Grafismo digital 2D y 3D

Salvador Linares Mustarós

PID_00215912

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Índice

Introducción

En matemáticas, una curva es una línea continua de una dimensión. Como ejemplo de curvas cerradas, tenemos la circunferencia o la elipse y como ejemplo de curvas abiertas, la recta o la parábola.

En este módulo didáctico de la asignatura, se trabajan las curvas del plano. Este tipo de objetos son imprescindibles para hacer animaciones realistas, como el movimiento de un planeta alrededor del Sol o el movimiento que sigue una pelota que rueda por una mesa y cae al suelo.

El conocimiento de las coordenadas es imprescindible para seguir los ejercicios que muestran poco a poco una teoría cien por cien aplicable a la práctica.

1. Conceptos básicos

1.1. Rectas en el plano

Dado un punto de la recta (p_x, p_y) y un vector director de la recta (v_x, v_y), la ecuación matemática que sirve para encontrar los infinitos puntos de una recta es:

$(x,y) = (p_x, p_y) + t \cdot (v_x, v_y)$, donde t con $t \in \mathbb{R}$

Se llama **ecuación vectorial** de la recta.

Es habitual escribir $P(t)$ en lugar de (x,y) con la idea de que $P(t)$ indica un punto que depende del instante t. De este modo, $P(t)$ tiene relación física con el tiempo y la posición espacial.

Observamos que matricialmente la ecuación anterior es equivalente a:

$$(x,y) = (p_x + t \cdot v_x, p_y + t \cdot v_y)$$

Si separamos por coordenadas, obtenemos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x = p_x + t \cdot v_x \\ x = p_y + t \cdot v_y \end{cases}$$

que se conoce como **ecuación paramétrica**.

Si aislamos las t e igualamos, obtenemos la ecuación de la recta denominada continua.

$$\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y}$$

Si eliminamos los denominadores y lo pasamos todo a un lado, obtenemos lo que se denomina la **ecuación implícita** de la recta:

$$v_x y - v_y x + v_y p_x - v_x p_y = 0$$

Finalmente, aislando la y de la ecuación anterior se obtiene la **ecuación explícita** de la recta:

$$y = \frac{v_y}{v_x} x + \frac{v_x p_y - v_y p_x}{v_x}$$

1.2. Otras curvas del plano

La ecuación matemática de un **segmento** que une dos puntos A y B es:

$(x,y) = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ con $t \in [0,1]$ (o de manera equivalente $0 \leq t \leq 1$).

La ecuación matemática de una **circunferencia** de centro $C = (a,b)$ y radio R es:

$P(t) = (a + R \cdot \cos(t), b + R \cdot \sin(t))$ con $0^o \leq t \leq 360^o$.

Toda curva del tipo $(x,y) = (x,y) = (a \cdot t \cdot \cos(t), a \cdot t \cdot \sin(t))$ con $0 \leq t \leq b$ se denomina **espiral de Arquímedes**.

Toda curva del tipo $(x,y) = (a(1 + \cos(t)) \cdot \cos(t), a(1 + \cos(t)) \cdot \sin(t))$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ se denomina **cardioide** (por su forma de corazón).

Toda curva de parametrización tipo $(x,y) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ es una **elipse** centrada en su origen tal que corta el eje x en los puntos $(a,0)$ y $(-a,0)$ y el eje y en los puntos $(0, b)$ y $(0,-b)$.

Hay otros muchos tipos de curvas en el plano: parábolas, hipérboles, sinusoidales, etc. Los ejercicios siguientes tienen como misión mostrar sus ecuaciones en paramétricas para aclarar la teoría anterior.

1.3. Superficies

Una superficie es un objeto tridimensional que localmente tiene el aspecto de espacio bidimensional. Hay muchos tipos de superficies, como por ejemplo el cilindro elíptico, la esfera o el toro.

2. Ejercicios con solución

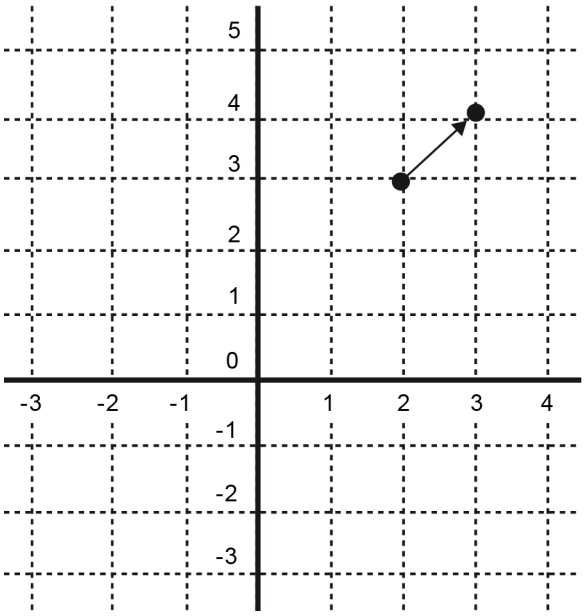
El objetivo de esta sección es recordar conceptos y técnicas matemáticas de manera eminentemente práctica, a partir de ejemplos concretos.

Ejercicio 1

Parametrizad la recta que pasa por el punto $A = (2,3)$ y tiene como vector director el vector (1,1).

Solución:

El dibujo que representa el punto de la recta y el vector director de movimiento es:

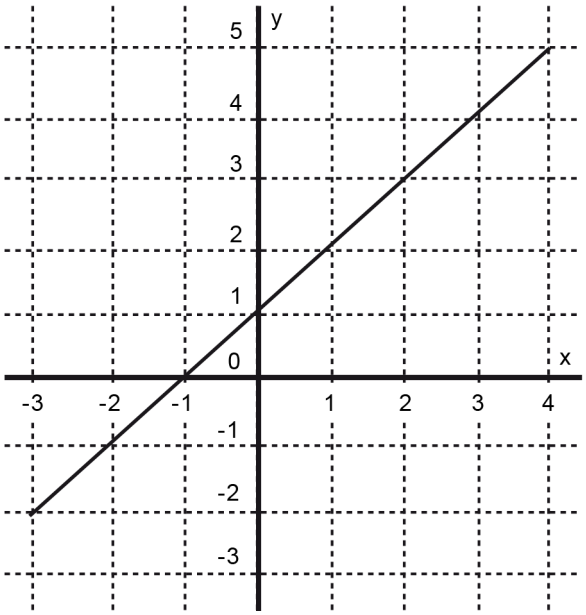


La manera muy intuitiva de pensar este ejercicio consiste en imaginarnos que dejamos una hormiga en el punto (2,3) y que la hormiga solo se mueve en la dirección del vector (1,1). Un punto inmediato al que la hormiga puede ir es el punto (3,4). Sin embargo, una vez en el (3,4), el punto siguiente al que la hormiga puede ir es el punto (4,5).

Dado que la hormiga va moviéndose en este sentido, tiene que pasar por todos los puntos intermedios. Por ejemplo, si la hormiga está en el punto (2,3) y se mueve la mitad del vector director, la hormiga se sitúa en el punto (2.5,3.5).

De manera análoga, si la hormiga cambia de sentido y se mueve hacia el otro lado, entonces pasa por los puntos (1,2), (0,1), (–1,0), (–2,–1), etc. ¡Y por todos los puntos intermedios!

El dibujo siguiente señala los puntos donde puede estar la hormiga:



La ecuación matemática que sirve para encontrar los infinitos puntos de esta recta es:

$(x,y) = (2,3) + t \cdot (1,1)$ con t cualquier número real ($t \in \mathbb{R}$).

O bien:

$P(t) = (2,3) + t \cdot (1,1)$ con $t \in \mathbb{R}$.

Observad que dado que $P(0) = (2,3) + 0 \cdot (1,1) = (2,3)$, se puede considerar que en el momento inicial del movimiento la hormiga se encontraría en el punto (2,3).

Dado que $P(1) = (2,3) + 1 \cdot (1,1) = (3,4)$, en el instante $t = 1$ la hormiga se encontraría en el punto (3,4).

Dado que t puede ser cualquier valor, como 0,5, y que $P(0.5) = (2.5,3.5)$, podemos deducir que en el instante $t = 0.5$ la hormiga se encontraría a medio camino de los puntos inicial y final.

Observemos que una segunda opción de ecuación vectorial es:

$(x,y) = (0,1) + t \cdot (2,2)$ con $t \in \mathbb{R}$

A pesar de que puede parecer que obtendremos otros puntos distintos a los conseguidos con el anterior, si sustituimos la *t* por números reales vamos obteniendo los mismos puntos anteriores de la recta. De este modo, por ejemplo, si $t = 1$ obtenemos el punto (2,3) y si $t = 1.5$ obtenemos el punto (3,4). Por lo tanto, ¡los puntos por donde se mueve la hormiga son los mismos que antes!

La diferencia es que ahora la hormiga, aparte de empezar en otro punto de la recta, se mueve mucho más deprisa que en la otra ecuación.

Ejercicio 2

Encontrad la ecuación en forma explícita de la recta que pasa por el punto $A = (2,3)$ y tiene como vector director el vector (1,1).

Demostrad que los puntos de la recta son de la forma $(x, x + 1)$.

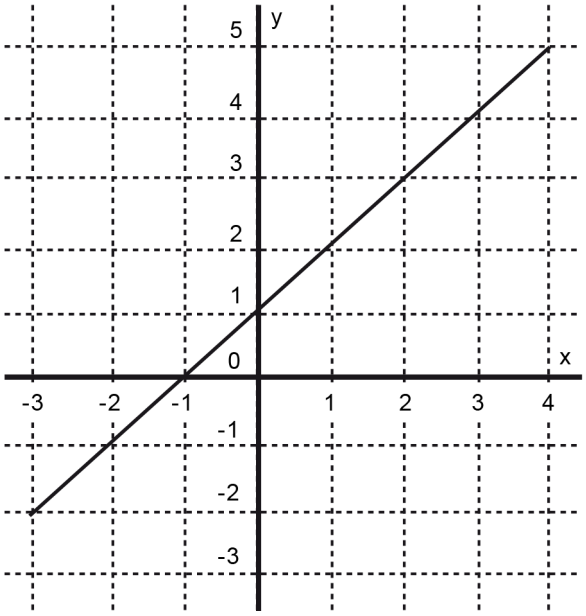
Solución:

Toda ecuación explícita de una recta tiene una forma del estilo $y = mx + n$. Para encontrarla, siempre partiremos de la ecuación vectorial de la recta e iremos transformando en las otras ecuaciones.

$(x,y) = (2,3) + t \cdot (1,1)$ o bien $\begin{cases} x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 3 + 1 \cdot t \end{cases}$ o bien $\begin{cases} \frac{x-2}{1} = t \\ \frac{y-3}{1} = t \end{cases}$, si igualamos las *t* de las dos ecuaciones obtenemos $\frac{y-3}{1} = \frac{x-2}{1}$ o, de manera equivalente, $y - 3 = x - 2$. Si aislamos la *y*, obtenemos $y = x + 1$.

Por tanto, los puntos de la recta tienen las coordenadas $(x, x + 1)$.

Observad que en el dibujo de la recta siempre se cumple que la *y* es una unidad mayor que la *x*.



Observad que los puntos encontrados en el ejercicio anterior cumplen todos esta condición: (2,3), (3,4), (4,5), (1,0), (2.5,3.5), (1,2), (0,1), (–1,0), (–2,–1).

Nota

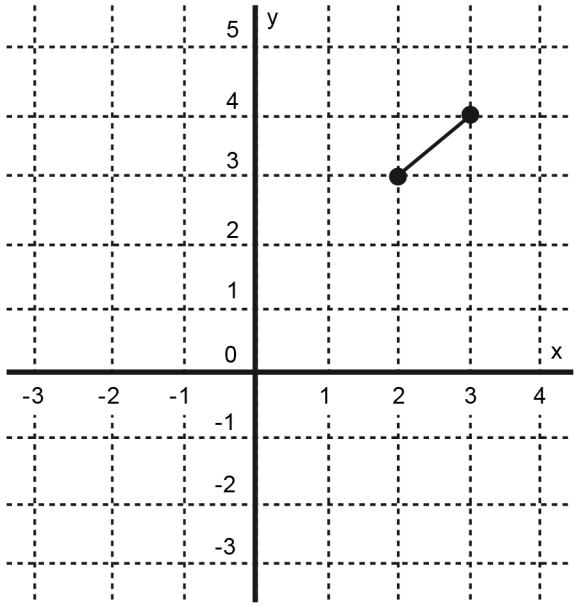
Observad que los puntos son de la forma (x, $x + 1$).

Ejercicio 3

Parametrizad el segmento que va del punto $A = (2,3)$ al punto $B = (3,4)$.

Solución:

Este es un caso restringido de movimiento en una recta.



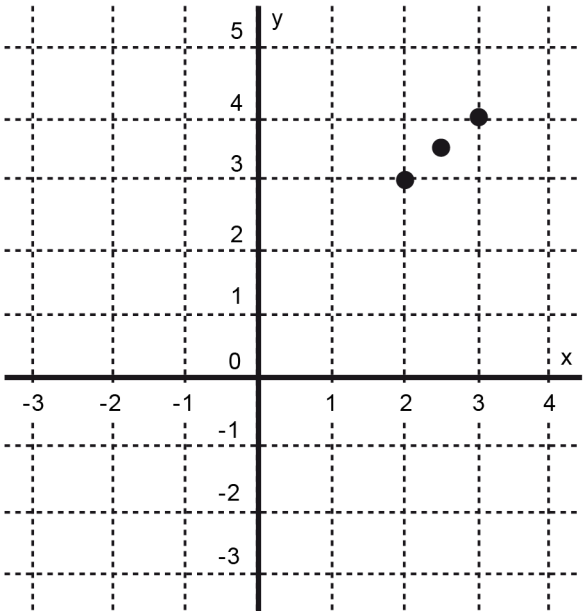
Para parametrizar este movimiento, tomaremos la fórmula matemática siguiente:

$(x,y) = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ con $t \in [0,1]$ (o de manera equivalente, $0 \leq t \leq 1$)

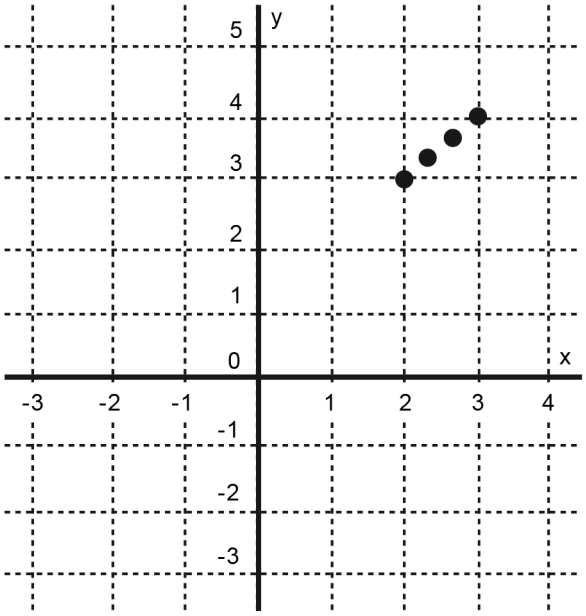
Entonces, en nuestro caso concreto,

$(x,y) = (2,3) + t \cdot (1,1)$ con $t \in [0,1]$

Observad que si tomamos $t = 0$, $t = 0.5$ y $t = 1$ obtenemos el punto de partida A, el punto intermedio de A y B y el punto de llegada B, tal y como muestra el dibujo siguiente:



Observad que si tomamos $t = 1/3$ y $t = 2/3$ obtenemos los dos puntos que dividen el segmento en tres partes iguales.



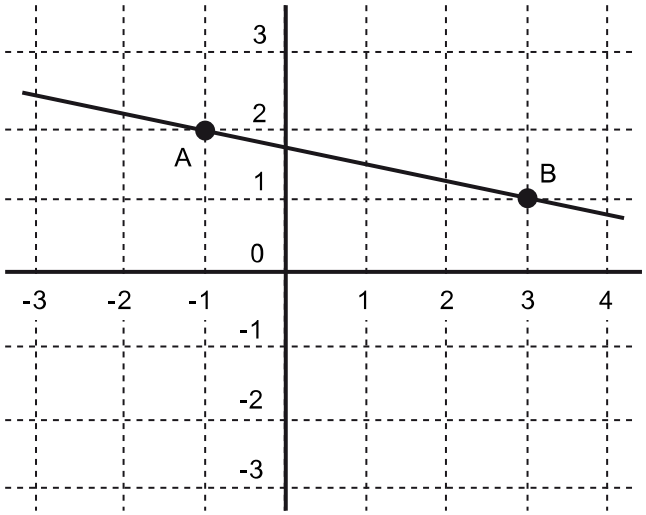
Tomando $t = 1/4$, $t = 2/4$ y $t = ¾$, obtendríamos los tres puntos que dividen el segmento en cuatro partes iguales.

Tomando $t = 1/5$, $t = 2/5$, $t = 3/5$ y $t = 4/5$, obtendríamos los cuatro puntos que dividen el segmento en cuatro partes iguales.

¡Esta idea puede servir para situar objetos en una pantalla muy repartidos por la misma!

Ejercicio 4

Dada la gráfica siguiente:



Encontrad las coordenadas del punto en el que la recta corta el eje de abscisas.

Solución:

Dado que $A = (-1,2)$ y $B = (3,1)$, podemos obtener una parametrización de la recta a partir de la expresión $(x, y) = A + t(B - A)$ con $t \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, $(x,y) = (-1,2) + t((4,-1) = (-1+4t, 2-t)$.

El punto de corte con el eje de abscisas o eje de las x es el punto que tiene por coordenada y el valor 0. Entonces podemos obtener el valor de t haciendo $2 - t = 0$, que equivale a $t = 2$.

Las coordenadas del punto serán, pues, $(x,y) = (-1 + 4 \cdot 2 , 2 - 2) = (7,0)$.

Ejercicio 5

Dada la ecuación vectorial de la recta $P(t) = (3,2) + t \cdot (-4,-2)$, encontrad los puntos de corte con los ejes.

Solución:

Para el punto de corte con el eje y o eje de ordenadas, es necesario que el valor de x sea 0. Por lo tanto, $3-4t=0$ o $t=\frac{3}{4}$. Entonces $y=2-2\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$. Así pues, el punto de corte con el eje y es $(0,\frac{1}{2})$.

Para el punto de corte con el eje x o eje de abscisas es necesario que $y=0$, por lo que $2-2t=0$ o $t=1$.

Entonces $x=3-4\cdot 1=-1$. Así pues, el punto de corte con el eje de abscisas es $(-1,0)$.

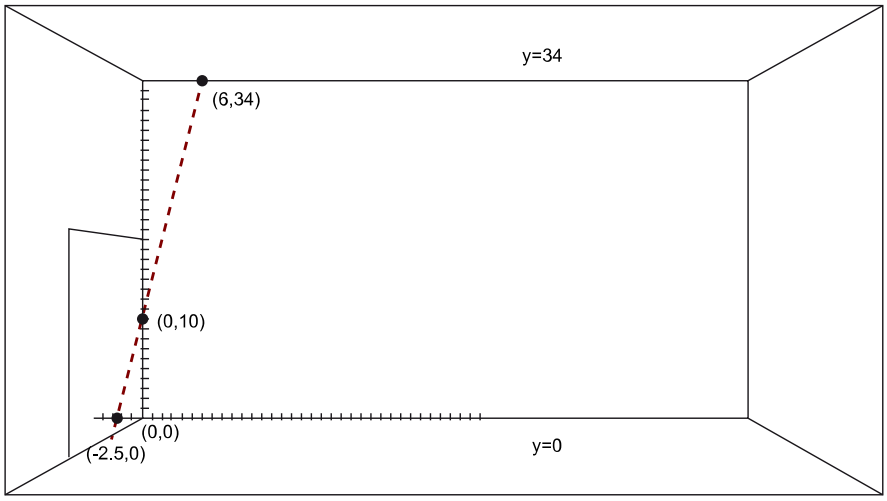
Ejercicio 6

Una pelota se mueve sobre la recta $y = 4x + 10$. Encontrad el punto de contacto con el techo si tiene por ecuación $y = 34$ y con el suelo, si tiene por ecuación $y = 0$. Haced un dibujo de una gráfica con las funciones recta, suelo y techo y marcad los puntos donde la pelota choca con el techo y el suelo.

Solución:

La pelota toca el suelo en $y = 0$. De este modo, $x = -10/4 = -2.5$.

La pelota toca el techo en $y = 34$, de modo que $x = 6$.



Ejercicio 7

Dados los puntos $A = (-3,7)$ y $B = (4,-1)$.

a) Demostrad utilizando el teorema de Pitágoras que la distancia de A a su punto medio entre A y B es igual que la distancia de B a este punto medio.

b) Encontrad el punto en el que se encuentra entre *A* y *B* a triple distancia de *A* que de *B*.

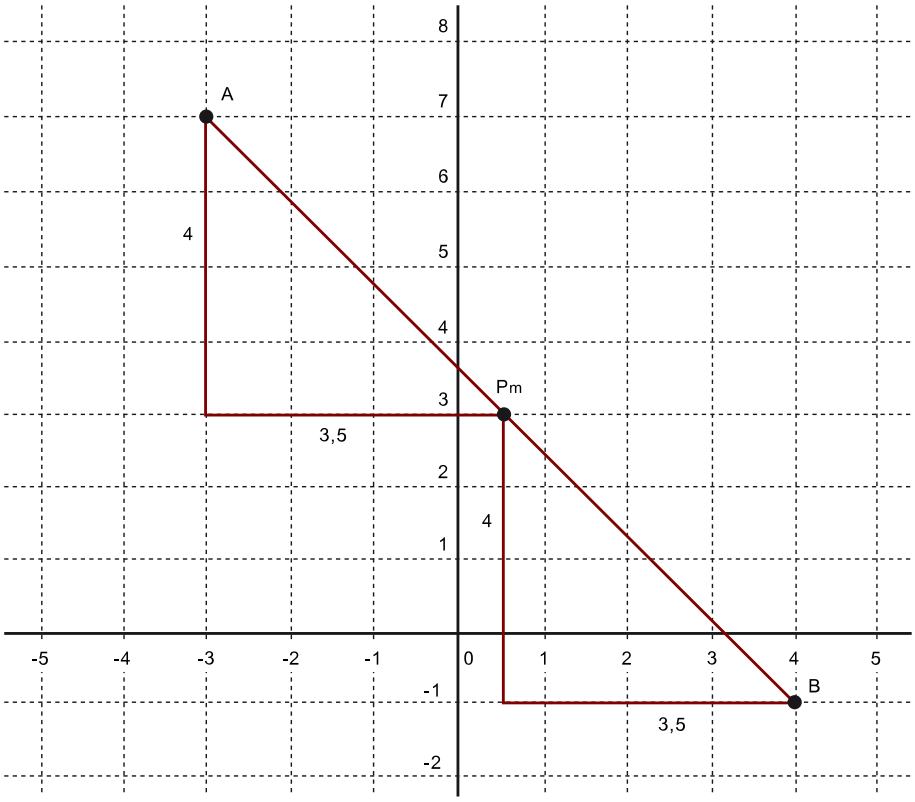
Solución:

La parametrización de la recta es: $P(t)= (-3 + 7\,t\,,\ 7 - 8\,t)$.

Encontramos el punto medio haciendo $t = 0.5$. Observad que para $t = 0$ estamos en *A* y para $t = 1$ estamos en *B*. Por lo tanto, para $t = 0.5$ estaremos justo a medio camino entre *A* y *B*.

El punto medio es, por lo tanto, $P_m = (0.5,3)$.

Si dibujamos en unos ejes los tres puntos, podemos construir dos triángulos rectángulos de la manera siguiente:



Y ahora podemos comprobar que la distancia de *A* a P_m, que para Pitágoras es la hipotenusa del primer triángulo, es igual a la distancia de *B* a P_m, que para Pitágoras es la hipotenusa del segundo triángulo. Son iguales puesto que, como los catetos son iguales, en los dos casos la hipotenusa vale $\sqrt{(4^2+3.5^2)} = 5.3150729063673247039995609574 6\ldots$

Para encontrar el punto que está en el segmento a triple distancia de A que de B, hacemos $t = 0.75$ y obtenemos (2.25,1). Si repetimos la idea de calcular las distancias con el teorema de Pitágoras, comprobaremos que realmente la hipotenusa del primero es el triple que la del segundo y, por lo tanto, el punto está situado a triple distancia de A que de B.

Ejercicio 8

Decid cinco puntos de la recta que contiene los puntos $A = (-100,100)$ y $B = (100,0)$.

Solución:

Una posible parametrización de la recta es $P(t) = (-100,100) + t \cdot (200,-100)$.

Para obtener cinco puntos sobre la recta, podemos tomar cinco valores de t cualesquiera.

Si tomamos $t = 0$, obtenemos (–100, 100), que es el punto A.

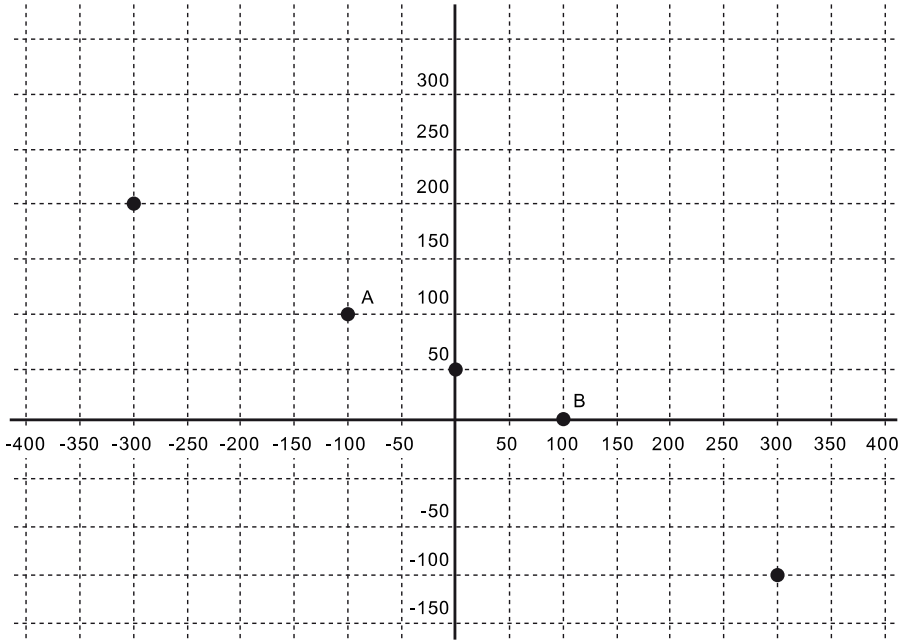
Si tomamos $t = 1$, obtenemos (100, 0), que es precisamente B.

Observad que esto nos garantiza que vamos bien, puesto que hemos obtenido dos puntos de la recta que pasa por A y por B seguro.

Si tomamos $t = 0.5$, obtenemos el punto medio entre A y B (0,50).

Si tomamos $t = -1$, obtenemos el punto simétrico de B respecto de A (–300, 200).

Si tomamos $t = 2$, obtenemos el punto simétrico de A respecto de B (300,–100).



Ejercicio 9

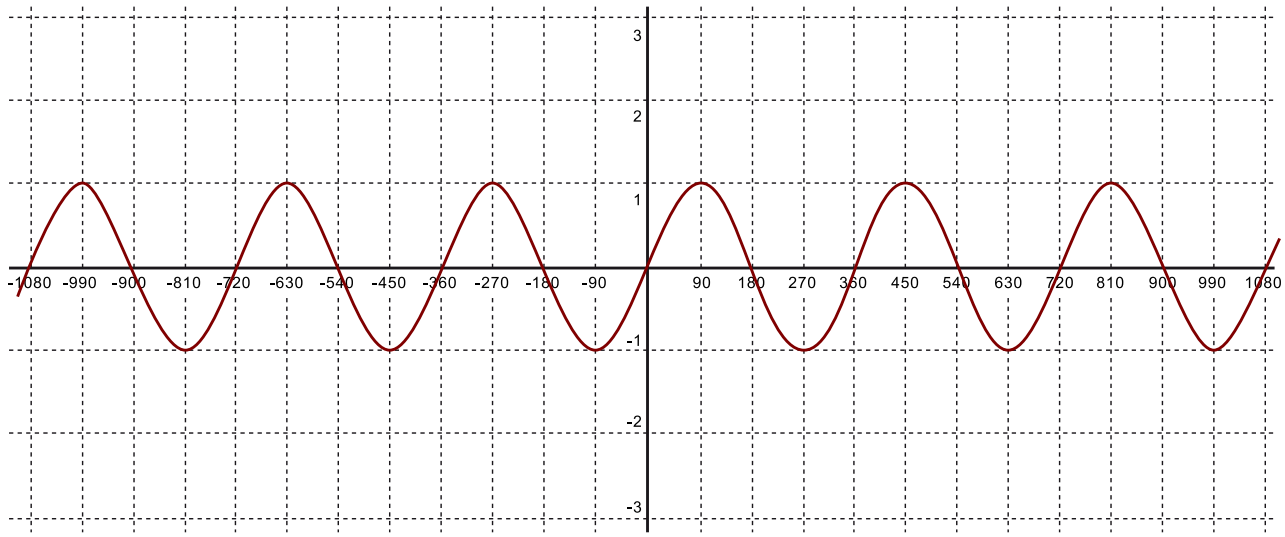
Dibujad la curva en el plano siguiente:

$P(t) = (t\ ,\ \sin(t))$ con $t \in \mathbb{R}$

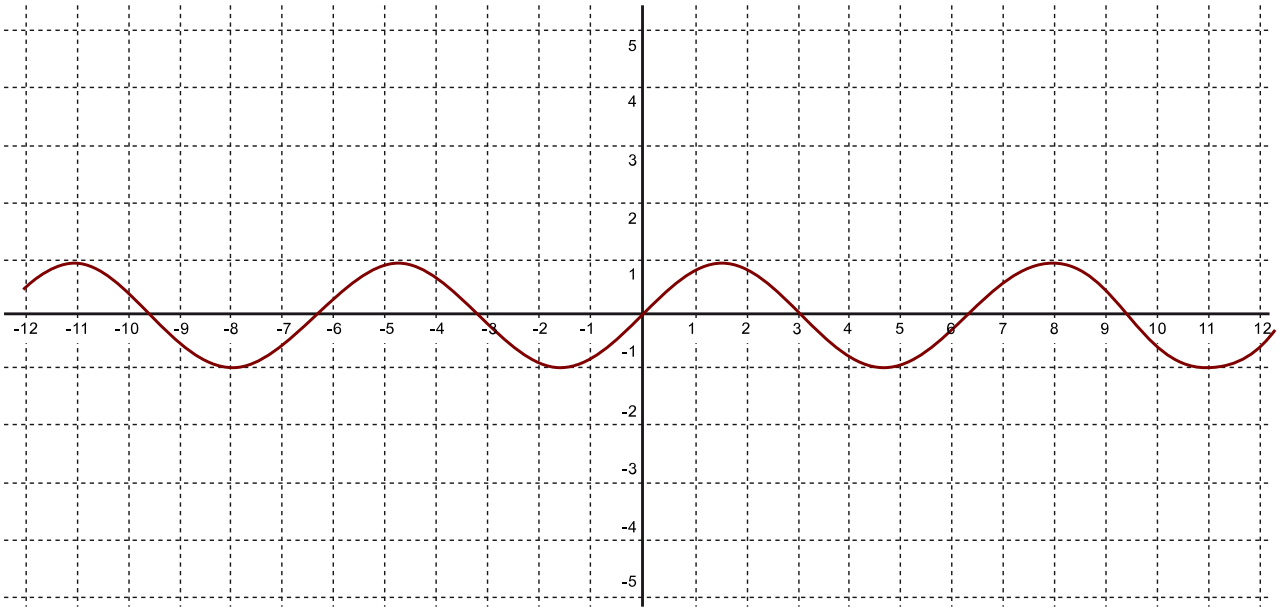
Solución:

Dando valores a *t* y dibujando los puntos, hay dos opciones.

Si el **seno** está en grados, obtendríamos:



Si el **seno** está en radianes, obtendríamos:



Podemos observar que siempre obtenemos una onda que se mueve entre los valores –1 y 1.

Ejercicio 10

Dibujad en el plano las curvas siguientes:

a) $P(t) = (t\ ,\ \cos(t))$ con $t \in \mathbb{R}$

b) $P(t) = (t\ ,\ 2 \cdot \cos(t))$ con $t \in \mathbb{R}$

c) $P(t) = (t\ ,\ -\cos(t))$ con $t \in \mathbb{R}$

d) $P(t) = (t\ ,\ \cos(2 \cdot t))$ con $t \in \mathbb{R}$

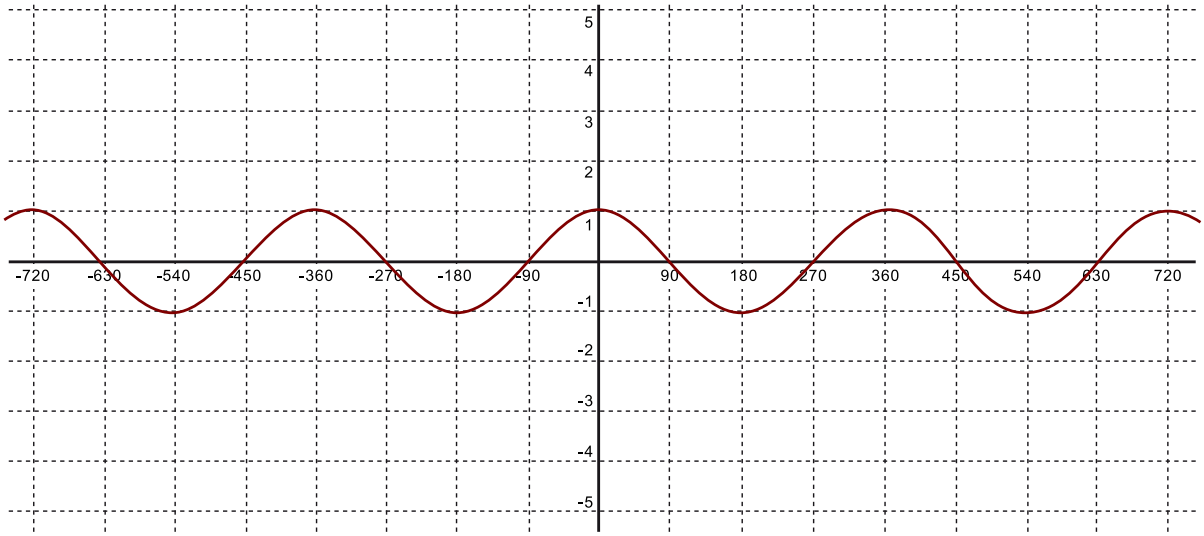
e) $P(t) = (t\ ,\ \cos(t) + 3)$ con $t \in \mathbb{R}$

f) $P(t) = (t\ ,\ \cos(t + 90))$ con $t \in \mathbb{R}$

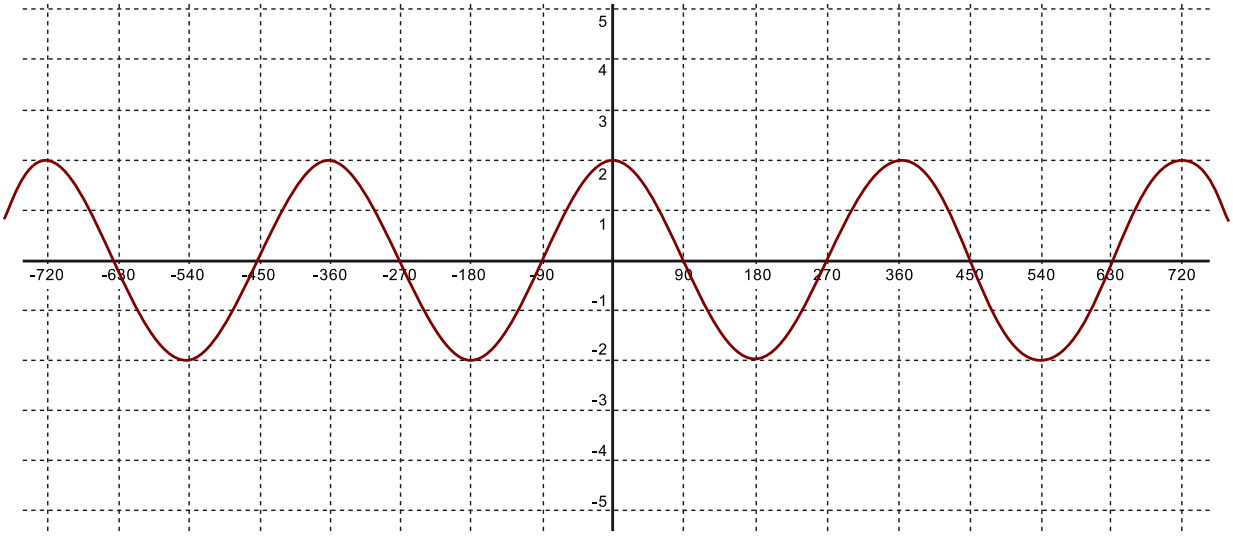
g) $P(t) = (t\ ,\ 3 \cdot \cos(t + 90))$ con $t \in \mathbb{R}$

Solución:

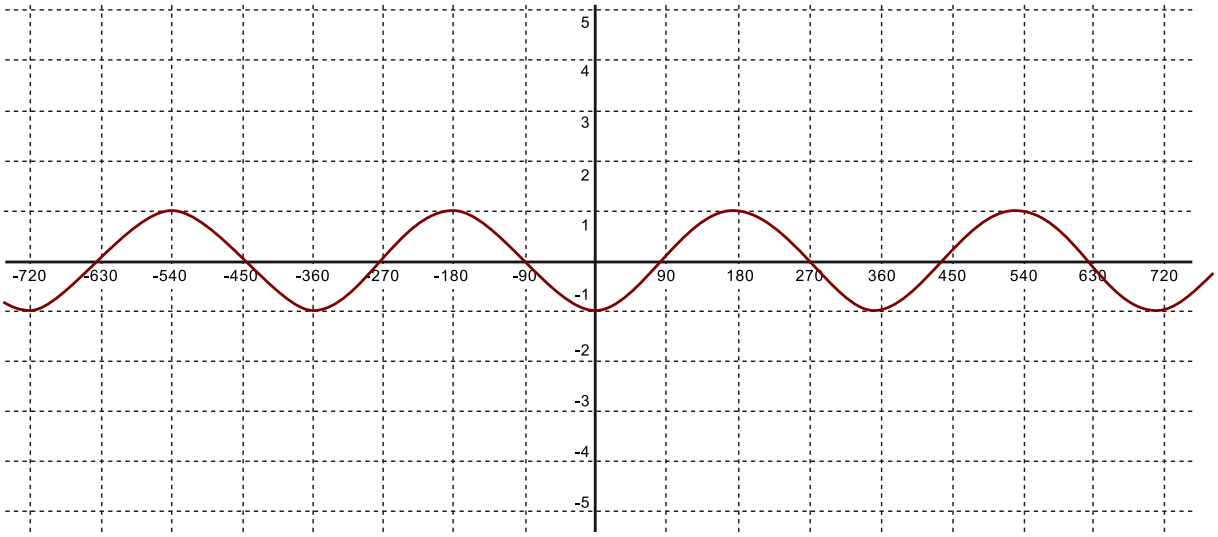
Supondremos que el **coseno** está en grados sexagesimales.



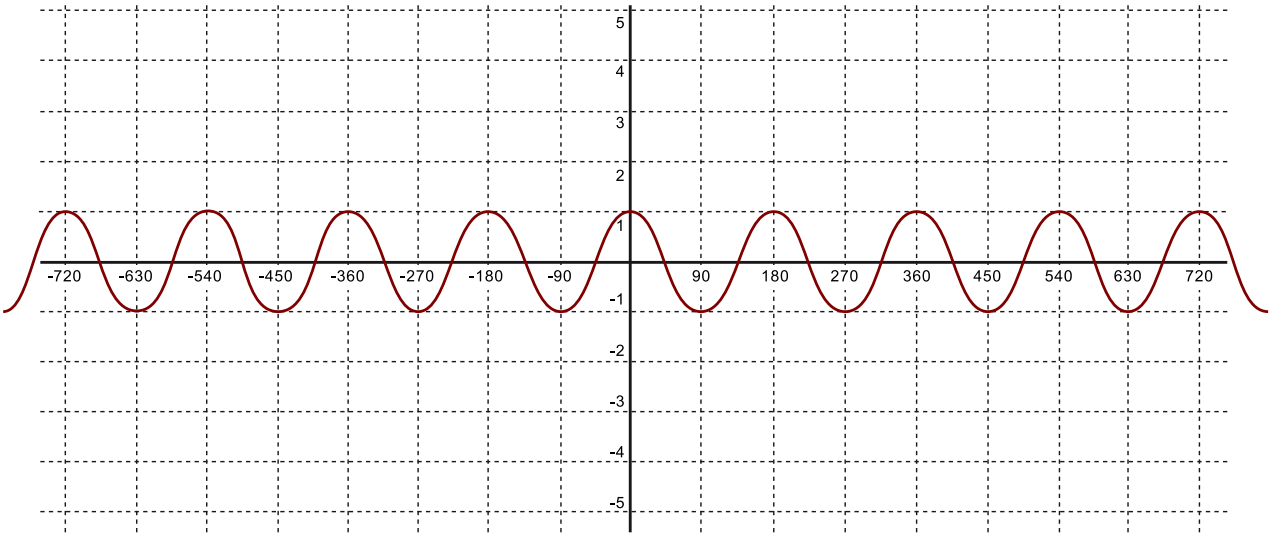
a) Observad que la función coseno también es una onda de ancho [-1,1]



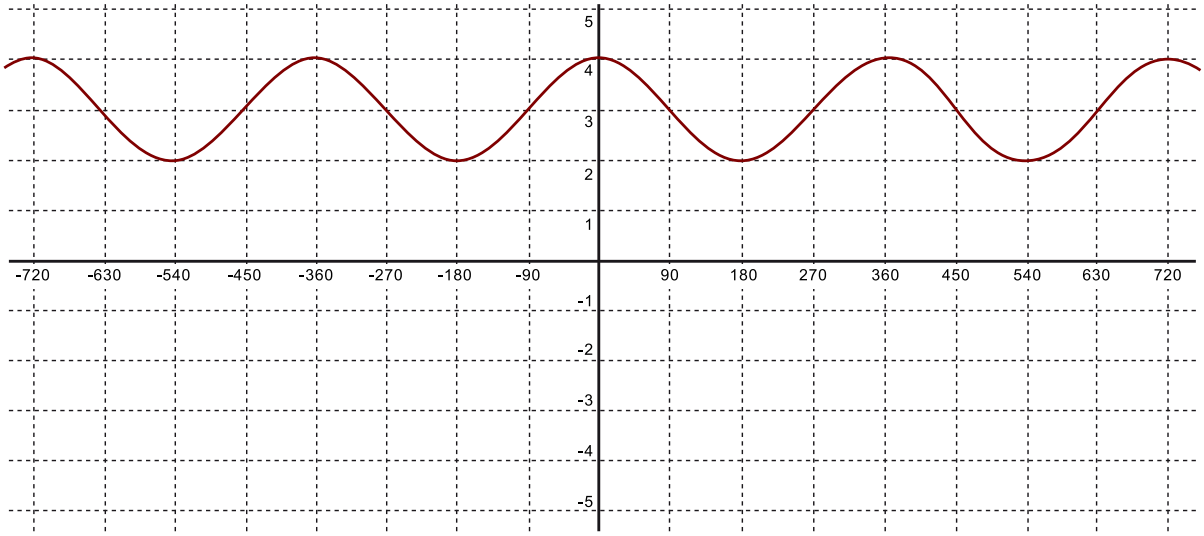
b) Observad que al multiplicar la función coseno por un número, el ancho de onda se multiplica por el mismo número.



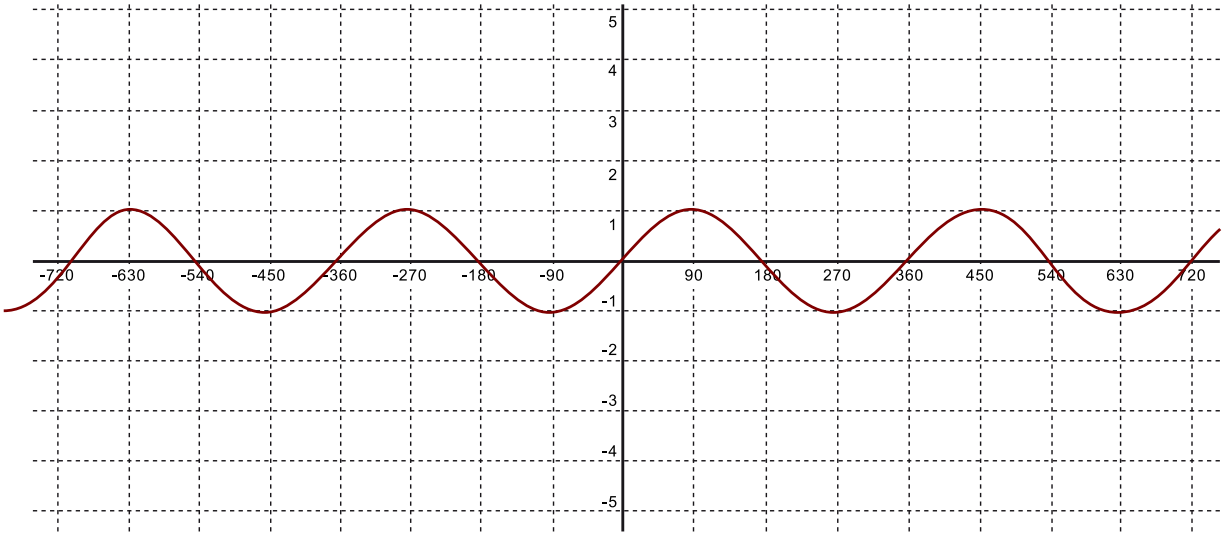
c) Observad que al multiplicar la función coseno por (-1), obtenemos una simetría de la función respecto al eje de abscisas.



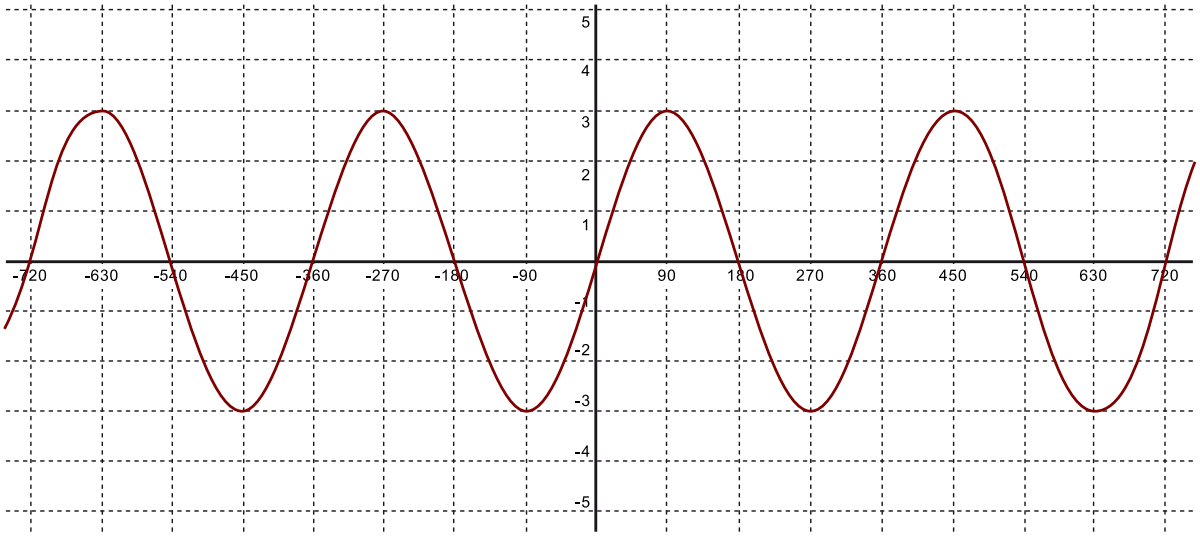
d) Observad que al multiplicar la *x* del coseno por un número mayor que 1, creamos más ondas en el mismo espacio. Si el número está entre 0 y 1, haremos más ondas del mismo y, por lo tanto, el movimiento será menos ondulatorio.



e) Observad que al sumar números al coseno, podemos levantar la función. Si los restamos, la bajaremos.



f) Observad que al sumar un valor a la *x* del coseno, provocamos un desplazamiento de la función hacia la derecha. Si este valor es 90, obtenemos exactamente la función coseno.



g) Observad que distintas combinaciones de operaciones anteriores producen las combinaciones ya estudiadas una a una. De este modo, en este caso concreto al sumar 90 obtenemos el seno, y al multiplicar por 3 el coseno ampliamos el intervalo de movimiento a [-3,3].

Ejercicio 11

Escribid una parametrización de la circunferencia de centro (3,2) y radio 4. Encontrad, con la ayuda de la parametrización, cinco puntos sobre la circunferencia.

Solución:

Utilizaremos la parametrización $P(t) = (a + R \cos t, b + R \sin t)$, $0^o \leq t \leq 360^o$.

Entonces $P(t) = (3 + 4 \cdot \cos(t), 2 + 4 \cdot \sin(t)))$, $0^o \leq t \leq 360^o$.

Para encontrar cinco puntos sobre la circunferencia, damos cinco valores a *t*. Por ejemplo: 0, 45, 90, 180 y 270.

$P(0) = (3 + 4 \cdot \cos 0, 2 + 4 \cdot \sin 0) = (3 + 4 \cdot 1, 2 + 4 \cdot 0) = (3 + 4, 2 + 0) = (7, 2)$

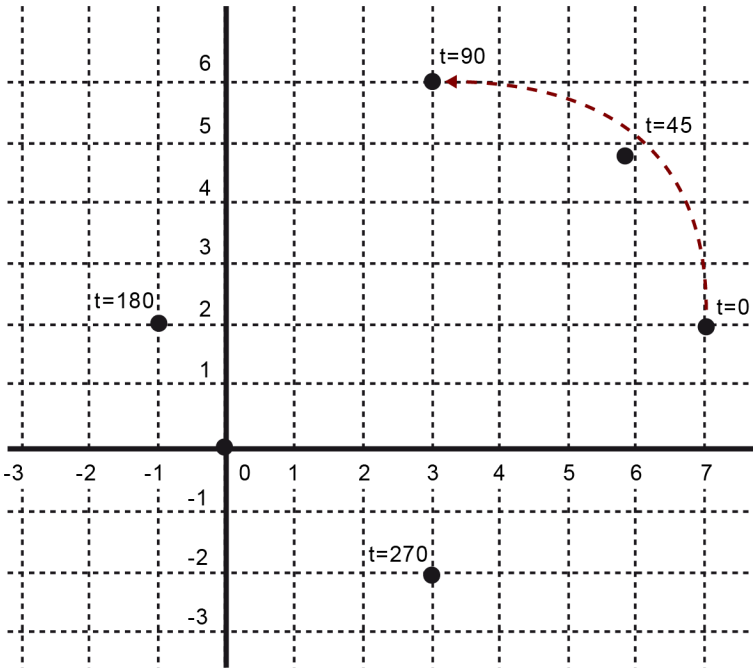
$P(45) = (3 + 4\cos 45, 2 + 4\sin 45) = (3 + 4(\sqrt{2}/2), 2 + 4(\sqrt{2}/2)) = (3 + 2{,}828\ldots, 2 + 2{,}828\ldots) =$ **(5,828..., 4,828...)**

$P(90) = (3 + 4\cos 90, 2 + 4\sin 90) = (3 + 4(0), 2 + 4(1)) = (3 + 0, 2 + 4) =$ **(3, 6)**

$P(180) = (3 + 4\cos 180, 2 + 4\sin 180) = (3 + 4(-1), 2 + 4(0)) = (3 - 4, 2 + 0) = (-1, 2)$

$P(270) = (3 + 4\cos 270, 2 + 4\sin 270) = (3 + 4(0), 2 + 4(-1)) = (3 + 0, 2 - 4) =$ **(3, –2)**

Observad que si marcamos los puntos en unos ejes de coordenadas, obtendremos dónde empieza el movimiento y la dirección del giro.



En el ejercicio anterior, hemos aprendido diferentes transformaciones que pueden permitir cambiar la dirección de giro, la velocidad de giro o el punto de partida.

De este modo, por ejemplo:

Con la parametrización $P(t) = (3 + 4 \cdot \cos(2 \cdot t), 2 + 4 \cdot \sin(2 \cdot t))$, $0^o \leq t \leq 180^o$, obtenemos la misma circunferencia pero ahora es recorrida a doble velocidad.

Con la parametrización $P(t) = (3 + 4 \cdot \cos(t + 180), 2 + 4 \cdot \sin(t + 180))$, $0^o \leq t \leq 360^o$, obtenemos la misma circunferencia pero ahora el punto de inicio es el punto (–1,2).

Con la parametrización $P(t) = (3 + 4 \cdot \cos(t), 2 - 4 \cdot \sin(t))$, $0^o \leq t \leq 360^o$, obtenemos la misma circunferencia pero ahora es recorrida en sentido horario a partir del punto inicial (7,2).

Ejercicio 12

Parametrizad la circunferencia de centro (6,7) y radio 3. Encontrad las coordenadas de los puntos situados sobre la circunferencia con valor x igual a 7. Dibujadla. Marcad sobre el dibujo los puntos obtenidos.

Solución:

La parametrización de la circunferencia de centro (6,7) y radio 3 es:

$(x,y) = (6 + 3\cos t, 7 + 3\sin t)$

Para encontrar los puntos con x igual a 7 hacemos: $6 + 3\cos t = 7$; y obtenemos un valor t que cumple la ecuación:

$6 + R\cos t = 7$, o bien $\cos t = (7 - 6)/3$, o bien $t = arcos(1/3) = 1.23095941734078$ rad

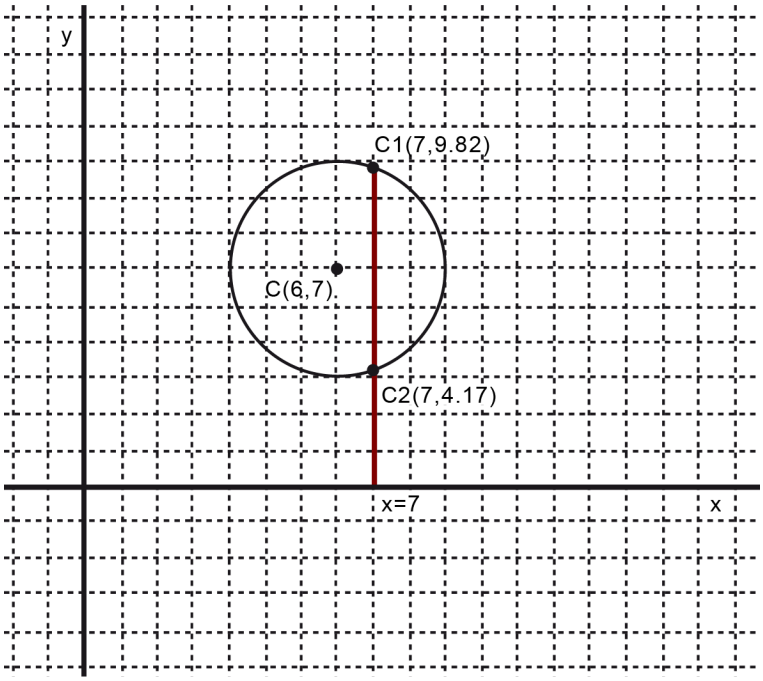
Entonces:

$Y = 7 + (3 \cdot \sin(1.23095941734078)) = 9.82842712474621$

Observamos que por simetría podemos encontrar el otro punto sobre la circunferencia.

$Y = 7 - (3 \cdot \sin(1.23095941734078)) = 4.17157287525379$

El dibujo con los puntos marcados es:



Ejercicio 13

Parametrizad la circunferencia de centro (2,1) y radio 3 de modo que para el valor de parámetro $t = 0$ estemos situados sobre el punto (–1,1). Dibujadla. Dados los puntos de la circunferencia (5,1) y (2,4), encontrad en cada caso el valor del parámetro o ángulo t e indicad qué porción de vuelta hemos hecho. Recordad que la circunferencia empieza en el punto (–1,1) y el giro es antihorario. Marcad sobre el dibujo los dos puntos dados.

Solución:

$P(t) = (2 - 3\cos t,\ 1 + 3\sin t)$ donde $0 \leq t \leq 2\pi$

a) En el punto (5,1), $t = \pi$ o media vuelta.

b) En el punto (2,4), $t = \frac{3\pi}{2}$ o tres cuartos de vuelta.

Ejercicio 14

Tenemos dos puntos de una circunferencia diametralmente opuestos, $A = (2,7)$ y $B = (2,3)$.

a) Encontrad el centro de la circunferencia.

b) Encontrad el radio de la circunferencia.

c) Encontrad la ecuación paramétrica de la circunferencia y haced su representación gráfica sobre unos ejes de coordenadas.

d) Encontrad cuatro puntos internos a la circunferencia y cuatro puntos externos.

Solución:

a) El centro de la circunferencia estará en el punto medio de los dos puntos diametralmente opuestos: $C = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = (2,5)$.

b) El radio, por lo tanto, se puede calcular como la distancia del centro a un punto de la circunferencia: $r = \sqrt{(2-2)^2 + (7-5)^2} = 2$.

c) Una parametrización de la circunferencia de centro (a, b) y de radio r es $(x, y) = (a + r \cdot \cos t,\ b + r \cdot \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Por lo tanto, sustituyendo por nuestros valores obtenemos: $(x, y) = (2 + 2 \cdot \cos t, 5 + 2 \cdot \sin t)$.

d) Para encontrar cuatro puntos en el exterior, podemos o bien hacerlo a ojo, eligiendo puntos muy alejados del centro cuya distancia al mismo sea superior a 2, o bien tomar puntos de circunferencias centradas en (2,5) pero de radio superior a 2. Por ejemplo, $r = 4$. De este modo, (6,5), (2,9), (–2,5) y (2,1) son cuatro puntos exteriores a la circunferencia.

Para encontrar cuatro puntos en el interior, podemos o bien hacerlo a ojo, eligiendo puntos muy cercanos del centro cuya distancia al centro sea inferior a 2, o bien tomar puntos de circunferencias centradas en (2,5) pero de radio inferior a 1. Por ejemplo, $r = 1$. De este modo, (3,5), (2,6), 1,5) y (2,4) son cuatro puntos interiores a la circunferencia.

Ejercicio 15

a) Parametrizad una circunferencia de centro (5,0) y radio 5 de modo que para el valor del parámetro $t = 0$ estemos situados sobre el punto (0,0).

b) Encontrad seis puntos situados sobre la circunferencia.

c) Dad cuatro puntos del interior de la circunferencia y 2^2 puntos del exterior de la circunferencia.

d) Dibujad la circunferencia en unos ejes de coordenadas y señalad todos los puntos.

Solución:

Una parametrización de la **circunferencia** de centro (a,b) y de radio r es $(x,y) = (a + r\cos t,\ b + r\sin t)$.

Observemos que en esta parametrización siempre que $t = 0$, $(x,y) = (a + r,\ b)$.

A nosotros, para $t = 0$ nos interesa estar en $(x,y)=(a - r,\ b)$.

Teníamos diferentes opciones para parametrizar la circunferencia. Lo podemos hacer o bien trasladando el tiempo en 180 o bien jugando con los signos de la suma. Veamos algunos ejemplos:

1) $(x,y) = (5 + 5\cos(t - 180),\ 5\sin(t - 180))$

2) $(x,y) = (5 + 5\cos(t - 180),\ 5\sin t)$

3) $(x,y) = (5 + 5\cos(t + 180),\ 5\sin(t + 180))$

4) $(x,y) = (5 + 5\cos(t + 180),\ 5\sin t)$

5) $(x,y) = (5 - 5\cos t,\ 5\sin(t + 180))$

6) $(x,y) = (5 - 5\cos t,\ 5\sin t)$

Observemos que en todos los casos, cuando $t = 0$ obtenemos el punto (0,0).

Para encontrar seis puntos sobre la circunferencia, solo tenemos que dar seis valores a t.

Para encontrar cuatro puntos en el interior, o bien lo hacemos a ojo tomando valores muy cercanos al centro, o bien para asegurarlo podemos tomar puntos de circunferencias centradas en (5,0) pero de radio menor que 5. Por ejemplo, $r = 4$. Es evidente que si calculamos la distancia de estos puntos al centro debemos obtener valores inferiores a 5.

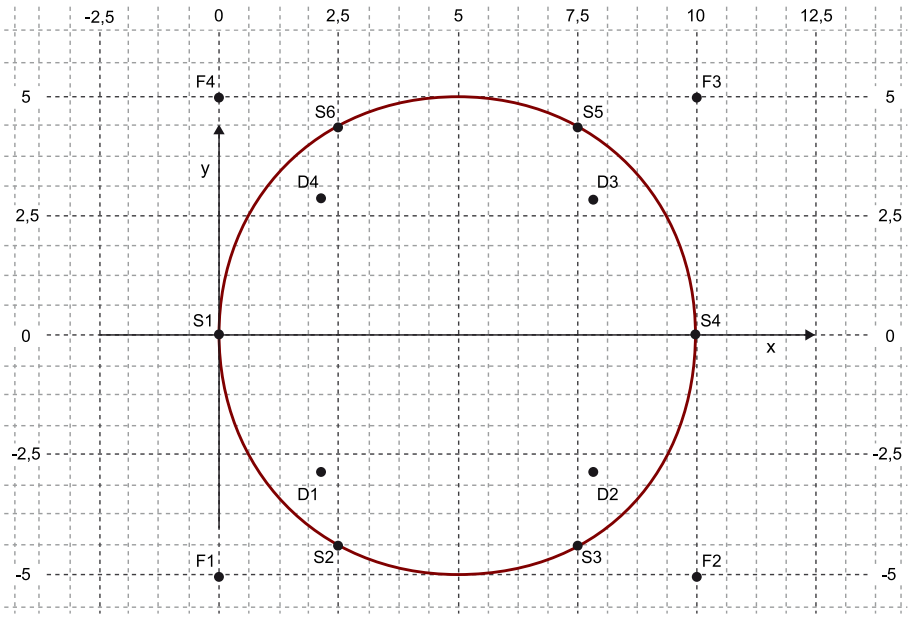
Para encontrar cuatro puntos en el exterior, podemos o bien hacerlo a ojo, eligiendo puntos muy alejados del centro cuya distancia sea superior a 5, o bien podemos tomar puntos de circunferencias centradas en (5,0) pero de radio superior a 5. Por ejemplo, $r = 7$.

En principio, la gráfica con los puntos debe tener una estructura como la siguiente, con ocho puntos sobre la circunferencia, cuatro dentro y cuatro fuera.

¡Cuidado con los redondeos!

Por ejemplo, el punto para $t = 60$ con $(x,y) = (5 - 5\cos t\ ,\ 5\sin t)$ es $(5 - 5\cos 60\ ,\ 5\sin 60) = (5 - 5 \cdot 0.5\ ,\ 5 \cdot \sqrt{3}/2) = (2.5,\ 4.33012701892219323381861585376...)$.

¡Y no podemos redondear! Puesto que si, por ejemplo, hacemos (2.5,4.33), estamos en un punto cercano pero no sobre la circunferencia, puesto que el que sí está es el que tiene para y el valor 4.33012701892219323381861585376...



Ejercicio 16

Representad en el plano bidimensional la parametrización siguiente:

$(x,y) = (t,\ tg\ (t))$

Solución:

La función **tangente** tiene una forma muy distinta del seno y coseno a la que hemos visto anteriormente. Normalmente solo se dibuja de –90 a 90, puesto que la función se va repitiendo a partir de estos valores. Una curiosidad que hay que tener en cuenta es que la función no está definida por los ángulos de 90º y – 90º.

Cuanto más nos acercamos al 90, mayor da la tangente. Veámoslo:

tg(89) = 57,28996163075942468727814753711 3

tg(89,9) = 572,95721335428773113642012662 23

tg(89,99) = 5729,57789313059023638934181435 85

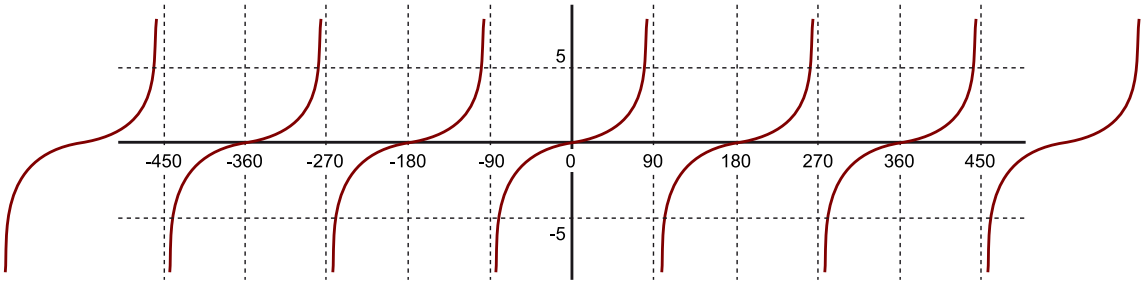
tg(89,999) = 57295,77950726455670336557673692 9

...

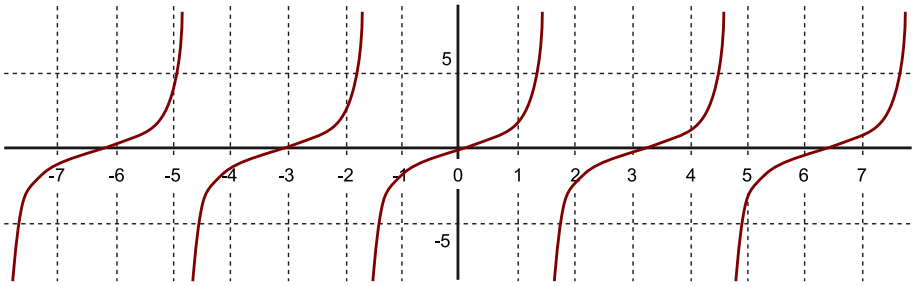
Esto hace que la función no acabe nunca de subir y subir.

Cuanto más nos acercamos a –90, mayor en negativo da la tangente.

Por lo tanto, si utilizamos grados como valor de *t* el dibujo de la parametrización es el siguiente:



El dibujo de la parametrización si utilizamos radianes es:



Ejercicio 17

Representad en el plano bidimensional la parametrización siguiente:

$(x,y) = (t, t^2)$

Solución:

Esta es la parametrización de la **parábola** $y = x^2$ (observad que si sustituimos la x por t, la y es t^2 y se cumple que $(x,y) = (t, t^2)$).

Si vamos dando valores a la t, vamos obteniendo puntos de la curva. De este modo:

Si $t = 0$ obtenemos el punto (0,0).

Si $t = 1$ obtenemos el punto (1,1).

Si $t = 2$ obtenemos el punto (2,4).

Si $t = 0.5$ obtenemos el punto (0.5,0.25).

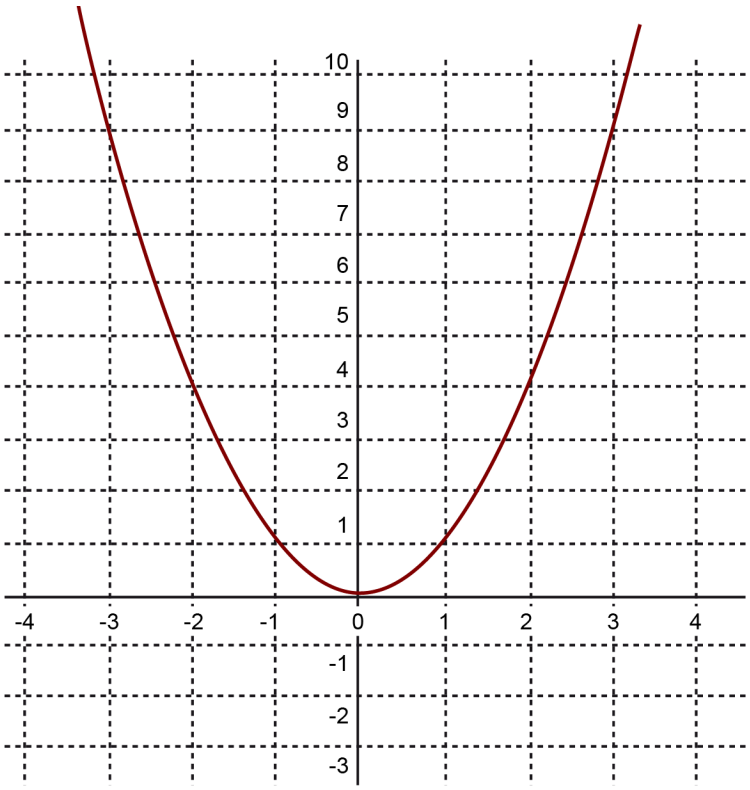
Si $t = -1$ obtenemos el punto (–1,1).

Si $t = -2$ obtenemos el punto (–2,4).

Una primera observación es que todos los valores y de la curva tienen que ser positivos.

Una segunda observación es que para mismos valores de t positivos y negativos, la y debe ser la misma. Esto obliga a hacer que la curva sea simétrica respecto de el eje de las y.

El dibujo de la curva parametrizada es:



Ejercicio 18

Representad en el plano bidimensional la parametrización siguiente:

$(x,y) = (t,\ 10 - t^2)$

Solución:

Esta es la parametrización de la parábola $y = 10 - x^2$ (observad que si sustituimos la x por t, la y es $10 - t^2$ y se cumple que $(x,y) = (t,\ 10 - t^2)$).

Si vamos dando valores a la t, obtenemos puntos de la curva.

Si $t = 0$ obtenemos el punto (0,10).

Si $t = 1$ obtenemos el punto (1,9).

Si $t = -1$ obtenemos el punto (–1,9).

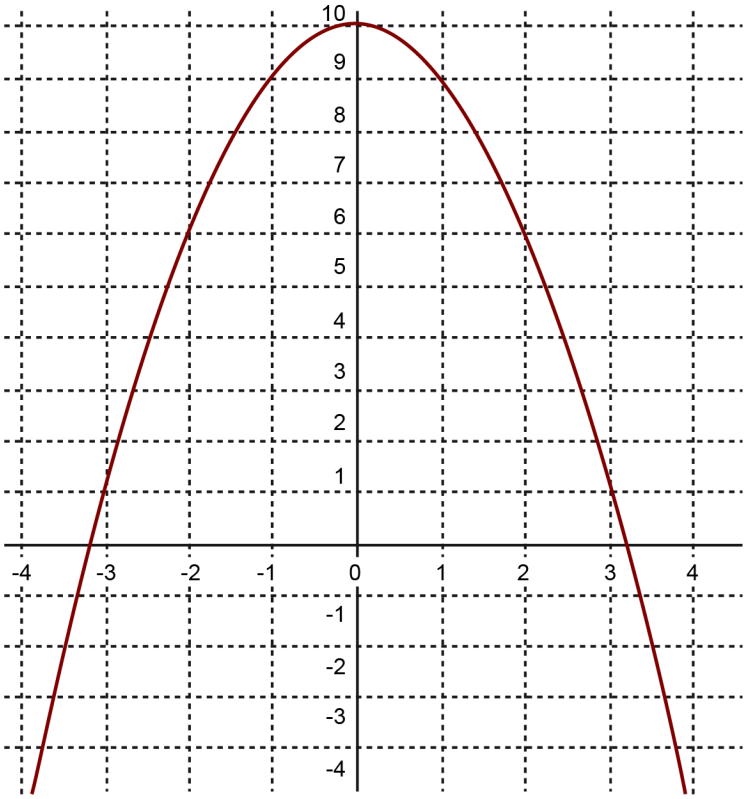
Si $t = 2$ obtenemos el punto (2,6).

Si $t = -2$ obtenemos el punto (–2,6).

Una primera observación es que todos los valores y de la curva deben ser menores que 10.

Una segunda observación es que para iguales valores de t positivos y negativos, la y debe ser la misma. Esto obliga a hacer que la curva sea simétrica respecto al eje de las y.

El dibujo de la curva parametrizada es:



¡Dominar el dibujo de parábolas es esencial para dar realismo a trayectorias de golpeo de pelotas, lanzamiento de flechas y cualquier movimiento relacionado con la caída de un cuerpo sobre el suelo!

Ejercicio 19

Representad en el plano bidimensional la parametrización siguiente:

$(x,y) = (t, -t^2 + 6\,t - 8)$

Solución:

Esta es la parametrización de la parábola $y = -x^2 + 6\,x - 8$.

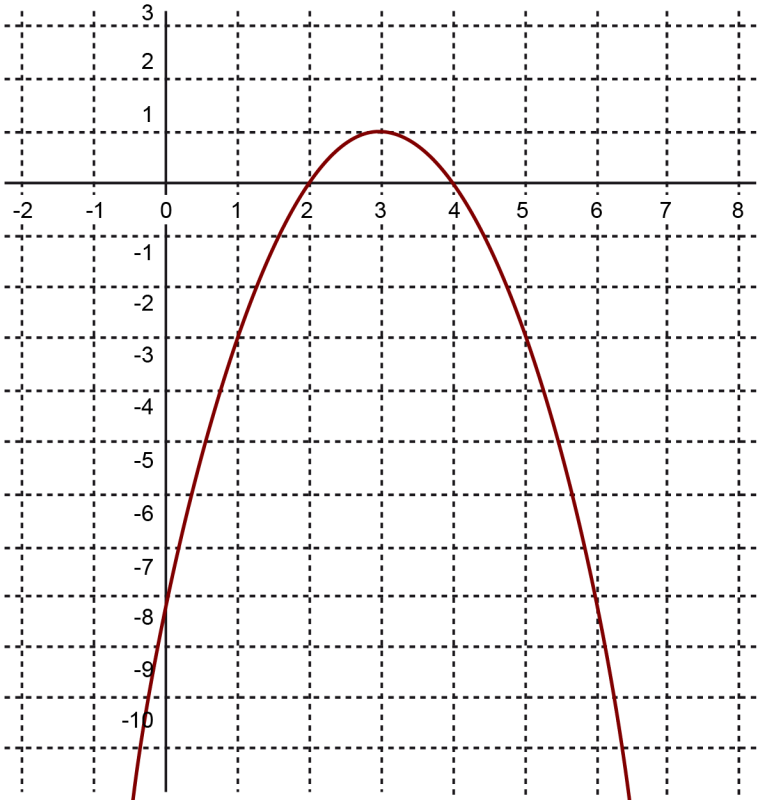
El hecho de que ante t^2 haya un negativo no quiere decir que tengamos $(-t)^2$, que siempre es positivo. Aquí dice que primero hacemos $t^*\,t$ y el resultado lo ponemos negativo. Por lo tanto, $-t^2$ siempre es un número negativo. ¡Cuidado, porque este es un error muy típico al trabajar con parábolas!

Si vamos dando valores a la t, obtenemos puntos de la curva.

Sin embargo, encontramos unos valores de t que siempre intentaremos tener. Son los valores en los que la curva corta los ejes de coordenadas. Para $t = 0$ tenemos (0,–8), y si hacemos $-t^2 + 6t + 8 = 0$ obtenemos $t = 2$ y $t = 4$. Entonces, para $t = 2$ tenemos el punto (2,0) y para $t = 4$, el punto (4,0).

Tomar como t el valor intermedio de los dos valores que anulan la parábola proporciona siempre el vértice de la parábola, que es el punto que señala la simetría de este tipo de curva. En este ejercicio, el valor justo entre 2 y 4 es 3. Entonces el vértice de la parábola es (3, –9 + 18 – 8) = (3,1).

Si obtenemos puntos y más puntos, podemos llegar al dibujo siguiente:



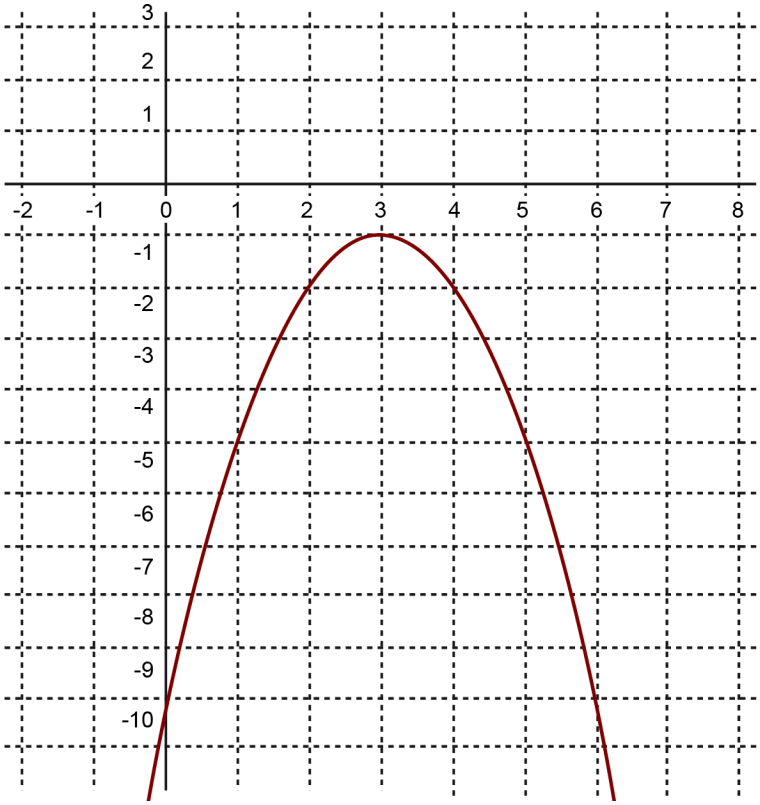
Ejercicio 20

Representad en el plano bidimensional la parametrización siguiente:

$(x,y) = (t, -t^2 + 6t - 10)$

Solución:

Si damos valores a la t, obtenemos la representación de la curva siguiente:



Si se ha intentado encontrar los puntos de corte con los ejes, solo habremos encontrado el punto (0,–10) puesto que la curva no corta nunca el eje de las *x*.

Esto ocasiona un problema a la hora de encontrar el vértice.

Recordemos que dada una ecuación de segundo grado tipo $a\,t^2 + b\,t + c = 0$, los valores solución de la ecuación son $t = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $t = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o, de manera equivalente, $\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Observemos que el valor intermedio de los dos valores es exactamente $\frac{-b}{2a}$, puesto que sumamos y restamos la misma cantidad $\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ para obtener los valores solución. A pesar de que la raíz sea negativa y no encontremos puntos de corte con el eje de las *x*, este valor de $\frac{-b}{2a}$ nos indica siempre la *t* que identifica el vértice de la parábola.

En nuestro caso concreto de $-t^2 + 6\,t - 10$, la *t* del vértice es $\frac{-6}{2(-1)} = 3$ y, por lo tanto, el punto del vértice de la parábola es (3,–1).

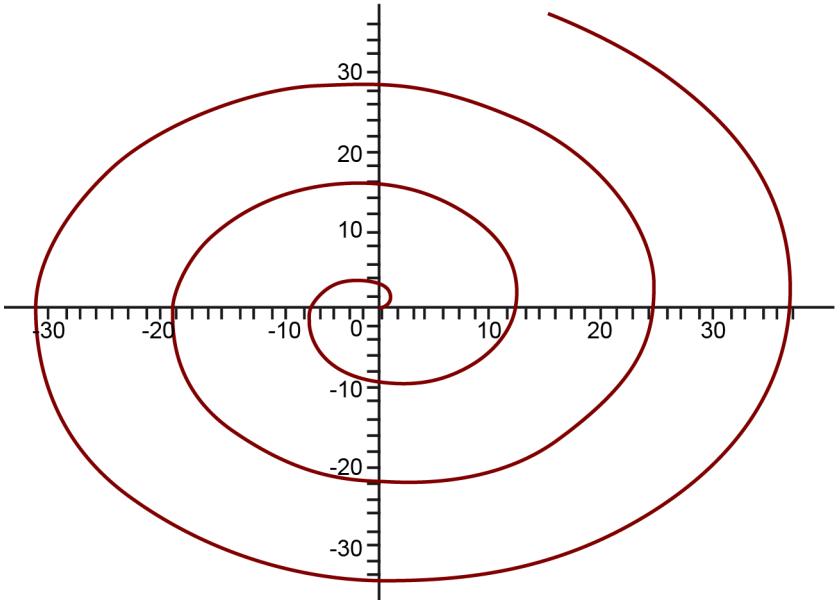
Ejercicio 21

Representad en el plano bidimensional la parametrización siguiente:

$(x,y) = (2\ t\cos t,\ 2\ t\sin t)$ con $0 \leq t \leq 20$

Solución:

Toda curva del tipo $(x,y) = (a \cdot t \cdot \cos(t),\ a \cdot t \cdot \sin(t))$ con $0 \leq t \leq b$ se denomina espiral de Arquímedes. Dando valores a la t y encontrando puntos, lograríamos la representación siguiente de la curva:



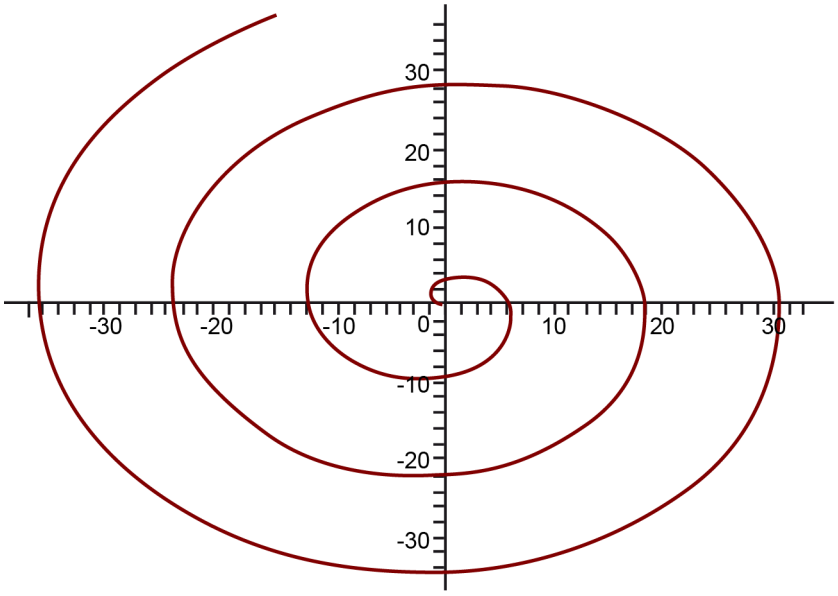
Ejercicio 22

Representad en el plano bidimensional la parametrización siguiente:

$(x,y) = (2 \cdot t \cdot \cos(t),\ 2 \cdot t \cdot \sin(t))$ con $-20 \leq t \leq 0$

Solución:

Toda curva del tipo $(x,y) = (a \cdot t \cdot \cos(t),\ a \cdot t \cdot \sin(t))$ con $b \leq t \leq 0$ también forma una curva tipo **espiral**. Si damos valores a la t y encontramos puntos, lograríamos la representación siguiente de la curva:



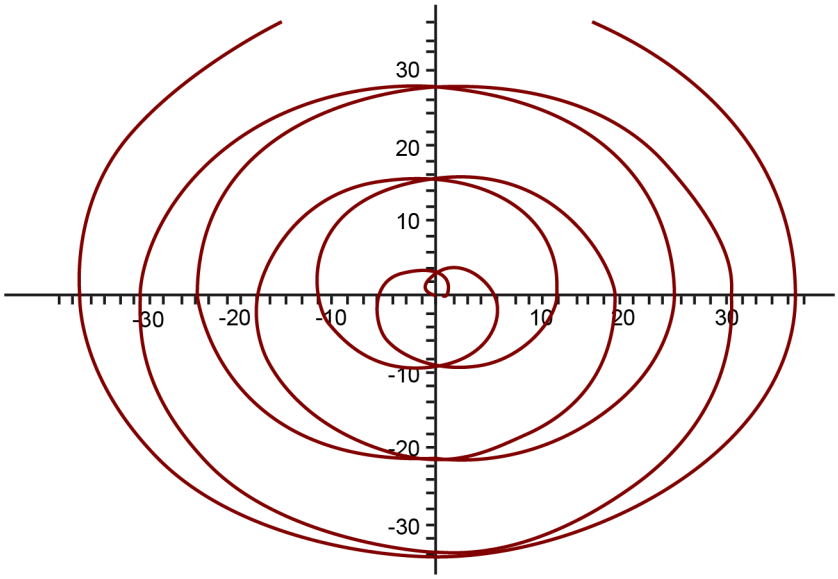
Ejercicio 23

Representad en el plano bidimensional la parametrización siguiente:

$(x,y) = (2 \cdot t \cdot \cos(t),\ 2 \cdot t \cdot \sin(t))$ con $-20 \leq t \leq 20$

Solución:

Dado que los puntos de la curva son los $(x,y) = (2 \cdot t \cdot \cos(t),\ 2 \cdot t \cdot \sin(t))$ con $-20 \leq t \leq 0$ y los $(x,y) = (2 \cdot t \cdot \cos(t),\ 2 \cdot t \cdot \sin(t))$ con $0 \leq t \leq 20$, la representación tiene que ser la combinación de las dos espirales anteriores.



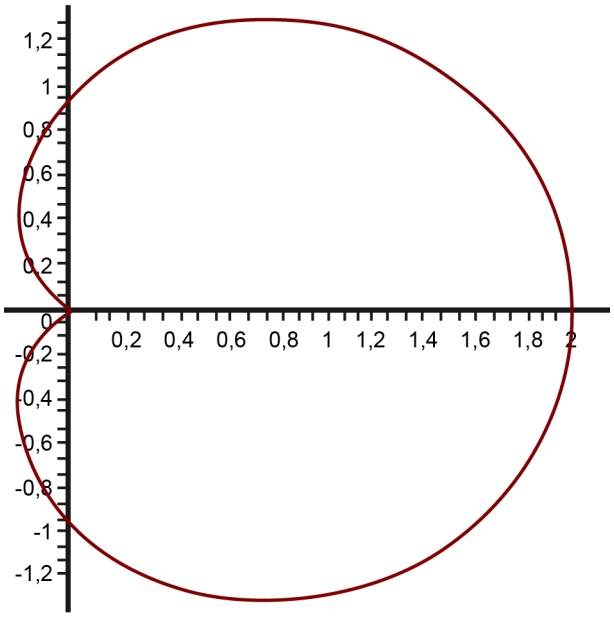
Ejercicio 24

Representad en el plano bidimensional la parametrización siguiente:

$(x,y) = ((1 + \cos(t)) \cdot \cos(t), (1 + \cos(t)) \cdot \sin(t))$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

Solución:

Toda curva del tipo $(x,y) = (a(1 + \cos(t)) \cdot \cos(t), a(1 + \cos(t)) \cdot \sin(t))$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ se denomina **cardioide** (por la forma de corazón). Si damos valores a la t y encontramos puntos, lograríamos la representación siguiente de la curva:



Nota

Si queremos girar el corazón, podemos hacer una rotación de 270º (o de –90º) para tenerlo en posición vertical y no horizontal como ahora. En el módulo de matrices, hemos visto que la operación siguiente giraría α grados la curva:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (1)$$

En el supuesto que nos interesa, hacemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 270 & -\sin 270 \\ \sin 270 & \cos 270 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\cos(t) \\ (1+\cos(t))\cdot\sin(t) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\cos(t) \\ (1+\cos(t))\cdot\sin(t) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

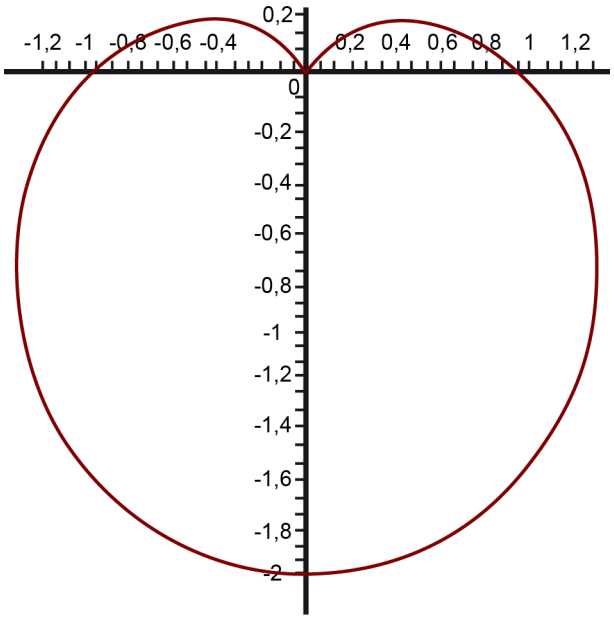
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\cos(t) \\ (1+\cos(t))\cdot\sin(t) \end{pmatrix} \qquad (4)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\sin(t) \\ -(1+\cos(t))\cdot\cos(t) \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Si ahora representamos en el plano bidimensional la parametrización siguiente:

$(x,y) = ((1 + \cos(t)) \cdot \sin(t), -(1 + \cos(t)) \cdot \cos(t))$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

obtenemos:



Recordad que en el módulo de matrices también vimos que, si queremos, la podemos desplazar con una traslación de vector.

Imaginemos, por lo tanto, que por ejemplo ahora queremos mover el corazón vertical hacia la derecha 10 unidades. Las coordenadas de la transformación son ahora:

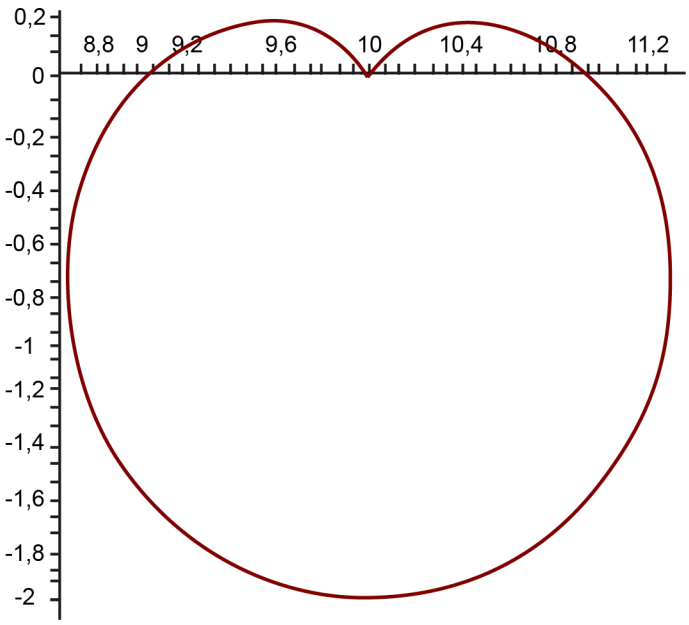
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\sin(t) \\ -(1+\cos(t))\cdot\cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

o bien sumando las matrices,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\sin(t) + 10 \\ -(1+\cos(t))\cdot\cos(t) \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Si ahora representamos en el plano bidimensional la parametrización siguiente:

$(x,y) = ((1 + \cos(t)) \cdot \sin(t) + 10, -(1 + \cos(t)) \cdot \cos(t))$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, obtenemos:



Finalmente, si queremos estilizar el corazón podemos hacer un cambio de escala como el que se ha visto también en el módulo de matrices:

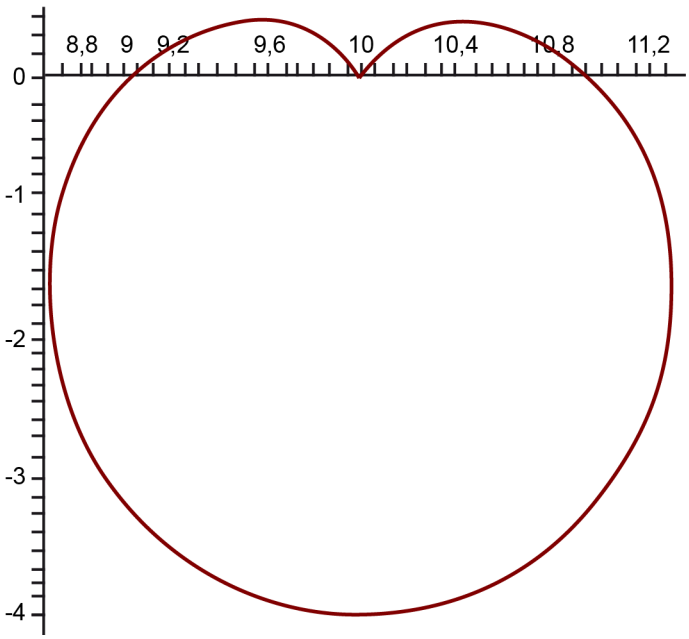
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\sin(t)+10 \\ -(1+\cos(t))\cdot\cos(t) \end{pmatrix} \qquad (8)$$

O bien multiplicando las matrices,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\sin(t)+10 \\ -0.5(1+\cos(t))\cdot\cos(t) \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Si ahora representamos en el plano bidimensional la parametrización siguiente:

$(x,y) = ((1 + \cos(t)) \cdot \sin(t) + 10, -0.5(1 + \cos(t)) \cdot \cos(t))$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, obtenemos:



Nota

Observad que ahora el corazón va de 0.5 a –4, mientras que antes solo iba de 0.25 a – 2, y que la anchura, es decir, los valores que ocupaba a la x, no ha cambiado.

Ejercicio 25

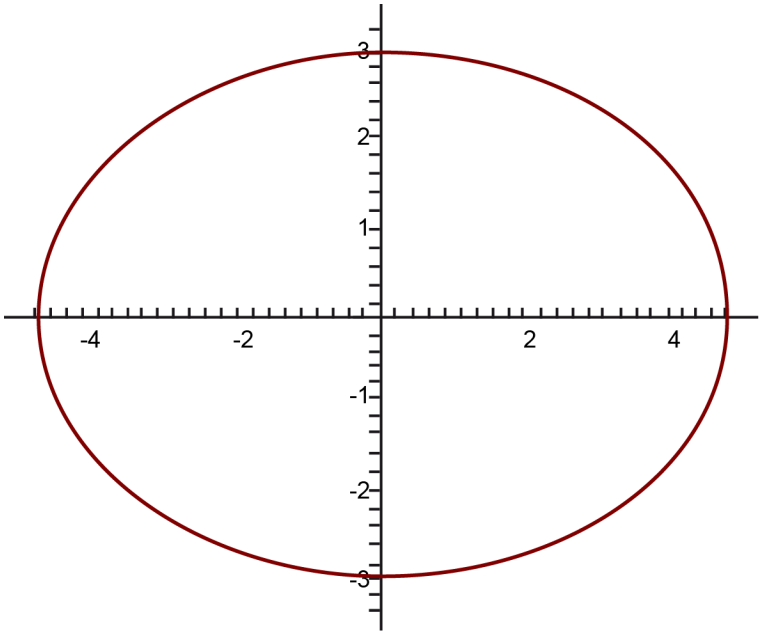
Representad en el plano bidimensional la curva de parametrización siguiente:

$(x,y) = (5 \cdot \cos(t), 3 \cdot \sin(t))$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

Solución:

Toda curva de parametrización tipo $(x,y) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ es una **elipse** centrada en el origen tal que corta el eje x en los puntos $(a,0)$ y $(-a,0)$ y el eje y en los puntos $(0, b)$ y $(0,-b)$.

Entonces el dibujo es:



Imaginemos que ahora queremos centrar la elipse en el punto (6,4). Las coordenadas de la transformación son ahora:

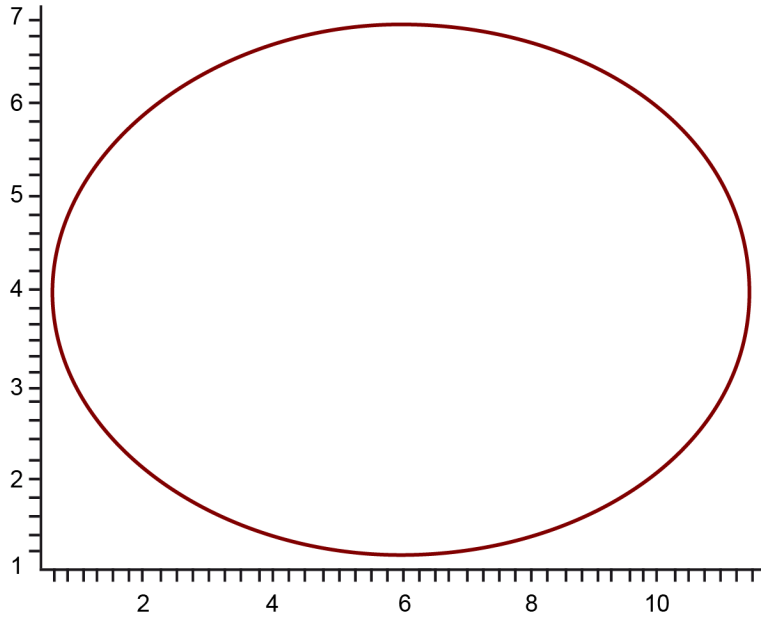
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

O bien sumando las matrices,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos(t)+6 \\ 3\sin(t)+4 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Si ahora representamos en el plano bidimensional la parametrización siguiente:

$(x,y) = (5\cos(t) + 6,\ 3\sin(t) + 4)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, obtenemos:



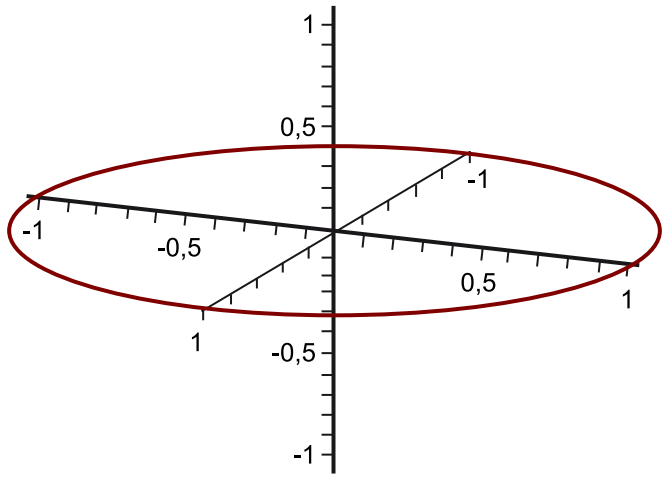
Ejercicio 26

Representad en el espacio tridimensional la curva de parametrización siguiente:

$(x,y,z) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

Solución:

Dado que el valor de z siempre es cero para todo valor de t, la curva estará contenida en el plano formado por x y por y. Sabemos que la curva es una **circunferencia** de radio 1. Entonces la representación de la curva es:



Por convenio, en el dibujo de curvas, tomaremos el ángulo en radianes. El hecho de que t vaya de 0 a 2π nos indica que solo tenemos una vuelta.

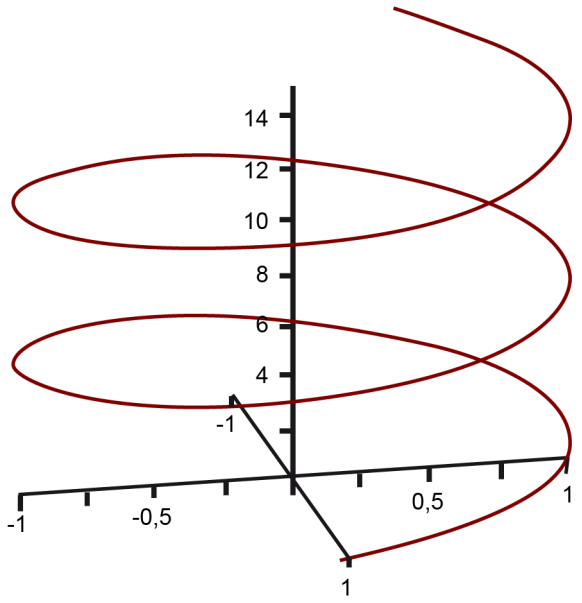
Ejercicio 27

Representad en el espacio tridimensional la curva de parametrización siguiente:

$(x,y,z) = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $0 \leq t \leq 15$

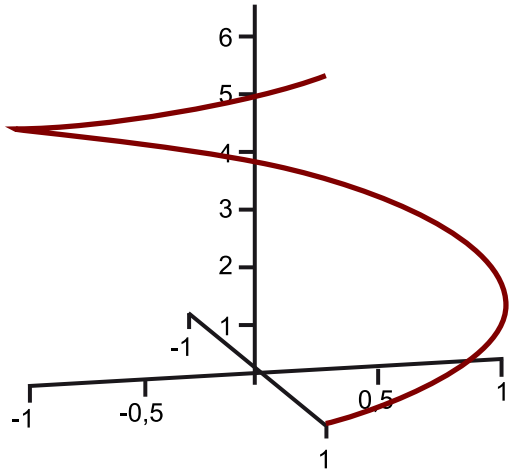
Solución:

Dado que el valor de z es distinto para cada t, los puntos del círculo se van dibujando cada vez un poco más arriba. De este modo, la curva que obtenemos es una **espiral**. La representación de la curva es la siguiente:

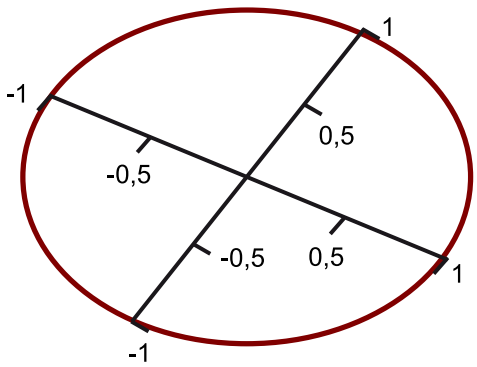


Observad que puesto que $15 \geq 2\pi + 2\pi$, hemos dado más de dos vueltas de circunferencia.

Si llegamos a tener $(x,y,z) = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, el dibujo hubiera sido:

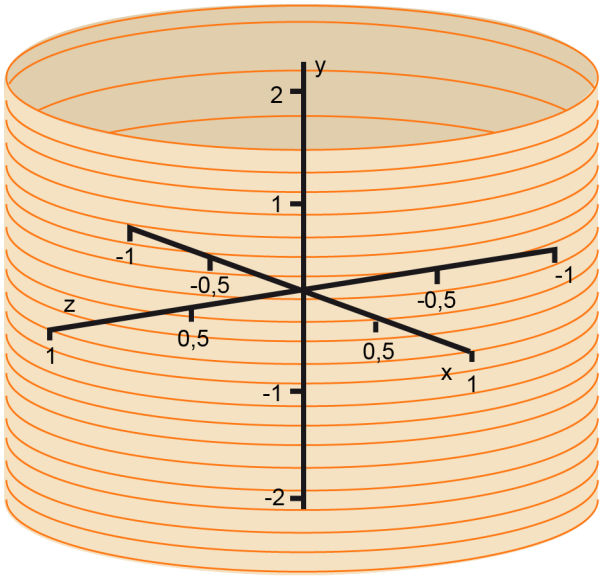


En vista de pájaro, veríamos lo siguiente:

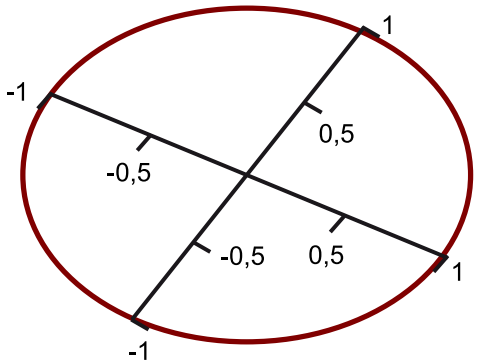


Ejercicio 28

Observad la superficie siguiente.



En vista de pájaro, veríamos lo siguiente:



¿Qué nombre recibe esta superficie?

Solución:

La superficie del enunciado está formada por círculos de radio 1 completos a distintas alturas entre –2 y 2 de la *z*. De este modo, el aspecto global es el que se presenta en el enunciado.

La superficie que el dibujo nos muestra se denomina **cilindro circular**.

Sabemos que una superficie es un objeto tridimensional, que localmente tiene el aspecto de espacio bidimensional. La idea es que si dejamos una hormiga en un punto de este objeto, le parecerá que se puede mover en dos direcciones perpendiculares, pero no en tres, como sí puede hacer una mosca en el espacio tridimensional.