide de centre l'origen, eixos principals els eixos de coordenades i semieixos *a, b, c*, és la superfície d'equació:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Les seccions de l'esfera per plans paral·lels als de coordenades són el·lipses. La figura es pot obtenir pel canvi d'escala aplicat a l'esfera de radi 1.

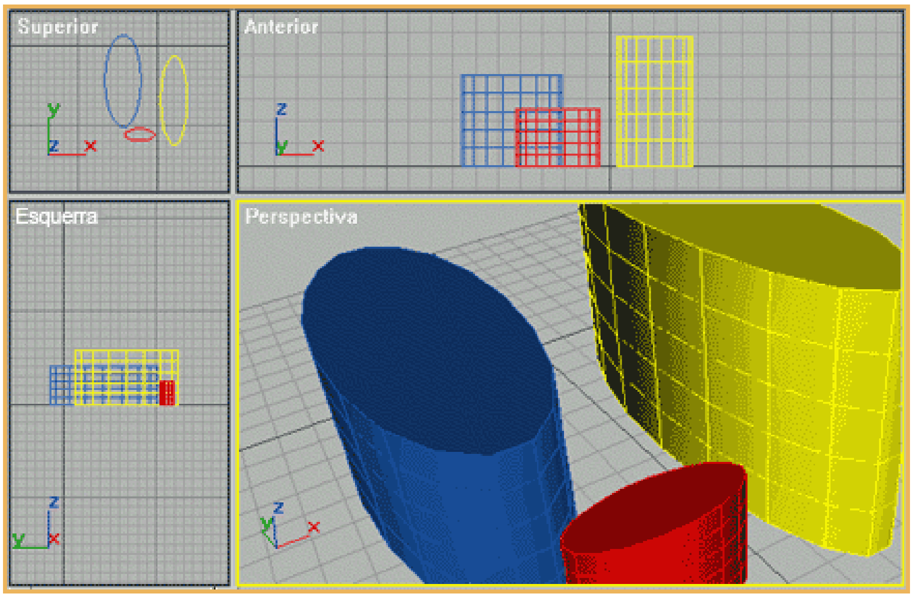


2.2.6. Cilindre el·líptic

El cilindre el·líptic d'eix l'eix de coordenades *Oz* i de directriu una el·lipse continguda en $z = 0$ amb centre en l'origen de coordenades és el conjunt de les rectes que són paral·leles a l'eix i passen per l'el·lipse.

Les seccions per plans perpendiculars a l'eix són el·líptiques.

De manera similar es poden definir cilindres el·líptics respecte d'eixos diferents dels eixos de coordenades.



2.2.7. Generació de superfícies per transformacions geomètriques: superfícies de revolució

Una de les construccions més potents per a generar formes són les superfícies de revolució.

Per a generar les superfícies esmentades calen dos elements: una *corba* (corba *directora*) i una *recta*, que serà l'eix de rotació de la directriu. El resultat de la rotació completa de la corba directora al voltant de l'eix és una superfície de revolució.

Estem interessats a disposar d'una parametrització (no es presentarà la deducció). Suposem, per a això, que coneixem una parametrització per a la corba directora:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t));\ a \leq t \leq b$$

Suposem que l'eix de revolució és l'eix *Oz*.

Una possible parametrització de la superfície generada per una rotació completa de la corba al voltant de l'eix *Oz* és:

$$\left.\begin{aligned} x(t,\theta) &= \sqrt{x(t)^2+y(t)^2}\cos\theta \\ y(t,\theta) &= \sqrt{x(t)^2+y(t)^2}\sin\theta \\ z(t,\theta) &= z(t) \end{aligned}\right\};a \le t \le b;0 \le \theta \le 2\pi$$

Es poden obtenir també parts de la superfície restringint els dominis de variació dels paràmetres.

L'esfera, el con, el cilindre i el tor es poden obtenir també com a superfícies de revolució.

Activitats

Exercicis

Problema 1

Parametritzeu l'hèlix circular de radi *a* 0, de pas de rosca $b > 0$, d'eix l'eix de coordenades *Ox*, continguda en el semiespai $x^3 0$, i tal que l'inici de la corba estigui en el punt $P = (0, a, 0)$.

Resposta:

$$\begin{cases} x(t) = bt \\ y(t) = a\cos t \\ z(t) = a\sin t \end{cases}$$

prenent com a paràmetre l'angle polar en el pla *yz*, amb origen d'angles el semieix *y*+ i cap a *z*+ pel camí més curt. La variació depèn del nombre de voltes que vulguem descriure; per exemple, per a una volta seria $0 \le t \le 2\pi$.

Problema 2

Utilitzant transformacions geomètriques, obtingueu una parametrització de la paràbola *C1* d'eix *Oz*, vèrtex en el punt $V = (0, 0, 1)$, situada en el pla $x = y$, idèntica quant a forma a la paràbola *C0* d'equació $y = x^2$ continguda en el pla *xy*.

Resposta:

Parametritzem *C0* escollint com a paràmetre $s = x$. En resulta:

$$C0: \begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = s^2 \\ z(s) = 0 \end{cases}$$

Resoldrem el problema per concatenació de transformacions.

En primer lloc efectuem una rotació positiva d'angle de 90 graus ($a = \pi/2$) respecte de l'eix *x*, que convertirà *C0* en una paràbola idèntica *C00*, situada sobre el pla *xz, z* positiu, d'eix *z* i amb el vèrtex en l'origen:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & -1 & s^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ s^2 \end{pmatrix}$$

Sens dubte, també podríem haver partit d'aquí, parametritzant directament *C00*.

Efectuem ara una rotació de 45 graus ($b = \pi/4$ radiants) respecte de l'eix *z* per convertir el pla *xz* en el bisector $y = x$, amb la qual cosa convertim la paràbola intermèdia *C00* en la *C000*, d'eix *x*, continguda en el semiespai de les *z* positives, continguda en el pla $y = x$ i amb el vèrtex en l'origen.

$$\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \\ \widehat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b & 0 \\ \sin b & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ s^2 \end{pmatrix}$$

Finalment, efectuem una translació per a complir la condició del vèrtex, translació de vector $V = (0, 0, 1)$; el resultat final és *C1*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \\ \widehat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ s^2+1 \end{pmatrix}$$

Per tant, una parametrització possible seria:

$$\begin{cases} x(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ y(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ z(s) = s^2+1 \end{cases}$$

L'interval de variació del paràmetre depèn del tram de paràbola que vulguem generar.

Problema 3

Escriviu una parametrització de la cardioide del pla d'equació $r = a(1 + \cos t)$ en coordenades polars.

Resposta:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a(1+\cos t)\cos t \\ y(t) &= a(1+\cos t)\text{sen } t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

Problema 4

Escriviu una parametrització de la circumferència de l'espai tridimensional de radi $R = 6$, continguda en el pla $x = 0$ i de centre $C = (0, 2, 3)$.

Resposta:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= 2+6\cos t \\ z(t) &= 3+6\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

Problema 5

Considereu la paràbola *C0* en el pla donada per $y = ax^2$. Obtingueu una parametrització de la paràbola *C1*, resultat d'aplicar a *C0* la rotació horària de 45 graus respecte de l'origen de coordenades.

Resposta:

Escrivim *C0* en forma paramètrica:

$$\left.\begin{aligned} x(s) &= s \\ y(s) &= as^2 \end{aligned}\right\}, s \in R$$

Aplicarem la rotació indicada als punts de la forma anterior:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ as^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ as^2 \end{pmatrix}$$

Efectuem el producte matricial:

$$\left.\begin{aligned} x(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2}s - \frac{\sqrt{2}}{2}(as^2) \\ y(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2}s - \frac{\sqrt{2}}{2}(as^2) \end{aligned}\right\}, t \in R$$

Problema 6

Escriviu una parametrització de la circumferència de l'espai tridimensional de radi $R = 3$, continguda en el pla $y = 4$ i de centre $C = (2, 4, 8)$.

Resposta:

$$\begin{cases} x(t) = 2 + 3\cos t \\ \quad y(t) = 4 \qquad , 0 \leq t \leq 2\pi \\ z(t) = 8 + 3\sin t \end{cases}$$

Problema 7

Escriviu una parametrització de l'espiral d'Arquimedes del pla d'equació $r = at$ (3 voltes) en coordenades polars.

Resposta:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= at\cos t \\ y(t) &= at\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \leq t \leq 6\pi$$

Problema 8

Considereu en l'espai tridimensional la paràbola *C0* del pla de coordenades vertical $x = 0$, donada per $z = ay^2$; $x = 0$. Sigui *C1* el resultat d'aplicar a *C0* la rotació positiva de 45 graus respecte de l'eix de coordenades *Oz*. Obtingueu una parametrització de *C1*.

Resposta:

Considerem la parametrització de la paràbola inicial *C0*:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= t \\ z(t) &= at^2 \end{aligned}\right\}, t \in R$$

Aplicarem la transformació:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

als punts de la paràbola *C0*:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ at^2 \end{pmatrix}$$

Finalment:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = 0 \\ y(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ z(t) = a\frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \end{array}\right\}, t \in R$$

Problema 9

Suposeu que una esfera es desplaça de manera que el seu centre segueix la trajectòria donada per la corba:

$$\begin{cases} x(t) = 6 \\ y(t) = 3 + 5\cos t \quad , 0 \le t \le \pi \\ z(t) = -2 + 4\sin t \end{cases}$$

Descriviu-ne completament la trajectòria.

Resposta:

En primer lloc s'observa que es tracta d'una corba plana, continguda en el pla d'equació $x = 6$. La parametrització correspon a punts d'una el·lipse, de centre $C = (6, 3, –5)$, amb els semieixos $a = 5$ (corresponent a l'eix y), i $b = 4$. Els eixos principals són respectivament paral·lels als eixos de coordenades Oy (corresponent a $a = 5$), Oz (corresponent a $b = 4$). La trajectòria és una semiel·lipse, atesa la variació del paràmetre. El punt inicial serà $I = (x(0), y(0), z(0)) = (6, 3 + 5 \cos 0, –2 + 4 \sin 0) = (6, 8, –2)$. El punt final de la trajectòria correspondrà al valor extrem del paràmetre t i serà $F = (x(\pi), y(\pi), z(\pi)) = (6, -2, -2)$. La trajectòria és antihorària vista des de $x = 7$.

Problema 10

Suposeu que una esfera es desplaça de manera que el seu centre segueix la trajectòria donada per la corba:

$$\begin{cases} x(t) = 3 + 7\cos t \\ y(t) = 6 \qquad , 0 \le t \le 20\pi \\ z(t) = 4 + 7t\sin t \end{cases}$$

Descriviu completament la trajectòria.

Resposta:

Es tracta d'una corba plana, continguda en el pla $y = 6$, paral·lel al de les coordenades xz. De l'observació de les expressions per a $x(t)$ i $z(t)$ es dedueix que es tracta d'una espiral d'Arquimedes, idèntica a l'espiral d'equació polar $r = at$, $a = 7$, amb 10 voltes, i amb centre o origen $C = (3, 6, 4)$. Observant des de $y > 6$, l'espiral gira de manera antihorària.

Problema 11

El centre d'un icosaedre segueix una trajectòria donada per la parametrització:

$$\begin{cases} x(t) = 2 + 4\cos t \\ y(t) = 6 & ;\ 0 \le t \le 2\pi \\ z(t) = 3 + 5\sin t \end{cases}$$

Descriviu completament la trajectòria d'animació de l'icosaedre.

Resolució:

La trajectòria és una corba plana, continguda en el pla $y = 6$, paral·lel al pla de coordenades xz. Es tracta d'una el·lipse de centre $C = (2, 6, 3)$ i de semieixos $a = 4$, $b = 5$. Els eixos principals són respectivament paral·lels als eixos de coordenades x, z. L'eix corresponent a $a = 4$ (menor) és paral·lel a l'eix Ox; l'eix corresponent a $b = 5$ (major) és paral·lel a l'eix Oz. El recorregut és una volta completa, amb inici en $I = (x(0), y(0), z(0)) = (6, 6, 3)$. El recorregut es fa de manera antihorària vist des de $y+$, amb $y > 6$.

Problema 12

Parametritzeu la circumferència del pla $x = 2$, de radi $R = 5$ i centre $C = (2, 4, 3)$.

Resolució:

Hi ha diverses possibilitats, depenent d'on vulguem que s'iniciï i com vulguem que s'efectuï la rotació, és a dir, la generació dels punts de la corba. Vegem-ne una:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 2 \\ y(t) &= 4 + 5\cos t \\ z(t) &= 3 + 5\sin t \end{aligned}\right\} ;\ 0 \le t \le 2\pi$$

Problema 13

Suposeu que una esfera es desplaça de manera que el seu centre segueix la trajectòria donada per la corba:

$$\begin{cases} x(t) = 5t \\ y(t) = 3 + 4\cos t \ ;\ 0 \le t \le 12\pi \\ z(t) = 2 + 4\sin t \end{cases}$$

Descriviu-ne completament la trajectòria.

Resolució:

És una hèlix circular de radi $a = 4$, pas de rosca $b = 5$, d'eix la recta que passa pel punt (0, 3, 2) i és paral·lela a l'eix de coordenades Ox. És una hèlix de 6 voltes. El punt d'inici correspon al valor inicial del paràmetre, $t = 0$, de manera que serà $I = (x(0), y(0), z(0)) = (0, 7, 2)$, en el pla $x = 0$. El sentit d'avenç és en el sentit de $x+$; observant la projecció ortogonal sobre el pla yz, l'avenç s'observa en projecció com a antihorari vist des de $x > 0$.

Problema 14

Suposeu que una esfera es desplaça de manera que el seu centre segueix la trajectòria donada per la corba:

$$\begin{cases} x(t) = 4 + 6t\cos t \\ y(t) = 2 + 6t\sin t \ ;\ 0 \le t \le 18\pi \\ z(t) = 5 \end{cases}$$

Descriviu-ne completament la trajectòria.

Resolució:

De la tercera equació resulta que la corba és plana i està continguda en el pla horitzontal $z = 5$.

La corba auxiliar en el pla bidimensional ($6t$ cos t, $6t$ sin t) és una espiral d'Arquimedes d'origen l'origen de coordenades, d'equació polar $r = at$, amb $a = 6$. Observada des del semi-eix $z+$, el sentit de desenvolupament o desplegament de la corba és antihorari. La variació del paràmetre t indica que s'efectuen 9 voltes al voltant de l'origen. La corba donada té les mateixes característiques que l'auxiliar descrita, de la qual resulta per translació. Per tant, la corba donada té de centre el punt (4, 2, 5).

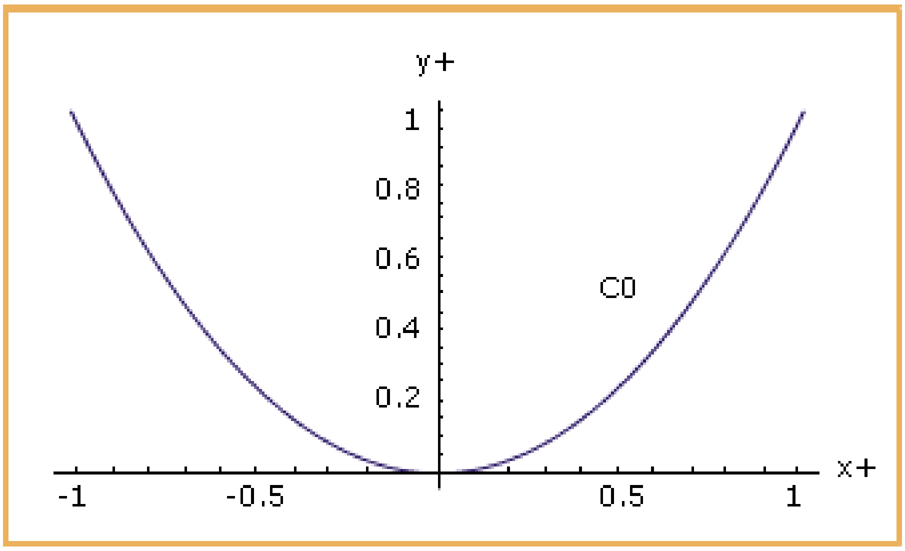
Problema 15

Utilitzeu transformacions geomètriques afins per a obtenir una parametrització de la paràbola de coeficient d'obertura $a = 3$, vèrtex (2, 5) i eix la recta r d'equació $2x + 3y = 29$, continguda en el semiplà $y \geq 0$.

Resolució:

Resoldrem el problema per transformacions geomètriques. Diverses variants són possibles; vegem-ne una, consistent a escriure *directament* la transformació afí que ens permet construir la corba que busquem.

Considerem la corba *C0*, idèntica a la forma que es demana construir en l'enunciat, però col·locada en la que podem anomenar *posició estàndard*, tal com es mostra en el gràfic que segueix.



La paràbola *C0* és la paràbola de vèrtex $V = (0, 0)$, l'eix de la paràbola és l'eix de coordenades *Oy*, el coeficient d'obertura és $a = 3$, i està continguda en el semiplà $y \geq 0$. És a dir, és la corba $y = 3x^2$.

Aquesta corba admet la parametrització:

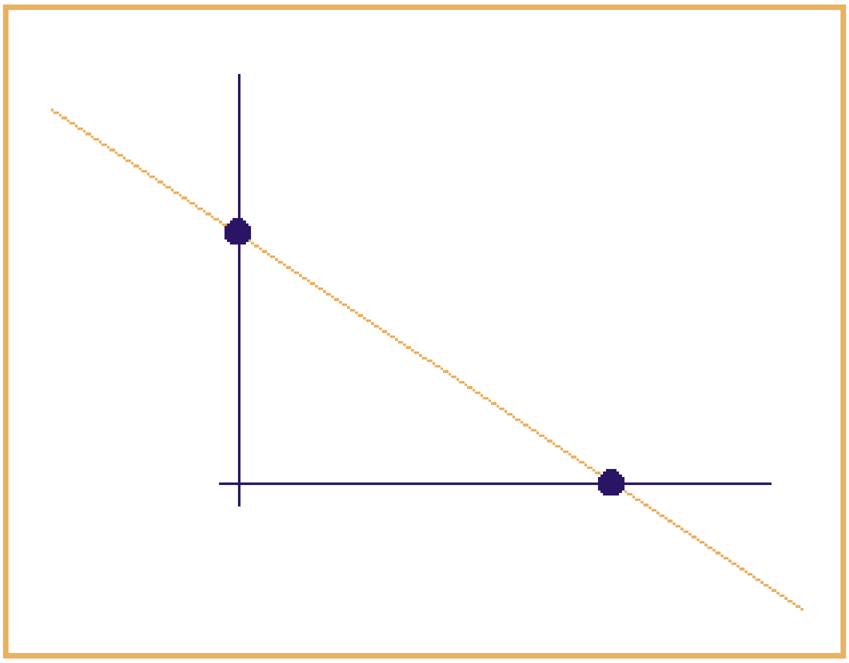
$$\left.\begin{array}{rcl} x(s) & = & s \\ y(s) & = & 3s^2 \end{array}\right\},\ s_0 \leq s \leq s_1$$

En el cas de la figura és $s_0 = -1$, $s_1 = 1$.

Ara formularem la transformació afí que ens convertirà finalment la corba *C0* en la corba demanada. Com que l'estructura d'aquest tipus de transformacions és $X' = AX + W$, en què A és la matriu de la part lineal de la transformació i W és el vector de translació, n'hi ha prou de determinar, doncs, A i W.

Quant a W, perquè el vèrtex de *C0* es transformi en el vèrtex de la paràbola demanada, tenint en compte que el vèrtex de *C0* és l'origen de coordenades, n'hi ha prou de prendre $W = (2, 5)$ com a nou vèrtex.

Quant a A, n'hi ha prou de donar la imatge o la transformació dels vectors de la base usual $\{e_1, e_2\}$ de l'espai vectorial bidimensional. Per a això, el vector e_2, direcció de l'eix de la paràbola, s'ha de convertir en la direcció de l'eix de la paràbola demanada, que ha de ser paral·lela a la recta $2x + 3y = 29$, amb e_2', el qual, transformat de e_2, ha de ser vector director de la recta esmentada, convenientment orientat per a complir la condició relativa al semiplà. Trobem, doncs, e_2'.



Podríem obtenir dos punts de la recta, per exemple les interseccions amb els eixos. Si A és la intersecció amb Ox, i B és la intersecció amb Oy, llavors $B - A$ és un vector director de la recta; caldria normalitzar.

Una altra manera de procedir, estalviant càlculs, consisteix a considerar la recta paral·lela a la donada, però passant per l'origen, $2x + 3y = 0$. La podem reescriure en la forma: $0 = 2x + 3y = (2, 3)(x, y)$, la qual cosa ens diu que el vector $u = (2, 3)$ és ortogonal a la recta, cosa que també ens fa falta. Trobant una direcció ortogonal a u obtenim un vector director de la recta, la qual cosa és molt fàcil: prenent $v = (-3, 2)$ obtenim un vector ortogonal. A més $\{u, v\}$ és una base d'orientació positiva i l'orientació de v permetrà resoldre el problema amb el requeriment d'estar continguda la corba imatge en el semiplà de les y positives. Normalitzant, resulta finalment:

$$\begin{cases} e_1{}' = \dfrac{1}{\|u\|}u = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2, 3) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right) \\ \qquad e_2{}' = \left(-\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right) \end{cases}$$

Per tant, la matriu de la transformació afí ha de ser:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{13}} & -\dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{13}} & \dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

Per tant, la parametrització derivada per transformació afí és:

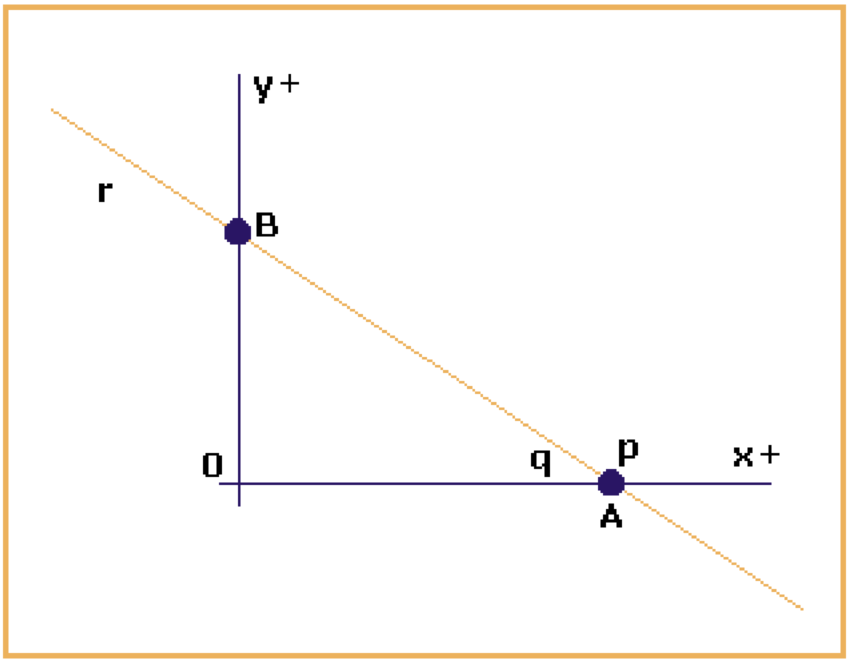
$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} + W = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{13}} & -\dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{13}} & \dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 3s^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Efectuant els càlculs anteriors, i eliminant la notació de primes, resulta finalment:

$$\begin{cases} x(s) = \dfrac{2}{\sqrt{13}}s - \dfrac{3}{\sqrt{13}}3s^2 + 2 \\ y(s) = \dfrac{3}{\sqrt{13}}s + \dfrac{2}{\sqrt{13}}3s^2 + 5 \end{cases}$$

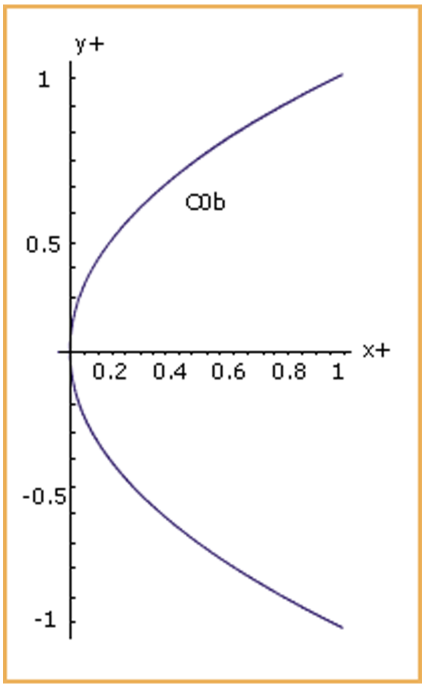
Segona variant. Ja hem vist una manera de resoldre el problema. La que plantegem a continuació l'hauríeu d'intentar acabar vosaltres. És essencialment equivalent a l'anterior, però ara per *concatenació de transformacions*: de rotació respecte de l'origen $R^p{}_O$ i posteriorment de translació T_W.

Per a això, considerem l'esquema següent:



Recordem la definició de la *inclinació* d'una recta *r*: si *r* és una recta que no és paral·lela a l'eix *x*, i si *A* és la intersecció de la recta amb l'eix *x*, llavors l'angle d'inclinació de *r* és l'angle mínim que ha de girar l'eix *x* en sentit antihorari respecte de *A* perquè coincideixi amb *r*. En el cas de paral·lelisme l'angle d'inclinació és 0. En el diagrama anterior l'angle d'inclinació és *p*.

Per tant, caldria calcular l'angle d'inclinació *p* i aplicar la rotació indicada a una còpia de la corba en una altra posició, la que s'indica en l'esquema següent:



En aquest cas cal utilitzar la parametrització de la corba *C0b*, d'equació explícita $x = y^2$, de la qual es deriva la parametrització $x(s) = s^2, y(s) = s$, prenent la mateixa coordenada y com a paràmetre.

Podeu acabar de resoldre el problema per aquesta via. Fins i tot aquí són possibles dues variants, a fi d'escriure la matriu de rotació:

Variant *a*: la indicada anteriorment, consistent a calcular l'angle d'inclinació p i posteriorment calcular sin p, cos p per a escriure la matriu.

Variant *b*: com que només necessitem les raons trigonomètriques de l'angle p, prescindiu d'aquest càlcul i obteniu directament sin p, cos p, per geometria analítica i trigonometria elemental.

Problema 16

Considerem l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2} = 1$. Cal construir una còpia mètricament idèntica però amb centre en el punt $C = (5, 3)$, de manera que el seu semieix major sigui paral·lel a la recta $y = -x$. Formuleu una parametrització de l'el·lipse resultant. Quines modificacions caldria fer per a obtenir una parametrització de la meitat superior de la figura?

Resolució:

Resoldrem el problema mitjançant transformacions geomètriques afins, però en comptes de formular-se per a punts genèrics (x, y) del pla, s'aplicaran als punts que es trobin de l'el·lipse tal com està donada en l'enunciat.

Vegem, doncs, en primer lloc, com es pot parametritzar l'el·lipse. De l'equació $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2} = 1$ queda clar que és una el·lipse de centre l'origen de coordenades, d'eixos principals coincidents amb els eixos de coordenades, i amb semieixos $a = 3$, $b = 2$. Es pot parametritzar aquesta corba mitjançant:

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases}, \; t \in [0, 2\pi]$$

Per tant, els punts d'aquesta el·lipse són de la forma (3 cos t, 2 sin t). Obtenim la "meitat superior", és a dir, la semiel·lipse corresponent al semiplà $y \geq 0$, limitant la variació del paràmetre t a l'interval $[0, \pi]$. Per al valor inicial $t = 0$ iniciem el recorregut de la semiel·lipse en el punt (a, 0); per al valor final $t = \pi$, finalitzem el recorregut de la semiel·lipse en el punt ($-a$, 0). La variació de t produeix, a més, un sentit de recorregut sobre la corba.

Designarem aquesta el·lipse com a L_0.

Analitzem ara la recta $y = -x$. És la bisectriu del segon i quart quadrants. Noteu que es pot obtenir a partir de l'eix Ox per rotació respecte de l'origen de dues maneres: efectuant una rotació positiva d'angle $\alpha = 45 + 90 = 135$ graus (és a dir, $R_O{}^{\alpha}$) o bé una rotació negativa de $\beta = -45$ graus (és a dir, $R_O{}^{\beta}$).

Llavors podem construir una còpia de l'el·lipse completa anterior, de manera que passi a ocupar la posició demanada, aplicant transformacions derivades de l'anàlisi anterior a l'el·lipse "original" L_0. Hi ha més d'una possibilitat:

Possibilitat 1: apliquem primer a L_0 la rotació $R_O{}^{\alpha}$, i seguidament la translació $T_C = T_{(5,3)}$.

Possibilitat 2: apliquem primer a L_0 la rotació $\beta = -45$ graus, (és a dir, $R_O{}^{\beta}$), i seguidament la traslació $T_C = T_{(5,3)}$.

Totes dues possibilitats són equivalents si només estem interessats a obtenir l'el·lipse completa i resulta indiferent com es recorren en variar t en $[0, 2p]$; en canvi, ja no són equivalents si el que volem és només una de les dues semiel·lipses "superior" o "inferior", amb el recorregut de t en $[0, p]$. Cal controlar per on comencem per a obtenir-ne una o una altra.

Si volem obtenir la semiel·lipse que està per "sobre" de la recta $y = -x$, llavors cal usar la segona possibilitat. Resultarà finalment la parametrització següent:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (T_{(5,3)} \circ R_O^{\beta})\begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} = T_{(5,3)}\left(R_{\beta}{}^{O}\left(\begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}\right)\right) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(-45^0) & -\sin(-45^0) \\ \sin(-45^0) & \cos(-45^0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}3\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}2\sin t + 5 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}3\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}2\sin t + 3 \end{pmatrix}$$

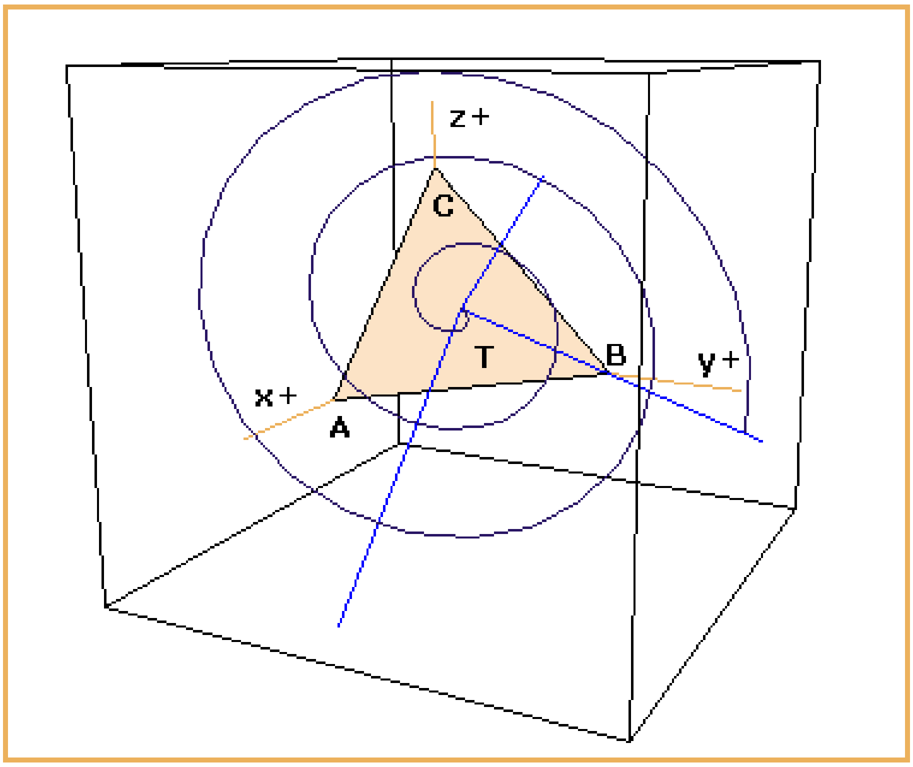
Per tant, la parametrització buscada és:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos t + \sqrt{2}\sin t + 5 \\ y(t) &= -\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos t + \sqrt{2}\sin t + 3 \end{aligned}\right\}, \; t \in [0, \pi]$$

Aquestes equacions corresponen a la semiel·lipse. L'el·lipse completa s'obté variant amb la variació $0 \le t \le 2\pi$.

Problema 17

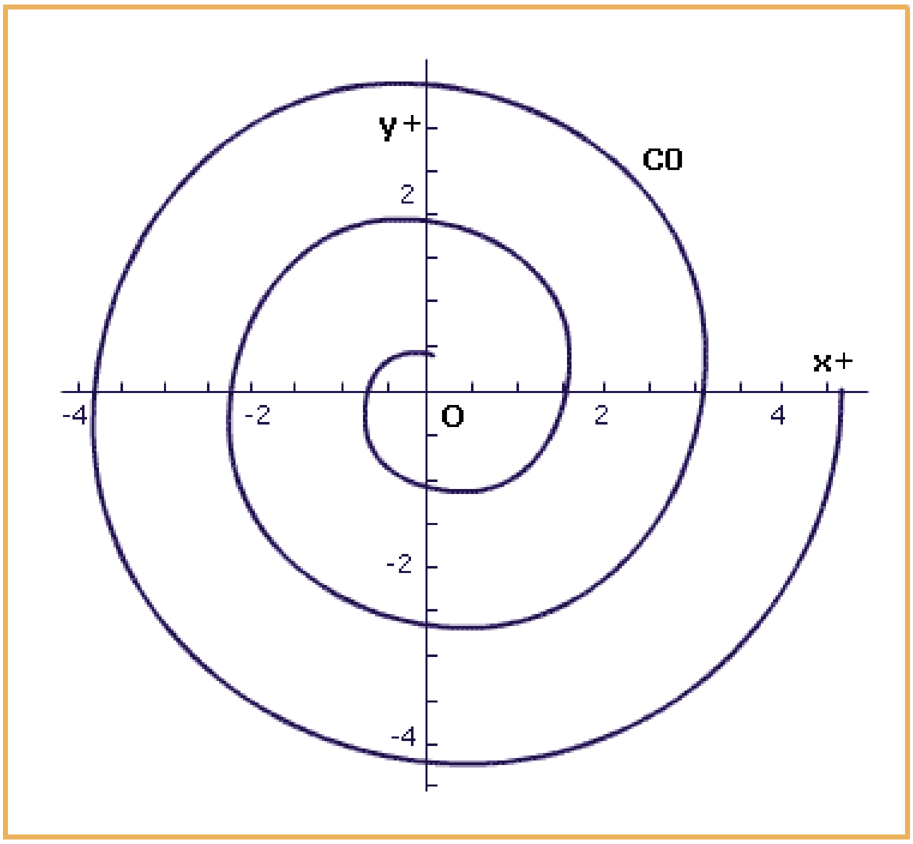
Considereu el triangle ABC en l'espai tridimensional, de vèrtexs $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$, $C = (0, 0, 3)$, i sigui T el baricentre del triangle ABC. Construïu una còpia de l'espiral d'Arquimedes $r = at$, amb $a = \frac{1}{4}$, que faci 3 voltes al voltant de l'origen, sobre el triangle de vèrtexs ABC, de tal manera que el centre de l'espiral es trobi en el baricentre T del triangle. Obtingueu una parametrització de la corba.

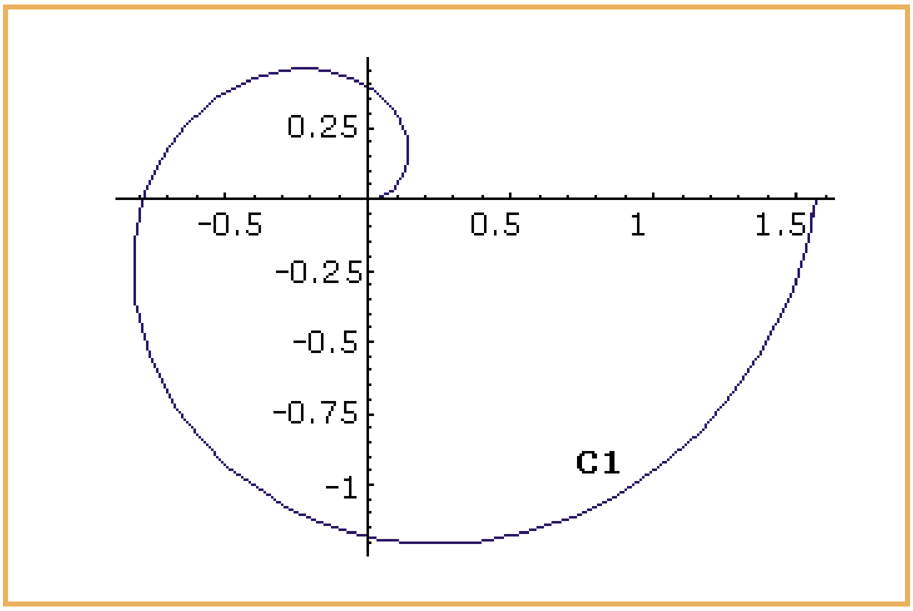


Resolució:

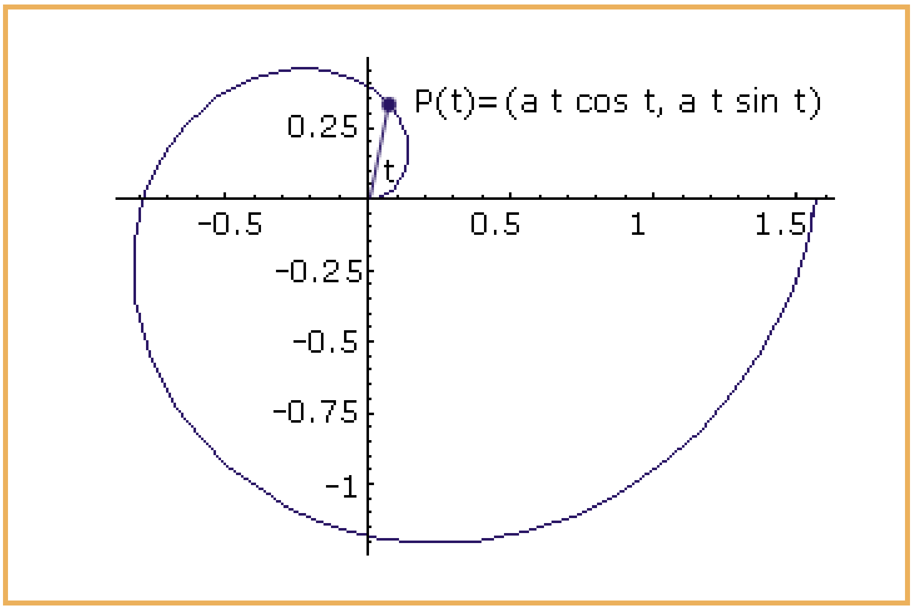
Aquest exercici està relacionat amb el tema de corbes i de transformacions geomètriques arbitràries, diferents de les bàsiques. És també un exemple de com cal usar les transformacions geomètriques per a propòsits de construcció geomètrica, i per a obtenir parametritzacions de corbes en posicions arbitràries, la qual cosa té interès per a MaxScript i per a l'editor d'expressions paramètriques.

En el gràfic següent es mostra una espiral d'Arquimedes $r = at$, amb $a = 1/4$, amb t com a angle polar en el pla. Vegeu també una sola volta (*C1*); en el nostre cas haurà de ser $0 \leq t \leq 3(2\pi) = 6\pi$, variació del paràmetre corresponent a 3 voltes (*C0*).





Considerant la corba *C0*, en el pla *xy*, es pot parametritzar immediatament utilitzant justament com a paràmetre l'angle polar:

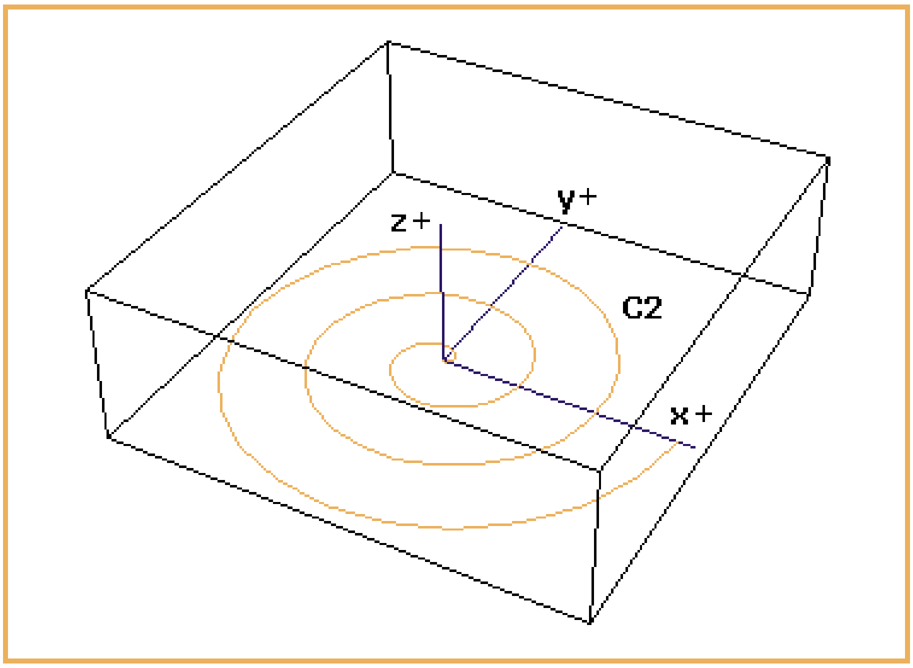


La parametrització derivada és:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= at\cos t \\ y(t) &= at\sin t \end{aligned}\right\},\ 0 \le t \le 6\pi$$

Resoldrem el problema constructiu per transformacions geomètriques. La idea és considerar una còpia de l'objecte que finalment hem d'obtenir, parametritzar-la (en una posició en la qual ens resulti fàcil fer-ho), i aplicar a la parametrització la transformació geomètrica afí convenient perquè es transformi en el que a nosaltres ens interessa. La transformació geomètrica es definirà construint una adequada base ortonormal.

Considerem l'espiral d'Arquimedes en la mateixa posició que abans, però ara en el pla *xy*, immers en l'espai tridimensional, de manera que és el pla de coordenades horitzontal $z = 0$, com es mostra en la figura següent:



La parametrització corresponent de *C2* és:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = at\cos t \\ y(t) = at\sin t \\ z(t) = 0 \end{array}\right\}, 0 \leq t \leq 6\pi$$

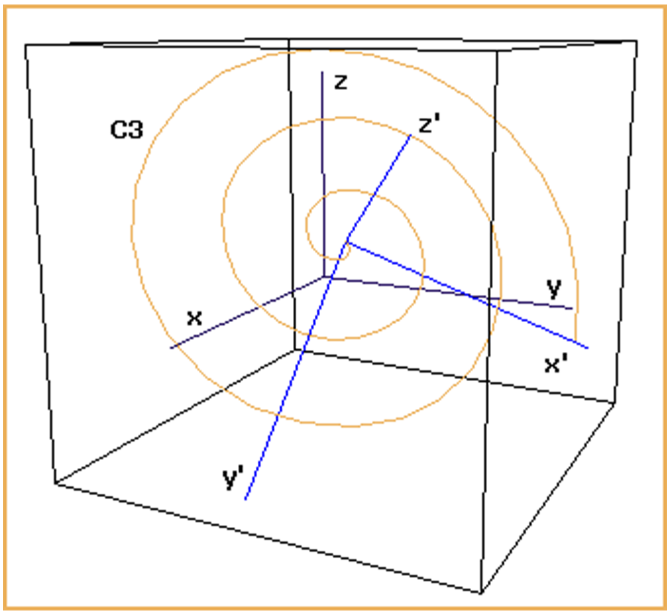
Definirem la transformació afí 3D que transforma la corba *C2* en la definitiva *C3*, que és la ens demanen. Hem de donar, per a això, la part lineal (matricial) *M* i la part (vectorial) de translació *W*, per a aplicar després *X*' = *MX* + *W* als punts de l'espai que siguin justament els de *C2*, és a dir, els que tenen la forma donada per la parametrització. Per tant, seria:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + W = M\begin{pmatrix} at\cos t \\ at\sin t \\ 0 \end{pmatrix} + W$$

La determinació del vector de translació és immediata:

$$W = T = \frac{1}{3}(A+B+C) = \frac{1}{3}((3,0,0)+(0,3,0)+(0,0,3)) = \frac{1}{3}(3,3,3) = (1,1,1)$$

Quant a la matriu *M*, cal escollir les transformacions dels vectors de la base usual de coordenades cartesianes, transformacions que, en l'ordre corresponent, formaran les columnes de la matriu *M*. Això equival a dir quins seran els eixos orientats *x*', *y*', *z*' en què es transformaran els eixos orientats *x*, *y*, *z* (amb manteniment de la unitat de mesura i l'ortogonalitat mútua), com s'indica en l'esquema següent:



Calculem els vectors transformats per la transformació que construirem: e'_1 serà el transformat de $e'_1 = (1,0,0)$, e'_2 serà el transformat de $e_2 = (0,1,0)$, e'_3 serà el transformat de $e_3 = (0,0,1)$. La matriu *M* tindrà com a columnes els nous vectors: $M = (e'_1\, e'_2\, e'_3)$.

Hi ha diverses possibilitats, encara que *z*' ha de ser perpendicular al pla *ABC* (fins i tot per a això hi ha dues possibilitats, relatives a l'orientació). Escollirem, per tant, la direcció perpendicular al pla *ABC*, que estarà determinada pel producte vectorial de dos vectors sobre el pla, per exemple *TB*, *TC* o una altra combinació, utilitzant dades de què disposem directament. Tenim *TB* = *B* – *T* = (0, 3, 0) – (1, 1, 1) = (–1, 2, –1), *TC* = *C* – *T* = (0, 0, 3) – (1, 1, 1) = (–1, –1, 2). Calculem el producte vectorial de tots dos vectors, en l'ordre que indiquem seguidament:

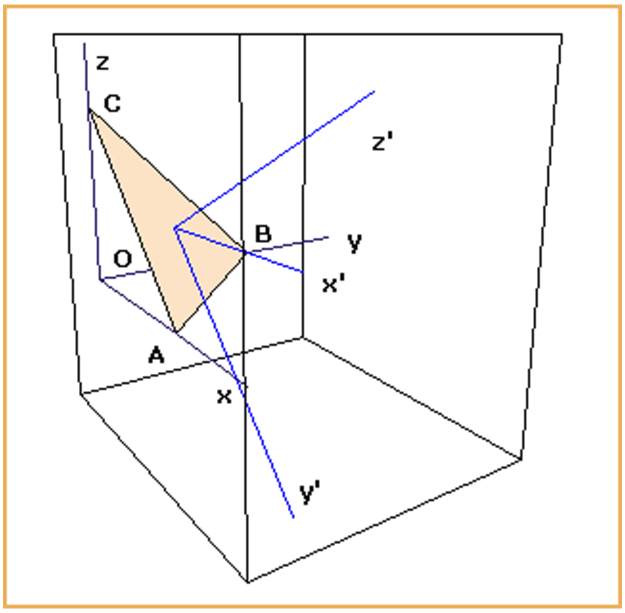
$$a'_3 = TB \wedge TC = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right) = (3,3,3)$$

La seva norma o mòdul és $\|a'_3\| = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = 3\sqrt{3}$

Finalment es normalitza i s'obté:

$$e'_3 = \frac{1}{\|a'_3\|}a'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Alternativament, es pot obtenir també l'equació del pla *ABC*, que resulta ser $x + y + z = 3$, amb la qual cosa un vector normal és $N = (1, 1, 1)$, a partir del qual es pot obtenir el que hem triat, per normalització. També es podrien haver usat altres vectors, com per exemple *AB, AC* o d'altres.



Quant a *x*', podem escollir qualsevol direcció sobre el pla. L'elecció que fem permetrà controlar la posició de la corba, referent a la direcció equivalent a l'eix *x* de *C2*. Triarem aquí la direcció *TB* (encara que hi ha altres possibilitats).

Calculem $e'_1 = \frac{1}{\|\vec{TB}\|}\vec{TB}$. Per a això: $TB = B - T = (0, 3, 0) - (1, 1, 1) = (-1, 2, -1)$. Calculem la norma:

$$\|TB\| = \|(-1, 2, -1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Per tant,

$$e'_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

El segon vector transformat ha de ser ortogonal als dos anteriors, i això es pot obtenir calculant el producte vectorial, en qualsevol ordre. Per exemple:

$$e'_2 = e'_1 \wedge e'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Es pot comprovar que ja resulta unitari, de mòdul 1, i no cal normalitzar.

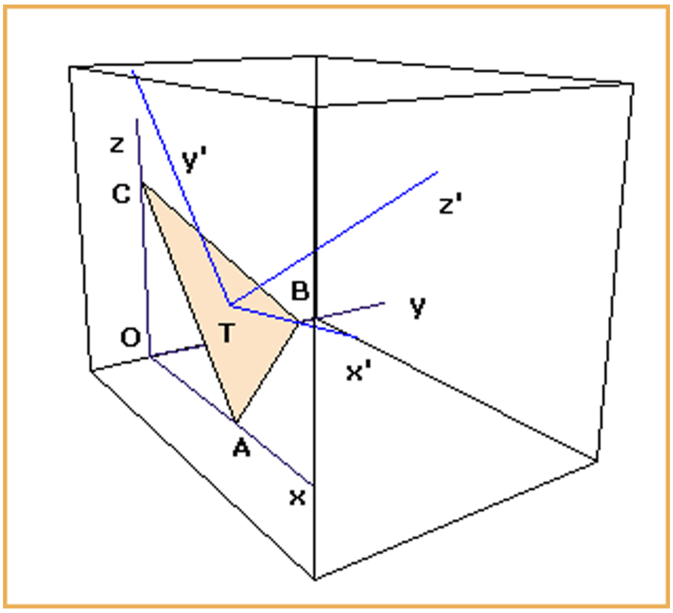
Per tant,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} at\cos t \\ at\sin t \\ 0 \end{pmatrix} + W = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} at\cos t \\ at\sin t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

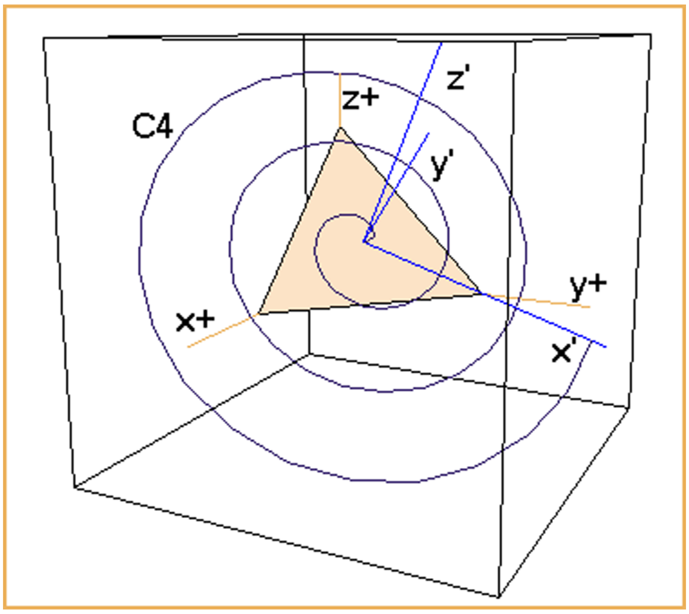
Efectuant els càlculs matricials indicats anteriorment (i eliminant definitivament la notació "primera") obtenim la parametrització que es deriva d'aquest desenvolupament:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= -\frac{a}{\sqrt{6}}t\cos t + \frac{a}{\sqrt{2}}t\sin t + 1 \\ y(t) &= \frac{2a}{\sqrt{6}}t\cos t + 1 \\ z(t) &= \frac{a}{\sqrt{6}}t\cos t - \frac{a}{\sqrt{2}}t\sin t + 1 \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 6\pi$$

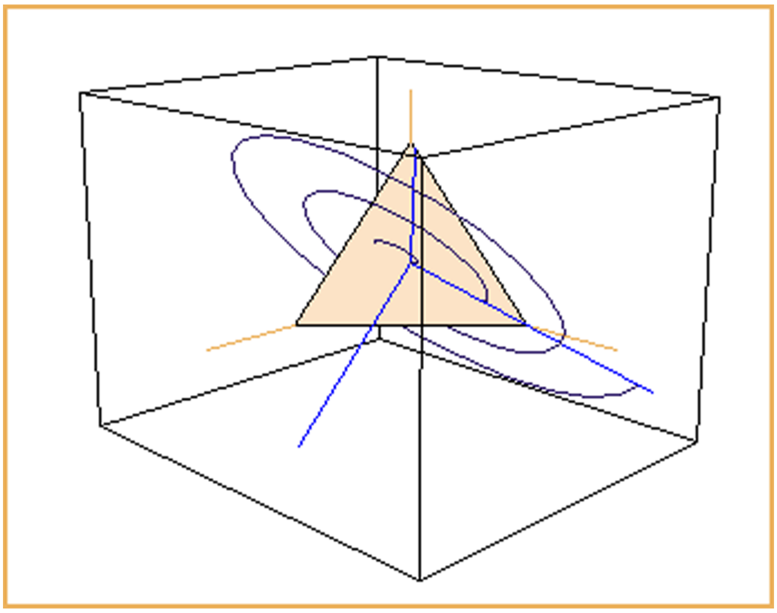
Noteu que una vegada escollida la direcció orientada *x*', resulta fixada la direcció de *y*', però no la seva orientació, i per això tenim encara una altra possibilitat, la qual cosa es tradueix en una manera diferent de generar la corba, i amb això, de fet, s'obté una corba nova, com es mostra en els gràfics següents. N'hi ha prou de canviar de signe el segon vector transformat:



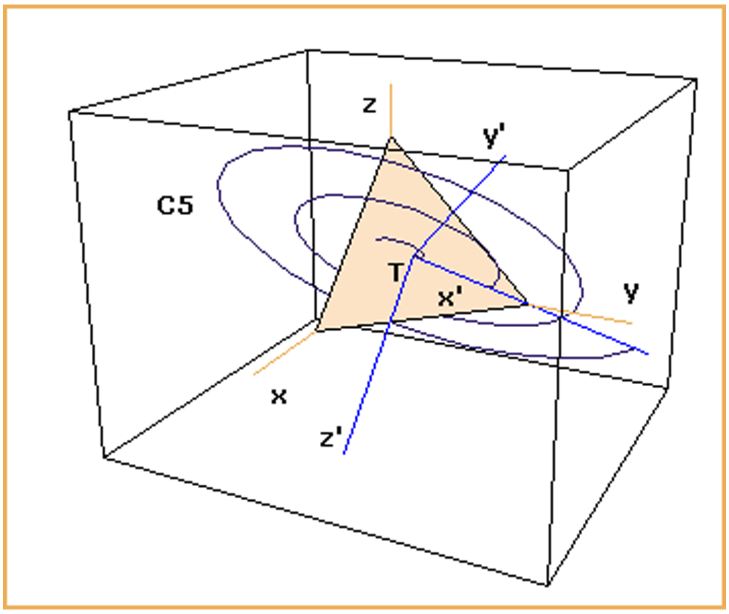
L'efecte d'aquesta variació es pot veure en l'esquema següent:

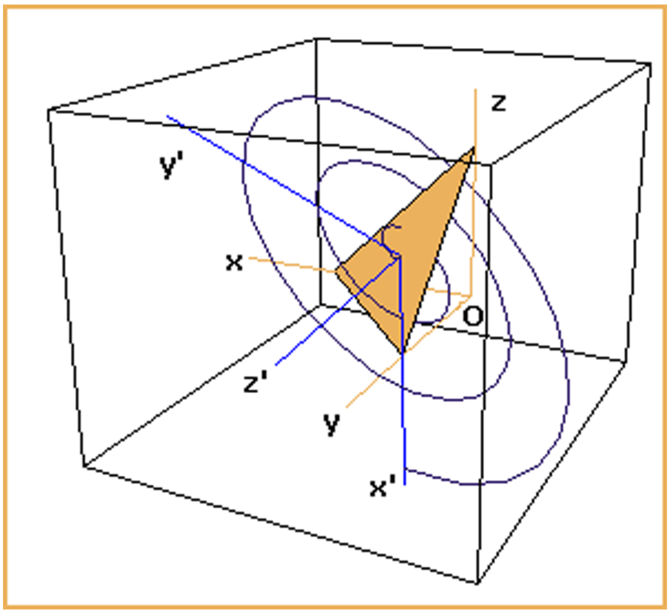


Posats a considerar variacions sobre l'enunciat, per què no considerem cap altra variant per a obtenir una espiral d'Arquimedes amb vèrtex en *T* continguda en un pla perpendicular al pla donat, per exemple en la posició següent?:



Aquí simplement hem hagut de permutar a la matriu els vectors imatge (transformats) corresponents a *y*', *z*':





Problema 18

Considereu la paràbola *P0*, d'equació $y = 2x^2 + 12$, i la paràbola *P1*, d'equació $x = -2y^2 + 13$. Considereu diverses seqüències ordenades de transformacions geomètriques (llegint de dreta a esquerra):

a.

$T_{(13,\,0)} \circ R_O^{\;90} \circ T_{(0,\,-12)}$

b.

$T_{(13,\,0)} \circ R_O^{\;90} \circ T_{(-12,\,0)}$

c.

$T_{(0,\,-12)} \circ R_O^{\;90} \circ T_{(13,\,0)}$

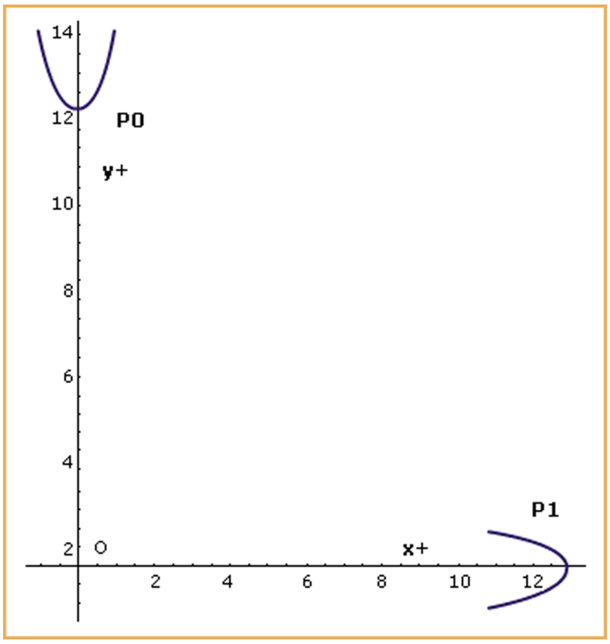
d.

$T_{(13,\,0)} \circ R_O^{\;-90} \circ T_{(0,\,-12)}$

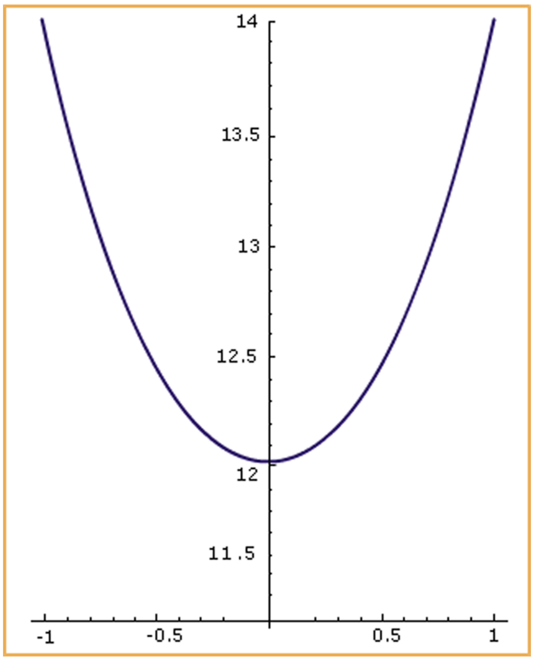
Indiqueu quina transforma la figura *P0* en la figura *P1* (si n'hi ha alguna).

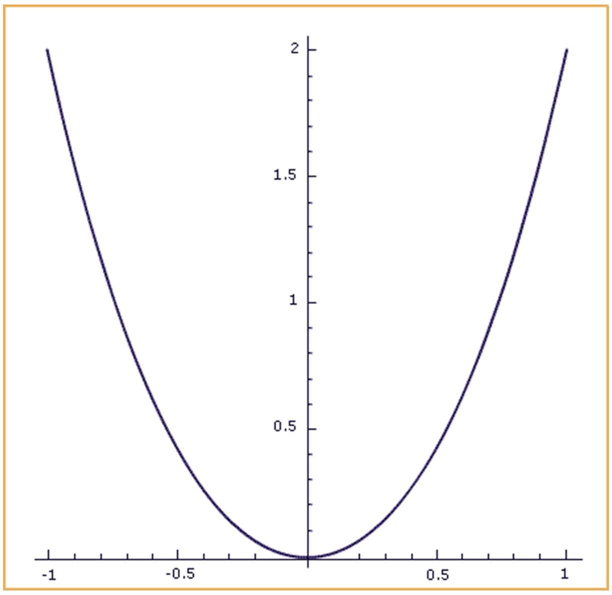
Resolució:

En primer lloc, en el gràfic següent s'indiquen les figures inicial i final:

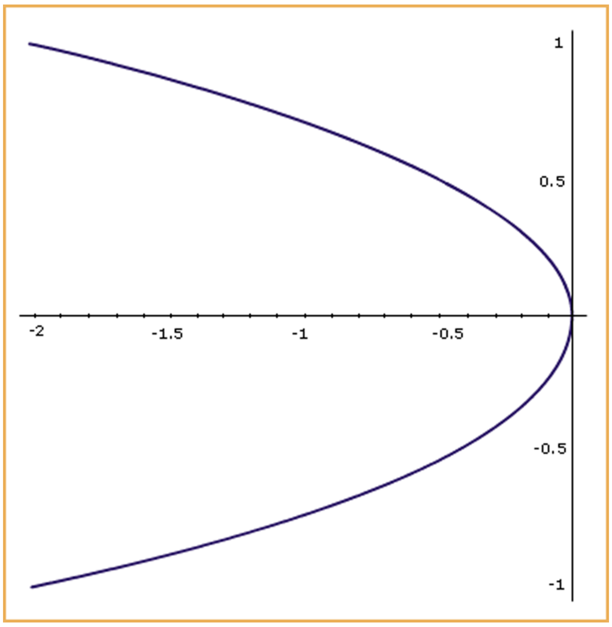


La primera transformació geomètrica serà una translació de *P0*, que convertirà l'actual vèrtex de la paràbola, el punt (0, 12), en el punt (0, 0), origen de coordenades. La transformació és $T_{-(0,12)} = T_{(0,-12)}$. El resultat és la paràbola del gràfic següent, paràbola d'equació $y = 2x^2$:





A continuació efectuarem una rotació de 90 graus, antihorària, respecte de l'origen de coordenades R_O^{90}. Aquesta transformació converteix la paràbola anterior en la paràbola $x = -2y^2$:



Forma part del "saber general previ" que aquesta paràbola té l'equació anterior. No obstant això, també és fàcil deduir-ho aplicant la transformació a la parametrització de: $y = 2x^2$. En efecte, prenent $s = x$ com a paràmetre una parametrització de $y = 2x^2$ és:

$$\begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = 2s^2 \end{cases}$$

Apliquem la rotació als punts de la paràbola:

$$R_O^{90}\begin{pmatrix} s \\ 2s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 2s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 2s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s^2 \\ s \end{pmatrix}$$

Per tant, la parametrització de la paràbola resultant és:

$$\begin{cases} x(s) = -2s^2 \\ y(s) = s \end{cases}$$

És fàcil obtenir l'equació de la paràbola resultant: $x = -2s^2 = -2y^2$. Finalment, $z = -2y^2$.

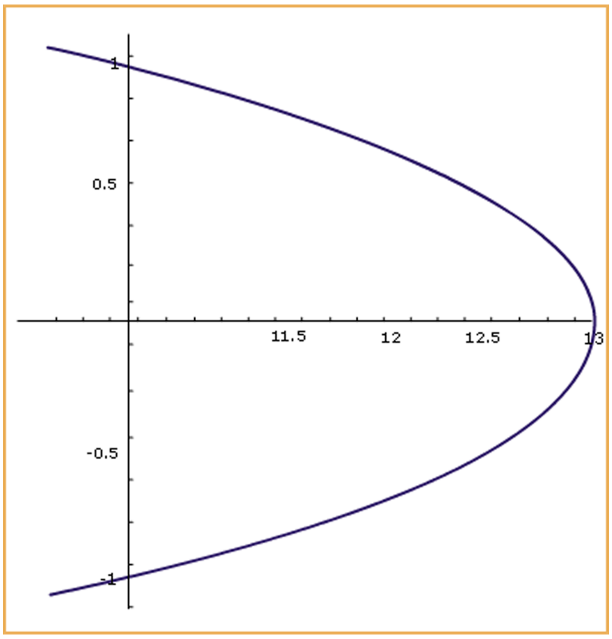
Queda per fer una translació final, aplicada a l'última paràbola obtinguda, la de vector (13, 0), és a dir: $T_{(13,0)}$. Per tant,

$$T_{(13,\,0)} \circ R_O^{\;90} \circ T_{(0,\,-12)}$$

Aquesta composició s'ha de llegir de dreta a esquerra. Tindrem:

$$P1 = T_{(13,\,0)} \circ R_O^{\;90} \circ T_{(0,\,-12)}(P0)$$

El resultat és, per tant ***(a)*.**



Cap de les altres possibilitats no produeix el resultat requerit. Es pot veure efectuant l'anàlisi corresponent. No obstant això, si efectuem les transformacions, com es veu en els gràfics següents, l'afirmació resulta immediata. Tenim:

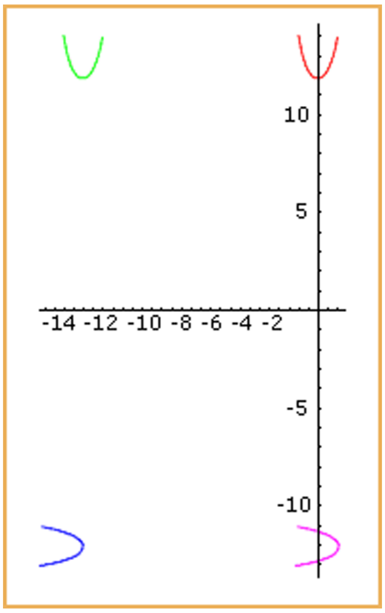
Vermell: figura inicial

Verd: resultat de la primera transformació

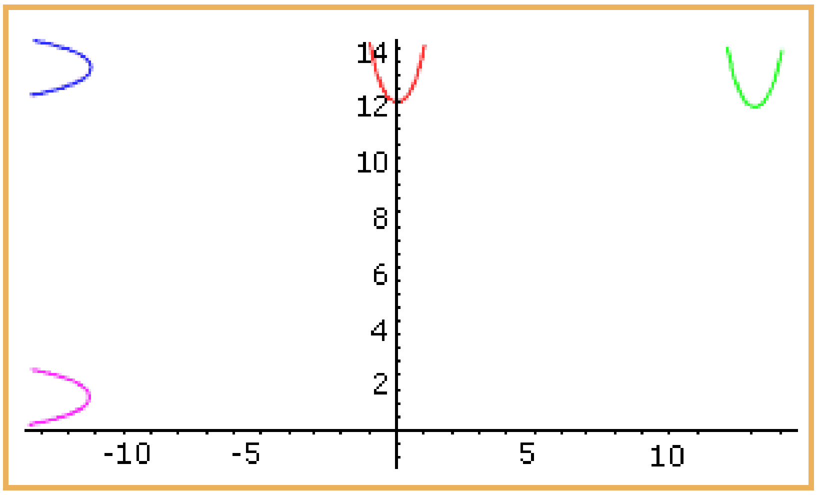
Blau: resultat de la segona transformació

Magenta: resultat de l'última transformació

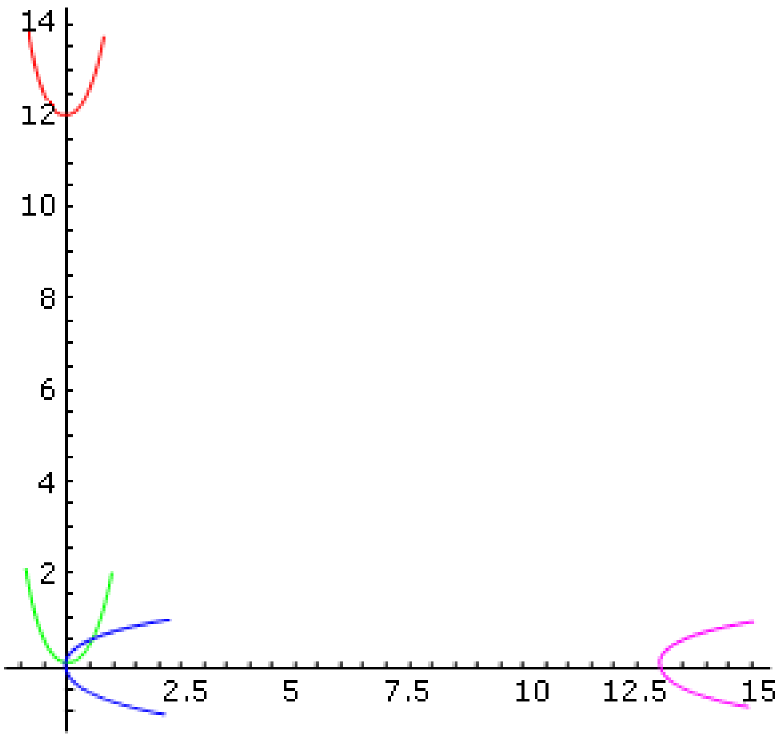
Opció *b*:



Opció *c*:



Opció *d*:



Problema 19

Considereu l'hèlix espiral d'Arquimedes *E0* donada per la parametrització:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= at\cos t \\ y(t) &= at\sin t \\ z(t) &= bt \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 16\pi$$

S'efectua una rotació d'angle –45 graus respecte de l'eix de coordenades *Ox*, transformació que converteix l'hèlix *E0* en l'hèlix *E1*. Obtingueu una parametrització de l'hèlix espiral *E1*.

Resposta:

Obtindrem en primer lloc les equacions de la transformació. Posteriorment, les aplicarem als punts de la corba, és a dir, els de la forma

$$(x(t), y(t), z(t)) = (at \cos t, at \sin t, bt).$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-45) & -\sin(-45) \\ 0 & \sin(-45) & \cos(-45) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & \sin 45 \\ 0 & -\sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \end{pmatrix}$$

Aplicant-la al vector $(x(t), y(t), z(t)) = (at \cos t, at \sin t, bt)$, resultarà una parametrització de la corba resultant de la rotació:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at\cos t \\ \frac{\sqrt{2}}{2}at\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}bt \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}at\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}bt \end{pmatrix}$$

Finalment, la parametrització serà:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= at\cos t \\ y(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2}at\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}bt \\ z(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}at\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}bt \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 16\pi$$

Problema 20

Considereu la trajectòria d'animació donada per la parametrització

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 2 + 3\cos t \\ y(t) &= 12t \\ z(t) &= -4 + 3\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 30\pi.$$

Descriviu completament la trajectòria (tipus de corba, principi, final, sentit de gir i tots els detalls pertinents).

Resposta:

La corba és una hèlix circular de radi $R = 3$, de pas de rosca $b = 12$, d'eix la recta que passa pel punt $P = (2, 0, -4)$ i és paral·lela a l'eix de coordenades Oy. L'hèlix és de 15 voltes.

L'inici de la corba és el punt $I = (x(0), y(0), z(0)) = (2 + 3 \cos 0, 12{,}0, -4 + 3 \sin 0) = (5, 0, -4)$, corresponent al valor inicial del paràmetre, $t = 0$. El final correspon al valor final del paràmetre t, és a dir,

$$F(x(30\pi), y(30\pi), z(30\pi)) = (2 + 3\cos(30\pi), 12.30\pi, -4 + 3\sin(30\pi))$$

Si considerem l'hèlix circular ($3 \cos t$, $12t$, $3 \sin t$), d'eix l'eix de coordenades Oy, observem que per al punt $t = \frac{\pi}{2}$, pel qual passa és $(0, 6\pi, 3)$, que es va projectar perpendicularment sobre el pla xz en el punt (0, 0, 3), punt de l'eix $z+$. Això significa que el sentit de rotació o de circulació sobre l'hèlix és horari vist des de $y+$.

Problema 21

Suposem que volem programar una animació de trajectòria circular en un pla paral·lel al pla vertical yz. Parametritzeu la circumferència de radi R, centre en $C = (a, b, c)$, situada sobre el pla $x = a$.

Resposta:

Prenent com a paràmetre l'angle polar resulta:

$$\begin{cases} x(t) = a \\ y(t) = b + R\cos t \\ z(t) = c + R\sin t \end{cases}$$

amb $0 \le t \le 2\pi$.

Problema 22

Raoneu breument si hi pot haver una circumferència de radi 20, de centre (2, 4, 9), situada en el pla de coordenades *xz*.

Resposta:

No, ja que els punts del pla *xz* són de la forma (*a*, 0, *b*). Si la circumferència estigués continguda en aquest pla, també ho estaria el seu centre (2, 4, 9), que no és de la forma anterior.

Problema 23

Suposem que volem programar una animació 2D en la qual es recorri una circumferència en sentit horari. Parametritzeu la circumferència de centre l'origen de coordenades, radi *R*, perquè es recorri en sentit horari quan el paràmetre descriptiu *t* varií des de $t = 0$ fins a $t = 2\pi$.

Resposta:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(2\pi - t) \\ y(t) = R\sin(2\pi - t) \end{cases}$$

Exercicis 2

Problema 1

Identifiqueu la superfície que correspon a la parametrització següent expressada en el sistema de coordenades habitual:

$$\left.\begin{aligned} x(t, z) &= 2\ \cos t \\ y(t, z) &= 2\ \sin t \\ z(t, z) &= z \end{aligned}\right\}, 0 \le z \le H, 0 \le t \le \pi$$

Resposta:

És un semicilindre d'eix *Oz*, de radi 2, altura *H*, situat en el semiespai de les *z* positives, amb la base en $z = 0$. El semicilindre correspon a la variació de l'angle polar habitual *t* entre 0 i *p* (corresponent al semiespai de les *y* positives).

Problema 2

Considereu en l'espai tridimensional el cilindre de radi *R*, d'eix l'eix de coordenades *Ox*, amb una base en el pla $x = 0$, contingut en el semiespai de les *x* positives, i d'altura *H*. Escriviu una parametrització del cilindre.

Resposta:

$$\left.\begin{aligned} x(t, s) &= s \\ y(t, s) &= R\cos t \\ z(t, s) &= R\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le s \le H; 0 \le t \le 2\pi$$

Problema 3

Considereu en l'espai tridimensional l'esfera de radi $R = 6$ i centre $C = (3, 4, 5)$. Considereu el paral·lel corresponent a la latitud de 45 graus. Doneu una parametrització d'aquest paral·lel.

Resposta:

La parametrització de l'esfera és:

$$\begin{cases} x(t, s) = 3 + 6\cos t\cos s \\ y(t, s) = 4 + 6\cos t\sin s \\ z(t, s) = 5 + 6\sin t \end{cases}$$

Ara n'hi haurà prou de substituir $t = 45$ (en radiants) per a obtenir la parametrització corresponent al paral·lel:

$$\begin{cases} x(s) = 3 + 6\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos s \\ y(s) = 4 + 6\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin s \\ z(s) = 5 + 6\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

amb $0 \leq s \leq 2\pi$.

Problema 4

Sigui C el cilindre de l'espai tridimensional de radi 3, d'altura 2 i d'eix que passa pel punt $Q = (6, 5, 7)$ i és perpendicular al pla $y = 0$. Suposem que una base està situada sobre el pla $y = 1$ i que el cilindre està contingut en el semiespai de les y positives. Escriviu una parametrització de C.

Resposta:

$$\left.\begin{aligned} x(t,s) &= 6 + 3\cos t \\ y(t,s) &= s \\ z(t,s) &= 7 + 3\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \leq t \leq 2\pi; 1 \leq s \leq 3$$

Problema 5

Es considera el cilindre C de l'espai tridimensional de radi 4, d'altura 6, d'eix l'eix de coordenades z, amb una base en el pla $z = 0$ i que està contingut en el semiespai de les z positives. Es considera la corba K resultat d'interassecar el cilindre C amb el pla $z = 3$, perpendicular a l'eix del cilindre. Doneu una parametrització de la corba K.

Resposta:

La corba K és una circumferència. Està situada en el pla $z = 3$, de radi 4 i amb centre en l'eix de coordenades Oz, és a dir, en (0, 0, 3).

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 4\cos t \\ y(t) &= 4\sin t \\ z(t) &= 3 \end{aligned}\right\}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Problema 6

Escriviu una parametrització per al cilindre $C1$ resultat d'aplicar al cilindre $C0$ la seqüència ordenada de transformacions geomètriques:

1. Translació de vector $w = (1, 2, 3)$.

2. Rotació positiva d'angle 45 graus respecte de l'eix Ox.

El cilindre $C0$ és el cilindre vertical de radi $R = 7$, d'eix que coincideix amb l'eix de coordenades Oz, amb la base sobre el pla $z = 0$, d'altura $h = 6$ i contingut en el semiespai de les $z \geq 0$.

Resposta:

En primer lloc, obtindrem l'expressió de la transformació. Posteriorment l'aplicarem als punts del cilindre $C0$.

Translació:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T_w \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \\ z+3 \end{pmatrix}$$

Rotació:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = R_x^{45} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & -\sin 45 \\ 0 & \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y'\cos 45 - z'\sin 45 \\ y'\sin 45 + z'\cos 45 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x' \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} - z'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} + z'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Concatenant totes dues transformacions s'obté:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} - z'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} + z'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Ara hem d'escriure una parametrització per al cilindre *C0*:

$$\begin{cases} x(t,s) = 7\cos t \\ y(t,s) = 7\sin 7 \; ; \; 0 \le t \le 2\pi; 0 \le s \le 6 \\ z(t,s) = s \end{cases}$$

Finalment, el cilindre *C1* s'obtindrà aplicant la transformació obtinguda anteriorment als punts de la forma anterior, els del cilindre *C0*:

$$\begin{pmatrix} x''(t,s) \\ y''(t,s) \\ z''(t,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cos t + 1 \\ (7\sin t + 2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (s+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (7\sin t + 2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (s+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

La parametrització buscada és, finalment:

$$\begin{cases} x''(t,s) = 7\cos t + 1 \\ y''(t,s) = (7\sin t + 2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (s+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; 0 \le t \le 2\pi; 0 \le s \le 6 \\ z''(t,s) = (7\sin t + 2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (s+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Problema 7

Parametritzeu la trajectòria d'una esfera que es mou de tal manera que el seu centre recorre el meridià corresponent a la longitud de 45 graus de l'esfera de radi $R = 5$ i centre $C = (0, 0, 0)$. L'inici del recorregut ha de ser el pol nord (punt $N = (0, 0, 5)$). El sentit de recorregut és lliure, dins dels dos possibles.

Resposta:

Particularitzarem la parametrització dels punts de l'esfera de radi 5 i de centre l'origen usant com a paràmetres la longitud t i la colatitud u (la colatitud del punt P de l'esfera és l'angle NOP). Preneu com a origen de colatituds el semieix $z+$; la colatitud varia de 0 a 2π.

La corba meridià s'obté a partir de la parametrització de l'esfera (variant amb colatitud), fent t constantment igual a 45 graus.

La parametrització de l'esfera és:

$$\left.\begin{aligned} x(t,u) &= R\sin u\cos t \\ y(t,u) &= R\sin u\sin t \\ z(t,u) &= R\cos u \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi; 0 \le u \le \pi$$

Concretant, resulta una parametrització possible del meridià:

$$\left.\begin{aligned} x(u) &= R\sin u\cos 45 \\ y(u) &= R\sin u\sin 45 \\ z(u) &= R\cos u \end{aligned}\right\}, 0 \le u \le 2\pi$$

Finalment, substituint pels valors corresponents:

$$\left.\begin{aligned} x(u) &= 5\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u \\ y(u) &= 5\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u \\ z(u) &= 5\cos u \end{aligned}\right\}, 0 \le u \le 2\pi$$

Problema 8

Escriviu una parametrització per al cilindre $C1$ resultat d'aplicar al cilindre $C0$ la seqüència ordenada de transformacions geomètriques:

Rotació positiva de l'angle α respecte de l'eix Ox.

Rotació positiva de l'angle γ respecte de l'eix Oz.

Translació de vector $w = (a, b, c)$.

El cilindre $C0$ és el cilindre vertical de radi R, d'eix que coincideix amb l'eix de coordenades Oz amb la base sobre el pla $z = z0$, d'altura h i contingut en el semiespai de les $z \ge 0$.

Resolució:

Escrivim, en primer lloc, la composició de les transformacions geomètriques descrites, en l'ordre descrit (llegint de dreta a esquerra): $T_w \circ R_z^{\gamma} \circ R_x^{\alpha}$.

Calculem el producte de les matrius corresponents a $R_z^{\gamma} \circ R_x^{\alpha}$:

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma\cos\gamma & \sin\gamma\sin\alpha \\ \sin\gamma & \cos\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Apliquem la transformació:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (T_w \circ R_z^{\gamma} \circ R_x^{\alpha}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma\cos\gamma & \sin\gamma\sin\alpha \\ \sin\gamma & \cos\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Efectuant les operacions matricials resulta:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma\cos\gamma & \sin\gamma\sin\alpha \\ \sin\gamma & \cos\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\gamma - y\sin\gamma\cos\alpha + z\sin\gamma\sin\alpha + a \\ x\sin\gamma + y\cos\gamma\cos\alpha - z\cos\gamma\sin\alpha + b \\ y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{pmatrix}$$

En coordenades seria:

$$\begin{cases} x' = x\cos\gamma - y\sin\gamma\cos\alpha + z\sin\gamma\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\gamma + y\cos\gamma\cos\alpha - z\cos\gamma\sin\alpha + b \\ z' = y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{cases}$$

El cilindre *C0* es pot parametritzar com a:

$$\left.\begin{array}{l} x(t,s) = R\cos t \\ y(t,s) = R\sin t \\ z(t,s) = s \end{array}\right\}, 0 \le t \le 2\pi,\ z_0 \le s \le z_0 + h$$

Finalment, substituirem les expressions en la parametrització anterior en les equacions de la composició de transformacions

$$\begin{cases} x'(t,s) = R\cos t\cos\gamma - R\sin t\sin\gamma\cos\alpha + s\sin\gamma\sin\alpha + a \\ y'(t,s) = R\cos t\sin\gamma + R\sin t\cos\gamma\cos\alpha - s\cos\gamma\sin\alpha + b, \\ z'(t,s) = R\sin t\sin(\alpha + s\cos\alpha) \end{cases}$$

amb la variació dels paràmetres indicada anteriorment.

Problema 9

Sigui *C0* el cilindre de radi $R = 5$, d'eix l'eix de coordenades Oz, d'altura $h = 10$, amb la base inferior situada sobre el pla de coordenades $z = 0$. S'aplica a *C0* la seqüència de transformacions següents, en l'ordre que s'indica:

Primera transformació: canvi d'escala no uniforme respecte de l'origen de coordenades, que triplica la dimensió segons l'eix y, duplica la dimensió segons l'eix x, i redueix a la meitat la dimensió segons l'eix z.

Segona transformació: rotació de 60 graus respecte de l'eix Oy.

Tercera transformació: translació de vector $w = (1, 1, 0)$.

Sigui *C1* la figura resultant d'aplicar a *C0* les transformacions anteriors. Obteniu una parametrització de *C1*.

Resposta:

Primera transformació:

Obtindrem les equacions de la primera transformació. Els factors de canvi d'escala són:

2, en la direcció de l'eix de coordenades *Ox*,

3, en la direcció de l'eix de coordenades *Oy*,

0,5, en la direcció de l'eix de coordenades *Oz*.

La matriu de la transformació és:

$$E_O^{2,\,3,\,0.5} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Aplicant la matriu:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \\ z' = 0.5z \end{cases}$$

Segona transformació:

La matriu de la rotació és:

$$R_y^{60} = \begin{pmatrix} \cos 60 & 0 & \sin 60 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 60 & 0 & \cos 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Apliquem la matriu a un vector:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = R_y^{60}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}z' \\ y' \\ -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}z' \end{pmatrix}$$

Tercera transformació:

$$\begin{cases} x''' = x'' + 1 \\ y''' = y'' + 1 \\ z''' = z'' \end{cases}$$

Ara escriurem el resultat de la concatenació en funció de les coordenades inicials (x, y, z):

$$\begin{cases} x''' = x'' + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}z' + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}2x + \frac{1}{2}0.5z + 1 = \sqrt{3}x + \frac{1}{4}z + 1 \\ y''' = y'' + 1 = y' + 1 = 3y + 1 \\ z''' = z'' = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}z' = \frac{1}{2}2x + \frac{\sqrt{3}}{2}0.5z = -x + \frac{\sqrt{3}}{4}z \end{cases}$$

És a dir,

$$\begin{cases} x''' = \sqrt{3}x + \frac{1}{4}z + 1 \\ y''' = 3y + 1 \\ z''' = -x + \frac{\sqrt{3}}{4}z \end{cases}$$

Formulem una parametrització del cilindre *C0*:

$$\begin{cases} x(t, s) = 5\cos t \\ y(t, s) = 5\sin t \ , \ 0 \le t \le 2\pi; 0 \le s \le 10 \\ z(t, s) = s \end{cases}$$

Ara cal aplicar les equacions anteriors als punts del cilindre, és a dir, els que són de la forma donada per la parametrització anterior:

$$\begin{cases} x(t, s) = \sqrt{3}.5\cos t + \frac{1}{4}s + 1 \\ y(t, s) = 3.5\sin t + 1 \qquad ; \ 0 \le t \le 2\pi; 0 \le s \le 10 \\ z(t, s) = -5\cos t + \frac{\sqrt{3}}{4}s \end{cases}$$

Aquesta és una possible parametrització del cilindre resultant *C1*.

Problema 10

Considereu el cilindre *C0* de radi *R*, d'eix l'eix de coordenades *Oz*, d'altura *H*, situat en el semiespai $z \ge 0$, amb la base en $z = 0$. Es construeix el cilindre *C1* com a resultat d'aplicar a *C0* la rotació positiva de 45 graus respecte de l'eix *Oy*. Obteniu una parametrització de *C1*.

Resposta:

En primer lloc, noteu que 45 graus són $a = \pi/4$ radiants i $\cos a = \sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Una parametrització de *C0* és

$$\left.\begin{matrix} x(t, s) = R\cos t \\ y(t, s) = R\sin t \\ z(t, s) = s \end{matrix}\right\} 0 \le s \le H, 0 \le t \le 2\pi$$

El que hem demanat s'obtindrà aplicant la matriu de rotació corresponent als punts de la forma anterior:

$$\begin{pmatrix} x(t, s) \\ y(t, s) \\ z(t, s) \end{pmatrix} = R^{Y}{}_{a} \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & 0 & \sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ s \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\begin{cases} x(t, s) = R\cos a\cos t + \sin a \\ y(t, s) = \sin t \\ z(t, s) = -R\sin a\cos t + s\cos a \end{cases}$$

Problema 11

Suposem que hem de programar en MaxScript o bé mitjançant "expressions paramètriques" en 3D Studio Max interactiu una animació consistent a desplaçar una esfera petita al llarg d'un meridià d'una esfera de radi major. Considereu l'esfera de radi *R* de centre l'origen de coordenades. Parametritzeu el meridià d'aquesta esfera corresponent a la longitud de 30 graus.

Resposta:

En primer lloc, 30 graus és igual a $a = \pi/6$ radiants. Usem la parametrització habitual de l'esfera en coordenades esfèriques, en termes de la longitud θ, i la latitud φ, prenent $\theta = \pi/6$. Escollim el paràmetre *j*, variant en [0, 2π]:

$$\begin{cases} x(\theta) = R\cos\varphi\cos\dfrac{\pi}{6} \\ y(\theta) = R\cos\varphi\cos\dfrac{\pi}{6} \\ z(\theta) = R\sin\varphi \end{cases}$$

Problema 12

Es pot considerar l'esfera com a superfície de revolució? Raoneu la resposta.

Resposta:

Sí, produïda per la rotació de 360 graus al voltant de l'eix z. De la semicircumferència del pla xz, de centre l'origen i radi R continguda en el semiespai $x \geq 0$.

Problema 13

Indiqueu com es pot obtenir l'hemisferi superior de l'esfera de centre O i de radi R si la generem com a superfície de revolució.

Resposta:

Es pot obtenir per la rotació respecte de l'eix z, de 360 graus, aplicada a un quart de la circumferència de centre l'origen de coordenades O, de radi R, continguda al quadrant de coordenades x, z positives del pla vertical xz.

Problema 14

Suposem que hem de programar una animació consistent a desplaçar una esfera petita al llarg d'un paral·lel d'una esfera de radi major. Considereu l'esfera de radi R de centre el punt (1, 2, 3). Parametritzeu el paral·lel d'aquesta esfera corresponent a la latitud de 30 graus (nord, mesureu des de l'equador).

Resposta:

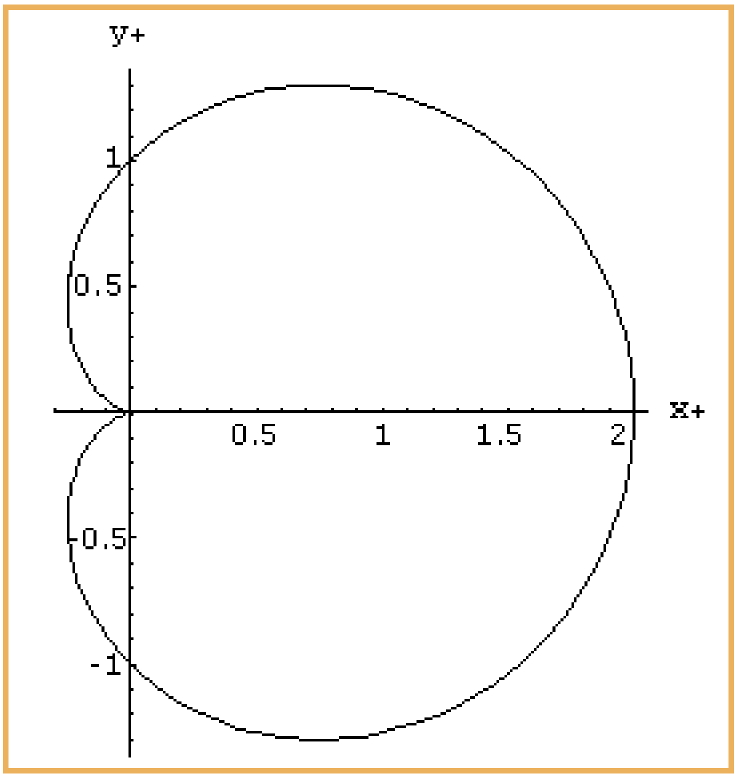
Utilitzarem la parametrització de l'esfera en coordenades esfèriques (longitud i latitud) i particularitzarem la latitud al valor constant de 30 graus (igual a $a = \pi/6$ radiants). Farem que variï llavors la longitud θ entre 0 i 2π.

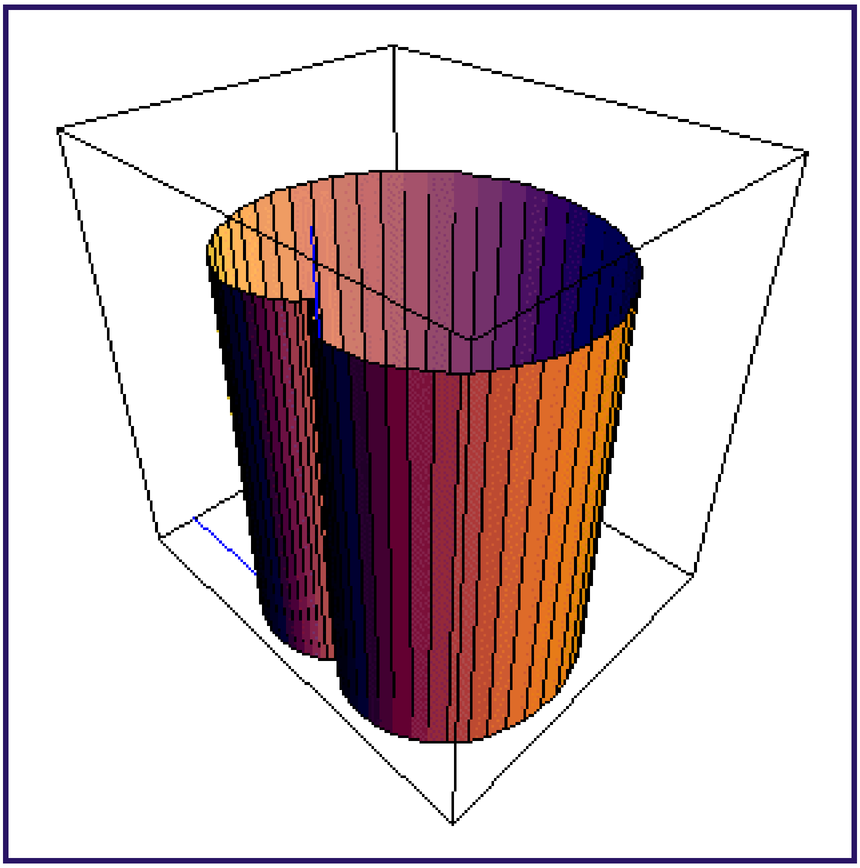
$$\begin{cases} x(\theta) = 1 + R\cos a\cos\theta \\ y(\theta) = 2 + R\cos a\sin\theta \\ z(\theta) = 3 + R\sin a \end{cases}$$

Finalment cal substituir $\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin a = \frac{1}{2}$.

Problema 15

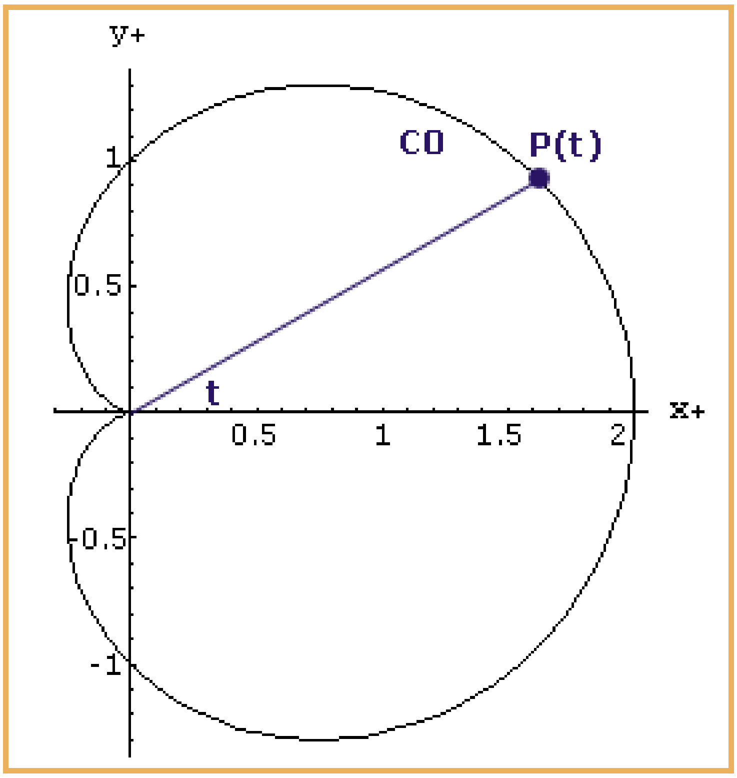
Obtingueu una parametrització del cilindre generalitzat d'eix Oz que té per directriu (o base o secció) la cardioide d'equació en coordenades polars $r = a(1 + \cos t)$, del pla xy. Vegeu les imatges següents.





Resposta:

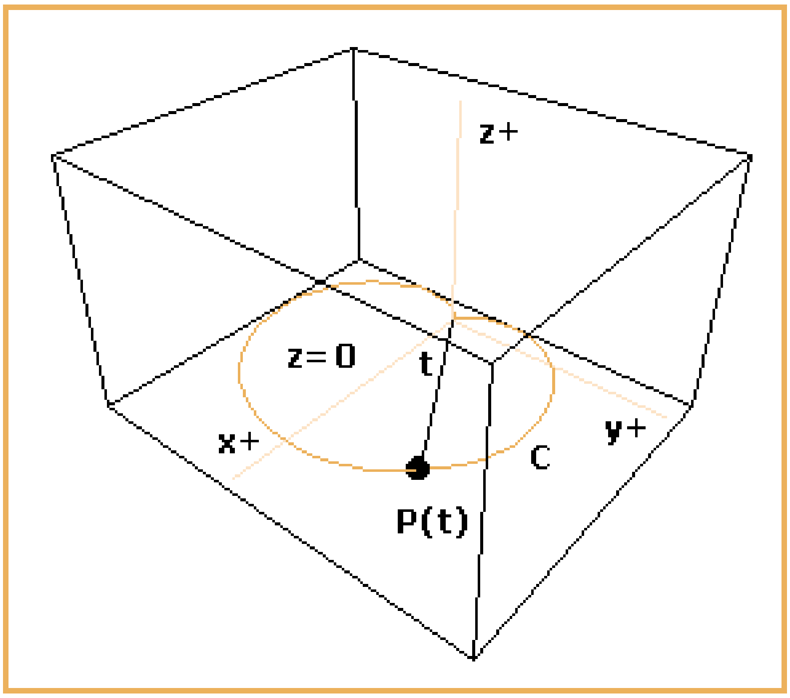
Considerem la cardioide *C0* del pla *xy*.



La corba *C0* es parametritza a partir de l'equació polar, en termes de l'angle polar *t*, mitjançant trigonometria elemental. El punt $P(t) = (x(t), y(t))$ s'expressa:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a(1+\cos t)\cos t \\ y(t) &= a(1+\cos t)\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

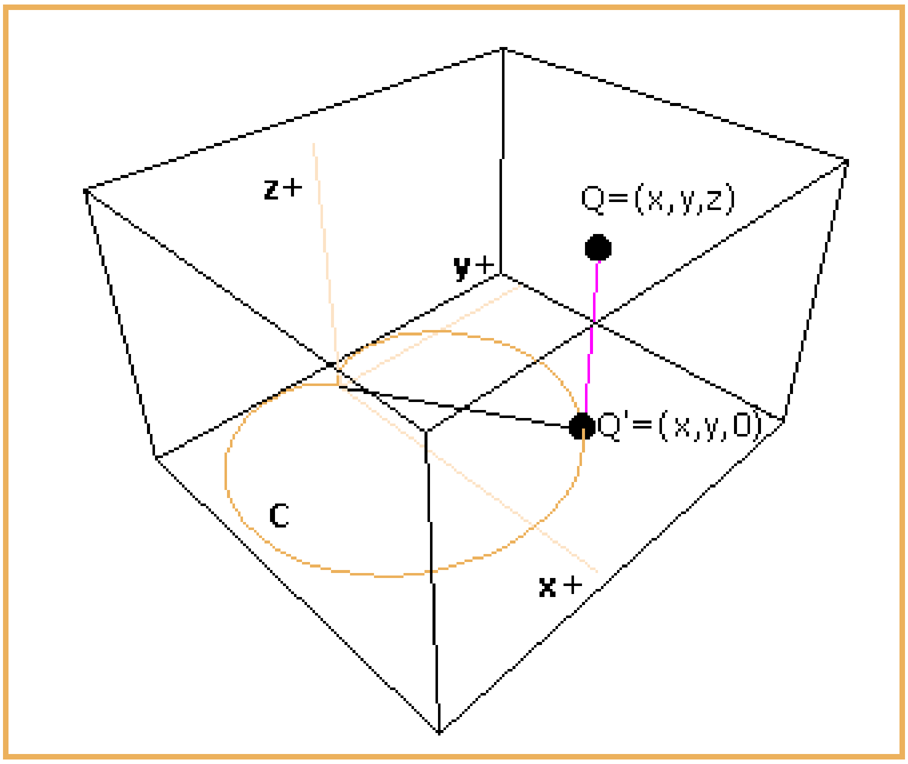
Considerem la corba *C*, còpia de *C0*, en la mateixa posició i dimensions, però immersa en l'espai 3D, sobre el pla $z = 0$ (o xy).



Podem formular una parametrització de *C* derivada de la parametrització de *C0*, simplement afegint-hi la coordenada *z* igual a 0, i essent *t* l'angle polar (des d'una interpretació geomètrica, ja que amb el paràmetre n'hi ha prou que variï en un interval):

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a(1+\cos t)\cos t \\ y(t) &= a(1+\cos t)\sin t \\ z(t) &= 0 \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

El cilindre generalitzat que cal parametritzar es genera mitjançant les infinites rectes que, essent perpendiculars al pla *xy*, passen per la corba *C*. Sigui $Q = (x, y, z)$ un punt qualsevol del cilindre generalitzat.



Es projecta ortogonalment sobre el pla *xy*, sobre un punt *Q'* de la cardioide *y*; per tant, s'expressarà en funció de *t* d'acord amb la parametrització de la cardiode base, i serà:

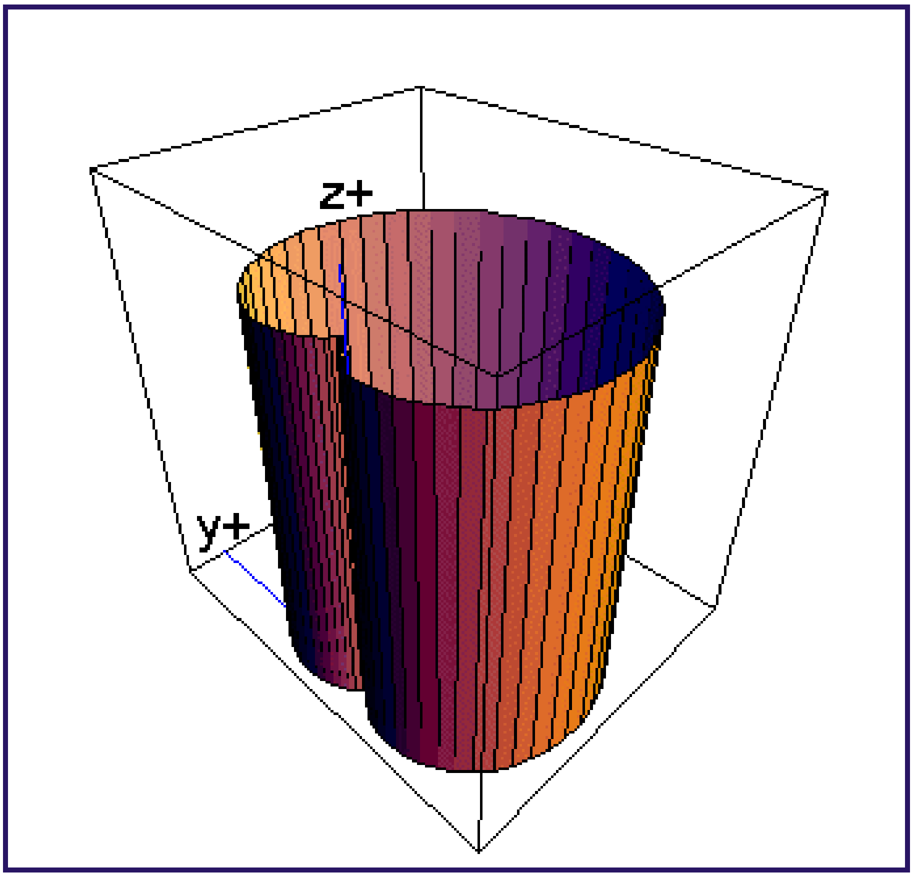
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a(1+\cos t)\cos t \\ y(t) &= a(1+\cos t)\sin t \end{aligned}\right\}$$

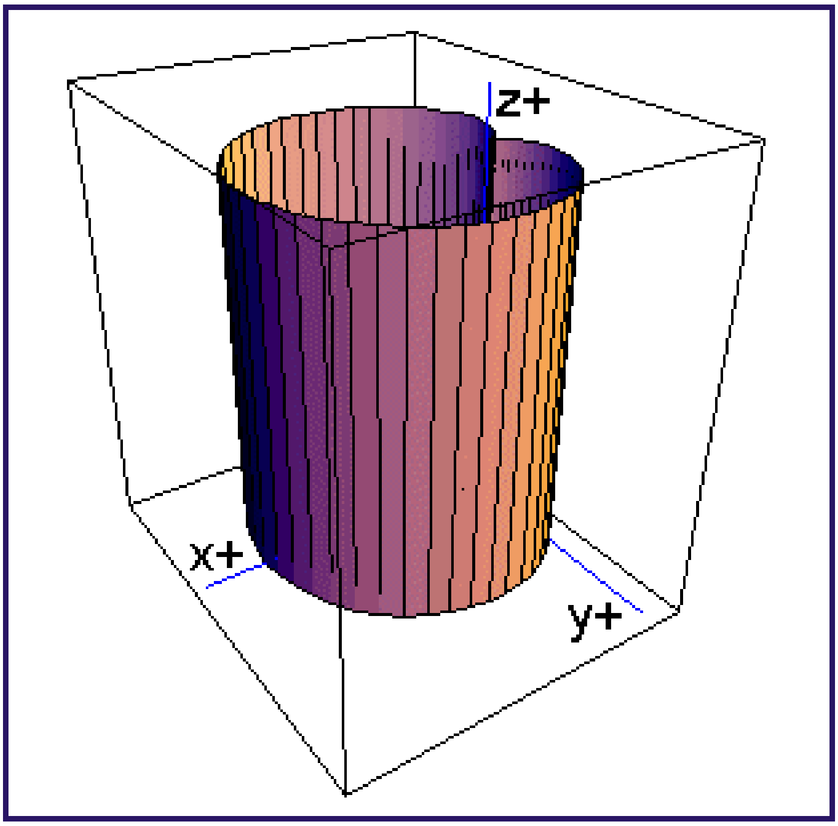
Quant a la coordenada *z*, "altura respecte del pla horitzontal", varia lliurement i fa que *Q* descrigui una generatriu del cilindre, depenent del tros de cilindre que vulguem generar. Per tant, els punts del cilindre generalitzat són de la forma:

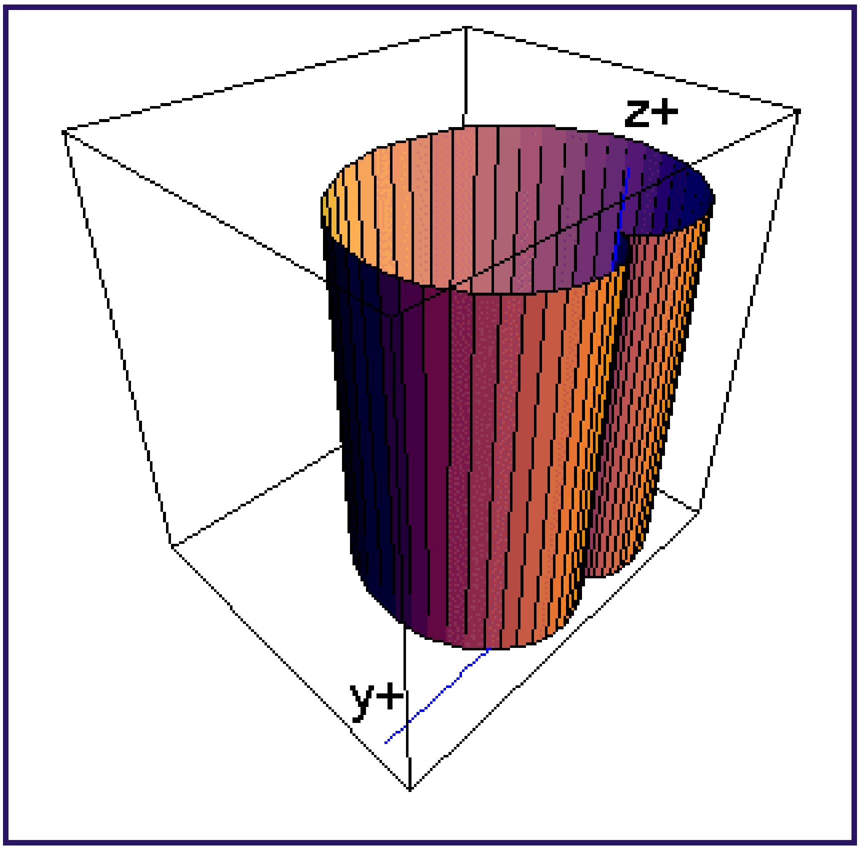
$Q(t, z) = (a(1 + \cos t) \cos t, a(1 + \cos t) \sin t, z)$.

Així doncs, sembla que *t*, *z* es poden prendre com a bons paràmetres per a descriure la superfície. Per tant, per a un cilindre d'altura *H*, amb la base en el pla $z = 0$, resulta la parametrització:

$$\left.\begin{aligned} x(t,h) &= a(1+\cos t)\cos t \\ y(t,h) &= a(1+\cos t)\sin t \\ z(t,h) &= h \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi, 0 \le h \le H$$


z+
y+


z+
x+
y+



Quant a la variant corresponent a l'eix Oy i cardioide en xz, tenim la parametrització:

$$\left.\begin{aligned} x(t,y) &= a(1+\cos t)\cos t \\ y(t,y) &= y \\ z(t,y) &= a(1+\cos t)\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi, 0 \le y \le H$$

Problema 16

Obteniu una parametrització de la superfície de revolució generada per la recta d'equació

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 1+t \\ y(t) &= 2-2t \\ z(t) &= 4t \end{aligned}\right\}, t \in R$$

en girar al voltant de l'eix Oz.

Resposta:

Es veu que la corba es pot reescriure en la forma $P(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1 + t, 2 - 2t, 4t) = (1, 2, 0) + t(1, -2, 4)$, amb la qual cosa observem que és la recta que passa pel punt (1, 2, 0) i té vector director (1, –2, 4).

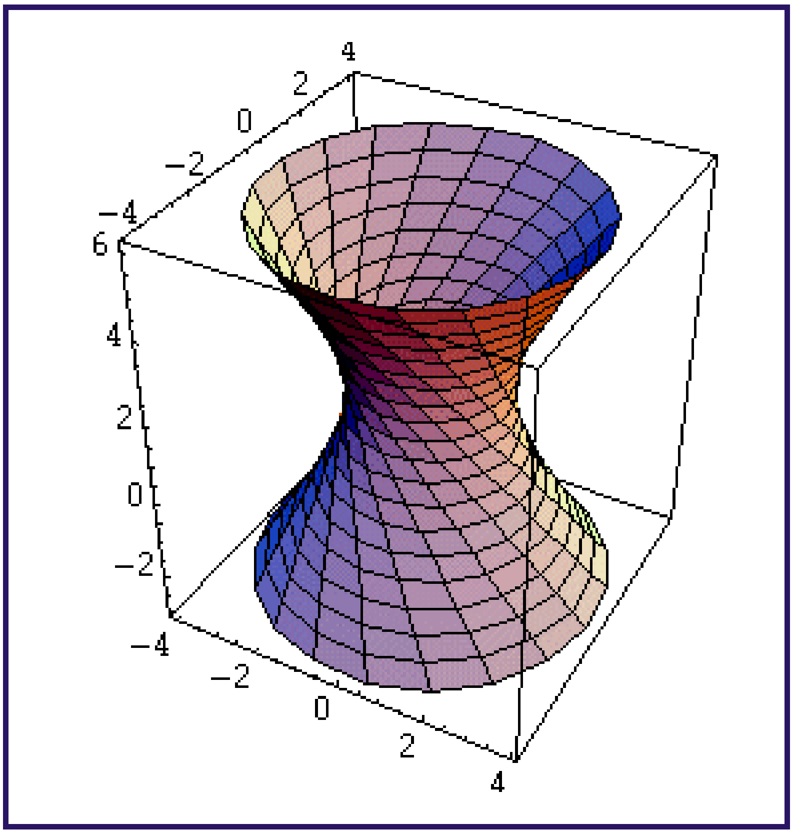
Mètode 1. Simplement efectuem una rotació respecte de l'eix Oz. Per a això apliquem als punts de la corba (recta, en aquest cas) la matriu corresponent a una rotació d'angle q respecte de l'eix esmentat. Utilitzant com a paràmetres el paràmetre t que controla el recorregut sobre la corba i l'angle q de rotació obtindrem una parametrització de la superfície:

$$\begin{pmatrix} x(t,\theta) \\ y(t,\theta) \\ z(t,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-2t \\ 4t \end{pmatrix}$$

Efectuant el producte matricial s'obté la parametrització derivada d'aquest mètode:

$$\left.\begin{aligned} x(t,\theta) &= (1+t)\cos\theta - (2-2t)\sin\theta \\ y(t,\theta) &= (1+t)\sin\theta + (2-2t)\cos\theta \\ z(t,\theta) &= 4t \end{aligned}\right\}, t_0 \le t \le t_1, 0 \le \theta \le 2\pi$$

Fixeu-vos en la superfície que s'obté. En aquest cas $t_0 = -1, t_1 = 2$.



El patró depèn del tipus de parametrització, com es veurà escollint posteriorment un altre tipus de parametrització.

En el cas de rotació al voltant de l'eix *Oy*, n'hi ha prou d'utilitzar la matriu de rotació respecte de l'eix *Oy*:

$$\begin{pmatrix} x(t,\theta) \\ y(t,\theta) \\ z(t,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+t \\ 2-2t \\ 4t \end{pmatrix}$$

La parametrització corresponent és:

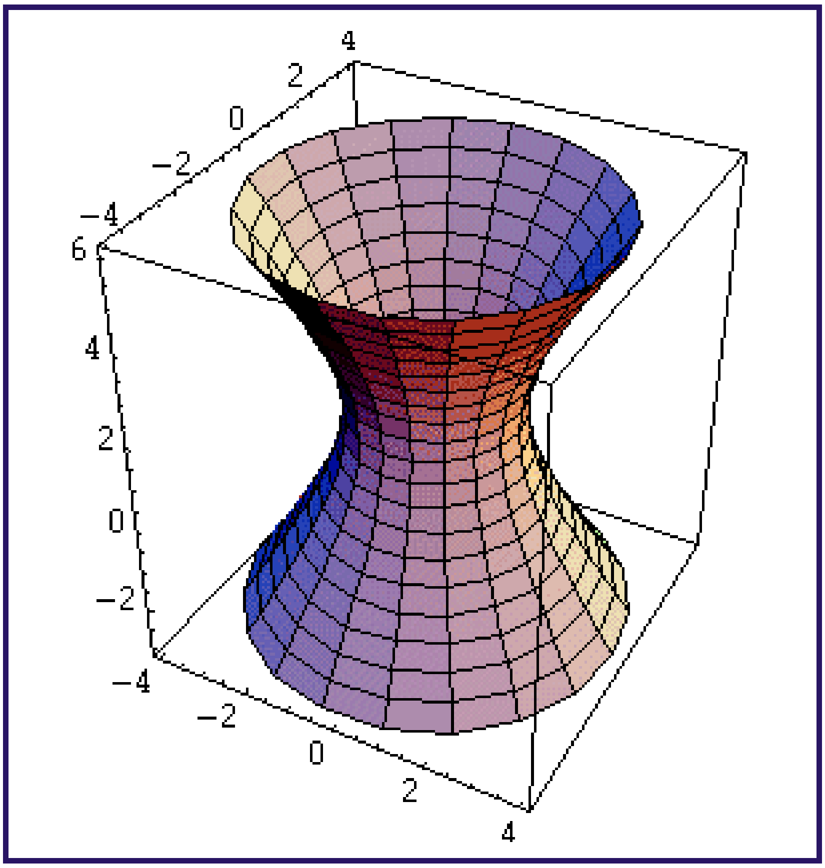
$$\left.\begin{aligned} x(t,\theta) &= (1+t)\cos\theta + 4t\sin\theta \\ y(t,\theta) &= 2-2t \\ z(t,\theta) &= -(1+t)\sin\theta + 4t\cos\theta \end{aligned}\right\}, t_0 \le t \le t_1, 0 \le \theta \le 2\pi$$

Mètode 2. Utilitzem el mètode que es basa en el càlcul de la distància $d(t)$ del punt $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de la corba a l'eix *Oz*, distància donada per $d(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} = \sqrt{5 - 6t + 5t^2}$ per a la parametrització concreta d'aquesta corba. Per tant, podem escriure:

$$\left.\begin{aligned} x(t,\theta) &= d(t)\cos\theta \\ y(t,\theta) &= d(t)\sin\theta \\ z(t,\theta) &= z(t) \end{aligned}\right\}, t_0 \le t \le t_1, 0 \le \theta \le 2\pi$$

Amb la qual cosa resulta finalment la parametrització:

$$\left.\begin{aligned} x(t,\theta) &= \sqrt{5-6t+5t^2}\cos\theta \\ y(t,\theta) &= \sqrt{5-6t+5t^2}\sin\theta \\ z(t,\theta) &= 4t \end{aligned}\right\}, t_0 \le t \le t_1, 0 \le \theta \le 2\pi$$



Com es veu, totes dues parametritzacions generen el mateix objecte, pensat com a conjunt global de punts. Ara bé, la malla que es pot obtenir, l'aproximació poligonal, el sistema de "meridians" i "paral·lels" són ben diferents en un cas o en l'altre.

Completeu l'exercici estudiant quina seria la parametrització corresponent respecte als altres eixos de coordenades.

Exercicis d'autoavaluació

1. L'equació $y = 3\sin(4x + 5)$ correspon a una corba...

a) en forma paramètrica.
b) en forma polar.
c) en forma explícita.
d) en forma implícita.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

2. Una corba en forma explícita...

a) sempre es pot escriure en forma paramètrica.
b) mai no es pot escriure en forma implícita.

c) de vegades es pot escriure en forma paramètrica, però no sempre.
d) de vegades es pot escriure en forma implícita, però no sempre.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

3. Tenim la parametrització següent:

a) És una hèlix circular d'eix *Ox*.
b) És una hèlix circular d'eix *Oy*.
c) És una circumferència en l'espai.
d) És una el·lipse en el pla.
e) És intersecció d'un pla i un cilindre.
f) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

4. Si amb la parametrització de la circumferència $P(t) = (R \cos t, R \sin t)$ volem obtenir el segon quart (en el segon quadrant), hem de restringir la variació del paràmetre t a l'interval:

a) $[0, \pi]$
b) $[\pi/2, \pi]$
c) $[\pi/4, \pi]$
d) $[0, \pi/2]$
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

5. Donada l'hèlix circular $P(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t)$, el radi a i el pas de rosca b són...

a) $a = 3$, $b = 4$.
b) $a = 4$, $b = 3$.
c) $b = 3/\pi$.
d) No té sentit, ja que no és cap hèlix.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

6. L'el·lipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es pot obtenir aplicant un canvi d'escala, respecte de l'origen, a la circumferència de centre l'origen i radi 1. Com?

a) És impossible.
b) $E_o^{a,\ b}$.
c) $E_o^{b,\ a}$.
d) $E_o^{1/a,\ 1/}b$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

7. Considereu l'hèlix circular $P(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 2t)$. Un punt mòbil es desplaça sobre l'hèlix partint del pla horitzontal i fa 4 voltes al voltant del cilindre que conté la corba. L'altura assolida pel mòbil és...

a) $4p$.
b) $8p$.
c) $16p$.
d) No es pot calcular.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

8. Considereu l'hèlix espiral d'Arquimedes $P(t) = (4t \cos t, 4t \sin t, 3t)$. Un punt mòbil parteix del punt de la corba situat en l'altura 5. A continuació efectua mitja volta al voltant de l'eix de l'hèlix (l'eix z). L'altura assolida pel mòbil és...

a) $3p$.
b) $5 + 3p$.
c) $3p - 5$.
d) No es pot determinar.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

9. Tenim una hèlix circular d'eix l'eix de coordenades *Oz*. Suposem que en fer una volta completa a l'eix l'increment en altura és de 2 unitats. Llavors el pas de rosca b és...

a) p.
b) $1/\pi$.
c) $\pi/2$.
d) Necessitem el radi per a poder calcular-ho.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

10. Si l'equació de l'espiral d'Arquimedes en el pla bidimensional és $r = at$ en coordenades polars, la parametrització derivada, corresponent a 6 voltes, és...

a) $x(t) = at \cos t$, $y(t) = at \sin t$; $0 \leq t \leq 12\pi$.
b) $x(t) = a \cos t$, $y(t) = at \sin t$; $0 \leq t \leq 12\pi$.
c) $x(t) = at \cos t$, $y(t) = a \sin t$; $0 \leq t \leq 12\pi$.
d) $x(t) = at \cos t$, $y(t) = at \sin t$; $0 \leq t \leq 6\pi$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

11. Considereu l'hèlix circular $P(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $0 \leq t$. L'inici de la corba és en el punt...

a) $(-a, 0, 0)$.
b) $(a, 0, 0)$.
c) (a, a, b).
d) $(0, 0, 0)$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

12. La corba $P(t) = (3 \cos t, 5, 3 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$...

a) és sobre el pla $z = 5$.
b) és sobre un pla paral·lel al xz.
c) és una cardioide.
d) és una espiral d'Arquimedes continguda en el pla $y = 5$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

13. L'espiral d'Arquimedes, còpia de $r = at$, però de centre $(x0, y0)$, es parametritza mitjançant...

a) $(at \cos t - x0, at \sin t - y0, bt)$.
b) $(x0 + at \cos t, y0 + at \sin t, bt)$.
c) $(at \cos t, at \sin t, bt)$.
d) $(y0 + at \cos t, x0 + at \sin t, bt)$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

14. Amb la parametrització de la circumferència $P(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, obtenim un recorregut...

a) en el sentit de les agulles del rellotge.
b) en sentit contrari a les agulles del rellotge.
c) únicament sobre un quadrant del pla.
d) que s'inicia en $y+$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

15. Amb la parametrització de la circumferència $P(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, obtenim un recorregut...

a) que s'inicia en el punt $(0, R)$.
b) que s'inicia en l'eix $x+$.
c) que s'inicia en l'origen de coordenades.
d) que acaba en l'eix $y-$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

16. Si volem parametritzar la circumferència de centre l'origen de coordenades i radi R de manera que el recorregut sobre aquesta comenci en el punt $(R, 0)$ l'hem de parametritzar mitjançant...

a) $P(t) = (R \sin t, R \cos t)$; $0 = t = 2$p.
b) $P(t) = (R \cos t, R \sin t)$; $0= t = 2$p.
c) $P(t) = (R \cos(t + p), R \sin(t + p))$; $0 = t = 2$p.
d) $P(t) = (R + R \cos T, R \sin t)$; $0 = t = 2$p.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

17. Si volem que el recorregut de la circumferència de centre $(0, 0)$ i radi R s'iniciï al semieix $y+$, la parametritzarem per...

a) $P(t) = (R \cos t, R \sin t)$; p/2 $< t <$ 2p.
b) $P(t) = (R \cos(t + (\text{p}/2)), R \sin(t + (\text{p}/2)))$; p/2 $< t <$ 2p.
c) $P(t) = (R \cos(t + (\text{p}/2)), R \sin(t + (\text{p}/2)))$; $0 < t <$ 2p.

d) $P(t) = (R \cos t\ (p/2) + R \sin t)$; $0 < t < 2p$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

18. Amb la parametrització $P(t) = (R\cos t, R\sin t)$; $p/2 = t = p$

a) es recorre un quart d'una circumferència de radi R.
b) es recorre un quart de circumferència.
c) es recorre una circumferència completa.
d) es recorre el quart de circumferència situat al primer quadrant de les coordenades x, y positives.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

19. Donada l'hèlix circular $P(t) = (5 \cos t, 2t, 5 \sin t)$, $0 = t = 16\pi$, s'efectuen...

a) 16 voltes al voltant de l'eix de coordenades Oy.
b) 4 voltes al voltant de l'eix de coordenades Oy.
c) 8 voltes al voltant de l'eix de coordenades Ox.
d) 8 voltes al voltant de l'eix de coordenades Oy.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

20. La corba $P(t) = (3t, 4 \cos t, 4 \sin t)$, $0 \leq t \leq 8\pi$...

a) és una hèlix circular d'eix l'eix de coordenades Oz.
b) és una hèlix circular d'eix l'eix de coordenades Ox.
c) és una espiral d'Arquimedes.
d) és una hèlix circular d'eix l'eix de coordenades Oy.
e) és una cardioide.

21. L'hèlix circular $P(t) = (2 + 3 \cos t, 5 + 3 \sin t, 4t)$ està situada...

a) sobre l'esfera de radi 3 i centre (2, 5, 0).
b) sobre el cilindre de radi 3 i d'eix coincident amb l'eix de coordenades Oz.
c) sobre un cilindre de radi 3 i d'eix que passa pel punt (2, 3, 0) i és paral·lel a l'eix de coordenades Oy.
d) No és una hèlix circular.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

22. Amb la parametrització del cilindre $P(t, s) = (a \cos t, a \sin t, s)$; $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq s \leq H$, s'obtenen les generatrius...

a) fent t constant, variant l'altre paràmetre.
b) fent s constant, variant l'altre paràmetre.
c) No es poden obtenir a partir d'aquesta parametrització.
d) Només es pot obtenir la corresponent a l'angle polar $t = 0$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

23. Amb la parametrització del cilindre $P(t, s) = (a \cos t, a \sin t, s)$;$0 \leq t \leq 2p$, $0 \leq s \leq H$, s'obtenen les seccions circulars, intersecció amb plans perpendiculars a l'eix...

a) fent t constant, variant l'altre paràmetre.
b) fent s constant, variant l'altre paràmetre.
c) No es poden obtenir a partir d'aquesta parametrització.
d) Només es pot obtenir la corresponent al pla horitzontal $z = 0$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

24. $P(t, s) = (c + a \cos t, d + a \sin t, s)$; $0 \leq t \leq 2p$, $0 \leq s \leq H$ és la parametrització...

a) d'una esfera de centre $(c, d, 0)$ i radi a.
b) d'un cilindre de radi a, d'eix que és perpendicular a $z = 0$ i que passa per $(c, d, 9)$.
c) d'un cilindre de radi a, d'eix que és perpendicular a $z = 0$ i que passa per $(-c, -d, 9)$.
d) d'un tor.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

25. Donat el cilindre d'eix l'eix de coordenades Oz i de radi a, en tallar pel pla $x = y$ obtenim...

a) una secció circular.
b) una única generatriu.
c) dues generatrius.
d) No hi ha intersecció.

e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

26. Considereu el cilindre de parametrització $P(t, s) = (4 \cos t, 4 \sin t, s)$; $0 \leq t \leq 2\pi$, $-1 \leq s \leq 8$. La secció amb el pla horitzontal *xy* és...

a) la circumferència $P(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
b) la semicircumferència $P(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq \pi$.
c) la circumferència $P(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, -1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
d) La semicircumferència $P(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, -1)$, $0 \leq t \leq \pi$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

27. Si tenim un cilindre d'eix l'eix de coordenades *Oy*, la secció amb el pla $x = z$...

a) és una circumferència.
b) és un quart de circumferència.
c) és una generatriu.
d) No hi ha intersecció.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

28. Si tallem el cilindre de radi 6 i d'eix l'eix de coordenades *Ox* amb el pla $z = 4$ obtenim...

a) el conjunt buit.
b) dues generatrius.
c) un rectangle.
d) una única generatriu.
e) l'eix.
f) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

29. Transformem l'esfera de centre l'origen de coordenades i de radi 1 en l'el·lipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ mitjançant

a) No hi ha cap transformació geomètrica possible.
b) $E_o^{1/a,\, 1/b,\, 1/c}$
c) $E_o^{a,\, b,\, c}$
d) $E_o^{c,\, b,\, a}$

30. Considerem un tor *T0* de centre l'origen i pla diametral coincident amb el pla de coordenades *xz* i un tor *T1* de centre l'origen i pla diametral coincident amb el pla *yz*. Transformem *T0* en *T1* mitjançant...

a) R_x^{-90}
b) R_z^{90}
c) R_z^{90}, però no amb R_z^{-90}, però no amb R_z^{90}, però no amb R_z^{-90}.
d) una simetria respecte de l'eix *z*.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

31. Donada l'esfera de parametrització $P(\theta,\varphi) = (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi)$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-p/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, obtenim la part de la superfície continguda a l'octant de coordenades *x*, *y*, *z* positives amb els intervals de variació dels paràmetres...

a) $0 < \theta \leq \pi$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.
b) $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.
c) $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.
d) No es pot obtenir amb aquesta parametrització.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

32. No és superfície de revolució...

a) el tor.
b) el dodecaedre.
c) el cilindre.
d) l'esfera.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

33. Amb la parametrització $P(t) = (4 \cos t, s, 4 \sin t)$, amb $0 \leq s \leq 6$, obtenim un semicilindre (làmina semicilíndrica) amb la variació del paràmetre angular...

a) $[\pi, 2\pi]$.
b) $[0, 2\pi]$.
c) $[\pi/2, \pi]$.
d) l'esfera.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

34. Un cilindre el·líptic recte es pot obtenir a partir d'un cilindre circular recte de la mateixa altura mitjançant, com a mínim,...

a) un canvi d'escala uniforme.
b) un canvi d'escala no uniforme.
c) un canvi d'escala de coeficients 1, 1, 1.
d) No és possible la transformació.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

35. L'eix del cilindre de parametrització

$P(t) = (s, 2 + \text{a} \cos t, -1 + a \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $-3 = s = 7$...

a) és l'eix z.
b) és l'eix x.
c) és paral·lel a l'eix x.
d) és paral·lel al vector $(0, 2, -1)$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

36. La intersecció del pla $x = -y$ amb un tor de centre l'origen i pla diametral el pla de coordenades xy...

a) és buida.
b) és una circumferència.
c) són dues circumferències.
d) és una el·lipse.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

37. Si tenim una esfera de centre l'origen de coordenades, la seva intersecció amb un pla que conté l'eix z...

a) és un paral·lel.
b) és un meridià.
c) són dues circumferències.
d) és buida.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

38. Donada la parametrització corresponent a una esfera $(\theta\varphi)$ $P(\theta,\varphi) = (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi)$, s'obté la semiesfera (hemisferi) superior amb...

a) $0 \leq \theta \leq 2p$, $-p/2 \leq \varphi \leq p/2$.
b) $0 \leq \theta \leq 2p$, $0 \leq \varphi \leq p/2$.
c) $0 \leq \theta \leq 2p$, $-p/2 \leq \varphi \leq 0$.
d) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

39. Donada la parametrització corresponent a una esfera $(P(\theta,\varphi) = (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, R\text{sinf}))$,...

a) mantenint fix θ i variant φ s'obté un meridià.
b) mantenint fix θ i variant φ s'obté un paral·lel.
c) variant θ i mantenint φ s'obté un meridià.
d) No és la parametrització d'una esfera.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

40. Per a obtenir arcs de paral·lel situats a l'octant de les x, y, z positives utilitzant la parametrització de l'esfera donada per $(P(\theta,\varphi) = (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi))$ el paràmetre latitud varia en...

a) $[0, \pi/4]$.
b) $[0, \pi/2]$.

c) $[\pi/4, 3\pi/4]$.
d) $[0, \pi]$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. c

2. a

3. b

4. b

5. b

6. b

7. c

8. b

9. b

10. a

11. b

12. b

13. b

14. b

15. b

16. b

17. c

18. b

19. d

20. b

21. e

22. b

23. b

24. b

25. c

26. a

27. e

28. b

29. c

30. b

31. b

32. b

33. a

34. b

35. c

36. c

37. b

38. b

39. a

40. b