Anexo 2. Transformaciones geométricas

Joan Trias Pairó

PID_00150817

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares del copyright.

Índice

Objetivos 5

1. Geometría métrica 7
1.1. Norma de un vector 7
1.1.1. Vectores unitarios y unitarización 8
1.2. Producto escalar 9
1.2.1. Distancia entre dos puntos 9
1.2.2. Ángulo 10
1.2.3. Ortogonalidad 10
1.2.4. Bases ortonormales 11
1.3. Producto vectorial 11
1.3.1. Propiedades 11
1.4. Construcción de sistemas de coordenadas cartesianas 12
1.4.1. Ejemplo 12

2. Transformaciones geométricas 2D 14
2.1. Transformaciones geométricas generales 2D 14
2.1.1. Traslaciones bidimensionales 15
2.1.2. Cambios de escala en el plano 15
2.1.3. Giros en el plano con respecto a un punto 16
2.1.4. Simetría central en el plano 17
2.1.5. Transformaciones afines para construcción geométrica 18
2.1.6. Composición de transformaciones 18
2.1.7. Ejemplo 20

3. Transformaciones geométricas 3D 21
3.1. Transformaciones geométricas generales 3D 21
3.1.1. Traslaciones tridimensionales 22
3.1.2. Cambios de escala en el espacio tridimensional 23
3.1.3. Rotaciones en el espacio respecto de un eje 25
3.1.4. Simetrías en el espacio 28
3.1.5. Transformaciones afines tridimensionales para construcción geométrica 29
3.2. La proyección 30
3.2.1. Coordenadas homogéneas 31
3.2.2. Las transformaciones habituales 31
3.2.3. Aplicar la perspectiva 32

Actividades 35

Ejercicios de autoevaluación..... 46

Solucionario..... 55

Objetivos

Geometría métrica

Se presentarán herramientas básicas instrumentales para resolver los problemas más básicos de tipo métrico en geometría bidimensional y tridimensional. Los problemas de tipo métrico guardan relación con la distancia, el apartado o la longitud de un vector, el ángulo. La aplicación fundamental se dará en construcción de bases adecuadas para su uso en transformaciones geométricas. A lo largo de todo el módulo trabajamos, sin que haga falta explicitarlo, en los espacios $\mathbb{R}^2$ (bidimensional) y $\mathbb{R}^3$ (tridimensional).

Transformaciones geométricas 2D

Las transformaciones geométricas son una herramienta muy potente para construcción geométrica y animación. En este apartado presentaremos la formulación analítica de las más importantes, las transformaciones afines elementales, para propósitos de programación. Todas estas transformaciones están incorporadas como funcionalidades disponibles en la gran mayoría de los programas de grafismo y animación.

Transformaciones geométricas 3D

Las transformaciones geométricas tridimensionales son una herramienta muy potente para construcción geométrica y animación. En este apartado presentaremos la formulación analítica de las más importantes en dimensión 3, las transformaciones afines elementales, para propósitos de programación. Todas estas transformaciones están incorporadas como funcionalidades disponibles en la gran mayoría de programas de grafismo y animación tridimensionales.

1. Geometría métrica

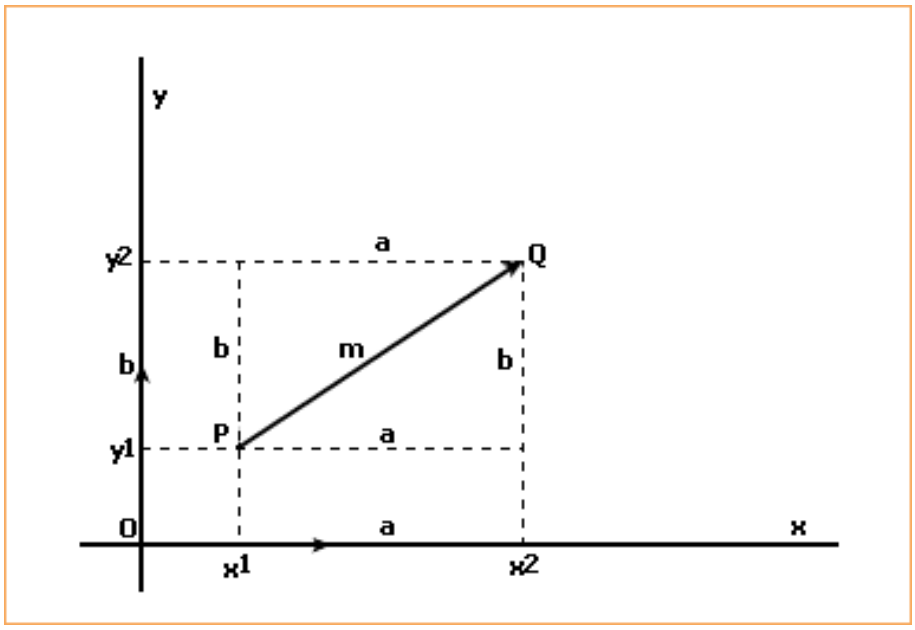
1.1. Norma de un vector

Dado un vector *w* no nulo, se define una **dirección** y un **sentido u orientación** del espacio. También estamos interesados en la **longitud** (o, en sentido equivalente, el **módulo** o la **norma**)

En el caso **bidimensional**, considerando el vector *m = (a, b)* del gráfico siguiente, el módulo o longitud del mismo puede calcularse aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo correspondiente:

$$\|m\| = \|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ésta es la fórmula de la **norma** de un vector bidimensional.



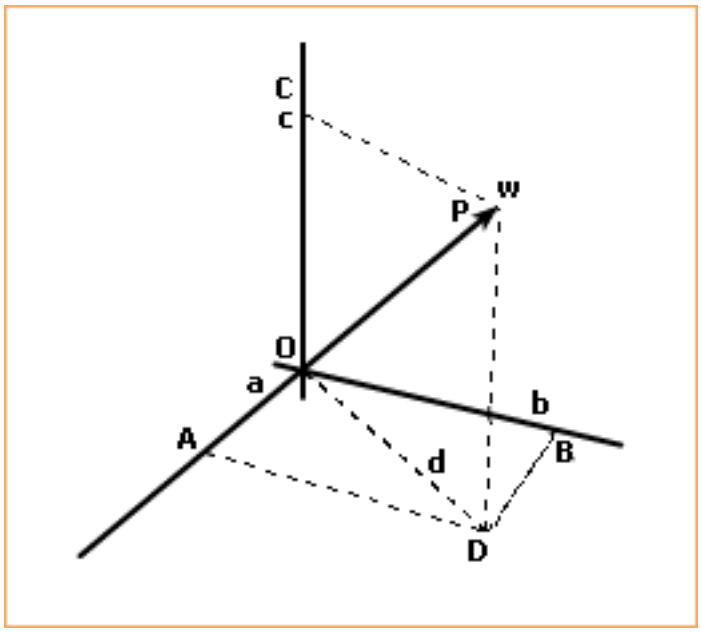
En el caso de los vectores de la base ordinaria del plano $R \times R$, tenemos:

$$e_1 = (1, 0); \|e_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$
$$e_2 = (1, 0); \|e_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

Observad un ejemplo adicional: $\|(2, 3)\| = (\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13})$

Observad que un vector *w* es nulo si y sólo si su norma es cero.

En el caso **tridimensional**, considerad el vector *w =(a,b,c)* (observad el diagrama posterior).



Considerando el triángulo rectángulo *OAD* (rectángulo en *A*), y aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos $OD = d = \sqrt{a^2 + b^2}$. Aplicando ahora el mismo teorema al triángulo rectángulo *ODP* (rectángulo en *D*), tenemos:

$$\|w\| = \sqrt{d^2 + c^2} = \sqrt{(a^2 + b^2) + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Veamos cuál es la norma de los vectores de la base usual del espacio tridimensional:

$$e_1 = (1, 0, 0); \|e_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

$$e_2 = (0, 1, 0); \|e_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$$

$$e_3 = (0, 0, 1); \|e_3\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

1.1.1. Vectores unitarios y unitarización

Se dice que un vector es **unitario** si su norma es la unidad. Lo son, por ejemplo, los vectores de las bases usuales de los espacios bidimensionales y tridimensionales: *(1,0), (0,1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)*.

En determinadas situaciones en las que tenemos una dirección dada por un vector *w* no nulo, sólo estamos interesados en la dirección, pero no en el módulo o norma del vector, que resulta ser irrelevante. Entonces podemos estar interesados en disponer de un vector unitario, de norma 1, que sea de la mis-

ma dirección que *w*, es decir, que determine la misma dirección. Es posible obtener este vector dividiendo w por su norma ||*w*|| (que es no nula, ya que *w* es no nulo). Este proceso es el de **unitarización** del vector *w*:

$$w_1 = \frac{1}{\|w\|}w$$

Veamos dos ejemplos:

$$w = (1,1); \|w\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}; w_1 = \frac{1}{\|w\|}w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$u = (1,1,1); \|u\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}; u_1 = \frac{1}{\|u\|}u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

1.2. Producto escalar

El **producto escalar** de dos vectores *u,v* se denota por *u.v* y se define de la forma siguiente:

En dimensión 2: u=(a,b), v=(a',b'), u.v=aa'+bb'

En dimensión 3: u=(a,b,c), v=(a',b',c'), u.v=aa'+bb'+cc'

Por ejemplo, (1,2,3).(-2,0,4)=1.(-2)+2.0+3.4=10.

Veamos cuáles son los productos escalares de los vectores de las bases usuales en los espacios bidimensionales y tridimensionales:

$$e_1 = (1,0); e_2 = (0,1); e_1 \cdot e_2 = 1.0 + 0.1 = 0$$

$$e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1); e_1 \cdot e_2 = 1.0 + 0.1 + 0.0 = 0; e_1 \cdot e_3 = 0; e_2 \cdot e_3 = 0$$

Es posible formular una relación entre norma y producto escalar: $\|w\| = \sqrt{w \cdot w}$

1.2.1. Distancia entre dos puntos

Dados los puntos *P,Q,* la distancia *d(P,Q)* es la norma del vector *PQ: d(P,Q)*=||*PQ*||.

Por aplicación del teorema de Pitágoras, se puede llegar a las fórmulas finales en términos de coordenadas. La exposición de las mismas nos obliga a un desglose por dimensiones.

En dimensión 2, si $P = (x_1,y_1), Q = (x_2,y_2)$, es:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

En dimensión 3, si $P = (x_1,y_1,z_1), Q = (x_2,y_2,z_2)$, es:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

1.2.2. Ángulo

Si los vectores *u,v* son no nulos, y si *a* es el ángulo que forman, tenemos:

$$\cos a = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}; a = arc\cos\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

El resultado correspondiente a la segunda fórmula está comprendido entre 0 y π. En el caso del plano, se obtiene el ángulo en magnitud, pero sin signo; el signo del ángulo (**ángulo con signo**) es el signo del determinante *det(u,v)*, si no son linealmente dependientes.

1.2.3. Ortogonalidad

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es nulo. Es decir, *u,v* son ortogonales si y sólo si *u.v=0*. Teniendo en cuenta la fórmula $a = arc\cos\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = arc\cos 0 = \frac{\pi}{2}$, dos vectores son ortogonales si, y sólo si, el ángulo que forman es de 90 grados.

Los vectores de las bases usuales en el espacio bidimensional y tridimensional son ortogonales dos a dos, como hemos visto anteriormente. Esto significa que los ángulos que forman dos a dos son de 90 grados.

Rectas perpendiculares

Si *u,v* son los vectores directores de dos rectas, éstas son perpendiculares si y sólo si los vectores *u,v* son ortogonales (de producto escalar *u.v* nulo).

Dirección perpendicular a un plano

En muchas aplicaciones resulta importante disponer de la dirección perpendicular a un plano de ecuación dada: imaginemos que necesitamos parametrizar la trayectoria de animación de un móvil que parte de un plano y se desplaza perpendicularmente al mismo.

Si la ecuación del plano es *ax + by + cx + d = 0*, entonces el vector *N = (a,b,c)* es ortogonal al plano. Cualquier recta que tenga *N* como vector director es perpendicular al plano.

1.2.4. Bases ortonormales

Se dice que una **base** del espacio vectorial es **ortonormal** si sus vectores cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Todos los vectores son unitarios, es decir, de norma o módulo 1.

2) Los vectores de la base son dos a dos ortogonales, es decir, de producto escalar nulo.

Tal como se ha ido viendo anteriormente:

1) En el espacio bidimensional, la base $e_1 = (1,0); e_2 = (0,1)$ es una base ortonormal.

2) En el espacio tridimensional, la base $e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)$ es una base ortonormal.

Un sistema de coordenadas es cartesiano si la base correspondiente es una base ortonormal.

1.3. Producto vectorial

Una de las operaciones de construcción de nuevos vectores, a partir de dos vectores dados, es la operación del producto vectorial. Se aplica a dos vectores tridimensionales y el resultado es un nuevo vector tridimensional.

El producto vectorial resuelve el problema de obtener una tercera dirección perpendicular a dos direcciones dadas.

Suponiendo que estamos trabajando en la base ortonormal habitual, dados los vectores:

$$u = (u_1,u_2,u_3), v = (v_1,v_2,v_3)$$

se define el producto vectorial de u,v en el orden que se indica como:

$$u \wedge v = (u_2v_3 - v_2u_3, v_1u_3 - u_1v_3, u_1v_2 - v_1u_2)$$

1.3.1. Propiedades

Algunas de las propiedades del producto vectorial son las siguientes:

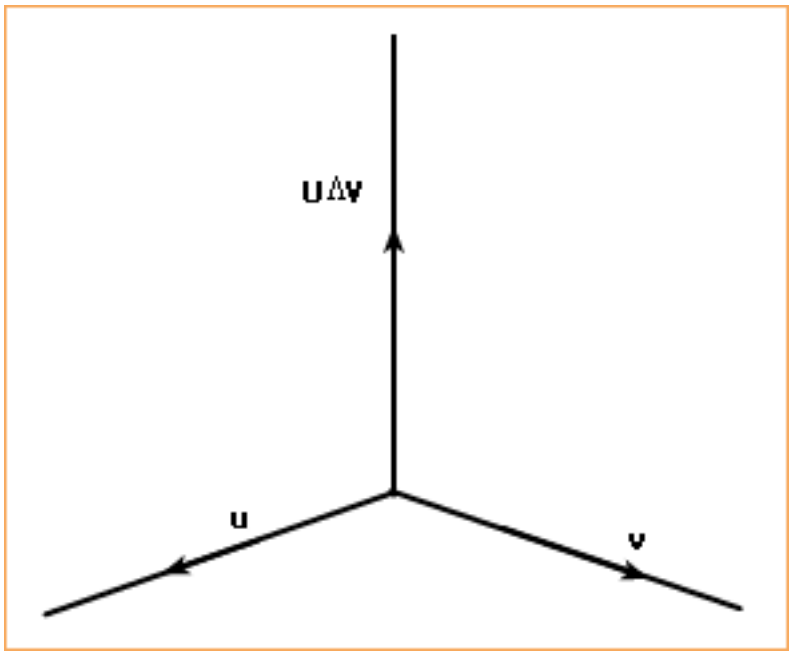
1) No es conmutativo: $u \wedge v = -v \wedge u$.

2) Dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si su producto vectorial es nulo.

El producto vectorial $u \wedge v$ es ortogonal a los vectores *u,v*.

3) Si *u,v* son unitarios y ortogonales, el producto vectorial es unitario.

El producto vectorial de dos vectores es perpendicular a ambos. Ahora bien, ¿cómo orienta el producto vectorial la dirección que determina? El siguiente gráfico muestra cuál es el resultado. El criterio intuitivo es el siguiente: si un sacacorchos gira de manera que el vector *u* se superpone sobre el vector *v* según el menor de los ángulos posibles, entonces el sacacorchos avanzará en el sentido del producto vectorial.



1.4. Construcción de sistemas de coordenadas cartesianas

El uso de la capacidad de construir nuevos sistemas de coordenadas cartesianas permitirá definir transformaciones geométricas bidimensionales y tridimensionales, que podrán utilizarse para propósitos de construcción y animación.

1.4.1. Ejemplo

Veamos con un ejemplo una construcción posible, en el caso tridimensional.

Considerad la recta *r* que pasa por el origen y tiene vector director *w=(1,1,1)*. Construiremos un sistema de coordenadas cartesianas de orientación positiva que tenga como tercer eje de coordenadas la recta *r*, orientado por *w*, y tal que el nuevo origen *O'* diste 3 unidades del origen *O* y que esté situado en el octante $x,y,z \geq 0$. Hay más de una solución posible.

Respuesta: sólo vamos a dar una de las posibles variantes de solución.

Vamos a escoger el tercer vector como el resultado de normalizar w, de norma $\|w\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$, es decir, $e_3' = \frac{w}{\|w\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

En cuanto al primer vector, no tenemos ninguna clase de restrición con respecto a su dirección que la de ser ortogonal a e_3'. Fácilmente podemos escribir un vector ortogonal a e_3': por ejemplo, $a_1' = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, que hay que unitarizar, ya que $\|a_1'\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Por tanto, $e_1' = \frac{1}{\|a_1'\|}a_1' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Finalmente, podemos obtener el segundo vector por producto vectorial de los anteriormente obtenidos, en el orden que convenga para que la nueva base sea de determinante positivo (ya saldrá normalizado, como producto vectorial de unitarios ortogonales):

$$e_2' = e_3' \wedge e_1' = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Vamos a colocar el nuevo origen O' sobre la recta que pasa por el origen O antiguo y tiene vector director w (por ejemplo). Siendo e_3' unitario en esta dirección, bastará escoger, para cumplir con la condición de la distancia (y al mismo tiempo la condición de octante), $O' = 3e_3' = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{3}},\frac{3}{\sqrt{3}},\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$.

2. Transformaciones geométricas 2D

2.1. Transformaciones geométricas generales 2D

Estamos interesados en las transformaciones geométricas de un cierto tipo, de entre las infinitas tipologías de transformación posibles.

Las transformaciones geométricas que estudiaremos serán las llamadas **transformaciones afines**, que corresponden a la estructura (siendo P, P' vectores posición):

$$P' = f(P) = AP + W$$

En la expresión anterior A es una matriz 2x2, y W es un vector bidimensional. Se dice que AP es la **parte lineal** de la transformación afín, y que W es el **vector de traslación**, por motivos que veremos en la siguiente sección.

En términos matriciales,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Efectuando los cálculos matriciales,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + w_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + w_2 \end{pmatrix}$$

resulta que en coordenadas la expresión es:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + w_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + w_2 \end{cases}$$

Dando contenido a los distintos coeficientes de las fórmulas anteriores se obtendrán las transformaciones concretas. En particular, las llamadas transformaciones afines elementales o básicas, como se verá en las secciones posteriores del resto del módulo.

A continuación estudiaremos las transformaciones afines elementales: traslación, cambio de escala, rotación y simetría central. La composición de estas transformaciones da lugar a transformaciones más complejas, que permiten resolver gran cantidad de problemas constructivos.

2.1.1. Traslaciones bidimensionales

Las traslaciones en el espacio bidimensional corresponden a las transformaciones más sencillas posibles.

Dado un vector w = (a,b), se define la traslación de vector w, y se denota T_w, como la transformación:

$$T_w(P) = P + w$$

En términos de coordenadas,

$$T_w(x, y) = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

Si desglosamos por coordenadas, siendo $P = (x,y)$ y siendo $P' = (x',y')$ el transformado por dicha traslación, resultará:

$$(x', y') = P' = T_w(P) = T_w(x, y) = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

de donde resultan las ecuaciones de la translación

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Por ejemplo, si $w = (2,-3)$, la traslación correspondiente es:

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

También se puede expresar en términos matriciales:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

La traslación de vector $-w$, T_{-w}, es la traslación inversa de la traslación de vector w, T_w.

2.1.2. Cambios de escala en el plano

Las transformaciones de cambios de escala permiten producir dilataciones o contracciones en las dimensiones de los objetos según las direcciones de los ejes.

Para ellos se necesitarán dos factores escalares de cambio de escala, una para cada eje, estrictamente positivos.

El cambio de escala más sencillo es el que se realiza con respecto al origen, de manera que es el origen el **centro** del cambio de escala.

En este caso, si tenemos:

p: factor de cambio de escala en la dirección del eje *x*

q: factor de cambio de escala en la dirección del eje *y*,

la transformación correspondiente será:

$$\begin{cases} x' = px \\ y' = qy \end{cases}$$

Si, por ejemplo, *p = 2*, se duplicará la dimensión según el eje *x;* si *q = 0,5*, se reducirá a la mitad la dimensión según el eje *y*. Si *q = 1*, no se produce ninguna alteración de la dimensión en la dirección del eje *y*. Si un factor de cambio de escala es mayor que 1, se produce dilatación en la dirección de coordenadas correspondiente; si es menor que 1, se produce una contracción.

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar de modo matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a la transformación es:

$$E_0{}^{p,q} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

El cambio de escala de factores de escala *p* (según el eje *x*), q (según el eje *y*) respecto del centro *C = (a,b)*, punto del plano, se define como la concatenación:

$$E_C{}^{p,q} = T_C \circ E_O{}^I$$

El lector puede obtener las ecuaciones en este caso general.

2.1.3. Giros en el plano con respecto a un punto

Veamos en primer lugar la expresión de una **rotación respecto del origen de coordenadas, de ángulo *a***. Si *a* es positivo, con la siguiente expresión matricial se obtendrá una rotación antihoraria, de sentido contrario a las agujas del reloj. No efectuamos aquí la deducción de lo que sigue.

$$R_O{}^a = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones se obtienen aplicando la matriz anterior a un vector arbitrario:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_O{}^a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos a - y\sin a \\ x\sin a + y\cos a \end{pmatrix}$$

con lo que:

$$\begin{cases} x' = x\cos a - y\sin a \\ y' = x\sin a + y\cos a \end{cases}$$

Si la rotación se da con respecto a un punto cualquiera *C*, entonces hay que hacer la maniobra auxiliar de "reducción" o "paso" al origen, situación en la que ya sabemos resolver el problema de efectuar una rotación. Si el ángulo de rotación es a y la queremos antihoraria (con a positivo), entonces:

$$R_C{}^a = T_C \circ R_O{}^a \circ T_{-C}$$

El estudiante puede obtener las ecuaciones finales de la transformación en términos de coordenadas.

2.1.4. Simetría central en el plano

La simetría central es la simetría con respecto a un punto *C* del plano. Esta transformación no es más que un caso particular de rotación, concretamente un giro de 180 grados con respecto a *C*.

La expresión de la transformación como concatenación de transformaciones es:

$$S_C = R_C{}^{180} = T_C \circ R_O{}^{180} \circ T_{-C}$$

En coordenadas, si *C* = *(a,b)*, resultará:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_C\left(\begin{pmatrix} \cos 180 & -\sin 180 \\ \sin 180 & \cos 180 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}\right)\right) = T_C\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\right)$$

de donde:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_C\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\right) = T_C\begin{pmatrix} -x+a \\ -y+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+a \\ -y+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2a \\ -y+2b \end{pmatrix}$$

2.1.5. Transformaciones afines para construcción geométrica

En la transformación afín general, veamos cuál es el significado geométrico del vector *W* y de los vectores de columnas de la matriz *A*. Supongamos que estamos trabajando con la base ordinaria $e_1 = (1,0)$; $e_2 = (0,1)$.

En primer lugar, observad que *f(O) = AO + W = W*, con lo que resulta que el punto cuyo vector posición es *W* es el transformado del origen. Dado que el efecto de sumar *W* es simplemente el de trasladar, estudiemos la parte lineal *g(P) = AP*.

Si ahora calculamos las imágenes de los vectores de la base para la transformación correspondiente a la parte lineal *g(P) = AP*, obtenemos:

Para el primer vector,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}1 + a_{12}0 \\ a_{21}1 + a_{22}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

Se obtiene, pues, la primera columna de la matriz *A*. Veamos que el transformado del segundo es precisamente el vector de la segunda columna de la matriz:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}0 + a_{12}1 \\ a_{21}0 + a_{22}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Esto significa que podemos definir transformaciones afines generales indicando:

- cuáles deben ser los vectores imágenes o transformados de los vectores de la base;
- cuál es el transformado del origen.

Con lo primero podemos formular la matriz *A;* con lo segundo, tenemos el vector *W*.

En relación con lo primero normalmente construiremos nuevas bases ortonormales que sean adecuadas para la transformación que queremos hacer.

2.1.6. Composición de transformaciones

Veamos un par de ejemplos de composición de transformaciones. Conviene tener en cuenta que en general la composición o concatenación no es conmutativa. La lectura es de derecha a izquierda según el convenio que adoptemos. El símbolo o corresponde a la concatenación de transformaciones.

Ejemplo

Escribiremos las ecuaciones del giro en el plano de ángulo $\alpha = \pi/6 = 30$ grados y centro $C = (2,3)$.

Resolución:

Supongamos que debemos transformar el punto genérico del plano $P = (x,y)$; sea $P' = (x',y')$ el transformado por la rotación indicada en el enunciado del problema.

Al no ser una rotación con respecto al origen de coordenadas, hay que efectuar la maniobra que se describe a continuación:

$$P' = (T_C R_O^{\alpha} T_{-C})P$$

Primera maniobra

En primer lugar, efectuamos una traslación al origen, de vector $-C$, es decir, aplicamos la traslación $T_{-C} = T_{-(2,3)} = T_{(-2,-3)}$. Será:

$$T_{-C}P = T_{-C}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$$

Con esto conseguimos reducir el problema a uno de rotación equivalente, pero con respecto al origen, para el cual disponemos de la correspondiente expresión matricial.

Segunda maniobra

Aplicamos al resultado anteriormente obtenido la matriz de rotación del ángulo requerido, con respecto al origen de coordenadas:

$$R_O^{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Será, por tanto:

$$R_O^{\alpha}(T_{-C}(P)) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\cos\alpha & -(y-3)\sin\alpha \\ (x-2)\sin\alpha & +(y-3)\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Tercera maniobra

Se trata de volver a la situación inicial deshaciendo la traslación auxiliar efectuada al principio, es decir, aplicar al resultado anterior la traslación $T_c = T_{(2,3)}$. Resultará, finalmente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_C(R_O{}^{\alpha}(T_{-C}(P))) = T_C = \begin{pmatrix} (x-2)\cos\alpha - (y-3)\sin\alpha \\ (x-2)\sin\alpha + (y-3)\cos\alpha \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (x-2)\cos\alpha - (y-3)\sin\alpha \\ (x-2)\sin\alpha + (y-3)\cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\cos\alpha - (y-3)\sin\alpha + 2 \\ (x-2)\sin\alpha + (y-3)\cos\alpha + 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las ecuaciones son:

$$\begin{cases} x' = (x-2)\cos\alpha - (y-3)\sin\alpha + 2 \\ y' = (x-2)\sin\alpha + (y-3)\cos\alpha + 3 \end{cases}$$

Ahora sólo queda sustituir a por su valor y terminar los cálculos...

La rotación es antihoraria para ángulos positivos.

2.1.7. Ejemplo

Obtened las ecuaciones resultantes de efectuar, en el orden que se indica a continuación, las siguientes transformaciones del plano: un giro o rotación de ángulo α=60° respecto del punto *C = (1,4)* en sentido antihorario, seguida de una traslación de vector *D = (6, –2)*.

Resolución

Debéis seguir la resolución del ejemplo anterior, ya que es esencialmente la misma, salvo que al final hay que efectuar una transformación adicional más, la traslación de vector *D*. De este modo, sería:

$$T_D T_C R_O{}^{\alpha} T_{-C}$$

Tomamos, pues, los desarrollos de la resolución del ejemplo y los completamos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_D T_C R_O{}^{\alpha} T_{-C}(P) = T_D \begin{pmatrix} (x-1)\cos\alpha - (y-4)\sin\alpha + 1 \\ (x-1)\sin\alpha + (y-4)\cos\alpha + 4 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} (x-1)\cos\alpha - (y-4)\sin\alpha + 1 \\ (x-1)\sin\alpha + (y-4)\cos\alpha + 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-1)\cos\alpha - (y-4)\sin\alpha + 7 \\ (x-1)\sin\alpha + (y-4)\cos\alpha + 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las ecuaciones son:

$$\begin{cases} x' = (x-1)\cos\alpha - (y-4)\sin\alpha + 7 \\ y' = (x-1)\sin\alpha + (y-4)\cos\alpha + 2 \end{cases}$$

Ahora sólo falta sustituir el ángulo por su valor y terminar los cálculos...

3. Transformaciones geométricas 3D

3.1. Transformaciones geométricas generales 3D

En este apartado existe un gran paralelismo con el apartado dedicado a las transformaciones geométricas bidimensionales.

Estamos interesados en las transformaciones geométricas de un cierto tipo, de entre las infinitas tipologías de transformación posibles.

Las transformaciones geométricas que estudiaremos serán las llamadas *transformaciones afines*, que corresponden a la estructura (siendo *P, P'* vectores posición):

$$P'=f(P)=AP+W$$

En la expresión anterior, *A* es una matriz 3 x 3, y *W* es un vector tridimensional. Se dice que *AP* es la *parte lineal* de la transformación afín, y que *W* es el *vector de traslación*, por motivos que veremos en la sección siguiente.

En términos matriciales:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Efectuando los cálculos matriciales,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + w_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + w_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + w_3 \end{pmatrix}$$

resulta que en coordenadas la expresión de una transformación afín es:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + w_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + w_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + w_3 \end{cases}$$

Dando contenido a los distintos coeficientes de las fórmulas anteriores, se obtendrán las transformaciones concretas; en particular, las llamadas *transformaciones afines elementales o básicas*, como se verá en las secciones posteriores del resto del módulo.

Veamos un ejemplo. La siguiente transformación es una transformación afín:

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z + 5 \\ y' = 2x + 7y + 3z \\ z' = -3y + z + 6 \end{cases}$$

La matriz asociada A y el vector de traslación W son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

El transformado del punto P= *(1,1,0)* se obtendrá por simple sustitución en las fórmulas anteriores:

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z + 5 = 1 - 1 + 0 + 5 = 5 \\ y' = 2x + 7y + 3z = 2 + 7 + 0 = 9 \\ z' = -3y + z + 6 = -3 + 0 + 6 = 3 \end{cases}$$

Con ello resulta P'= *(5,9,3)*.

Estudiaremos a continuación las transformaciones afines elementales: traslación, cambio de escala, rotación y simetrías. La composición de estas transformaciones da lugar a transformaciones más complejas, que permiten resolver gran cantidad de problemas constructivos.

3.1.1. Traslaciones tridimensionales

Las traslaciones en el espacio tridimensional corresponden a las transformaciones más simples posibles.

Dado un vector w=*(a,b,c)*, se define la traslación de vector w, y se denota T_w, como la transformación siguiente:

$$T_w(P) = P + w$$

En términos de coordenadas:

$$T_w(x, y, z) = (x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c)$$

Si desglosamos por coordenadas, siendo *P=(x,y,z)* y siendo *P'=(x',y',z')*, el transformado por dicha traslación, resultará:

$$(x', y', z') = P' = T_w(P) = T_w(x, y, z) = (x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c)$$

de donde resultan las ecuaciones de la translación:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

Por ejemplo, si *w=(2,-3,5)*, la traslación correspondiente es:

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \\ z' = z + 5 \end{cases}$$

También se puede expresar en términos matriciales:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Correspondería a considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

La traslación de vector $-w$, T_{-w} es la traslación inversa de la traslación de vector w, T_w.

3.1.2. Cambios de escala en el espacio tridimensional

Las transformaciones de cambios de escala permiten producir dilataciones o contracciones en las dimensiones de los objetos según las direcciones de los ejes de coordenadas *x, y, z*, separadamente o independientemente.

Para ello se necesitarán tres factores escalares de cambio de escala, una para cada eje, estrictamente positivos.

Cambio de escala respecto del origen

El cambio de escala más sencillo es el que se realiza respecto del origen, de manera que es el origen el *centro* del cambio de escala.

En este caso, tenemos:

p: factor de cambio de escala en la dirección del eje *x*

q: factor de cambio de escala en la dirección del eje *y*

r: factor de cambio de escala en la dirección del eje *z*

La transformación correspondiente será:

$$\begin{cases} x' = px \\ y' = qy \\ z' = rz' \end{cases}$$

Si, por ejemplo, *p=2*, se duplicará la dimensión según el eje *x;* si *q=0,5*, se reducirá a la mitad la dimensión según el eje *y*. Si *q=1*, no se produce ninguna alteración de la dimensión en la dirección del eje *y*. Si *r=3*, la dimensión en la dirección del eje z se triplica. Si un factor de cambio de escala es mayor que 1, se produce dilatación en la dirección de coordenadas correspondiente; si es menor que 1, se produce una contracción.

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matriz *A* asociada a la transformación y el vector de traslación son:

$$A = E_O^{p,q,r} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cambio de escala respecto de un centro

El cambio de escala de factores de escala *p* (según el eje *x*), *q* (según el eje *y*), *r* (según el eje *z*) respecto del centro *C=(a,b,c)*, punto del espacio, se define como la concatenación siguiente:

$$E_C^{p,q,r} = T_C \circ E_O^{p,q,r} \circ T_{-C}$$

Podéis obtener las ecuaciones en este caso general.

3.1.3. Rotaciones en el espacio respecto de un eje

En el espacio tridimensional, y a diferencia de lo que ocurre en el plano bidimensional, las rotaciones lo son respecto de una recta o eje.

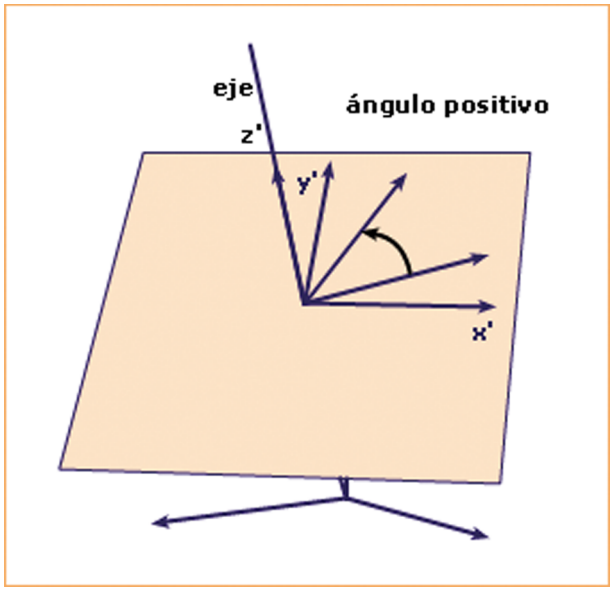
En una rotación intervienen dos ingredientes:

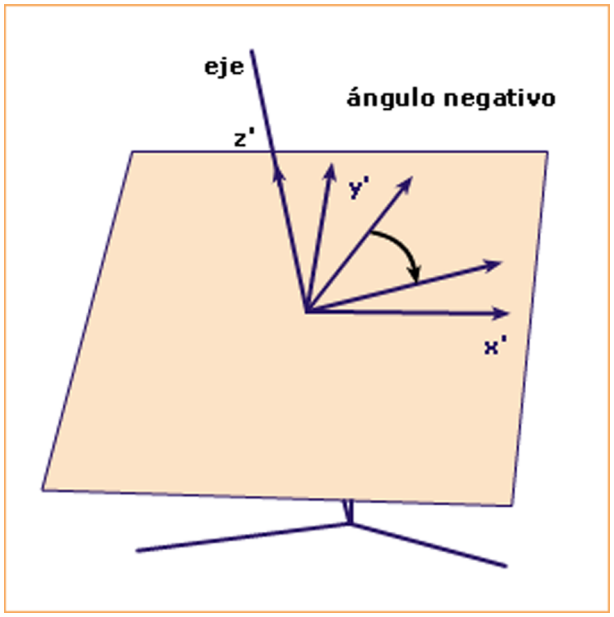
- el ángulo de rotación *a*
- el eje de rotación (recta orientada) *r*

Considérese el punto *P* no perteneciente a la recta *r*. Sea *Q* el plano que pasa por *P* y es perpendicular a la recta *r*. Sea *M* la intersección del plano *Q* con la recta *r*. El transformado de *P* por la rotación de ángulo *a* y de eje *r* es un punto *P'* para el cual se cumplen las propiedades siguientes:

- *P'* pertenece al plano *Q*
- distancia*(P,M)*=distancia*(P',M)*
- el ángulo *PMP'* es *a*

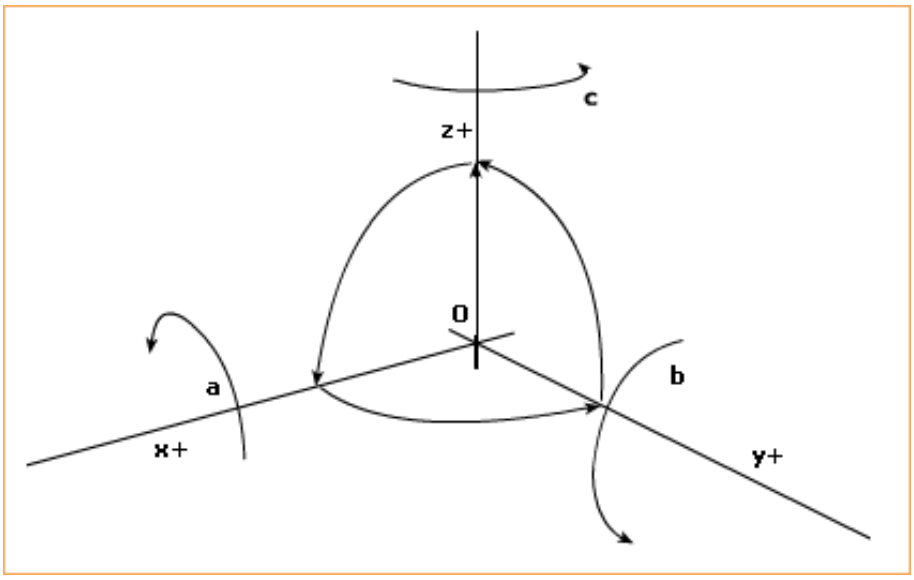
Existen dos soluciones posibles. Para obtener sólo una hay que fijar un sentido de rotación. La situación se ilustra en los esquemas que siguen:





Tratar las rotaciones respecto de cualquier eje a escala analítica nos alejaría de los objetivos de esta publicación, por lo que consideraremos únicamente las rotaciones respecto de los ejes de coordenadas del sistema de coordenadas cartesianas.

- **Rotaciones respecto de los ejes de coordenadas**
  Consideraremos las rotaciones positivas respecto de los ejes de coordenadas. Suponiendo que el ángulo de rotación es positivo, las rotaciones relativas a un eje se verán antihorarias, observadas desde el semieje positivo, sobre el plano de coordenadas perpendicular al eje. El gráfico siguiente ilustra esta idea.
  Por ejemplo, en el caso de la rotación respecto del eje x, una rotación de 90 grados transforma el semieje $y+$ en el semieje $z+$, y la rotación sobre el plano yz se ve como antihoraria desde $x+$.
  Análogamente, para las rotaciones respecto de los otros ejes de coordenadas.



Estamos interesados en ver qué ecuaciones y qué matrices de transformación producirán el efecto anteriormente descrito; lo describimos a continuación.

- **Rotación positiva respecto del eje de coordenadas Ox (R_x^a)**

  La matriz correspondiente a una rotación positiva de ángulo *a* respecto del eje *x* es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

  Las ecuaciones, derivadas de

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos a - z\ \sin a \\ y\sin a + z\ \cos a \end{pmatrix}$$

  son:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \cos a - z\sin a \\ z' = y\sin a + z\cos a \end{cases}$$

  Con estas ecuaciones, si el ángulo a es positivo, la rotación se ve como antihoraria (sobre el plano perpendicular al eje *x*, el plano *yz*, observándola desde *z*+).

- **Rotación positiva respecto del eje de coordenadas Oy(R_y^b)**

  La matriz de la rotación positiva de ángulo *b* respecto del eje Oy es:

$$\begin{pmatrix} \cos b & 0 & \sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix}$$

De

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b & 0 & \sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos b + z\sin b \\ y \\ -x\sin b + z\cos b \end{pmatrix}$$

deducimos las ecuaciones de la rotación positiva respecto del eje y:

$$\begin{cases} x' = x\cos b + z\sin b \\ y' = y \\ z' = -x\sin b + z\cos b \end{cases}$$

- **Rotación positiva respecto del eje de coordenadas Oz(R_z^c)**
  La matriz de la rotación positiva de ángulo *c* respecto del eje de coordenadas z+ es:

$$\begin{pmatrix} \cos c & -\sin c & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos c & -\sin c & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos c - y\sin c \\ x\sin c + y\cos c \\ z \end{pmatrix}$$

escribimos las ecuaciones correspondientes:

$$\begin{cases} x' = x\cos c - y\sin c \\ y' = x\sin c + y\cos c \\ z' = z \end{cases}$$

3.1.4. Simetrías en el espacio

- **Simetría axial**
  La simetría axial es la transformación de simetría respecto de un eje. No es más que la rotación de 180 grados respecto de este eje. Por tanto, no es más que un caso particular de rotación en el espacio.

- **Simetría especular**
  Es la simetría respecto de un plano. La situación en la que resultará de mayor utilidad será en el caso en el cual el plano es un plano de coordenadas o paralelo a uno de ellos. Consideremos las simetrías respecto de los planos de coordenadas. Esta transformación puede ser interesante para obtener objetos simetrizados de otro, con el consiguiente ahorro de tiempo. Una

situación que sirva como ejemplo de su utilidad: imaginemos que se está desarrollando un modelo con simetría bilateral (un insecto, por ejemplo). Sólo hará falta construir determinadas piezas una sola vez (la mandíbula de una hormiga, por ejemplo): las otras podrán obtenerse por simetrización.
Simetría especular respecto del plano xy.
Si *P=(x,y,z)* es un punto genérico del espacio, el simétrico *P'*, simétrico respecto del plano *xy*, será *P'=(x,y,-z)*. Las ecuaciones correspondientes son:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$$

Simetría especular respecto del plano xz.
Si *P=(x,y,z)* es un punto genérico del espacio, el simétrico *P'*, simétrico respecto del plano *xz*, será *P'=(x,-y,z)*. Las ecuaciones correspondientes son:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$

Simetría especular respecto del plano yz.
Si *P=(x,y,z)* es un punto genérico del espacio, el simétrico *P'*, simétrico respecto del plano *yz*, será *P'=(-x,y,z)*. Las ecuaciones correspondientes son:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

La obtención de las ecuaciones de la simetría respecto de un plano arbitrario es más compleja técnicamente y no se tratará aquí.

3.1.5. Transformaciones afines tridimensionales para construcción geométrica

En la transformación afín general, veamos cuál es el significado geométrico del vector *W* y de los vectores columnas de la matriz *A*. Supongamos que estamos trabajando con la base ordinaria e_1=(1,0,0);e_2=(0,1,0);e_3=(0,0,1).

En primer lugar, obsérvese que *f(O)=AO+W=W*, con lo que resulta que el punto cuyo vector posición es W es el transformado del origen. Dado que el efecto de sumar W es simplemente el de trasladar, estudiemos la parte lineal *g(P)=AP*.

Si ahora calculamos las imágenes de los vectores de la base para la transformación correspondiente a la parte lineal *g(P)=AP*, obtenemos:

Para el primer vector,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}1 + a_{12}0 + a_{13}0 \\ a_{21}1 + a_{22}0 + a_{23}0 \\ a_{31}1 + a_{32}0 + a_{33}0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

Se obtiene, pues, la primera columna de la matriz *A*. Análogamente el transformado del segundo es precisamente el vector de la segunda columna de la matriz; el transformado del tercer vector de la base se transforma en el vector de la tercera columna de la matriz.

Ello significa que podemos definir transformaciones afines generales indicando:

- cuáles deben ser los vectores imágenes o transformados de los vectores de la base.
- cuál es el transformado del origen.

Con lo primero podemos formular la matriz *A;* con lo segundo, tenemos el vector *W*.

En relación con lo primero normalmente construiremos nuevas bases ortonormales que sean adecuadas para la transformación que queremos hacer.

Se pueden ver varios ejemplos de uso aplicados a la obtención de parametrizaciones de curvas y superficies en posiciones arbitrarias en los capítulos posteriores. Además, en relación con construcción geométrica en MaxScript, en el capítulo de laboratorio correspondiente, pueden verse varios ejemplos de uso de las transformaciones.

Las transformaciones geométricas pueden componerse, como ya hemos visto en el caso del cambio de escala respecto de un centro cualquiera, y en otras situaciones.

Conviene tener en cuenta que en general la composición o concatenación no es conmutativa. La lectura es de derecha a izquierda según el convenio que adoptamos. El símbolo ° corresponde a la concatenación de transformaciones.

3.2. La proyección

El principal reto geométrico que supone representar en una pantalla de ordenador una escena tridimensional es, naturalmente, que la pantalla del ordenador es bidimensional. Al proceso por el que representamos la realidad tridimensional en dos dimensiones, teniendo en cuenta el punto de vista de un hipotético observador le llamamos **proyección**.

Para poder hacer una proyección debemos trabajar en un **espacio proyectivo**, y no en el **espacio euclídeo** en el que nos hemos movido hasta ahora. En los espacios proyectivos debemos usar **coordenadas homogéneas**.

3.2.1. Coordenadas homogéneas

Donde un punto en un espacio euclídeo de tres dimensiones se representa con un vector tridimensional del estilo (x, y, z), en un espacio proyectivo, usando coordenadas homogéneas, los puntos se representan con vectores de dimensión 4, del estilo (x, y, z, w).

Decimos que dos vectores (x, y, z, w) y (x' y' z' w') son **proporcionales** si existe un número c tal que x=c·x', y=c·y', z=c·z', w=c·w'.

En coordenadas homogéneas dos vectores proporcionales cualesquiera representan el mismo punto. Así, por ejemplo, los vectores (2, 5, 7, 1), (4, 10, 14, 2) y (1, 2.5, 3.5, 0.5) denotan el mismo punto.

Dado un punto (x y z w) en coordenadas homogéneas, su representación en coordenadas cartesianas es (x/w y/w z/w). Así, el vector en coordenadas homogéneas (2, 5, 7, 1) corresponde al vector de coordenadas cartesianas (2, 5, 7), y puede comprobarse que todos los vectores que representan un mismo punto dan lugar a las mismas coordenadas cartesianas, como podría esperarse.

Como puede imaginarse, no nos interesará tratar el caso en que w=0, ya que no se corresponde con ningún punto del espacio euclídeo en que estamos acostumbrados a trabajar.

Para el caso en el que trabajamos, lo más habitual será que fijemos w=1, considerando siempre vectores del estilo (x, y, z, 1). Si encontramos un vector cuya cuarta coordenada, w, sea diferente de 1, siempre podremos dividir por w, obteniendo un vector equivalente:

$$(x/w, y/w, z/w, w/w)=(x/w, y/w, z/w, 1)$$

cuya cuarta coordenada sí vale 1.

3.2.2. Las transformaciones habituales

Hemos visto con anterioridad cuáles son las matrices que representan las diferentes transformaciones tridimensionales en un espacio euclídeo. Pasamos a ver algunas de las matrices correspondientes cuando trabajamos en un espacio proyectivo, Como es natural, pasaremos a trabajar con matrices 4x4.

Para trasladar un punto según el vector (x, y, z) del espacio euclídeo la matriz será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hacer una rotación de ángulo α alrededor del eje x la matriz será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hacer una rotación de ángulo ß alrededor del eje y la matriz será:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hacer una rotación de ángulo γ alrededor del eje z la matriz será:

$$\begin{pmatrix} \cos y & -\sin y & 0 & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, para hacer un escalado de factores sx, sy, sz en los ejes x, y z, la matriz será:

$$\begin{pmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.3. Aplicar la perspectiva

Si deseamos que la proyección obtenida sobre la pantalla sea realista, deberemos aplicar la perspectiva. Así, el tamaño aparente de los objetos representados será menor a medida que estos se alejen de la cámara. Supondremos que, mediante la combinación adecuada de las transformaciones vistas hasta ahora hemos colocado la cámara en el origen de coordenadas, de manera que esté "mirando" en la dirección y sentido marcados por el semieje positivo de las z, y de forma que la "izquierda" de la cámara la marque el semieje positivo de las x y "arriba" venga determinado por el semieje positivo de las y.

Para aplicar la perspectiva, deberemos aplicar distorsiones en función del ángulo de visión que deseemos. Definimos dos ángulos, μ y ν. μ será el ángulo definido por una recta que sale de la cámara por el eje z y el plano que pasa

por la cámara y el límite derecho de la pantalla. ν será el ángulo definido por una recta que sale de la cámara por el eje z y el plano que pasa por la cámara y el límite superior de la pantalla.

Además, a la hora de representar objetos en pantalla, sólo representaremos los puntos que se encuentren a una cierta distancia de la cámara. Definiremos una distancia mínima, a la que llamaremos F, y una distancia máxima, B.

La matriz que representa el caso general es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tan\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B+F}{B-F} & \frac{-2BF}{B-F} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En el caso en que tomemos B = ∞ (es decir, representamos *todos* los puntos por delante de la cámara a partir de una distancia mínima), consideraremos la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tan\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2F \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Habitualmente μ y ν se determinan de forma que la representación en pantalla parezca correcta. Se suelen tomar de forma que la tangente de μ esté entre 1 y 5, y, si la pantalla sobre la que queremos hacer la representación tiene formato 4/3, tomaremos ν de forma que tan μ=4/3·tan ν. Así, por ejemplo, en una pantalla en formato 4/3 y fijando tan μ=3, si queremos representar los objetos que estén a una distancia mínima 1 de la cámara, trabajaremos con la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Actividades

Ejercicios

- **Problema 1**
  Dados los puntos A,B, escribid la expresión del punto del segmento AB que dista de B un tercio de la distancia de A a B.
  Resolución:
  Consideremos la parametrización *P(t) = A + t(B – A)*. El punto M buscado se describe de forma equivalente como el que dista de A dos tercios de la longitud *AB*. Bastará elegir *t = 2/3* en la parametrización anterior, de modo que resulta *M = A + (2/3) (B – A)*.
  También podemos escribir otra variante, *Q(t) = B + s (B – A)*. Entonces hay que tomar *s = 1/3* para obtener el punto *M* buscado.
- **Problema 2**
  Dados los puntos P,Q, escribid la expresión del punto del segmento PQ que dista de P una cuarta parte de la distancia de P a Q.
  Resolución:
  La parametrización del segmento es *T(t) = P + t (Q – P)*, con $0 \le t \le 1$>. Obtenemos el punto pedido con *t = 1/4*. Así, *M = T (1/4) = P + (1/4) (Q – P)*.
- **Problema 3**
  Un punto animado parte de *A = (0,1,1)* y se desplaza sobre el plano vertical *yz*, en el cuadrante de coordenadas no negativas $y \ge 0, z \ge 0$, de modo que se aleja del origen según una trayectoria rectilínea que forma un ángulo de 30 grados con el semieje y+. Se detiene cuando ha recorrido 200 unidades. Parametrizad la trayectoria.
  Resolución:
  Si *w* es un vector director de la recta que es la base de la trayectoria, entonces se parametriza por *P(t) = A + tw*, con *t≥0*. Hay que obtener un vector que, aparte de darnos la dirección de la trayectoria, oriente la recta según la condición del enunciado sobre la progresión de la misma en el cuadrante *y+z+*, alejándose del origen. Además, atendiendo a la condición del recorrido de 200 unidades, resultará cómodo que el vector sea unitario, es decir, de norma o módulo 1 (en caso de que el vector que se obtenga no lo sea, unitarizaremos dividiendo por la norma o módulo).
  El vector *w = (0, cos30, sin30)* satisface todos los requisitos. La trayectoria que se inicia en A se puede parametrizar por *P(t) = A + t w*, con t positiva o nula. El punto final *B* se obtendrá con el valor *t* adecuado del parámetro de manera que se hayan recorrido 200 unidades. Siendo w unitario, basta elegir *t = 200*, es decir, *B = P(200) = A + 200w*.
  Así pues, hay que parametrizar el segmento *AB:Q(s) = A + s(B – A) = A + 200sw*, con $0 \le t \le 1$. Concretando,

$$Q(s) = (0, 1, 1) + s(0, 200\cos 30, 200\sin 30) = (0, 1 + 200\cos 30s, 1 + 200\,s$$
$$= ((0, 1 + s100, 1 + s100\sqrt{3}), con(0 \le t \le 1))$$

  También se hubiera podido hallar directamente un vector director u de módulo 200, concretamente *u = (0, 200cos30, 200sin30)*. En este caso, *B = A + u*. El resultado final es el mismo: *G(r) = A + r(B – A) = A + ru*.
- **Problema 4**
  Considerad el triángulo *ABC*, con *A = (3, 0, 0), B = (0, 3, 0), C = (0, 0, 3)*. Y sea *M = (1, 1, 1)*, punto del plano determinado por estos tres puntos. Un punto animado parte de *M*, se aleja del origen y se mueve según una trayectoria perpendicular al plano *ABC* hasta recorrer 300 unidades. Parametrizad la trayectoria de animación.
  Resolución:
  La principal dificultad es obtener una dirección (un vector *w*) perpendicular al plano *ABC*. El plano *ABC* divide el espacio en dos semiespacios, uno de los cuales contiene el origen de coordenadas. Dado que se tiene que cumplir la condición de alejamiento del origen, deberemos elegir *w* de manera que "apunte hacia el semiespacio que no contenga el origen".
  El procedimiento estándar para obtener una dirección perpendicular a dos direcciones dadas es el producto vectorial. Elijamos dos vectores no alineados del plano *ABC*: lo más cómodo es hacerlo a partir de los puntos de los que disponemos de las coordenadas. Sean:

$$u_1 = AB = B - A = (0,3,0) - (3,0,0) = (-3,3,0)$$
$$u_2 = AC = C - A = (0,0,3) - (3,0,0) = (-3,0,3)$$

  Calculemos $w_1 = u_1 \wedge u_2 = (9,9,9)$. La orientación de la dirección que determina es la requerida.

Dado que hay que recorrer una distancia en la dirección dada por el vector anterior, es conveniente unitarizar, es decir, dividir por la norma, que es $\|w\| = (\sqrt{9^2+9^2+9^2} = 9\sqrt{3})$. Así, finalmente, $w = \frac{1}{\|w_1\|}w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

El final de recorrido será $F = M + 300w$. Por tanto, la parametrización de la trayectoria es:

$$P(t) = M + t(F - M) = M + t300w = (1,1,1) + t\left(\frac{300}{\sqrt{3}},\frac{300}{\sqrt{3}},\frac{300}{\sqrt{3}}\right), 0 \le t \le 1$$

- **Problema 5**
  Dados los puntos *A,B* del espacio, escribid la expresión del punto *C* del segmento *AB* que dista de *A* un tercio de la longitud del segmento *AB*. Razonad la respuesta.
  Resolución:
  C = A + (1/3) (B – A).
  Los puntos del segmento AB son de la forma P(t) = A + t (B – A), con t variando entre 0 y 1. El punto C es el que corresponde al parámetro t = 1/3. Vamos a justificarlo en términos de distancia. Imponemos la propiedad del enunciado: (1/3)d(A,B) = d(A,P(t)). Por tanto, (1/3)d(A,B)=d(A,P(t))= || P(t)-A|| = ||A+t(B-A)-A || = || t(B-A)|| = |t| ||B-A|| = t d(A,B). Debe ser, por tanto, t=1/3.
- **Problema 6**
  En el espacio tridimensional, la ecuación y = x es la ecuación de un plano perpendicular al plano horizontal *z = 0*. ¿Cierto o falso? Razonad vuestra respuesta.
  Resolución:
  Cierto. La ecuación y = x corresponde al plano perpendicular a *z = 0* que corta a este plano según la bisectriz del primer cuadrante. La respuesta se puede averiguar calculando vectores normales a los planos indicados y comprobando que son ortogonales, es decir, de producto escalar nulo. Ahora bien, recordad que si ax + by + cz + d = 0, entonces N = (a, b, c) es un vector perpendicular al plano. Reescribiendo el plano y = x en esta forma, es decir, como 1.x-1.y+0.z+0=0, resulta que N = (1,–1,0) es un vector normal al plano. En cuanto al plano z = 0, N' = (0,0,1) es normal al plano horizontal z = 0. Veamos que su producto escalar es nulo:
  N.N'=(1,-1,0).(0,0,1)= 1.0+(-1).0+0.1=0. Por tanto, los planos respectivos son perpendiculares.
- **Problema 7**
  Dado el plano determinado por los puntos *A = (2,0,0), B = (0,3,0), C = (0,0,1)*, construid un nuevo sistema de coordenadas de acuerdo con la siguiente descripción:
  – El nuevo origen *O'* debe ser el baricentro de *A, B, C*.
  – El segundo eje del nuevo sistema debe ser perpendicular al plano determinado por *A, B, C*, positivamente orientado hacia el semiespacio que contiene al origen O del sistema de coordenadas usual, sistema en el que están expresados los puntos *A, B, C*.
  – El nuevo sistema de coordenadas debe ser de coordenadas cartesianas.

  Los detalles que queden sin especificar quedan al libre criterio del estudiante, que deberá describir las decisiones que tome.
  Mostrar todos los pasos de la construcción.
- **Problema 8**
  Escribid el vector director de la recta del plano *z = 0*, que pasa por el origen de coordenadas y tal que su ángulo de inclinación (con el eje *Ox+*) es de 30 grados.
  Resolución:
  Hay más de una posibilidad. Si se toma unitario de entrada, será:
  w= (cos(π /6),sen(π /6),0).
  También se podría tomar cualquier múltiplo escalar no nulo de éste.
- **Problema 9**
  Dada la recta que pasa por *A* y es de vector director *v*, dar el punto que dista n unidades de *A* según la dirección del vector *v*.
  Resolución:

  Parametricemos utilizando un vector unitario $P(t) = A + t\frac{v}{\|v\|}$. Bastará tomar $t = n$, es decir, *P(n)*.
- **Problema 10**
  ¿Qué forma tienen los vectores que son ortogonales a *w = (1,1,1)*?
  Resolución:
  Sea *v = (a,b,c)* un vector ortogonal a *w*. Este hecho equivale a que sea nulo el producto escalar de ambos. Por tanto: *0=v.w=(a,b,c).(1,1,1)=a.1+b.1+c.1=a+b+c*. Por consiguiente, son de la forma *v=(a,b,c)=(a,b,-a-b)*, con *a,b* cualesquiera.
- **Problema 11**
  Dada la recta r que pasa por el punto *A = (1,2,0)* y tiene dirección dada por el vector *v=(1,1,1)*, construid un nuevo sistema de coordenadas cartesianas que tenga como eje z' (tercer eje de coordenadas) la recta dada, pero orientado en sentido opuesto al de la orientación dado por el vector v. El nuevo sistema debe ser de orientación positiva.
  Resolución:

El nuevo sistema de coordenadas será $S' = (A;\{\vec{u}_1\vec{u}_2, \vec{u}_3\})$. Vamos a presentar una resolución esquemática; el lector suplirá los detalles de cálculos intermedios tales como cálculo de normas o productos vectoriales.

En primer lugar, tenemos $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$, con lo que podemos elegir $\vec{u}_3 = -\frac{1}{\|v\|}\vec{v} = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Vamos a obtener ahora una dirección ortogonal al vector anterior, efectuando producto vectorial con otro vector que no determine la misma dirección, como por ejemplo $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$. Sea $\vec{v}_1 = \vec{e}_3 \wedge \vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$. Su norma es $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, y ahora podemos unitarizar: $\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Conseguiremos una tercera dirección ortogonal a las dos anteriores (y ya unitarizada) mediante un nuevo producto vectorial: $\vec{u}_2 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. Queda por resolver el tema de la orientación, algo que podríamos haber hecho a medida que realizábamos los productos vectoriales, controlando la orientación final. También se puede hacer al final: calculamos $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, que resulta ser negativo. Por tanto, finalmente, puesto que deseamos mantener el tercer vector para ajustarnos al enunciado, podemos optar por cambiar el orden de los dos primeros o bien cambiar uno de ellos de signo.

- **Problema 12**

  Imaginemos que tenemos el problema constructivo de colocar una esfera con centro a una cierta distancia de un punto y según una cierta dirección. Dada la semirrecta con origen en el punto *P* y con vector director en *v*, consideramos la parametrización correspondiente $Q(t) = P + tv$, con $t \geq 0$. Obtened el punto sobre la semirrecta que dista 2 unidades de *P*.

  Resolución:

  Consideremos la parametrización alternativa con vector director unitario: $R(s) = P + s\frac{v}{\|v\|}$. Basta escoger s = 2. Por tanto, en la parametrización dada escogemos t=2/||v||, con lo que el punto buscado es Q(2/||v||).

- **Problema 13**

  Supongamos que queremos programar animaciones de traslación según planos paralelos al *x = y*. ¿Qué forma tienen los vectores w con los que se pueden producir traslaciones T_w según planos paralelos al plano *x = y*? Razonad vuestra respuesta.

  Resolución:

  Se puede resolver obteniendo los vectores ortogonales al plano x – y = 0, que es de vector normal N = (1,–1,0), es decir, los vectores w = (a,b,c), cuyo producto escalar con N es nulo: 0=N.(a,b,c)=(1,-1,0).(a,b,c)=a-b. Son de la forma, pues, w = (a,b,c) = (a,a,c), con a,c números reales cualesquiera.

Ejercicios 2

- **Problema 1**

  Sea *C0* la circunferencia de centro el origen y radio *R = 1* y sea Q la elipse de centro (4,5), semiejes 2,3, y cuyo semieje mayor forma un ángulo de 30 grados con el semieje positivo de las abscisas. Obtened una concatenación de transformaciones geométricas que transforme *C0* en Q.

  Resolución:

  Consideremos *C0* la circunferencia de centro *C = O = (0,0)* y radio R = 1. Sea Q la elipse que se describe en el enunciado, resultado final de aplicar una secuencia de transformaciones geométricas a *C0*.

  Vamos a proponer una solución posible, en el bien entendido de que este tipo de problemas pueden resolverse por lo general de más de una manera. El orden según el cual se aplican las transformaciones es importante.

  Primera transformación

  Vamos a convertir la circunferencia C0 en una elipse C1 que sea métricamente idéntica a C0, aunque con el centro en C = O = (0,0) y con los ejes principales respectivamente coincidentes con los ejes de coordenadas. Esto se puede conseguir mediante un cambio de escala, concretamente $E_O^{3,2}$, cambio de escala con respecto al origen con factores de cambio de escala: 3, según la dirección del eje de las *x;* 2, según la dirección del eje *y*. Este cambio de escala triplica la dimensión de los objetos en la dirección del eje *Ox* y duplica la correspondiente al eje *Oy*. Así, tendremos:

  $$C1 = E_O^{3,2}(C0)$$

  Segunda transformación

Efectuemos una rotación de *C1* con respecto al origen, de ángulo 30 grados. Es decir, apliquemos la transformación R_O^{30} a *C1*. El resultado es una elipse *C2*, métricamente idéntica a *C1* y a a la elipse final *Q*: $Q\ C2 = R_O^{30}(C1)$.

Tercera transformación

Sólo queda efectuar una traslación de vector *w = (4,5)*, para obtener la elipse final: $Q = T_w(C2) = T_{(4,5)}(C2)$

Transformación completa

Por tanto:

$$Q = T_w(C2) = T_{(4,5)}(R_O^{30}(C1)) = T_{(4,5)}(R_O^{30}(E_O^{3,2}(C0))) = (T_{(4,5)} \circ R_O^{30} \circ E_O^{3,2})(C0)$$

Así pues, la concatenación de transformaciones básicas (leyendo de derecha a izquierda) es:

$$T_{(4,5)} \circ R_O^{30} \circ E_O^{3,2}$$

Observación

Observad que una modificación simple del desarrollo anterior nos permitiría transformar un cilindro de base la circunferencia dada, en el plano *z = 0*, en un "cilindro", de base elíptica (cilindro elíptico), de base la elipse dada:

$$T_{(4,5,0)} \circ R_z^{30} \circ E_O^{3,2,1}$$

- **Problema 2**

Considerad la figura *F1*, formada por el rectángulo de vértices *A = (1,2), B = (5,2), C = (5,4), D = (1,4)*. Considerad la figura *F5*, formada por el cuadrado de lado 2 que tiene un vértice en el punto (1,0), un lado paralelo a la recta *y = x/3* y está totalmente contenido en el semiplano *y≥0*. Formulad una composición de transformaciones geométricas afines del plano que transforme *F1* en *F5*.

Resolución:

Indiquemos *A = (1,2), B = (5,2), C = (5,4), D = (1,4)*, vértices del rectángulo, que indicamos por *F1*. Observad que los lados del rectángulo son respectivamente paralelos a los ejes de coordenadas. Los lados del rectángulo tienen longitud 4 (anchura, según el eje *x*), 2 (altura, según el eje *y*). Se os recomienda que vayáis dibujando las figuras F que se irán considerando.

Método 1

Vamos a utilizar las transformaciones geométricas más básicas posibles.

Primera transformación

Efectuamos una "traslación al origen", que llevará el punto A al origen de coordenadas. El vector de traslación debe ser –A, y la traslación será $T_{-A} = T_{-(1,2)} = T_{(-1,-2)}$. La figura resultante será el rectángulo $F2 = T_{-A}(F1)$, rectángulo con las mismas medidas que F1 y de lados respectivamente paralelos a los ejes de coordenadas. Los vértices *A, B, C, D* se han transformado, respectivamente, en *A′ = O = (0,0), B′ = (4,0), C′ = (4,2), D′ = (0,2)*.

Segunda transformación

Aplicaremos un cambio de escala a la figura anteriormente obtenida con el fin de convertirla en un cuadrado de lado 2, métricamente idéntica a la figura final. Esto puede realizarse mediante un cambio de escala con respecto al origen, con lo que se produce la figura *F3*: $F3 = E_O^{(0.5,1)}(F2)$. Los vértices *A′, B′, C′, D′* se han transformado, respectivamente, en *A′′ = (0,0), B′′ = (2,0), C′′ = (2,2), D′′ = (0,2)*.

Tercera transformación

Vamos a efectuar una rotación de centro el origen y ángulo *a*, siendo *a = arctg (1/3)*, de acuerdo con la ecuación de la recta y la condición sobre la inclusión en el semiplano de las y positivas. Si los vértices *A′′, B′′, C′′, D′′* se transforman en *A′′′, B′′′, C′′′, D′′′*, éste es el ángulo que el lado *A′′′B′′′* debe formar con el semieje *x+*. Por tanto, aplicamos $F4 = R_O^a(F3)$.

Cuarta transformación

La última transformación producirá la figura definitiva: $F5 = T_{(1,0)}(F4)$, resultado de la traslación de vector *(1,0)*.

Así pues, resumiendo, la concatenación de transformaciones geométricas será (leyendo de derecha a izquierda):

$$T_{(1,0)} \circ R_O^a \circ E_O^{(0.5,1)} \circ T_{(-1,-2)}$$

Otros métodos

Hay más posibilidades. Indiquemos *M = (1,0)*.

Alternativa 1: $R_M{}^{a} \circ T_{(0,-2)} \circ E_A{}^{(0.5,1)}$

Alternativa 2: $R_M{}^{a} \circ E_M{}^{(0.5,1)} \circ T_{(0,-2)}$

- **Problema 3**
Escribid las ecuaciones de la transformación geométrica en el plano resultado de concatenar, en el orden que se indica, las siguientes transformaciones:
1. La rotación en el plano de ángulo 45 grados y de centro el punto *C = (2,3)*.
2. La traslación de vector *u = (-1,2)*.
Resolución:
La rotación que se pide se obtiene por concatenación o composición de las transformaciones básicas $T_C, T_{-C}, R_O{}^{45^0}$, en el orden que se indica a continuación, de derecha a izquierda: $R_C{}^{45^0} = T_C \circ R_O{}^{45^0} \circ T_{-C}$. Si queremos obtener la expresión en coordenadas, debemos aplicarla a un punto arbitrario P = (x,y), con el que operaremos como matriz columna, $R_C{}^{45^0} P = (T_C \circ R_O{}^{45^0} \circ T_{-C})(P)$.
En términos matriciales resulta:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (R_C{}^{45^0} c)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_C\left(R_O{}^{45^0}\left(T_{-C}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_C(R_O{}^{45^0}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}) = T_C\left(\begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Efectuando las operaciones matriciales, resultará:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\cos 45 - (y-3)\sin 45 + 2 \\ (x-2)\sin 45 + (y-3)\cos 45 + 3 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $\sin 45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\cos 45 - (y-3)\sin 45 + 2 \\ (x-2)\sin 45 + (y-3)\cos 45 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \\ (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \end{pmatrix}$$

Al resultado obtenido hay que aplicarle a continuación la traslación de vector u:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = T_u\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \end{pmatrix}$$

La expresión en coordenadas será, pues:

$$\begin{cases} x'' = (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ y'' = (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \end{cases}$$

- **Problema 4**
Escribid las ecuaciones de la transformación geométrica en el plano resultado de concatenar, en el orden que se indica, las siguientes transformaciones:
1. Traslación de vector *u = (a,b)*.
2. La rotación en el plano de ángulo *t* y de centro el punto *P = (x0,y0)*.
3. Traslación de vector *v = (c,d)*.
Resolución:
Escribamos en primer lugar las ecuaciones de la traslación T_u, en términos matriciales.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

En segundo lugar, escribamos las ecuaciones de la rotación $R_P{}^t = T_P \circ R_O{}^t \circ T_{-P}$:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = R_P{}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'-x0 \\ y'-y0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x0 \\ y0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x'-x0)\cos t - (y'-y0)\sin t + x0 \\ (x'-x0)\sin t - (y'-y0)\cos t + y0 \end{pmatrix}$$

Ahora hay que sustituir *x',y'* por los valores anteriores en función de *x,y*:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x'-x0)\cos t - (y'-y0)\sin t + x0 \\ (x'-x0)\sin t - (y'-y0)\cos t + y0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+a-x0)\cos t - (y+b-y0)\sin t + x0 \\ (x+a-x0)\sin t - (y+b-y0)\cos t + y0 \end{pmatrix}$$

En tercer lugar, escribamos matricialmente la traslación de vector v:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''+c \\ y''+d \end{pmatrix}$$

Finalmente sustituimos *x'',y''* por sus respectivos valores:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+a-x0)\cos t - (y+b-y0)\sin t + x0 + c \\ (x+a-x0)\sin t - (y+b-y0)\cos t + y0 + d \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones son, por tanto:

$$\begin{cases} x'' = (x+a-x0)\cos t - (y+b-y0)\sin t + x0 + c \\ y'' = (x+a-x0)\sin t - (y+b-y0)\cos t + y0 + d \end{cases}$$

- **Problema 5**

  Sea *C* un punto del plano. Considerad las traslaciones T_C, T_{-C} y la transformación $E_O{}^{a,b}$ de cambio de escala con respecto al origen y factores de escala *a,b*. Escribid el cambio de escala $E_O{}^{a,b}$ en términos de las transformaciones T_C, T_{-C}, $E_C{}^{a,b}$.

  Respuesta:

  $$E_C{}^{a,b} = T_C \circ E_O{}^{a,b} \circ T_{-C}$$

Ejercicios 3

- **Problema 1**

  Escribir las ecuaciones de la traslación T_w en el espacio tridimensional de vector *w=(2,3,4)*.

  Respuesta:

  $$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y+3 \\ z' = z+4 \end{cases}$$

- **Problema 2**

  Escribir las ecuaciones de la rotación positiva de 30 grados respecto del eje de coordenadas *Ox* del espacio tridimensional.

  Respuesta:

  En términos matriciales es:

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30 & -\sin 30 \\ 0 & \sin 30 & \cos 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  Por tanto, efectuando el producto matricial:

  $$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos 30 - z\sin 30 \\ z' = y\sin 30 + z\cos 30 \end{cases}$$

Basta ahora sustituir: $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30 = \frac{1}{2}$.

- **Problema 3**
  Escribir las ecuaciones del cambio de escala respecto del origen *O* y de factores de escala 0,5, 0,75, 1,5 según las direcciones de los ejes *x,y,z*, respectivamente.
  Respuesta:
  En primer lugar, en términos matriciales resulta:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  En coordenadas, efectuando el producto matricial:

$$\begin{cases} x' = 0.5\text{x} \\ y' = 0.75\text{y} \\ z' = 1.5\text{z} \end{cases}$$

- **Problema 4**
  Escribir las ecuaciones de la rotación positiva $R^z_{45^\circ}$ de 45 grados respecto del eje de coordenadas *z* del espacio tridimensional.
  Respuesta:
  En términos matriciales es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  Efectuando el producto matricial:

$$\begin{cases} x' = x\ \cos 45 - y \sin 45 \\ y' = y\ \sin 45 + y\ \cos 45 \\ z' = z \end{cases}$$

  Ahora bastará sustituir: $\cos 45 = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- **Problema 5**
  Escribir las ecuaciones de la rotación positiva de 60 grados respecto del eje que pasa por *C=(2,3,0)* y que es perpendicular al plano *xy*.
  Respuesta:
  Recordemos que 60 grados son a=π /3 radianes.
  En primer lugar, vamos a efectuar una primera traslación de vector -*C*, es decir, T_{-C}.
  Resulta, por tanto:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ resultando: } \begin{cases} \bar{x} = x - 2 \\ \bar{y} = y - 3 \\ \bar{z} = z \end{cases}.$$

  Seguidamente hay que aplicar al resultado anterior una rotación de 60 grados respecto del eje de coordenadas *Oz*:

$$\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \\ \widehat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}\cos a - \bar{y}\sin a \\ \bar{x}\sin a + \bar{y}\cos a \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\cos a - (y-3)\sin a \\ (x-2)\sin a + (y-3)\cos a \\ z \end{pmatrix}$$

  Por último, hay que deshacer la traslación auxiliar inicial, aplicando la traslación de vector C al último resultado. Resulta finalmente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \\ \widehat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = (x-2)\cos a - (y-3)\sin a + 2 \\ y' = (x-2)\sin a + (y-3)\cos a + 3 \\ z' = z \end{cases}$$

- **Problema 6**
  Queremos deformar la esfera de radio 20, de centro el origen de coordenadas, hasta transformarla en un objeto resultado de aplicar una reducción del 50% en las dimensiones según la dirección del eje *Ox*, una reducción del 25% en las dimensiones relativas al eje *Oy*, y dejando inalteradas las dimensiones según el eje *Oz*. Escribir la transformación geométrica que hay que aplicar a la esfera.
  Resolución:
  Hay que aplicar una transformación de cambio de escala con los factores de reescalado siguientes, respecto del origen de coordenadas:
  a=0.5 (según el eje *x*),
  b=0.25 (según el eje *y*)
  c=1 (según el eje *z*)
  Por tanto, la transformación es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x \\ 0.25y \\ z \end{pmatrix}$$

  Finalmente:

$$\begin{cases} x' = 0.5x \\ y' = 0.25y \\ z' = z \end{cases}$$

- **Problema 7**
  Considérese el triángulo *T* determinado por los puntos *(3,0,0), (0,3,0), (0,0,3)*. Supóngase que hay que construir un cilindro *Q1* de radio 2 y altura 7 de forma que el eje del cilindro sea perpendicular al triángulo *T* y pase por su baricentro. Supongamos que una de las bases está sobre el plano del triángulo *T* y que el cilindro está contenido en el semiespacio que no contiene al origen, de entre los dos semiespacios determinados por el plano de *T*. Establecer una concatenación de transformaciones afines que permita obtener este cilindro *Q1* a partir del cilindro *Q0* de radio 1, altura 1, eje *Oz*, base en el plano *xy*, contenido en el semiespacio de las *z* positivas.
  Resolución:
  Establezcamos notación: *A=(3,0,0), B=(0,3,0), C=(0,0,3)*. El baricentro es $M = \frac{1}{3}(A+B+C) = (1,1,1)$.
  Indiquemos por *Q1* el cilindro que hay que construir. Sea *Q0* el cilindro que se indica (de radio 1, altura 1, eje *Oz*, base en el plano *xy*, con el añadido de estar contenido en el semiespacio de las z positivas).
  Calculemos una dirección perpendicular al plano *ABC*, dirección que va a ser la del eje del cilindro *Q1* que queremos construir. Esto se puede realizar fácilmente mediante el producto vectorial:

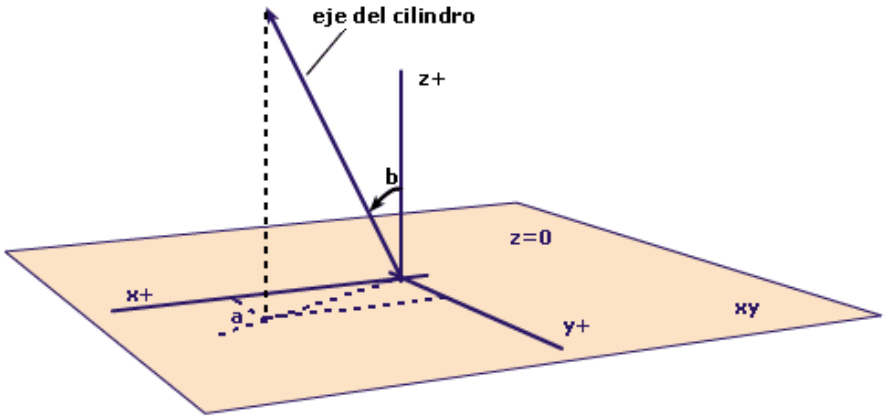
$$w = AB \wedge AC = (B-A) \wedge (C-A) = (9,9,9)$$

  Por tanto, el eje del cilindro *Q1* que hay que construir es la recta que pasa por *M* y que tiene vector director *w*. Denotaremos por *e* este eje.
  El cilindro *Q1* que hay que construir por concatenación de transformaciones geométricas tiene una de las bases sobre el triángulo *ABC*. Ahora bien, el plano *ABC* divide el espacio en dos semiespacios, y hay que considerar cuál de ellos contiene el cilindro *Q1*, caso que daría lugar a dos problemas o dos soluciones posibles. Vamos a suponer que el cilindro *Q1* está contenido en el semiespacio que no contiene al origen de coordenadas.
  El problema fundamental es saber convertir el semieje *z+*, eje del cilindro *Q0*, en el eje *e*, convenientemente orientado, por concatenación de rotaciones respecto de los ejes de coordenadas. Para ello debemos utilizar los ángulos *a,b* del esquema siguien-

te. El ángulo *a* es el ángulo formado por el semieje *x+* y la proyección ortogonal del vector *w* sobre el plano *xy*, y es el ángulo que forman los vectores (1,0,0) y (9,9,0) o, equivalentemente, entre (1,0,0) y (1,1,0). Este ángulo puede calcularse por la fórmula: $\cos a = \frac{(1,0,0).(1,1,0)}{\|1,0,0\|\|1,1,0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En este caso es *a*=45 grados.

El ángulo *b* se obtiene de forma parecida:

$\cos b = \frac{(0,0,1).(1,1,1)}{\|(0,0,1)\|\|(1,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Así, *b*=*arc*cos $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



Primera transformación. Vamos a crear un cilindro *Q2* métricamente idéntico al cilindro final *Q1*, pero situado en la posición del *Q0*. Se trata de aplicar un cambio de escala no uniforme, concretamente, $E_O^{2,2,7}$. Con esta transformación el radio se duplica y la altura se multiplica por 9. Así, pues, $Q2 = E_O^{2,2,7}(Q0)$.

Segunda transformación. Convirtamos el cilindro *Q2* en una copia idéntica *Q3*, cuyo eje pase por el origen de coordenadas, esté situado sobre el plano de coordenadas *xz*, y forme un ángulo b con el semieje *z+*. Para ello podemos aplicar una rotación positiva de ángulo b respecto del eje *y+*: $Q3 = R_y^b(Q2)$.

Tercera transformación. Convirtamos el cilindro *Q3* en otro idéntico *Q4*, con el eje pasando por el origen de coordenadas y paralelo al eje *e* del cilindro final *Q1*. Para ello, basta aplicar la rotación $Q4 = R_z^a(Q3)$.

Cuarta transformación. Hay que transformar el centro de la base inferior de *Q4*, que coincide con el origen, en el punto M, mediante la traslación correspondiente, de vector *OM*, es decir, $Q5 = T_M(Q4)$.

Finalmente, pues, la concatenación de transformaciones, leyendo de derecha a izquierda, es:

$$T_M \circ R_z^a \circ R_y^b \circ E_O^{2,2,7}$$

Observación: hay otras soluciones posibles.

- **Problema 8**

Escribir las ecuaciones de la composición de las transformaciones geométricas que se indican a continuación, en el orden que se indican.

1. Traslación de vector w=(1,2,3)

2. Rotación positiva de ángulo 45 grados respecto del eje Ox.

Respuesta:

Vamos a obtener la expresión de la transformación.

Traslación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T_w \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & + & 2 \\ z & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \\ z+3 \end{pmatrix}$$

Rotación:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = R_x^{45}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & -\sin 45 \\ 0 & \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y'\cos 45 - z'\sin 45 \\ y'\sin 45 + z'\cos 45 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x' \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} - z'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} + z'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Concatenando ambas transformaciones se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} - z'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} + z'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones derivan inmediatamente de la expresión matricial anterior:

$$\begin{cases} x'' = x+1 \\ y'' = (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z'' = (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

- **Problema 9**
  Escribir las ecuaciones de la rotación positiva de 45 grados respecto del eje que pasa por el punto (2,3,0) y es paralelo al eje *Oz*.
  Respuesta:
  En primer lugar, 45 grados son $a=\pi/4$ radianes; tengamos en cuenta que $\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin a$. Si *w=(2,3,0)*, hay que calcular $R^a_e = T_w \circ T^a_z \circ t_{-w}$, siendo e el eje de rotación. Escribamos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_e^a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_w\left(R_z^a\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

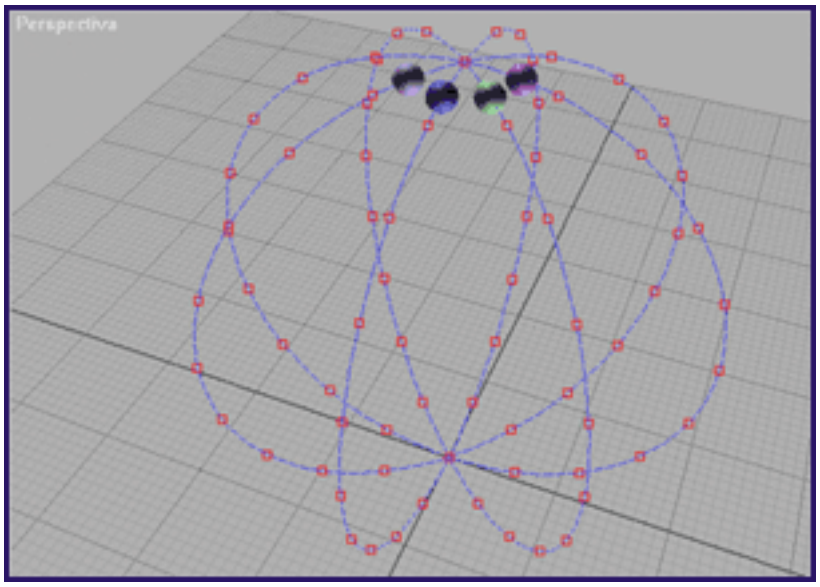
$$= \begin{pmatrix} (x-2)\cos a - (y-3)\sin a + 2 \\ (x-2)\sin a + (y-3)\cos a + 3 \\ z \end{pmatrix}$$

Con lo cual:

$$\begin{cases} x' = (x-2)\cos a - (y-3)\sin a + 2 \\ y' = (x-2)\sin a + (y-3)\cos a + 3 \\ z' = z \end{cases}$$

Ahora sólo falta sustituir *sen a* y *cos a* por sus valores respectivos.

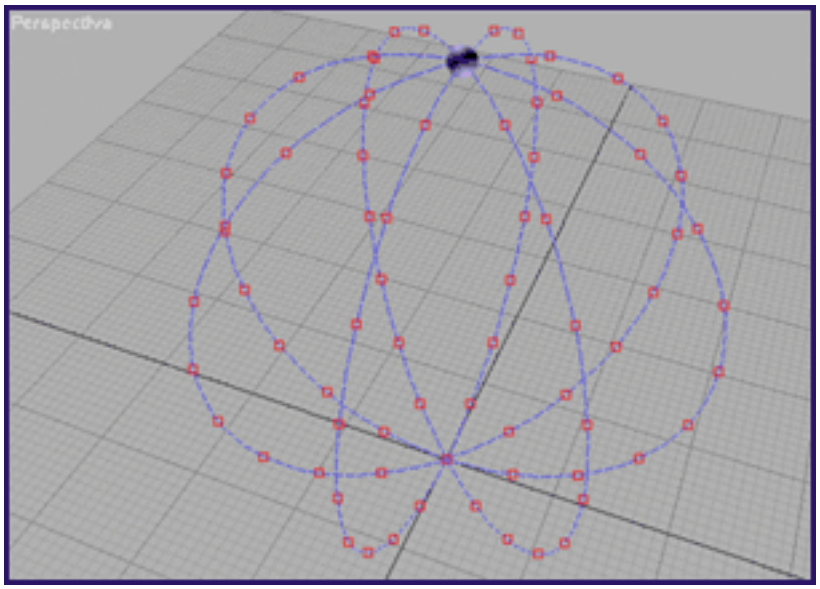
- **Problema 10**
  Se trata de programar una función para producir la animación de una esfera móvil *EM* que se desplaza de forma que su centro recorre una circunferencia fija *CF*.



Descripción de la circunferencia fija *CF*: es de radio *R*, su centro *C=(0,0,ZC)* está situado sobre el eje de coordenadas *Oz*, a una altura *ZC* (relativa al plano *z=0*) (*ZC* puede ser positiva, nula o negativa); el plano que contiene la circunferencia *CF* contiene el eje de coordenadas *Oz* y se obtiene como resultado de aplicar la rotación positiva de ángulo *ALFA*, respecto del eje *Oz*, al plano de coordenadas vertical *xz*.
El punto de inicio de la animación debe ser el punto más alto de la circunferencia *CF*.
Todos los aspectos no definidos aquí (por ejemplo, el sentido de recorrido sobre la circunferencia) quedan a libre elección.
Nombre de la función: AnimacionEsferaSobreCircunferencia.
Argumentos que se le pasarán:
REM: radio de la esfera móvil EM
ALFA: ángulo de rotación
ZC: altura del centro de la circunferencia CF
R: radio del la circunferencia CF
Como ejemplo de uso hay que realizar una escena en la que haya 4 esferas animadas obtenidas mediante la función anterior, todas ellas sobre circunferencias del mismo radio R, con esferas de idéntico radio *REM* y con *ZC=R* para todas la circunferencias. Hay que tomar distintos ángulos *ALFA* para obtener las variantes siguientes:

– Esfera sobre el plano *y=0*
– Esfera sobre el plano *x=0*
– Esfera sobre el plano *x=y*
– Esfera sobre el plano *x=-y*

Todas las esferas están inicialmente superpuestas con centro en el punto más alto de la trayectoria.



Ejercicios de autoevaluación

1. El módulo del vector (1,1,1) es...

a) 1
b) √3
c) √2
d) 1/√3
e) Ninguno de los anteriores.

2. Normalizar un vector no nulo...

a) es dividirlo por su módulo.
b) es multiplicarlo por su módulo.
c) No existe tal operación.
d) es duplicar su módulo.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

3. El módulo del vector director de la bisectriz del primer cuadrante del plano bidimensional es...

a) √3
b) √2
c) 1
d) 1/√2
e) Ninguno de los anteriores

4. Si P=(2,3,0), Q=(1,–1,1), el módulo de PQ es...

a) 3√2
b) 2
c) √2
d) Ninguno de los anteriores

5. Si una recta *r* tiene la dirección dada por el vector *(u,v)*, son perpendiculares a la dada las rectas de vector director...

a) (–u,–v)
b) (–v,u)
c) (v,u)
d) (–u,–v)
e) Ninguno de los anteriores.

6. Los vectores ortogonales al vector *(1,1,0)* son

a) sólo los de la forma (0,0,z).
b) los de la forma (x,–x,z).
c) sólo los de la forma (x,–x,0).
d) sólo los de la forma (–x,x,0).
e) Ninguno de los anteriores.

7. Las rectas del espacio tridimensional perpendiculares a la bisectriz del primer cuadrante *x+y+* del plano *z=0* tienen dirección dada por...

a) (a,1–a,0).
b) (0,0,0).
c) (–a,a,b).
d) (1,1,1).
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

8. Los vectores ortogonales a la bisectriz del cuadrante *x–y–* del plano *xy* son...

a) múltiplos escalares (no nulos) de (–1,–1,0).
b) de la forma (a,–a,b)
c) No se puede determinar.
d) No tiene sentido.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

9. Los vectores perpendiculares a (1,1,1)...

a) son los de la forma (x,y,–x–y).
b) son los múltiplos escalares (no nulos) de (1,1,1).
c) son los vectores múltiplos escalares de (1,1,0).
d) No se puede determinar.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

10. En el espacio tridimensional, *x=y*...

a) no es ningún plano.
b) es un plano perpendicular al plano xy.
c) es un plano paralelo al xy.
d) es un plano perpendicular al plano vertical yz.
e) Ninguno de los anteriores.

11. Dados los puntos *A,B,C* no alineados del espacio tridimensional, $AB \wedge AC$

a) es un vector perpendicular al plano ABC.
b) es un vector paralelo a AB.
c) es un vector paralelo a AC.
d) es perpendicular a AC, pero no a BC.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

12. ¿Cómo obtener un vector ortogonal a *w* y a *u*?

a) No se puede obtener.
b) w - u
c) Mediante $u \wedge w$, pero no $w \wedge u$
d) $u \wedge w$
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correta

13. Si *P,Q,R* son puntos no alineados del plano *ax+by+cz+d=0*, y *N=(a,b,c)*,...

a) N es ortogonal a PQ y a PR.
b) N es ortogonal a PQ, pero no a PR.
c) N no es múltiplo escalar del producto vectorial $PQ \wedge PR$.
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

14. Si los vectores *(1,a,1), (2,1,–1)* son ortogonales, es *a*=...

a) –1
b) 0
c) 1

d) No se puede determinar.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

15. Si los vectores *(1,a,–1), (2,2,b)* son ortogonales, se cumple

a) b=0
b) b=2.a–2
c) b=2.a+2
d) Ninguno de los anteriores.

16. Dada una recta *r* del espacio tridimensional,...

a) hay una única dirección perpendicular a r.
b) hay exactamente dos direcciones perpendiculares a r.
c) hay infinitas direcciones perpendiculares a r.
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

17. Si dos rectas tridimensionales, de vectores directores respectivos *u,v*, definen la misma dirección, entonces

a) u.v=0
b) u v = 0
c) u v ^{1} 0
d) v u ^{1} 0
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

18. El punto del segmento AB que dista de B ¼ de la distancia de A a B, se obtiene mediante la parametrización A+t(B–A) mediante

a) t=1/4
b) t=3/4
c) t=1
d) t=2/4
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

19. Si *w* es unitario, *P=A+tw* dista 300 unidades de A si...

a) t=1
b) t=1/2
c) t=300
d) t=300/2
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

20. Sea *A* el punto situado sobre la bisectriz del cuadrante de coordenadas no negativas (x ≥ 0,y ≥ 0) del plano horizontal *z=0*, ya que dista 200 unidades del origen de coordenadas. Entonces:

a) A=(200,200,0)
b) A=200(1,1,0)
c) A=(200cos(π/3),200sin(π/3),0)
d) A=(200cos(π/4),200sin(π/4),0)
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

21. Si T_c indica la traslación de vector *C* y 120(π/180)R indica la rotación de ángulo a respecto del origen *O*, la rotación de ángulo a respecto del punto *C* se puede obtener como (leyendo de derecha a izquierda)...

a) $T_C \; o \; R_o^a \; o \; T_{-C}$
b) $T_{-C} \; o \; R_o^a \; o \; T_C$
c) $T_{-C} \; o \; R_o^a$
d) $R_o^a \; o \; T_{-C}$
e) $T_{-C} \; o \; R_o^a$
f) Ninguno de los anteriores.

22. Indicar cuál de las ecuaciones siguientes corresponde a la rotación antihoraria en el plano bidimensional respecto del origen (a ≥ 0):

a) x'=x cos a+y sin a; y'=–x sin a + y cos a
b) x'=x cos a+y sin a; y'=–x sin a + y cos a
c) Ninguna de las anteriores.

23. Considérese la parábola *P0*, de ecuación *y=2x2 + 12*, y la parábola *P1*, de ecuación *x=-2y2 + 13*. Considérense varias secuencias ordenadas de transformaciones geométricas (leyendo de derecha a izquierda). Indicar cuál (o cuáles) transforma la figura *P0* en la figura *P1* (si hay alguna).

a) $T_{(13,0)}\ o\ R_o^{9}0\ oT_{(0,-12)}$
b) $T_{(13,0)}\ o\ R_o^{9}0\ oT_{(-12,0)}$
c) $T_{(0,-12)}\ o\ R_o^{90}\ oT_{(13,0)}$
d) $T_{(13,0)}\ o\ R_o^{-9}0\ oT_{(0,-12)}$
e) Ninguna de las anteriores.

24. En el plano bidimensional, la rotación antihoraria de 90 grados respecto del origen de coordenadas tiene ecuaciones...

a) x'=y, y'=x
b) x'=–y, y'=x
c) x'=y,y'=–x
d) x'=x–y, y'=x+y
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

25. En el plano bidimensional, la rotación horaria de 90 grados respecto del origen de coordenadas tiene ecuaciones...

a) x'=y, y'=x
b) x'=–y, y'=x
c) x'=y,y'=–x
d) x'=x–y, y'=x+y
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

26. Las ecuaciones de la traslación de vector (2,3) son...

a) x'=x+2, y'=y+3
b) x'=x–2, y'=y–3
c) x'=2x, y'=3y
d) No se puede efectuar.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

27. La matriz de la transformación afín $\begin{cases} x' = 2x+4y+3 \\ y' = -x+6y+5 \end{cases}$ es...

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

28. Dada la afinidad de matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y de vector de traslación $W = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, sus ecuaciones son...

a) x'=2x–y+5,y'=–2y+6
b) x'=–x–2y+5, y'=2x+6
c) x'=2x+5, y'=–x–2y+6

d) x'=–2y+5,y'=2x–y+6
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

29. El cambio de escala respecto del origen que triplica la dimensión según el eje *Ox* y duplica la dimensión según el eje *Oy* tiene ecuaciones...

a) x'=(1/3)x, y'=(1/2)y
b) x'=3x, y'=2y
c) x'=2x, y'=3y
d) No se puede aplicar.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

30. Dado el cambio de escala respecto del origen de ecuaciones *x'=4x, y'=(1/2)y*,...

a) duplica la dimensión en la dirección del eje Ox y cuadruplica la dimensión según el eje Oy.
b) cuadriplica la dimensión en la dirección del eje Ox y reduce a la mitad la dimensión según el eje Oy.
c) reduce en un 50% la dimensión según el eje Ox.
d) No tiene sentido.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

31. El resultado de aplicar la transformación geométrica *f(X)=AX+W*, con $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, W=\begin{pmatrix}5\\ 7\end{pmatrix}$, al punto *P=(1,–1)* es

a) (8,–6)
b) (2,0)
c) (–8,6)
d) (4,5)
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

32. Si $\begin{pmatrix}1 & a\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$, entonces *a*=...

a) 2
b) –1
c) 0
d) 4
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

33. En la transformación $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$, el transformado del origen es

a) (0,0)
b) (-1,1)
c) (1,-1)
d) (1,1)
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

34. En la transformación geométrica $\begin{cases}x'=2x+3y+9\\ y'=-x+y-6\end{cases}$ el transformado de *P=(1,1)* es...

a) (0,0)
b) (1,1)
c) (14,-6)
d) (-6,14)
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

35. 35. Si $a < 0$, la matriz de rotación $\begin{pmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{pmatrix}$ produce un giro...

a) horario.
b) antihorario.
c) No se puede determinar si es horario o antihorario: depende de a.

d) No produce ningún giro.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

36. La transformación geométrica afín *f(X)=AX* para la cual *f(1,0)=(0,1), f(0,1)=(–2,–1)* es ...

a) x'=–2x, y'=y–x
b) x'=–2y, y'=y–x
c) x'=–2y, y'=x–y
d) x'=x+y, y'=x–y
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

37. Si $a < 0$, la matriz $\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$ produce un giro

a) antihorario.
b) horario.
c) No se puede determinar si es horario o antihorario: depende de a.
d) No produce ningún giro.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

38. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ produce

a) una rotación en el sentido de las agujas del reloj.
b) una rotación antihoraria.
c) un cambio de escala.
d) una traslación.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

39. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$...

a) no puede ser matriz de rotación respecto del origen.
b) es la matriz de rotación de 180 grados, respecto del origen.
c) corresponde a una traslación en el plano.
d) no corresponde a una transformación afín.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

40. La matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es...

a) la matriz de la rotación horaria de 90 grados respecto del origen de coordenadas.
b) la matriz de la rotación antihoraria de 180 grados respecto del origen de coordenadas.
c) la matriz de una traslación.
d) la matriz de la rotación antihoraria de 90 grados respecto del origen de coordenadas.

41. El simétrico del punto *P=(a,b,c)* respecto del plano de coordenadas *xz* es...

a) (a,b,0)
b) (a,0,c)
c) (c,a,b)
d) (a,0,c)
e) Ninguna de las opciones anteriores.

42. Las ecuaciones de la rotación positiva de ángulo *a* respecto del eje *Ox* son...

a) x'=x; y'=y cos a–z sin a; z'=y sin a+z cos a.
b) x'=x cos a+ z sin a; y'=y; z'=–x sin a+z cos a.
c) x'=x cos a–y sin a; y'=x sin a+y cos a; z'=z.
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

43. La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$...

a) es la matriz de rotación positiva de ángulo a respecto del eje x.
b) es la matriz de rotación positiva de ángulo a respecto del eje y.
c) es la matriz de rotación positiva de ángulo a respecto del eje z.
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

44. La matriz $\begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) es la matriz de rotación positiva de ángulo a respecto del eje x.
b) es la matriz de rotación positiva de ángulo a respecto del eje y.
c) es la matriz de rotación positiva de ángulo a respecto del eje z.
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

45. La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$...

a) es la matriz de rotación positiva de ángulo a respecto del eje x.
b) es la matriz de rotación positiva de ángulo a respecto del eje y.
c) es la matriz de rotación positiva de ángulo a respecto del eje z.
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

46. Las ecuaciones de la rotación positiva de 90 grados respecto del eje *x* (vista como antihoraria desde *x+*) son...

a) x'=x; y'=z; z'=–y
b) x'=–z; y'=y; z'=x
c) x'=x; y'=–z; z'=y
d) x'=x; y=–z; z'=–y
e) Ninguno de los anteriores.

47. El simétrico del punto *P=(a,b,c)* respecto del eje de coordenadas *Oz* es

a) (–a,–b,c)
b) (–a,–b,0)
c) (a,–b,c)
d) (–a,b,c)
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

48. La matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$...

a) es la matriz de la rotación positiva de 90 grados respecto del eje Oz.
b) es la matriz de la rotación positiva de 180 grados respecto del eje Oz.
c) es la matriz de la rotación positiva de 90 grados respecto del eje Ox.
d) es la matriz de la rotación de 180 grados respecto del eje Oy.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

49. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ es la matriz de...

a) el cambio de escala respecto del origen, de factores 2 (eje x), 4 (eje y), 0.5 (eje z).
b) un cambio de escala respecto del origen que reduce a la mitad la dimensión según el eje y.
c) la traslación de vector (2,4,0.5).
d) una rotación respecto de un eje de coordenadas.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

50. La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ corresponde a...

a) una rotación respecto del eje Oy.
b) un cambio de escala de factores de escala 2,4,3.
c) la traslación de vector (2,4,3).
d) la traslación de vector (3,4,2).
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

51. Si $a < 0$, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ produce...

a) una rotación respecto del eje y, antihoraria vista desde y+.
b) una rotación respecto del eje x, antihoraria vista desde x–.
c) una rotación respecto del eje z, horaria vista desde z–.
d) un cambio de escala.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

52. La rotación de 45 grados respecto del eje perpendicular al plano $z=0$ que pasa por el punto $C=(2,5,0)$ es...

a) $T_C \, o \, R_z^{45} \, oT_{-C}$
b) $T_C \, o \, R_z^{-45} \, oT_{-C}$
c) $T_{-C} \, o \, R_z^{45} \, oT_C$
d) $T_{-C} \, o \, R_z^{-45} \, oT_C$
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

53. La composición $T_{-C} \, o \, R_z^{-45} \, oT_C$...

a) $R_z^{90} \, o \, R_y^{90}$
b) R_z^{90}
c) R_z^{-90}
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

54. La composición de rotaciones en el espacio tridimensional...

a) es siempre conmutativa.
b) en general no es conmutativa.
c) no siempre se puede efectuar.
d) sólo se puede efectuar si los ejes respectivos son perpendiculares.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

55. La matriz R_z^{-90}...

a) es una rotación de ángulo b respecto del eje x.
b) es una rotación respecto del eje y, horaria vista desde y+ si $b < 0$.
c) es una rotación respecto del eje y, horaria vista desde y+ si $b > 0$.
d) es una rotación respecto del eje y, antihoraria vista desde y– si $b > 0$.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

56. La composición $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ corresponde a efectuar...

a) primero una rotación respecto del eje x, seguida de un cambio de escala.
b) primero un cambio de escala, seguido por una rotación respecto del eje z.
c) primero una rotación respecto del eje x, seguido de otra rotación respecto del eje y.
d) primero una rotación respecto del eje z, seguido de un cambio de escala.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

57. Queremos convertir el cubo de centro el origen, longitud de arista 2, y de lados respectivamente paralelos a los ejes de coordenadas, en otro cubo situado de idéntica manera pero de arista 3. Hay que aplicar...

a) una rotación respecto del eje x.

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$

f) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

58. Si tenemos que efectuar una reducción del 50% de la dimensión de un prisma según la dirección del eje x y un incremento del 200% en la dirección del eje y, aplicaremos...

a) $\begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) No se puede aplicar ninguna transformación.

d) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) Ninguna de las anteriores.

59. Las ecuaciones de la transformación afín de matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y de vector de traslación $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son...

a) x'=x–2y–z–1; y'=–3x+3z+2; z'=4x+5y+6z+1
b) x'=–3x+3z+2; y'=x–2y–z–1; z'=4x+5y+6z+1
c) x'=4x+5y+6z+1; y'=–3x+3z+2; z'=x–2y–z–1
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

60. Las ecuaciones de la traslación de vector *(3,5,7)* son...

a) x'=x–3; y'=y–5; z'=z–7
b) x'=x+3; y'=y+5; z'=z+7
c) x'=3x; y'=5y; z'=7z

Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1. b

2. a

3. b

4. a

5. b

6. b

7. c

8. b

9. a

10. a

11. a

12. d

13. a

14. a

15. c

16. c

17. b

18. b

19. c

20. d

21. a

22. b

23. a

24. b

25. c

26. a

27. b

28. c

29. b

30. b

31. e

32. c

33. b

34. c

35. a

36. c

37. a

38. c

39. a

40. b

41. b

42. a

43. d

44. d

45. d

46. c

47. a

48. b

49. a

50. e

51. b

52. a

53. d

54. b

55. b

56. d

57. e

58. b

59. a

60. b