Anexo 1. Aspectos básicos y sistemas de coordenadas

Joan Trias Pairó

PID_00150819

Universitat Oberta de Catalunya

Índice

Objetivos

Aspectos básicos

En este apartado recordaremos algunas nociones básicas de la geometría y del álgebra necesarias para el seguimiento del curso. Algunas de las nociones, especialmente las del cálculo vectorial y matricial básico, pueden consultarse en este apartado. No tenemos pretensiones de exhaustividad ni espíritu de generalizar por generalizar: indicaremos lo que sea estrictamente imprescindible. También damos por hecho que el lector ya ha asimilado estos conceptos en algún momento de su vida. El objetivo es servir de recordatorio y para alguna consulta eventual. Se supone que el lector ya tiene conocimientos previos de geometría en general, de geometría analítica y trigonometría, así como de rudimentos de cálculo vectorial.

Sistemas de coordenadas

En este apartado se revisan algunos rudimentos de vectores y bases del espacio vectorial. Se introducen las coordenadas y el importante concepto del vector posición, que permite vectorializar la geometría. Aspectos importantes son la parametrización de la recta, el segmento, la circunferencia y la esfera, todo ello con la finalidad de disponer de ejemplos de objetos, desde el principio, con los cuales se pueda hacer cálculo geométrico.

1. Aspectos básicos

1.1. Números reales

En geometría necesitamos trabajar constantemente con **cantidades numéricas**: magnitudes angulares para realizar rotaciones, factores de escala para efectuar cambios de escala, expresión de las coordenadas de un punto o de las componentes de un vector.

Formarán parte del conjunto de los números utilizados el conjunto de los números **reales** (R), los siguientes:

Los números **naturales**: 0, 1, 2, 3...

Los números **enteros** : ...–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3... (que contienen los naturales)

Los números **racionales**: 3,2, 5/6, 0,5... (que contienen los enteros)

El resto: π, 2π, $\pi/2$, $\pi/4$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$...

1.1.1. Notación decimal

No existe unanimidad para la expresión de decimales. En algunos contextos, como en el lenguaje de programación Actionscript de Flash, debe hacerse con punto: 3.56. En otros, debe usarse la notación de coma.

En el uso de cualquier *software*, el lector deberá tener en cuenta este detalle y averiguar siempre cuáles son los convenios en uso en cada caso concreto, incluso cuando se produzca algún tipo de error debe tener presente la posibilidad de haber introducido incorrectamente alguna cantidad numérica con decimales.

1.1.2. Constantes numéricas: el número π

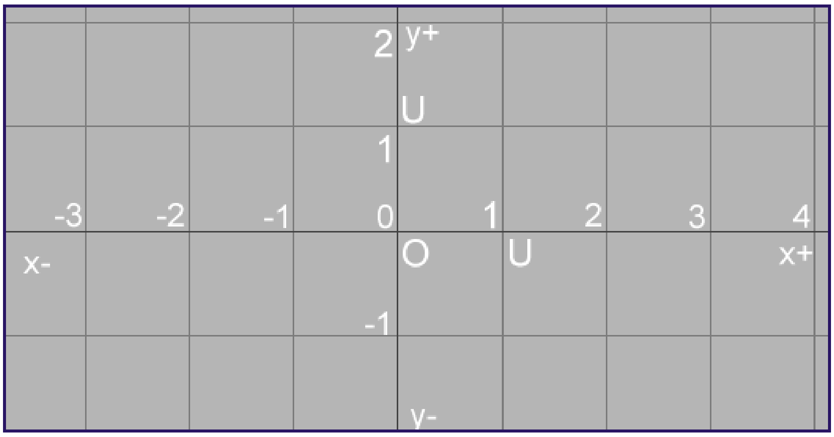
Los lenguajes de programación suelen tener incorporadas, por medio de palabras clave utilizables por el programador, varias constantes numéricas especialmente interesantes por la frecuencia de uso. Esto ocurre, por ejemplo, en el caso de Actionscript, en el que el valor de π se encuentra dentro del objeto *Math*, y puede hacerse referencia a él como Math.PI. Puede usarse de esta forma en toda clase de expresiones y fórmulas matemáticas.

1.1.3. Recta real

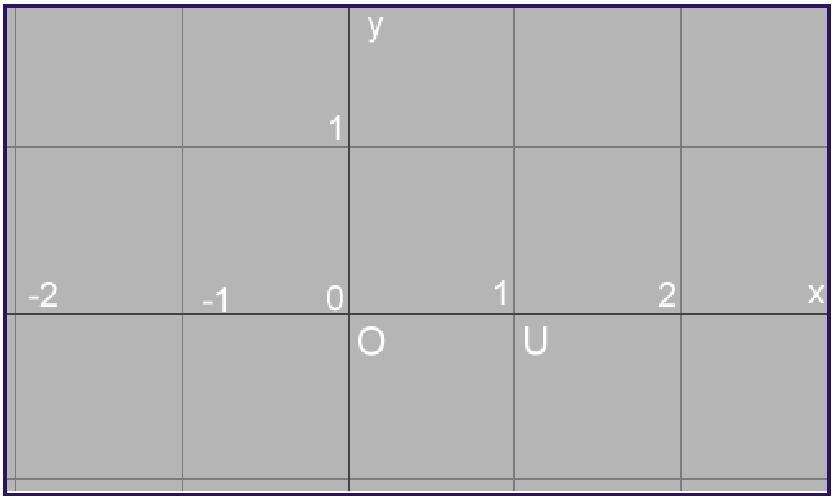
Es bien sabido que es posible representar los números reales como puntos sobre una recta, la que será la recta real.

Dibujemos una recta. Seleccionemos un punto cualquiera de la misma, punto con el que representamos el número 0. Fijamos otro punto arbitrario (por ejemplo, a la derecha del punto que representa el 0, aunque podría ser a la izquierda), punto con el que representamos el número 1. De este modo fijamos sobre la recta la **unidad de medida** (y también una orientación sobre la recta, de las dos posibles). Una vez fijada esta unidad de medida de longitudes sobre la recta, podemos representar los números por puntos.

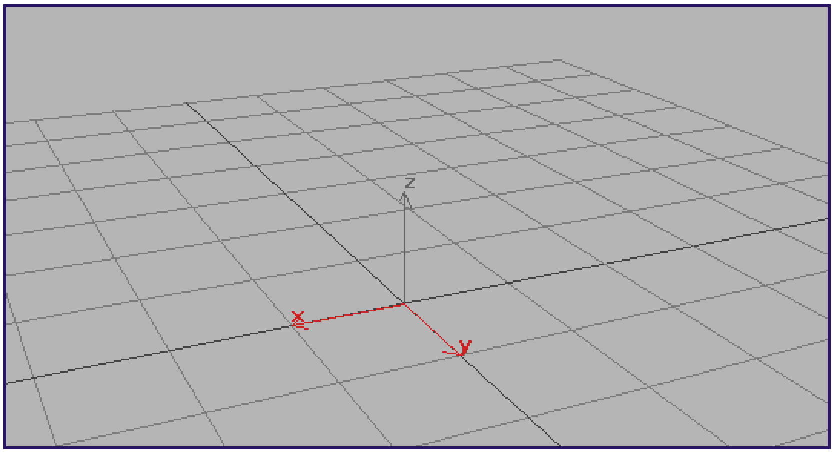
Múltiplos enteros de la longitud producen la representación de los números naturales y sus simétricos con respecto al 0, el resto de los números enteros. Este hecho puede realizarse en dos dimensiones, lo que daría lugar a una cuadrícula en el plano que permite situar los puntos. En esencia, un sistema de coordenadas, en el que se tiene un origen, unos ejes mutuamente perpendiculares, una unidad de medida sobre los ejes (por lo general la misma) y un sentido de avance, recorrido u orientación de cada uno de dichos ejes.



No hay ningún problema conceptual en elegir otras medidas sobre la recta para la **unidad** de medida:



Este procedimiento puede generalizarse al plano de puntos, o al espacio tridimensional, lo que da lugar a las coordenadas y sistemas de coordenadas.



1.1.4. Intervalo numérico y conjuntos

Recordad que la notación $x \in$ A significa que el elemento x es de A, pertenece a A. La notación $x \notin$ A significa que el elemento x no pertenece al conjunto A.

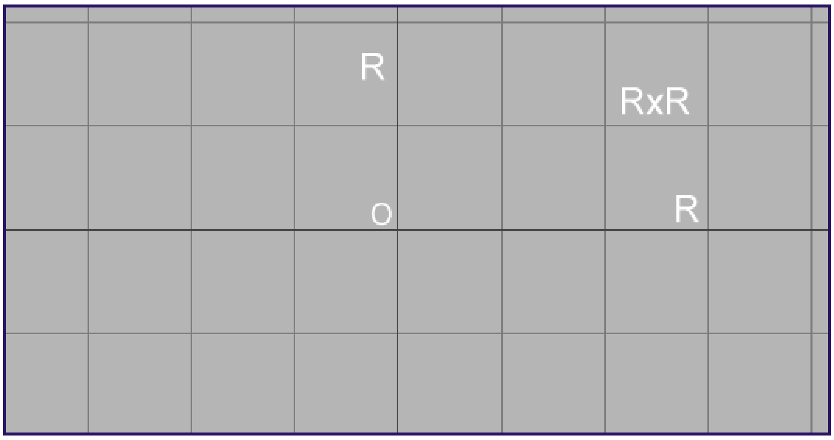
En ocasiones expresaremos los puntos de una curva (trayectoria de animación) o los de una superficie en términos de parámetros, cantidades numéricas que varían en el conjunto de los números (reales), normalmente desde un valor inicial t_1 hasta un valor final t_2 (con $t_1 \leq t_2$). Es decir, que si t es el parámetro, se cumple $t_1 \leq t \leq t_2$. Se supone implícitamente la idea de una variación **continua** a lo largo del intervalo. El conjunto de los valores numéricos comprendidos entre los valores anteriores es el intervalo numérico $I=[t_1, t_2]$. Se expresa de forma equivalente, en el nivel de notación, $t\in[t_1, t_2]$. Recordad que el símbolo $\in$ significa "pertenece".

Conjuntos

Indicaremos por el $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ conjunto de los puntos del plano bidimensional, conjunto de **pares** ordenados de números reales, es decir,

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

A veces se indica como $\mathbb{R}^2$.



Indicaremos mediante $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ el conjunto de los puntos del espacio tridimensional, conjunto de **ternas** ordenadas de números reales, es decir,

A veces se indica como $\mathbb{R}^3$

A veces, para describir los puntos de una forma geométrica, resulta cómodo su expresión en términos de conjuntos. En la misma expresamos los puntos utilizando algún tipo de relación o relaciones que los caractericen o, equivalentemente, de propiedades que satisfacen los puntos del conjunto, y sólo éstos. Veamos a continuación algunos ejemplos importantes de la descripción formal conjuntista con propósitos puramente de práctica.

Ejemplos

Ejemplo 1

¿Cómo expresar el conjunto de los puntos de una circunferencia en el plano?

Los puntos P = (x,y) de la circunferencia C de centro el origen de coordenadas O y radio R son los que distan R del origen, circunstancia que se traduce en satisfacer la propiedad $x^2 + y^2 = R^2$. Sobre esta base, veamos cómo podemos expresar como conjunto, en términos formales, la circunferencia:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = R^2\}$$

Los puntos de la circunferencia C se caracterizan por esta relación: $x^2 + y^2 = R^2$. Es la ecuación de la circunferencia indicada.

Ejemplo 2

El eje Ox del sistema de coordenadas del plano de coordenadas bidimensional.

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = 0\}$$

Por este motivo se dice que y = 0 es la ecuación del eje x en el plano bidimensional, ya que es la propiedad que caracteriza los puntos de dicho eje.

Ejemplo 3

El semieje de las x+ del sistema de coordenadas del plano bidimensional.

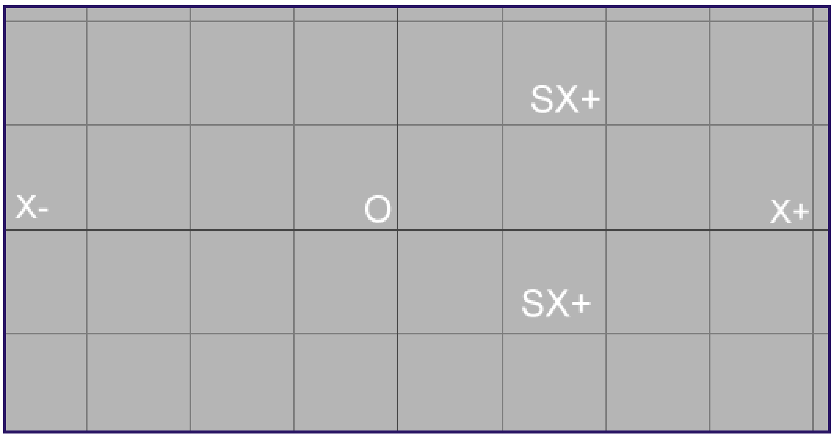
$$X^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = 0; x \geq 0\}$$

Análogamente, el semieje de las x– del sistema de coordenadas del plano bidimensional se puede expresar de la siguiente forma:

$$X^- = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = 0; x \leq 0\}$$

Ejemplo 4

¿Cómo expresar el semiplano de las x positivas en el plano bidimensional?

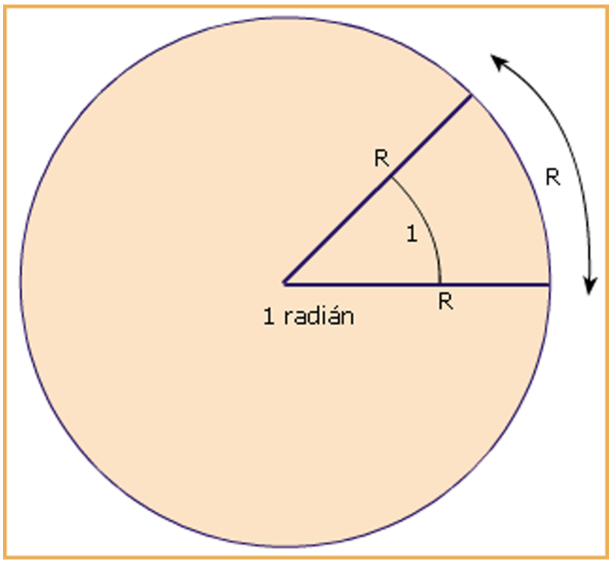


1.2. Magnitudes angulares

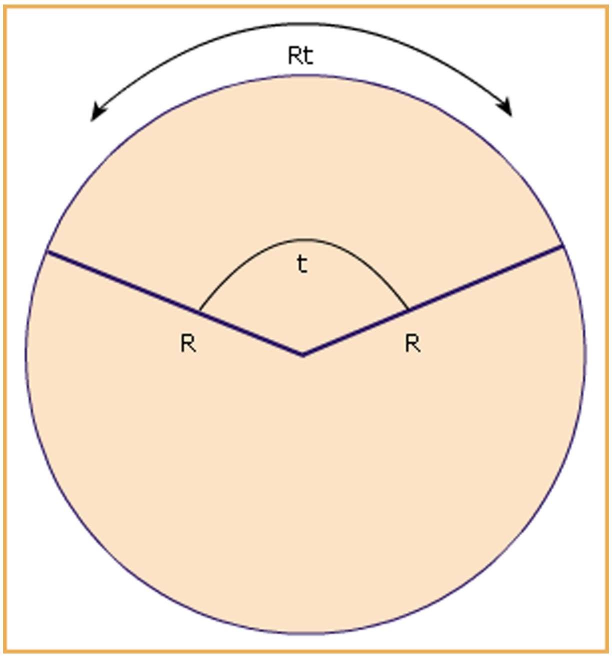
Existen (y coexisten mezcladas) varias maneras de medir y expresar los ángulos. La unidades de medida más usuales son el **radián** y el **grado sexagesimal**.

- **Radianes**

Consideremos una circunferencia de radio R, de centro C. Se consideran ángulos de vértice C, determinados por dos puntos distintos sobre la misma. Considerando un recorrido antihorario, cada ángulo determina un arco de la circunferencia, que tiene una longitud *s*.



Un **radián** es el ángulo cuyo arco tiene longitud igual al radio de la circunferencia. En el esquema anterior se muestra esta situación.
En general, si tenemos un ángulo t, según la descripción anterior, en una circunferencia de radio R, la longitud del arco correspondiente es $s = Rt$:



- **Grados sexagesimales**
  Si consideramos la circunferencia de centro el punto C y la dividimos en 360 partes iguales, un grado sexagesimal es el ángulo correspondiente a dos subdivisiones consecutivas A,B, con vértice en C (es decir, el ángulo ACB). Esto significa que un ángulo recto son 90 grados y un ángulo llano, 180. La circunferencia completa corresponde a 360 grados.

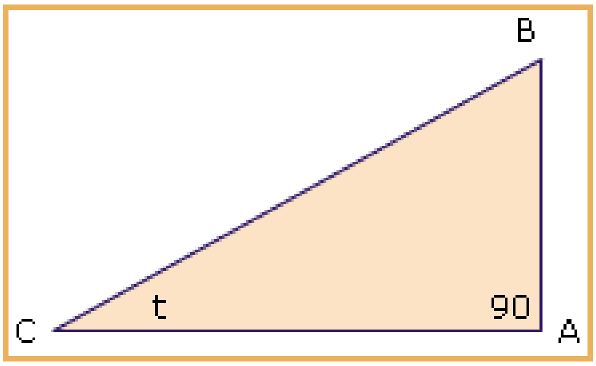
Cuando hablemos de grados nos referiremos siempre a los grados sexagesimales (existe otra unidad de medida, la de los grados centesimales, correspondientes a la división de la circunferencia en 400 partes iguales, pero que no consideramos aquí).
Todos los ángulos en Flash se expresan en **radianes**.

- **Interconversión**
  Convertir grados en radianes y viceversa es muy sencillo, teniendo en cuenta que 180 grados son π radianes.
  La razón $gpr = \frac{180}{\pi}$ nos da el número de grados por radián y, en consecuencia, por ella debemos multiplicar si queremos convertir radianes en grados. Por tanto, R radianes son gprR grados, es decir, $\frac{180}{\pi}R$ grados.
  De forma análoga, la razón $rpg = \frac{\pi}{180}$ nos da los radianes por grado y, por tanto, pasamos de grados a radianes multiplicando por la misma. Por tanto, *G* grados son rpg*G radianes, es decir, $\frac{\pi}{180}G$ radianes.

1.3. Trigonometría básica

La trigonometría que usaremos es absolutamente elemental.

Consideremos el triángulo rectángulo de la figura, siendo el ángulo recto el correspondiente al vértice *A*. Sea *t* el ángulo en el vértice *C*, es decir, el ángulo *ACB*. En este caso, *AB* es el cateto opuesto al ángulo en cuestión, y *CA* es el cateto contiguo. El lado *CB* es la hipotenusa del triángulo rectángulo *ABC*.



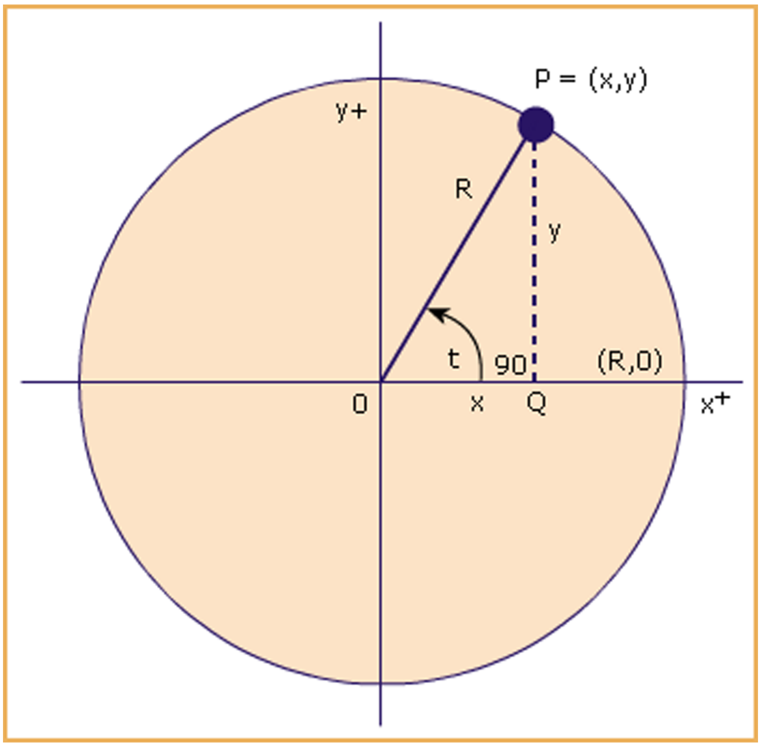
Entonces podemos definir el **seno**, el **coseno** y la **tangente** del ángulo *t* (usaremos indistintamente las notaciones sin, cos y tan):

$$\sin t = \frac{AB}{CB},\quad \cos t = \frac{CA}{CB},\quad \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{AB}{AC}$$

En muchas ocasiones, estas relaciones se utilizan para calcular AB y AC, ya que normalmente estaremos en algún contexto en el que las funciones trigonométricas serán calculables y calculadas por el sistema. Entonces resulta:

$$AB = CB\sin t; AC = CB\cos t$$

Un primer ejemplo de uso de las funciones trigonométricas, muy práctico para aplicaciones posteriores, es la expresión de las coordenadas de los puntos de la circunferencia en términos de funciones paramétricas, usando el ángulo que se indica en el gráfico, ángulo polar del punto *P*:



Analizando el esquema observamos un triángulo rectángulo, *POQ*, con ángulo recto en *Q*. Expresemos las coordenadas *x*, y del punto *P* en función del ángulo *t*. Escribir *x, y* en función de *t* no es más que un simple ejercicio de trigonometría básica:

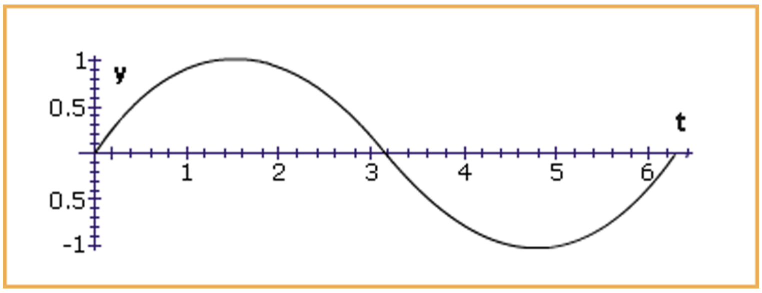
$$x = R\cos t, y = R\sin t$$

Ésta es una fórmula muy cómoda para obtener la expresión de los puntos de la circunferencia, circunstancia que permite generarlos.

- **Tabla de las razones trigonométricas más usuales**
  Resulta útil disponer de algunos valores directamente, listos para ser usados.

grados	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º,-90º	360º
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0		0

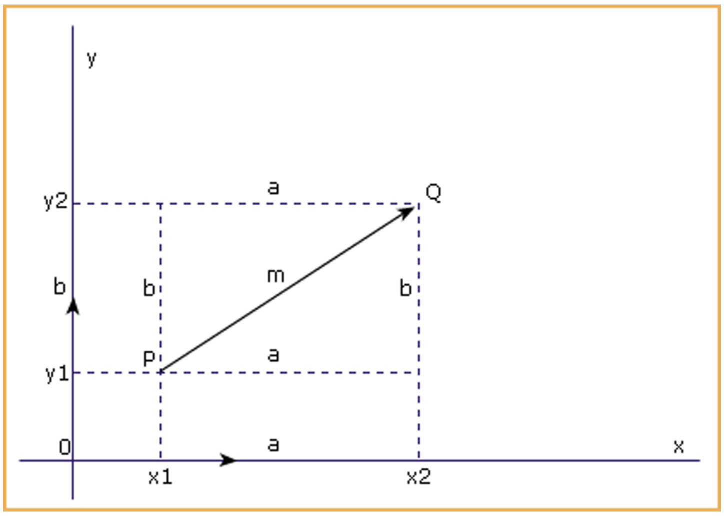
Las razones trigonométricas pueden calcularse para los valores *t* de un intervalo o de la recta. Este hecho da lugar a las funciones trigonométricas, tales como *sin t, cos t* y otras. Observad, por ejemplo, un gráfico de la función **seno** en el intervalo [0,2π] (periódica, de periodo 2π), es decir, de *y = sin t*:



1.4. Vectores y cálculo vectorial básico

En múltiples contextos se hace referencia a cantidades (variables, constantes) **escalares** y, análogamente, **vectoriales**. En el primer caso, las cantidades son simplemente **numéricas**. Así pues, en todo lo que sigue un escalar es un número, no un vector. En el segundo caso, las "cantidades" son pares o ternas de números, escalares, ordenados, como ocurre cuando expresamos puntos del espacio tridimensional como ternas escalares, como por ejemplo *w = (2, 4, –6)*. Son ternas ordenadas, ya que los puntos (2, 4, –6) y (4, 2, –6) no son el mismo.

- **Componentes**
  Si tenemos el vector *w = (a, b, c)*, entonces *a, b, c* son sus **componentes** ordenadas. Si *w = (2, 5, –3)*, la **primera componente** de *w* es 2, la **segunda componente** de *w* es 5; la **tercera componente** de *w* es –3. En geometría, las componentes de un vector son siempre cantidades o magnitudes escalares. Un vector es una magnitud no escalar.
  El número de componentes es la dimensión del vector. Así, el vector (2, –4, 6) es un vector 3-dimensional, tridimensional; el vector (0, –3) es un vector bidimensional, de dimensión 2. Los vectores tridimensionales son fundamentales para el estudio de la geometría en dimensión 3, geometría que está en la base del grafismo y la animación 3D.
  En el caso del vector *m = PQ*, la expresión en componentes es *m = (a, b)*.



1.4.1. Operaciones vectoriales básicas

Las operaciones más básicas con vectores son la **suma** y el **producto por escalares**. La suma de vectores sólo puede realizarse con vectores de la misma dimensión. Se define como la suma "componente a componente", y resulta en concreto:

En dimensión 2: $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$

En dimensión 3: $(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$

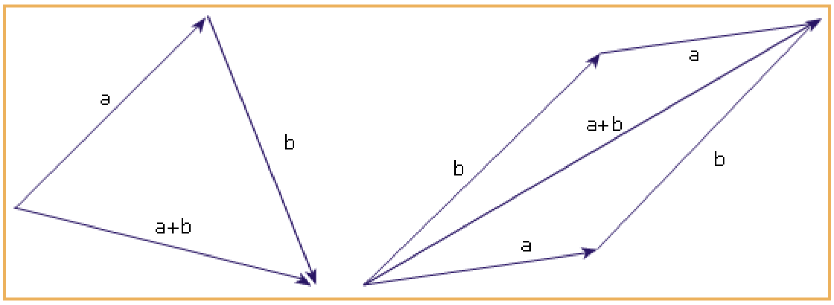
El producto por escalares es también por componentes: si t es un escalar y $w = (a, b, c)$ es vector, se define $t\,w = t\,(a, b, c) = (ta, tb, tc)$. Así, pues:

En dimensión 2: $t\,(a, b) = (ta, tb)$.

En dimensión 3: $t\,(a, b, c) = (ta, tb, tc)$.

Por ejemplo, 3(5, 6) = (15, 18) o bien –(5, 6) = (–5, –6).

En todo lo anterior hemos expuesto cuáles son las operaciones con vectores en términos analíticos o numéricos. En términos geométricos, veamos qué significa la suma de vectores. La suma de vectores, tanto en el caso bidimensional como en el tridimensional, funciona según la regla del paralelogramo, tal como se muestra en el gráfico que sigue:



1.5. Matrices y cálculo matricial básico

Esencialmente utilizaremos el cálculo matricial en dimensión 2 y 3, y especialmente en dimensión 3, para las aplicaciones a la geometría tridimensional. De acuerdo con este criterio, daremos las fórmulas específicas de forma separada por dimensiones.

1.5.1. ¿Qué es una matriz?

A efectos de operaciones matriciales, consideraremos una matriz como una caja formada por *n* filas y *m* columnas, lo cual produce una colección de *nxm* posiciones, que están ocupadas por números reales. Si por ejemplo la matriz se indica por *A*, indicaremos por a_{ij} el elemento que ocupa la fila *i* y la columna *j*. Por lo general consideramos que la primera fila es la de arriba y la primera columna, la de la izquierda.

- **Matrices 2 x 2**
  En el caso de la matriz siguiente, se trata de una matriz cuadrada, de 2 x 2, en la que tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

  Si, por ejemplo, es $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, entonces es $a_{11} = 2; a_{12} = -3; a_{21} = 4; a_{22} = 0$.

- **Matrices 3 x 3**
  La siguiente matriz es una matriz cuadrada, de 3 x 3, es decir, de tres filas y tres columnas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  Si, por ejemplo, es $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & -2 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, entonces es:

a_{11} = -1;a_{12} = 2;$_{13}$ = 5;$_{21}$ = 4;a_{22} = -3;a_{23} = - 2a;$_{31}$ = 7;a_{32} = 6;a_{33} = 0.

- **Vector columna 3 x 1**
  Nada impide considerar matrices con distintos número de filas y de columnas. Un ejemplo de uso en álgebra y geometría es la **matriz columna**, la de dimensiones 3 x 1, de tres filas y una columna, con la que a veces expresamos los vectores del espacio tridimensional, por lo general con la finalidad de efectuar operaciones matriciales, como se ve en el siguiente apartado.
  Así, el vector *w=(a,b,c)* se puede expresar en formato matricial como:

$$W = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

  Se trata de un vector columna o, equivalentemente, de una matriz columna.

- **Matrices como reservorio de vectores**
  En determinadas ocasiones, especialmente en relación con transformaciones geométricas, se pueden utilizar matrices para almacenar vectores en forma compacta, tanto en el caso bidimensional como en el tridimensional. La forma en que lo haremos será por columnas: se supone que tenemos una colección ordenada de vectores, de manera que tiene sentido hablar del primer vector, del segundo, etc., y efectuar un intercambio en el orden significa considerar cosas distintas; pues bien, el primer vector formará la primera columna; el segundo vector, la segunda, y así sucesivamente.
  Si, por ejemplo, $u = (a, b, c)$, $v = (a', b', c')$, $w = (a'', b'', c'')$, la matriz asociada a la terna ordenada de vectores *{u,v,w}* será

$$M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

  es la **matriz asociada** a los **vectores** {u,v,w}.

1.5.2. Operaciones matriciales

Suma de matrices

La idea es que la suma de dos matrices se efectúa elemento a elemento, de manera que, separadamente por dimensiones, tendremos las siguientes definiciones:

En dimensión 2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

En dimensión 3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \\ 4 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

- **Notación**
  Si *A,B* son matrices, se expresa la suma como *A* + *B*, y siempre pueden sumarse.

- **Propiedades de la suma de dos matrices**
  1 Conmutativa: $A + B = B + A$
  2 Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
  Observación. Para que tenga sentido la operación de suma de matrices, ambas deben tener el mismo número de filas y el mismo número de columnas.
  La suma de dos vectores se corresponde con la suma de dos matrices columna, es decir, que la suma $(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$ puede expresarse de forma equivalente en términos matriciales como:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}$$

  Ésta será la situación en la que normalmente deberemos sumar en el contexto de esta geometría básica.

- **Producto por un escalar**
  Multiplicar una matriz por un (número) escalar consiste en multiplicar cada elemento por el escalar en cuestión:

$$mA = m\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} \\ ma_{21} & ma_{22} \end{pmatrix}$$

$$mA = m\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}$$

- **Producto de matrices**

  Para matrices cuadradas 2 x 2, sean:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

  El producto *AB*, en el orden dado, se define como:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

  Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

  Supongamos que tenemos las matrices cuadradas 3 x 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

  El producto de las mismas, en el orden que se indica, se define de la siguiente manera:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

  Para que se pueda efectuar el producto matricial en el orden indicado no hace falta que ambas matrices sean cuadradas. La condición que debe cumplirse es que el número de columnas de *A* coincida con el número de filas de *B*.

  Definición general. En general, si *A* es una matriz de *n* filas y *m* columnas, y *B* es una matriz de *m* filas y *r* columnas, si *C*=*AB*, y c_{ij} es el término general de la matriz producto, entonces es:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$$

  Observad que se ha usado la fila *i* de *A* y la columna *j* de *B*.

Asociatividad. El producto matricial es asociativo. Esto significa que el producto *ABC* puede calcularse de manera equivalente como *A(BC)* o *(AB)C*.

No conmutatividad. En general, el producto de matrices no es conmutativo. En general, salvo casos especiales, los productos matriciales *AB, BA* no coinciden. Por tanto, hay que respetar el orden de los factores. Una traducción de este hecho es que las transformaciones geométricas que se puedan aplicar a un objeto en general no conmutan.

Es fácil encontrar ejemplos de no conmutatividad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicar una matriz a un vector. En el curso de efectuar construcciones geométricas mediante transformaciones geométricas, tendremos que aplicar la transformación a un vector, y ello se podrá realizar matricialmente, circunstancia que nos lleva a multiplicar una matriz por un vector columna. Es un simple **caso ordinario de producto de matrices** que, no obstante, explicitamos:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

La notación usualmente escogida es la siguiente (aunque puede variar según textos): *AX*.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Por el intermedio de la matriz, columna de un vector, las operaciones vectoriales pueden expresarse matricialmente.

2. Sistemas de coordenadas

2.1. Vectores y base del espacio vectorial

Podemos considerar el conjunto de los vectores de la forma *(x, y)*, de *R x R*, con las reglas habituales de suma y producto por escalares componente a componente, conjunto de los vectores del espacio bidimensional. De forma análoga, se puede considerar el conjunto de los vectores de la forma *(x, y, z)*, de *R x R x R*, con las reglas habituales de operaciones componente a componente.

- **Combinación lineal**

Dados los vectores $u_1,...,u_n$, una **combinación lineal** de los mismos, de escalares respectivos $a_1,...,a_n$, es el vector $u_1a_1+...+u_na_n$. Por ejemplo, $2(1, 2, 0) - (-1, 2, 3) + 5(-1, 2, 7)$ es una combinación lineal de los vectores $V1 = (1, 2, 0)$, $V2 = (-1, 2, 3)$, $V3 = (-1, 2, 7)$. El vector es $2(1, 2, 0) - (-1, 2, 3) + 5 (-1, 2, 7) = (2, 4, 0) + (1, -2, -3) + (-5, 10, 35) = (-2, 12, 32)$. Por tanto, el vector $(-2, 12, 32)$ es combinación lineal de los vectores $V1$, $V2$, $V3$. Análogamente, podemos ver ejemplos en el caso bidimensional.

- **Generadores**

Observad que $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$. Si indicamos por e_1 = (1,0,0,), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1), entonces todo vector de *R x R x R* se puede escribir como combinación lineal de los anteriores, como se ha visto, de modo que se genera así el resto de los vectores. Aparte de los vectores anteriores, puede haber otros para los cuales se cumpla la misma propiedad, la de "generar" todos los vectores del espacio. Se dice en este caso que los vectores $\{e_1,e_2,e_3\}$ **generan el espacio de vectores**, o bien son generadores, o constituyen un sistema de generadores del espacio.

- **Dependencia e independencia lineal**

Por otro lado, si consideramos los vectores anteriores $\{e_1,e_2,e_3\}$, es fácil ver que ninguno de los mismos puede escribirse como combinación lineal de los otros: éste es el concepto de **independencia lineal**, y los vectores son **linealmente independientes**.

Un vector no nulo define una dirección. Dos vectores no nulos son linealmente independientes si no definen la misma dirección, si no están alineados. En el caso del espacio tridimensional, tres vectores son linealmente independientes si, además de lo anterior, ninguno de ellos "pertenece al plano determinado por los otros dos".

- **Base de un espacio vectorial**

Una **base** del espacio es un conjunto de vectores (ordenados) $\{u_1,u_2,u_3\}$ para los cuales se cumple:

1) Son generadores del espacio vectorial. Todo vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\{u_1,u_2,u_3\}$.

2) Son linealmente independientes. Todos los vectores son no nulos y ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás.

- **Determinantes**

El determinante de dos vectores bidimensionales $u = (a_{11},a_{21})v = (a_{12},a_{22})$ se define como:

$$\det(u,v) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Dos vectores bidimensionales son linealmente independientes si su determinante es no nulo. Esto es suficiente, en este caso, para que sean base.

El determinante de tres vectores tridimensionales se calcula de la forma siguiente.

Si $u = (a_{11},a_{21},a_{31}),v = (a_{12},a_{22},a_{32}),w = (a_{13},a_{23},a_{33})$, es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

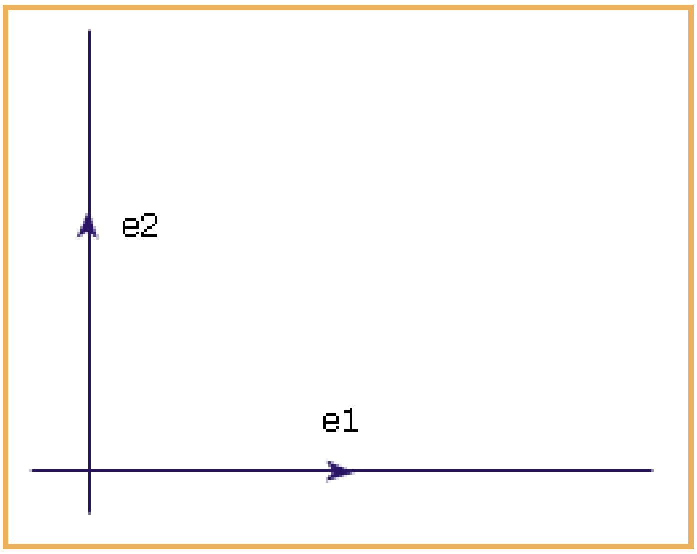
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Esta cantidad se denota también mediante *det(u, v, w)*.

Se puede averiguar si tres vectores tridimensionales son linealmente independientes en términos de la anulación del determinante: **el determinante es nulo si y sólo si los vectores son linealmente dependientes**. De forma equivalente, es no nulo si y sólo si son linealmente independientes.

- **Caso del plano bidimensional**

El vector arbitrario $w = (x, y)$ del espacio bidimensional puede expresarse como $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, es decir, como combinación lineal de los vectores. El par ordenado de vectores $\{e_1,e_2\}$ es una base del espacio vectorial e_1 = (1,0),e_2 = (0,1) R x R. Es la llamada base canónica del espacio bidimensional R x R.

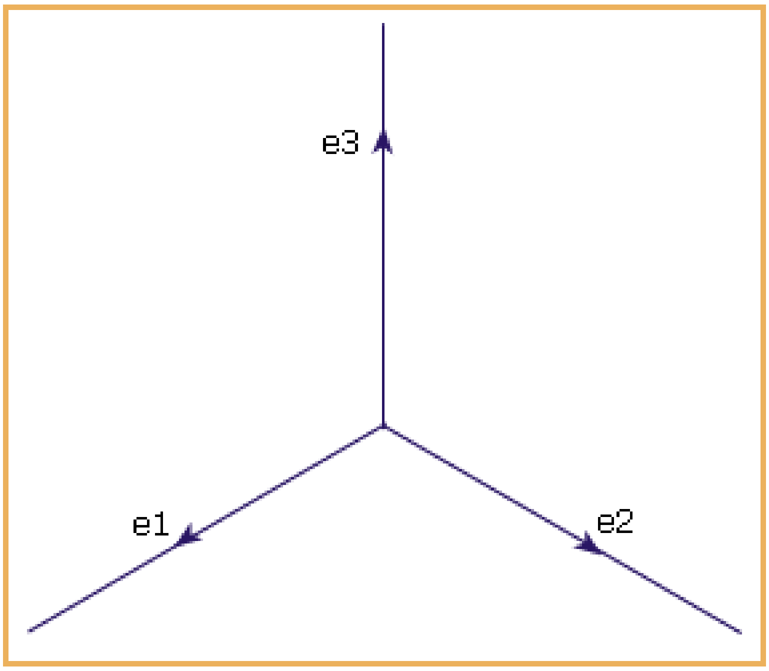


Puede comprobarse efectivamente que

$$\det(e_1,e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

- **Caso del espacio tridimensional**

Una base del espacio tridimensional R x R es e_1 = (1,0,0),e_2 = (0,1,0),e_3 = (0,0,1). Ésta es la llamada base canónica.



Si tenemos tres vectores linealmente independientes en el espacio vectorial tridimensional, se puede probar que automáticamente son generadores del espacio, por lo que no es preciso efectuar tal comprobación en este caso. Existe una manera simple de decidir si tres vectores del espacio 3-dimensional son linealmente independientes o no, mediante el cálculo de su **determinante**.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 0 - 0 - 0 - 4 = -8 \neq 0$$

Por tanto, los vectores $u = (0, 2, 1)$, $v = (-1, 3, 1)$, $w = (0, 4, -2)$ son linealmente independientes. Los vectores son base del espacio vectorial.

Puede comprobarse en el caso de los vectores $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. En efecto,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$$

2.2. Coordenadas cartesianas

La geometría es la base del grafismo tridimensional y la animación. Los objetos geométricos están constituidos, en última instancia, por puntos del espacio. Es imprescindible describir la posición de un punto para poder tratarlo en forma analítica, en forma tal que se pueda calcular con él.

Para ello se utilizan los **sistemas de coordenadas**.

Un sistema de coordenadas $S = [0;\{e_1,\ldots,e_n\}]$ está formado por los siguientes elementos:

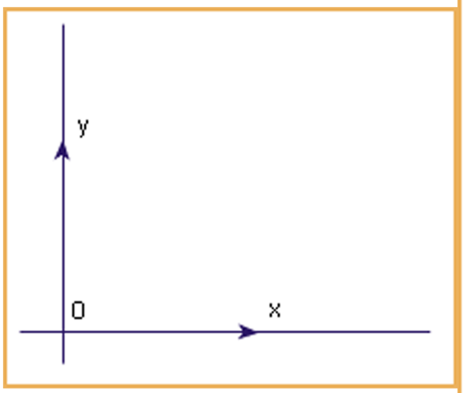
A) Un **origen** O, que es un punto del espacio de puntos.

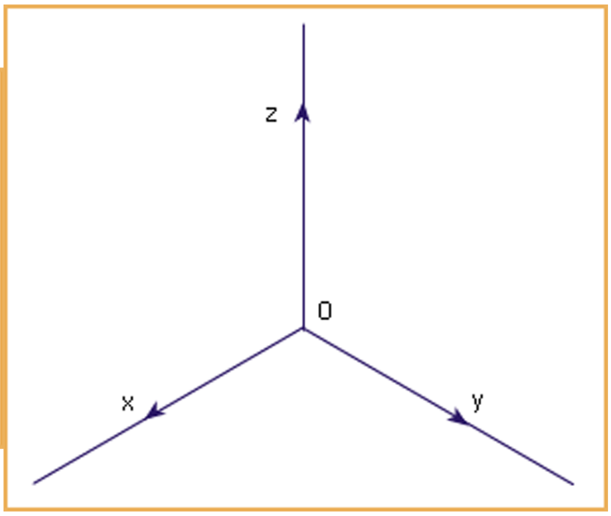
B) Una **base** $\{e_1,\ldots,e_n\}$ del espacio vectorial.

En dimensión 2, sería $S = [0;\{e_1,e_2\}]$.

En dimensión 3, sería $S = [0;\{e_1,e_2,e_3\}]$

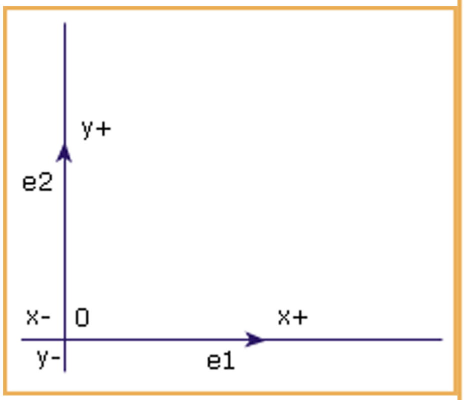
Dado un vector no nulo *w*, éste define una dirección del espacio, dirección orientada por este vector. Así quedan definidas infinitas rectas paralelas, todas de la misma dirección, la determinada por el citado vector. Cuando de estas infinitas rectas consideramos la que pasa por un punto dado A, entonces tenemos la recta que pasa por el punto *A* y es de "dirección" o "vector director" *w*. Los **ejes de coordenadas** de un sistema de coordenadas son las rectas que pasan por el origen O y tienen direcciones dadas por los vectores de la base del sistema de coordenadas. Los ejes están ordenados de forma concordante con la ordenación de los vectores de la base. En los gráficos que siguen podemos observar en dimensión 2 y 3 los sistemas de coordenadas habituales:

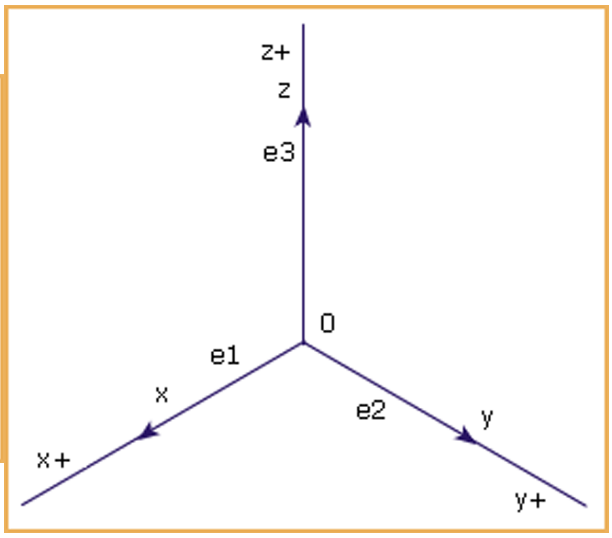




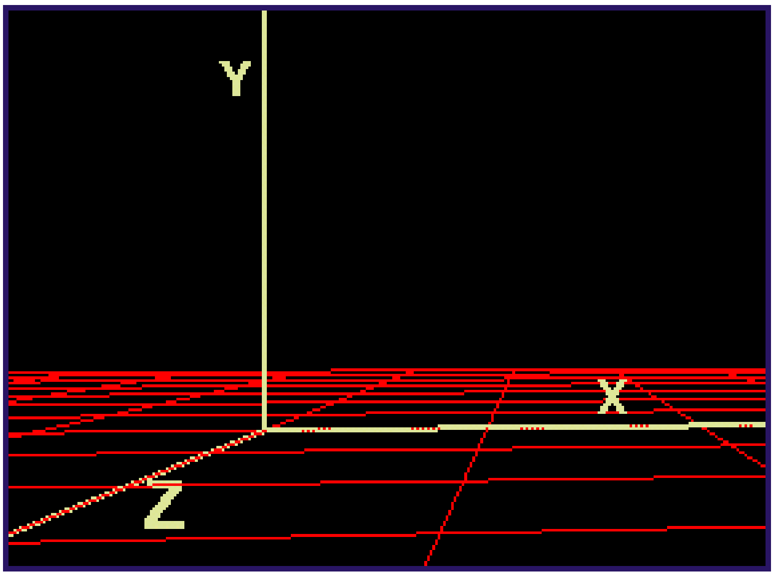
En el plano bidimensional consideramos los ejes de coordenadas ordenados *x*, *y* (también se indican, respectivamente, por *Ox, Oy*). En el caso tridimensional, los ejes de coordenadas ordenados son *x, y, z* (también se indican, respectivamente, por *Ox, Oy, Oz*).

Dado un eje de coordenadas, el origen descompone la recta correspondiente en dos semirectas, los **semiejes de coordenadas**. Por otro lado, los **ejes están orientados**, tenemos definido sobre los mismos un sentido de recorrido dado por el vector de la base que define dicho eje, al que también orienta. Por este motivo se consideran los semiejes positivos de coordenadas: *x*+, *y*+, *z*+ en el caso tridimensional, y análogamente en el caso bidimensional:





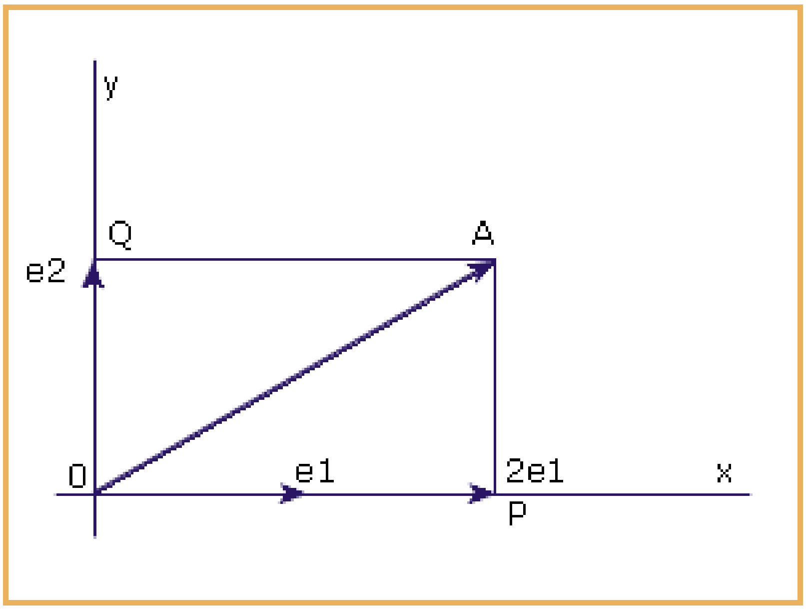
En el espacio tridimensional no siempre los ejes de coordenadas tienen la misma distribución que en el caso usual. Una de las mayores diferencias que se plantean es cuál es el eje correspondiente a la "verticalidad". En el sistema usual, la verticalidad viene dada por el eje *z*.



Un sistema de coordenadas es **cartesiano** si los ejes son mutuamente perpendiculares y las unidades de medida sobre los ejes coinciden. Los vectores de la base orientan los ejes respectivamente y definen la unidad de medida sobre cada uno de ellos. Volveremos sobre el tema en el módulo siguiente.

- **Coordenadas de puntos**

Dado el punto *A*, se considera el vector *OA*, que se expresará como combinación lineal de los vectores de la base. Los coeficientes ordenados correspondientes son las coordenadas del punto A en dicho sistema de coordenadas.



En este caso, es $OA = 2e1 + e2$. La expresión en coordenadas del punto *A* es $A = (2, 1)$.

- **Ejes de coordenadas**

Caso del plano bidimensional

El eje de coordenadas *Ox* es el conjunto de los puntos de la forma $(x, 0)$, variando x en el conjunto de los números reales. Dado que la propiedad que caracteriza dichos puntos es $y = 0$, ésta es precisamente la ecuación del eje *Ox*. La recta de ecuación y = a es el conjunto de puntos de la forma (x, a), y es la recta paralela al eje *Ox* que dista a del origen (o equivalentemente, del eje *x*). Es también la recta paralela al eje *x* que pasa por el punto $(0, a)$.

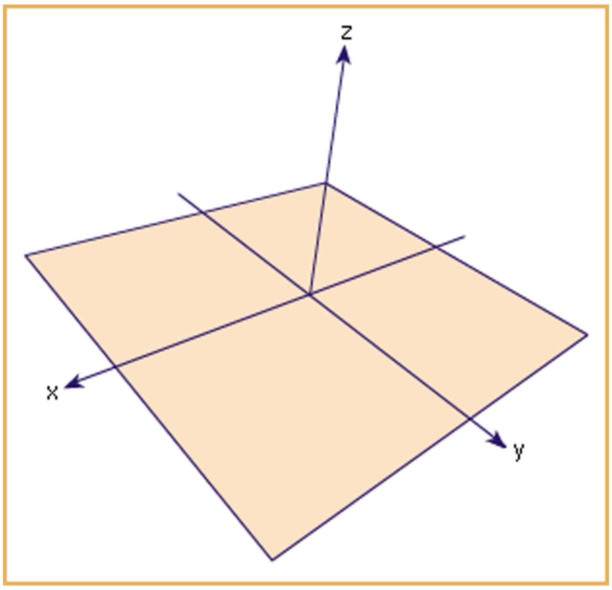
El eje de coordenadas *Oy* es el conjunto de los puntos de la forma $(0, y)$. La propiedad que caracteriza los puntos del eje es $x = 0$, por lo que ésta es su ecuación. Las rectas paralelas al eje *Oy* tienen ecuación $x = b$.

Cada recta del plano bidimensional determina dos **semiplanos.** En el caso del eje *Oy*, quedan determinados dos semiplanos, el de los puntos (x, y) para los que $x \geq 0$, y el de los puntos (x, y), para los que $x \leq 0$. En el caso del eje Ox, quedan determinados dos semiplanos, el de los puntos (x, y) para los que $y \geq 0$, y el de los puntos (x, y) para los que $x \leq 0$. También se puede considerar, por ejemplo, el semiespacio de los puntos del plano para los cuales $y \geq 2$, conjunto de todos los puntos de coordenada y positiva cuya distancia al eje *Ox* es superior o igual a 2.

En ocasiones es necesario situar puntos sobre los ejes de coordenadas a una determinada distancia del origen. Por ejemplo, el punto del semieje x+ que dista 400 unidades del origen es el punto (400, 0). El punto del semieje *y*– que dista 10 unidades del origen es (0, –10).

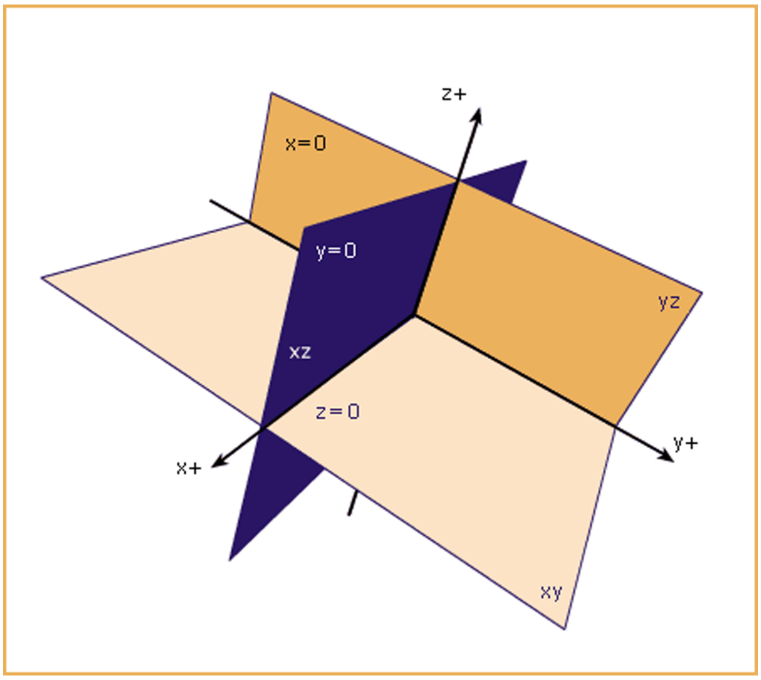
En el sistema de coordenadas cartesianas habitual, la proyección ortogonal de un punto $P = (x, y)$ sobre el eje de coordenadas *Ox* es la intersección del eje *Ox* con la recta que pasa por *P* y es perpendicular a dicho eje. El resultado es $P' = (x, 0)$. De forma análoga, la proyección ortogonal de *P* sobre el eje *Oy* es $P'' = (0, y)$.

Caso del espacio tridimensional



El eje de coordenadas *Ox* es el conjunto de los puntos de la forma *(x, 0, 0)*. El eje de coordenadas *Oy* es el conjunto de los puntos *(0, y, 0)*. El eje de coordenadas Oz es el conjunto de los puntos *(0, 0, z)*.

- **Planos de coordenadas**



En el caso del espacio tridimensional, además de los ejes de coordenadas podemos considerar los planos de coordenadas, planos que están determinados por los pares de ejes de coordenadas. Por tanto, tenemos lo siguiente:

1) El plano de coordenadas *xy*, determinado por los ejes *Ox, Oy*. Es el conjunto de los puntos *(x, y, 0)*, con *x, y* arbitrarios. Se caracteriza por la condición $z = 0$, que es la ecuación del plano. Corresponde al plano horizontal. El eje z es ortogonal a este plano de coordenadas. Determina dos **semiespacios**, el de los puntos *(x, y, z)* para los cuales $z \geq 0$, y el de los puntos *(x, y, z)*, para los cuales $z \leq 0$.

En muchas ocasiones resulta cómodo identificar el plano bidimensional con el plano $z = 0$, cosa que corresponde a una inmersión del plano 2D xy en el espacio tridimensional, asignando "altura" 0 a todos los puntos.

Los planos paralelos al de coordenadas *xy* son los de ecuación $z = c$.

2) El plano de coordenadas *xz* es el plano determinado por los ejes *Ox, Oz*. Es el conjunto de los puntos de la forma *(x, 0, z)*, con *x, z* arbitrarios. Se caracteriza por la condición $y = 0$, ecuación del plano. Es uno de los planos de coordenadas verticales. El eje de coordenadas Oy es perpendicular a este plano. Determina dos semiespacios, el de los puntos para los cuales $y \geq 0$, y el correspondiente a la propiedad $y \leq 0$.

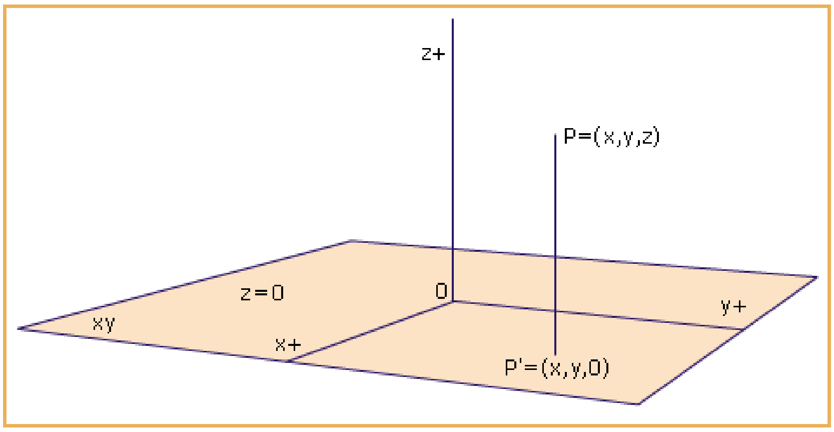
Los planos paralelos al de coordenadas *xy* son los de ecuación $y = b$.

3) El plano de coordenadas yz es el plano determinado por los ejes *Oy, Oz*. Es el conjunto de los puntos *(0, y, z)*, con *y, z* arbitrarios. Se caracteriza por la condición $x = 0$, que es la ecuación de dicho plano. Es uno de los planos de coordenadas verticales. El eje de coordenadas *Ox* es perpendicular a dicho plano. Determina dos semiespacios, el de los puntos para los cuales $x \geq 0$, y el de los puntos para los que se cumple $x \leq 0$.

Los planos paralelos al de coordenadas *yz* son los de ecuación $x = a$.

2.2.1. Proyección ortogonal sobre los planos de coordenadas

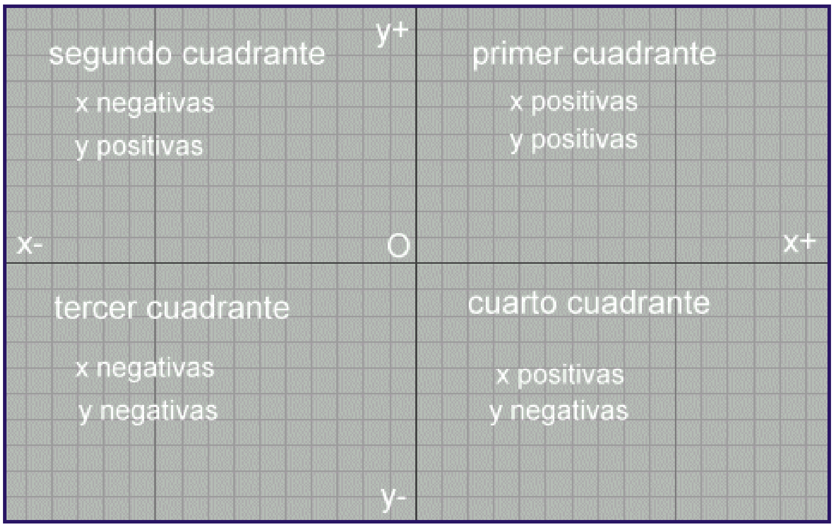
Dado un punto *P*, la proyección ortogonal sobre un plano de coordenadas es la intersección del plano con la recta que pasa por *P* y que es perpendicular a dicho plano (de la misma forma, es paralelo al eje de coordenadas perpendicular al plano de proyección).

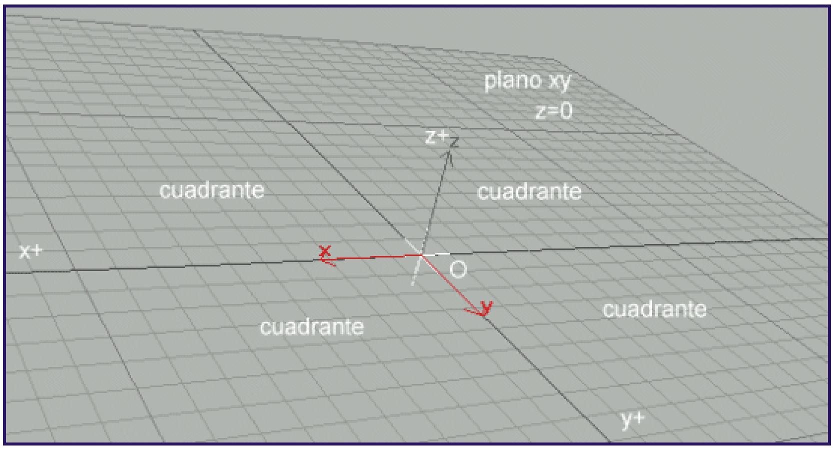


La proyección ortogonal de $P = (x, y, z)$ sobre el plano *xy* es $P' = (x, y, 0)$; sobre el plano *yz*, $P' = (0, y, z)$; sobre el plano *xz*, $P''' = (x, 0, z)$.

Cuadrantes

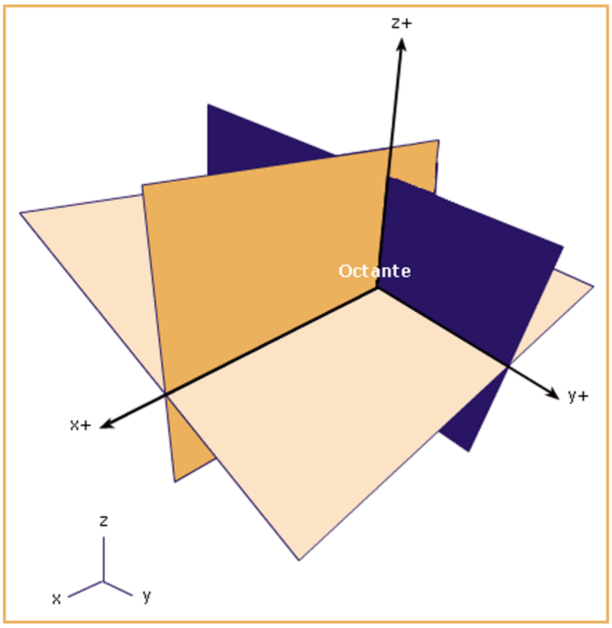
Son porciones del plano bidimensional, definidas según el esquema que sigue. Atendiendo al criterio del signo de los coordenadas, también puede hablarse de cuadrantes sobre los planos de coordenadas del espacio tridimensional.





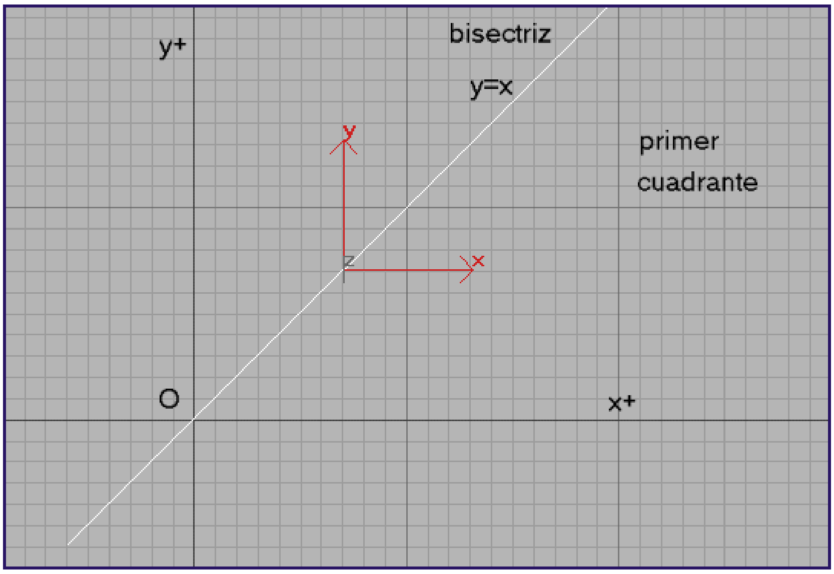
Octantes

Son porciones del espacio delimitadas por los planos de coordenadas. Por ejemplo, es un octante el conjunto de los puntos *(x, y, z)* de coordenadas positivas.



Rectas especiales

Una de las rectas que consideraremos es la **bisectriz** *r* del primer-tercer cuadrante del plano bidimensional. La recta forma ángulos iguales, de 45 grados, con los semiejes de coordenadas *x+*, *y+*. Su ecuación es $y = x$. Sus puntos son los de la forma (x, x). Un vector director es $(1, 1)$.



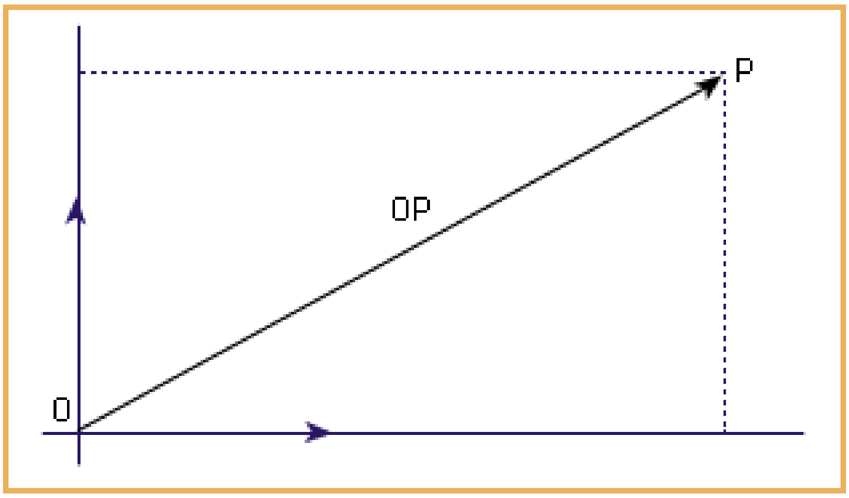
La bisectriz del segundo-cuarto cuadrante es la recta $y = -x$. Son los puntos de la forma $(x, -x)$. Un vector director es $(1, -1)$.

En el caso tridimensional podemos considerar la bisectriz del cuadrante de las *x*, *y* positivas del plano $z = 0$. Sus puntos son los de la forma $(x, x, 0)$. Un vector director es $(1, 1, 0)$. Es la recta del plano *xy*, que forma ángulos de 45 grados con los semiejes *x+*, *y+*.

Las bisectrices pueden definirse análogamente para los planos de coordenadas verticales.

2.2.2. Vector posición de un punto

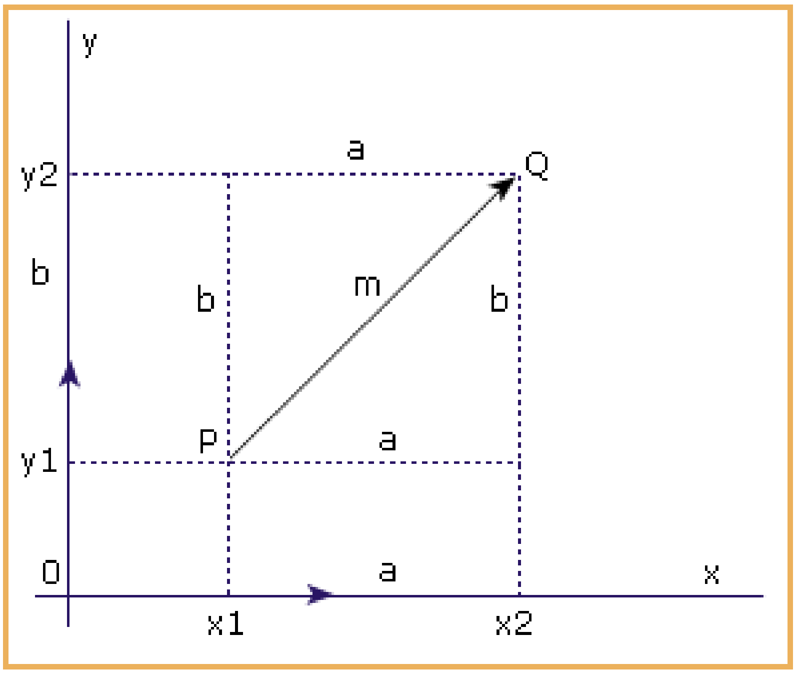
Fijado un sistema de coordenadas *S*, con origen *O*, dado un punto *P*, se define el **vector posición** del punto *P* como el vector *OP*. También se indica por $\vec{p}$.



En general, los vectores de un espacio vectorial se consideran libres, "deslizantes paralelamente a sí mismos". No ocurre así en el caso de los vectores de posición de puntos: estos vectores se considerarán fijos.

Identificaremos un punto *P* con el vector posición correspondiente $OP = \vec{P}$, en un sistema de coordenadas. Esta identificación permite tratar en términos vectoriales toda clase de problemas geométricos sin necesidad de recurrir a las coordenadas. En particular, podremos efectuar operaciones algebraicas con puntos (diferencia, suma, etc.).

Dados dos puntos, *A, B*, consideramos los vectores posición respectivos $\vec{A}, \vec{B}$. Se define el vector *AB*, determinado por los puntos *A, B* en el orden dado, como $AB = \vec{B} - \vec{A}$. Si A = (2, 3, 4), B = (–1, 0, 1), es *AB* = *B* – *A* = *(–1, 0, 1)* – *(2, 3, 4)* = *(–3, –3, –3)*. Y *BA* = *A* – *B* = –*AB* = *(3, 3, 3)*. El siguiente esquema incorpora detalles al respecto.



Veamos en la siguiente sección un primer ejemplo muy importante, el de la expresión paramétrica o parametrización de un segmento y de una recta.

2.2.3. Segmentos y rectas: parametrización

Uno de los objetos más simples es el segmento o la recta. Una de las trayectorias más simples para una animación es la trayectoria rectilínea, a lo largo de una recta, limitadamente a un segmento.

Uno de los aspectos que debemos tener en cuenta es el sentido de recorrido sobre un segmento o una recta. Si, por ejemplo, un segmento está determinado por los puntos *A*, *B*, es distinto recorrerlo de *A* hacia *B* que de *B* hacia *A*, aunque en ambos casos el conjunto de los puntos es el mismo.

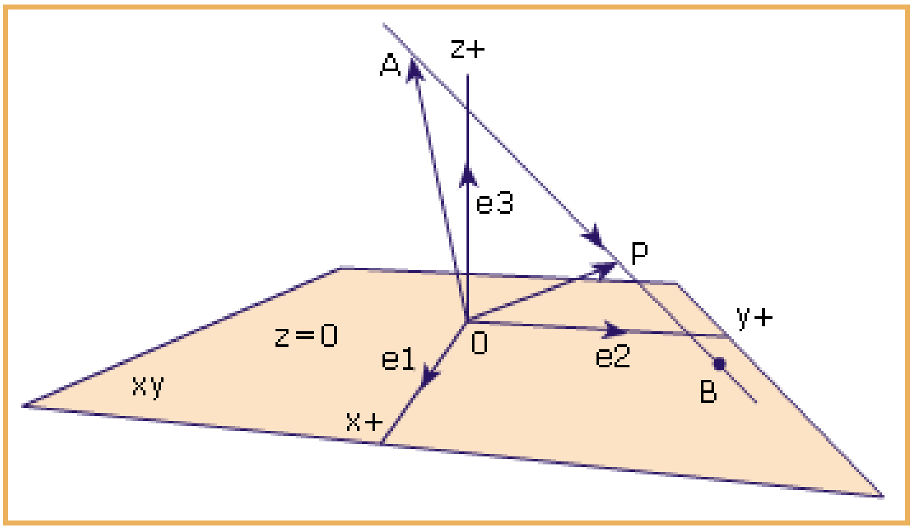
Considerad el siguiente esquema del segmento *AB*, que queremos recorrer de *A* hacia *B*, y sea *P* un punto intermedio del segmento. Un vector director de la recta *AB* es, entre infinitas posibilidades alternativas, justamente el vector *w* = *AB* = *B* – *A*, vector no nulo, que orienta la recta *AB* de *A* hacia *B*. Cualquier vector de la misma dirección puede escribirse como múltiplo escalar de *w* = *AB*, es decir, de la forma *tw* = *tAB* = *t(B – A)*, para un escalar *t* adecuado.

Identificando los puntos con sus vectores posición, observad que tenemos:

$$\vec{P} = OP = OA + AP = \vec{A} + AP = \vec{A} + t(AB) = \vec{A} + t(\vec{B} - \vec{A})$$

En muchas ocasiones prescindiremos de la notación vectorial y escribiremos:

$$P = A + t(B\text{-}A)$$



Vamos a fijarnos ahora en el escalar t. Observad que al variar t se obtienen puntos de la recta que pasa por los puntos A, B. Si se quiere explicitar la dependencia con respecto a t, esto se indica mediante la expresión:

$$P(t) = A + t(B - A)$$

La expresión anterior permite obtener los puntos de la recta AB en función del parámetro t. Es una expresión paramétrica de la misma. Variando t en el conjunto de todos los números reales se obtienen todos los puntos de la recta.

Este tipo de expresiones, en las cuales se obtienen los puntos del objeto (curvas, superficies) en función de un parámetro que va variando, es una **parametrización** del objeto. Toda parametrización implica: una elección del parámetro, una fórmula que permite obtener los puntos del objetos en función del parámetro y, finalmente, una explicitación del dominio de variación del parámetro.

Estudiemos el caso del segmento de extremos A, B. Si $t = 0$, es $P(0) = A + t(B - A) = A$, uno de los extremos, el primero según el sentido de recorrido del mismo (que traduce el orden según el cual se irán generando los puntos). Si $t = 1$, es $P(1) = A + (B - A) = B$, el extremo final. Para los valores intermedios $0 \leq t \leq 1$ se obtienen los puntos de AB, de A a B.

Por tanto, una posible parametrización del segmento AB, recorrido de A a B es:

$$P(t) = A + t(B - A), 0 \leq t \leq 1$$

Estas fórmulas paramétricas son válidas en cualquier dimensión. La diferencia aparece cuando se desglosa por coordenadas.

Pueden obtenerse algunos puntos especiales. Por ejemplo, el punto medio del segmento *AB* se obtiene a partir de la parametrización anterior tomando $t = 1/2$, es decir:

$$M = P\left(\frac{1}{2}\right) = A + \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}(A + B)$$

En el caso de la recta que pasa por el punto *A* y tiene vector director *w*, una posible parametrización es:

$$\mathrm{P}(t) = \mathrm{A} + tw,\ \mathrm{t} \in \mathrm{R}$$

Restringiendo la variación de *t* obtenemos partes de la recta. Por ejemplo, si $\mathrm{P}(t) = \mathrm{A} + tw$, $t \geq 0$, entonces se obtiene una semirrecta que tiene como origen el punto *A*.

2.3. Coordenadas polares

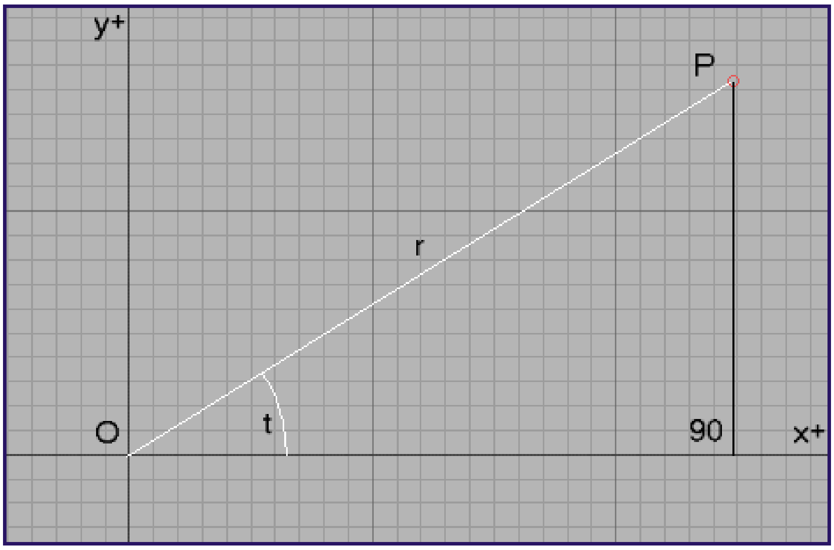
Existen otros medios posibles para expresar la posición de un punto del plano, además de las coordenadas cartesianas. Uno de ellos es el de las **coordenadas polares** del plano.

Supongamos el sistema de coordenadas cartesianas habituales del plano, con origen *O* y los ejes de coordenadas *Ox, Oy*, perpendiculares. Los ejes de coordenadas están orientados, con lo que tenemos los semiejes *x*+ e *y*+.

Sea *P* un punto distinto del origen de coordenadas. Su posición queda definida dando los siguientes elementos:

1) La distancia *r* de *P* a *O*.

2) El ángulo *t* que forman *OP* y *x*+, tomando el semieje *x*+ como origen de ángulos, los cuales se miden en sentido antihorario. Dicho ángulo es el **ángulo polar** de *P*.



Las coordenadas polares de *P* son el par ordenado *(r, t)*.

Conocer esta posibilidad es conveniente, habida cuenta de que ciertas curvas, que pueden utilizarse como trayectorias de animación, se expresan de forma natural en coordenadas polares, o al menos así vienen expresadas clásicamente. Por ejemplo, la espiral de Arquímedes se expresa en coordenadas polares como $r = at$.

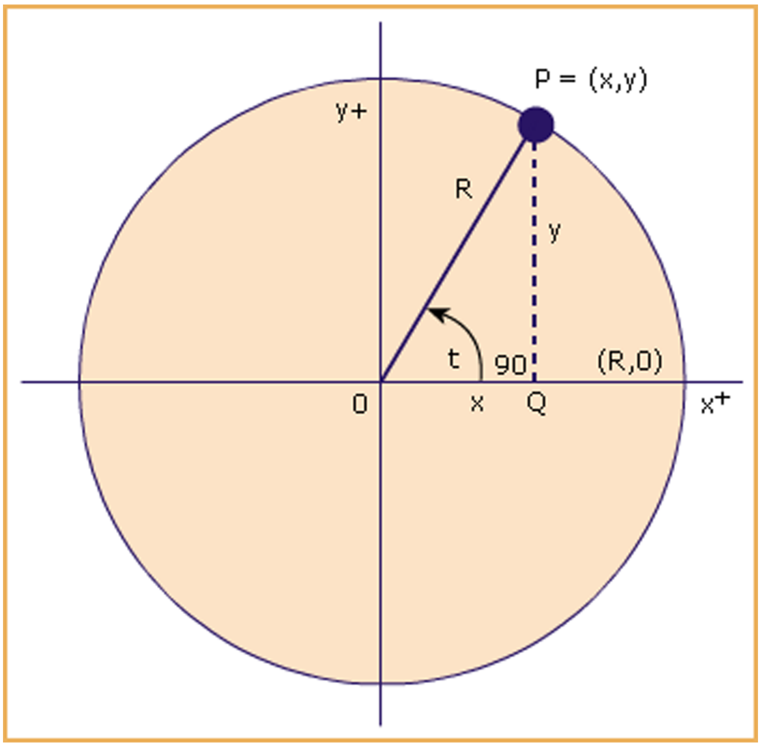
2.3.1. Conversión de coordenadas polares a coordenadas cartesianas

Es fácil obtener las coordenadas cartesianas de un punto cuyas coordenadas polares conocemos, ya que es un simple ejercicio de trigonometría:

$$x = r \cos t, \; y = r \sin t$$

2.3.2. Parametrización de la circunferencia y de la esfera

Un ejemplo fundamental es el de la parametrización de la circunferencia, que podemos derivar de las fórmulas de conversión de coordenadas polares a cartesianas.



Consideremos el caso más simple, en el plano bidimensional, de la circunferencia de centro C = *(0, 0)* y de radio *R*. Elijamos como parámetro el ángulo polar *t* del punto *P*, punto genérico de la circunferencia.

Una parametrización derivada de este esquema sería:

$$P(t) = (R\cos t, R\sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

Desglosada por coordenadas, P(t) = (x(t), y(t)), x(t) = Rcost, y(t) = Rsint.

A partir de esta parametrización básica se pueden obtener parametrizaciones de circunferencias de centro distinto del origen. Si *C* = *(a, b)* es el centro de la circunferencia, una posible parametrización es

$$P(t) = (a + R\cos t, b + R\sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

Otra vía de generalización es para formular parametrizaciones de circunferencias sobre los planos de coordenadas en el espacio tridimensional, o paralelos a los mismos.

Consideremos la circunferencia de radio *R*, de centro *O* = *(0, 0, 0)*, contenida en el plano de coordenadas *xy*, es decir, *z* = *0*. Elijamos el ángulo polar *t* del plano *xy*, tomando como origen de ángulos el semieje *x*+, que se mide de forma antihoraria observando desde *z*+. Entonces la parametrización derivada será:

$$P(t) = (R\cos t, R\sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi$$

Si el centro es $C = (a, b, 0)$, entonces tenemos:

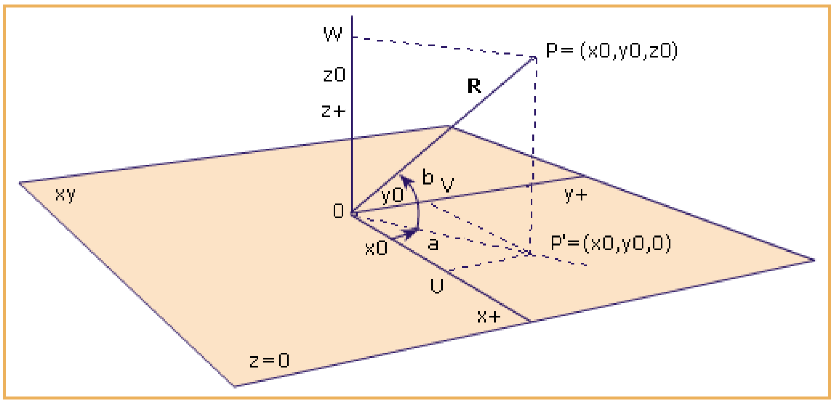
$$P(t) = (a + R\cos t, b + R\sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi$$

Como ejemplo, una parametrización de la circunferencia con centro el origen de coordenadas, de radio *R*, contenida en el plano vertical de coordenadas *yz*, es:

$$P(t) = (0, R\cos t, R\sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

- **Parametrización de la esfera**

Consideremos el siguiente esquema. Vamos a resolver el ejercicio de expresar las coordenadas de *P* en función de *R*, distancia de *P* al origen *O*, y de los ángulos *a* (longitud, según el símil geográfico), *b* (latitud).



Es un ejercicio de trigonometría, en el que se consideran los triángulos rectángulos *OPP'*, *OUP'*. En este esquema, *P'* es la proyección ortogonal de *P* sobre el plano *xy*. El punto *U* es la proyección ortogonal de *P'* sobre *Ox*.

Entonces resulta:

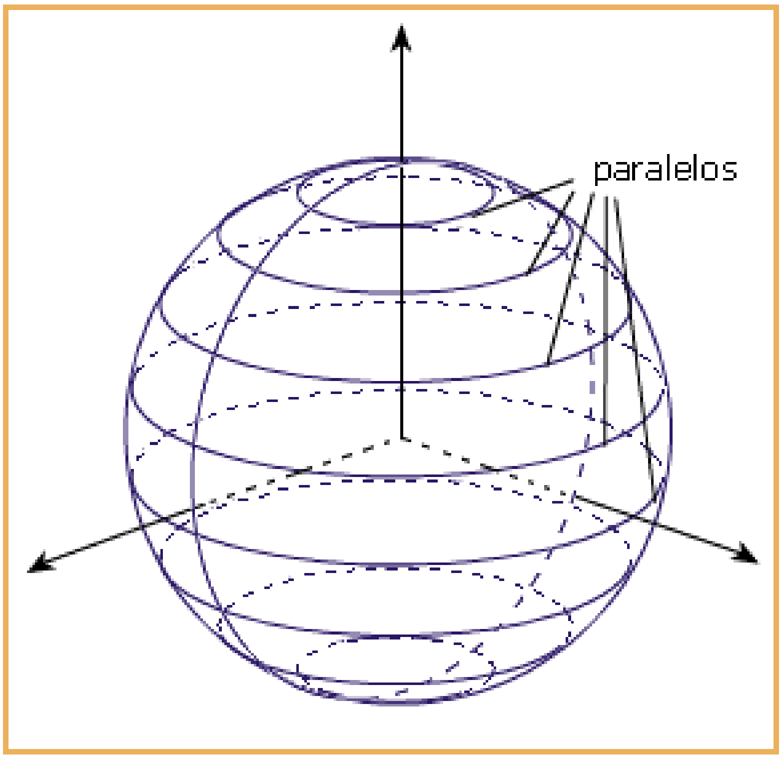
$$x0 = R\cos b \cos a,\ y0 = R\cos b \sin a,\ z0 = R\sin b$$

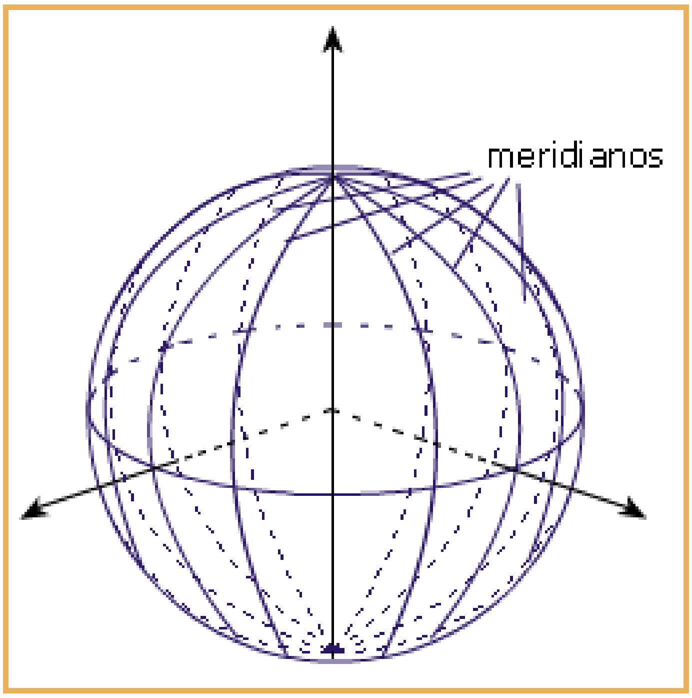
Veamos cómo podemos aplicar este desarrollo para obtener una parametrización de la esfera. Consideremos la esfera de centro O = (0, 0, 0) y de radio R. Sea P = (x, y, z) un punto genérico de la misma. Elijamos como parámetros para la descripción de la superficie los ángulos a, b del esquema, en función de los cuales expresamos:

$$\left.\begin{aligned} x(a,b) &= R\cos b\cos a \\ y(a,b) &= R\cos b\, siba \\ z(a,b) &= R\sin b \end{aligned}\right\}, 0 \leq a \leq 2\pi; -\frac{\pi}{2} \leq b \leq \frac{\pi}{2}$$

Éste es un primer ejemplo de parametrización o descripción paramétrica de una superficie.

Observad que es fácil describir curvas importantes sobre la esfera, como son los paralelos y los meridianos. Los meridianos son las circunferencias de la esfera (supongamos que el origen es su centro) que corresponden a a constante. Los paralelos son circunferencias que corresponden a b constante.

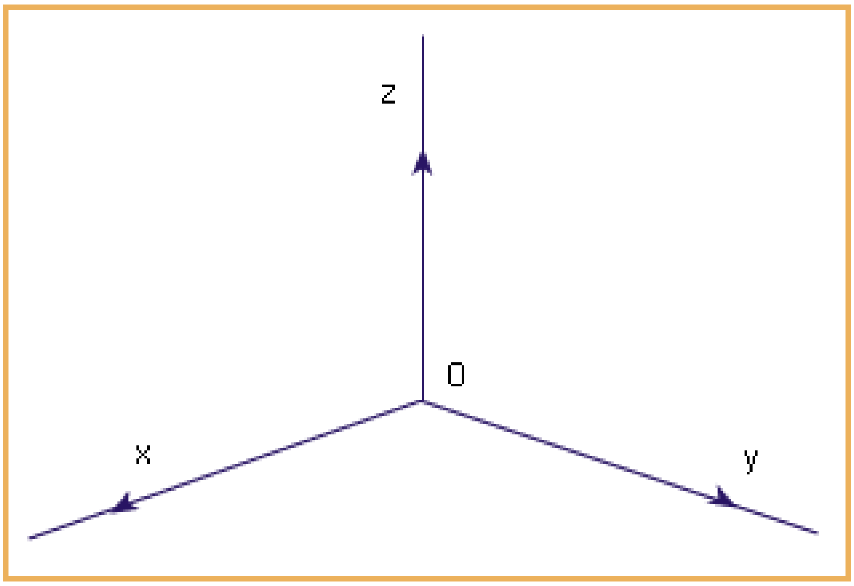




2.4. Orientación

Un concepto importante es el de la orientación de bases (y, por tanto, de sistemas de coordenadas), propiedad global relacionada con la base del espacio vectorial. El concepto preciso corresponde a definir una misma orientación por parte de dos bases. No obstante, no entraremos en tecnicismos.

El sistema usual, que se indica a continuación, es el sistema que consideraremos directo en cuanto a la orientación.

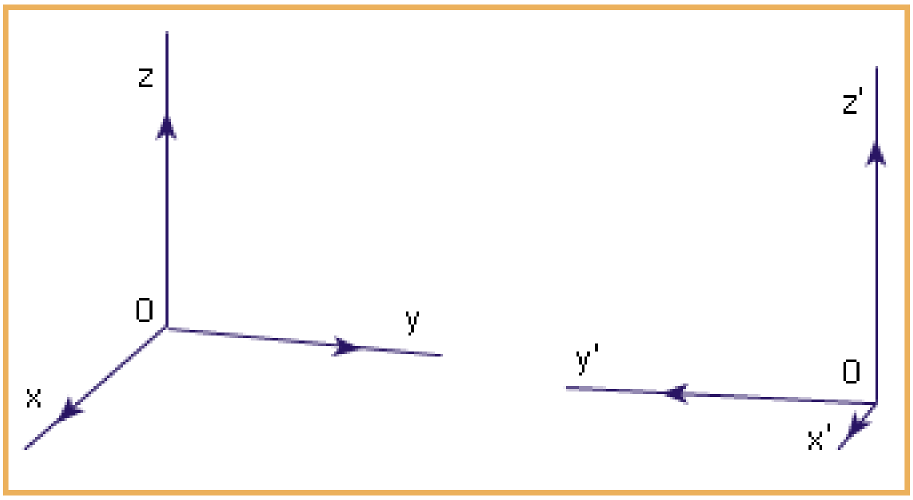


Hay dos orientaciones posibles; una de ellas se escoge arbitrariamente como directa o positiva. Aquí presentaremos una versión intuitiva en el caso de las coordenadas cartesianas, que a continuación trataremos. Intuitivamente, el concepto está relacionado con las **orientaciones de los ejes individuales**, en su **ordenación**, y en cómo esto produce una **orientación global** del sistema de ejes, debido a las interrelaciones mutuas.

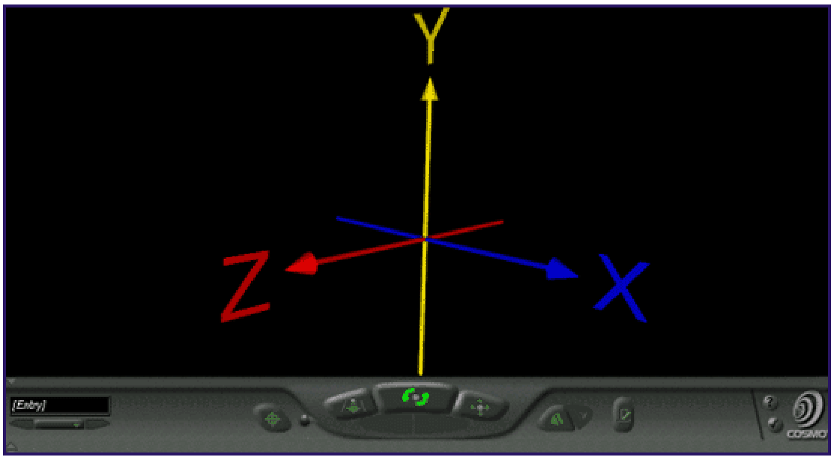
Intuitivamente, la siguiente descripción corresponde a la orientación positiva del sistema de coordenadas anterior y de otros de la misma orientación: el observador situado sobre $z+$ (tercer eje de coordenadas positivo), y "mirando" hacia el plano xy (determinado por los dos primeros ejes de coordenadas), vería como **antihoraria** sobre xy la rotación de 90 grados que transforma el primer eje de coordenadas positivo $x+$ sobre el segundo eje de coordenadas positivo $y+$ por el camino más corto.

El criterio anterior nos permitirá reconocer inmediatamente si un sistema de coordenadas es de la misma orientación que el anterior.

Se puede utilizar el determinante para averiguar si una base determina la misma orientación que la usual. Una base u_1,u_2,u_3 es de la misma orientación que la base ordinaria si $\det(u_1,u_2,u_3)>0$ (análogamente en dimensión 2). Se puede observar fácilmente que las bases correspondientes a los siguientes sistemas de coordenadas son de distinta orientación.



El sistema universal absoluto de VRML es también de la misma orientación que el usual.



3. Algunos objetos geométricos

3.1. Rectas

Una recta está determinada por un punto por el que pasa y por su dirección, dada por un vector no nulo, que se llamará *vector director*.

Entonces podemos describir la recta en forma paramétrica, es decir, expresar la posición de sus puntos en términos de un parámetro. Si pasa por A y tiene vector director w, entonces:

$$P(t)A + tw; -\infty < t < \infty$$

Observad que el vector director orienta automáticamente la recta, con lo que de la expresión anterior resulta un sentido de avance (y no el contrario) si t toma valores crecientes.

En la medida en que se plantea vectorialmente, la parametrización anterior es *la ecuación paramétrico-vectorial de la recta*. Si describimos la parametrización con coordenadas, entonces obtenemos las llamadas *ecuaciones paramétricas escalares*.

En el caso bidimensional, si suponemos que la recta pasa por el punto $A = (a_1,a_2)$ y tiene vector director $W = (w_1,w_2)$, entonces podemos describir un punto de la recta en término de coordenadas, lo cual da lugar a las ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a_1 + tw_1 \\ y(t) &= a_2 + tw_2 \end{aligned}\right\}, t \in R$$

En el caso tridimensional, si suponemos que pasa por el punto $A = (a_1,a_2,a_3)$ y tiene vector director $W = (w_1,w_2,w_3)$, entonces podemos describir un punto de la recta en término de coordenadas, lo cual da lugar a las ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a_1 + tw_1 \\ y(t) &= a_2 + tw_2 \\ z(t) &= a_3 + tw_3 \end{aligned}\right\}, t \in R$$

Según otra forma alternativa, una recta está determinada por dos puntos. En este caso, si los puntos son *A,B*, podemos pasar a la forma inicialmente descrita y considerarla como la recta que pasa por el punto *A* y tiene vector director *w* = *B* – *A*. También se podrían considerar otras alternativas. La parametrización correspondiente sería:

$$P(t) = A + t(B - A); t \in R$$

3.2. Planos

Existen varias formas de expresar los puntos de un plano.

Ecuación implícita: ax+by+cz+d=0.

Ecuación paramétrica:

Un plano puede determinarse de distintas maneras. Un plano queda determinado por un punto por el que pasa y dos direcciones sobre el plano (es decir, dos vectores no nulos, linealmente independientes, lo cual significa que determinan direcciones distintas, no coincidentes). Si *A* es el punto por el cual pasa el plano, y *u,v* vectores directores del mismo, una posible parametrización (*ecuación paramétrico-vectorial*) es:

$$P(r, s) = A + ru + sv; r, s \in R$$

Pasando a coordenadas, si:

$$A = (a_1, a_2, a_3), u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$$

resulta:

$$\left.\begin{aligned} x(r, s) &= a_1 + ru_1 + sv_1 \\ y(r, s) &= a_2 + ru_2 + sv_2 \\ z(r, s) &= a_3 + ru_3 + sv_3 \end{aligned}\right\}$$

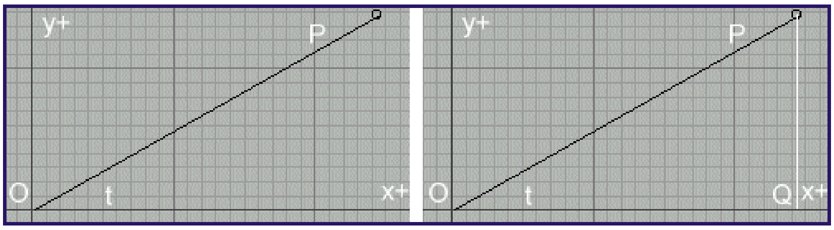
Otra manera de determinar un plano es mediante tres puntos no alineados. En este caso, si *A,B,C* son los puntos no alineados, podemos pasar inmediatamente a la forma paramétrico-vectorial vista anteriormente: se puede considerar el plano como el plano que pasa por uno de los puntos, por ejemplo, el punto *A*, y tiene vectores de dirección *u*=*B*-*A*, *v*=*C*-*A*, linealmente independientes porque los puntos no están alineados. Por tanto, podemos escribir la parametrización:

$$P(r, s) = A + r(B - A) + s(C - A); r, s \in R$$

Actividades

Ejercicios

- **Ejercicio 1**
  Considerad el punto *P* del plano bidimensional. Supongamos que dista 3 unidades del origen de coordenadas y que el ángulo que forma el eje *x+* con *OP* es de 30 grados. Obtened las coordenadas de *P*.



  Solución

  Es un problema de trigonometría. Proyectamos el punto *P = (x, y)* ortogonalmente sobre el eje *Ox*. Sea *Q* la proyección. Consideremos el triángulo rectángulo *OPQ*. Entonces tenemos:

$$x = OQ = OP\cos t = 3\cos 30 = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = PQ = OP\sin t = \sin 30 = 3\frac{1}{2}$$

- **Ejercicio 2**
  Calculad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

  Solución

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x+4y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+5 \\ -x+4y+6 \end{pmatrix}$$

- **Ejercicio 3**
  Expresad en términos conjuntistas el semiplano de los puntos de coordenadas y negativas en el plano bidimensional.
  Solución

$$SY^- = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y \leq 0\}$$

Problemas

- **Problema 1**
  Un punto móvil se encuentra situado inicialmente en *A = (4, 6, 3)*. Se desplaza paralelamente al eje de coordenadas y hasta interceptar el plano *y = –2*. ¿Cuál es el punto de intercepción?
  Resolución:
  Puede desplazarse según la semirrecta de extremo *A*, orientada por *w = (0, 1, 0)*, paralela al eje de coordenadas *Oy*. En este caso, el punto se aleja del plano *y = –2* y, por tanto, no hay intersección. En caso contrario, siendo la trayectoria orientada por *u = (0, –1, 0)*, entonces hay intersección efectiva de la semirrecta con el plano *y = –2*. El punto *A' = (x', y', z')* de intersección es también la proyección ortogonal de *A* sobre el plano *y = –2*. Las coordenadas *x', z'* son las mismas que las de *A*. La coordenada y' es la común a todos los puntos del plano *y = –2*. La proyección es *A' = (4, –2, 3)*.
- **Problema 2**
  Escribid una parametrización para la trayectoria de animación rectilínea consistente en recorrer el segmento de extremos *A = (1, 1, 1)* y *B = (1, 0, 2)*, desde *A* hacia *B*.
  Resolución:

De teoría general sabemos que la parametrización correspondiente es, en términos vectoriales, *P(t) = A + t(B – A)*, con 0≤t≤1. En términos escalares, resultará: P(t) = A + t(B – A) = (1, 1, 1) + t((1, 0, 2) – (1, 1, 1)) = (1, 1, 1) + t(0, –1, 1) = (1, 1, 1) + (0, –t, t) = (1, 1 – t, 1 + t). Desglosado por coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 1 \\ y(t) &= 1 - t \\ z(t) &= 1 + t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 1$$

- **Problema 3**
Considerad una trayectoria de animación circular según una circunferencia *C* en el plano *z = 0*. La circunferencia *C* es de radio *R* y su centro coincide con el origen de coordenadas. Suponed que el móvil inicia el recorrido en el eje *Oy*, en sentido antihorario visto desde *z+*. Escribid una parametrización para esta trayectoria.
Resolución:
Existe más de una parametrización posible. Por el hecho de estar contenida en el plano *z = 0*, resultará *z(t) = 0*. La expresión de *x, y* puede escribirse de manera similar a la parametrización de una circunferencia de las mismas características en el plano bidimensional. Tomamos como parámetro el ángulo polar *t* en el plano *xy*, con origen de ángulos en el semieje *x+*, y con sentido antihorario, visto el plano *xy* desde *z+*. Sin condiciones adicionales, sería *x(t) = Rcost, y(t) = Rsint, z(t) = 0*. Con la condición de iniciar su recorrido en el eje *Oy*, este hecho deberá traducirse en un desfase angular de 90 grados, de modo que una posible parametrización sería:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= R\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ y(t) &= R\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ z(t) &= 0 \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

- **Problema 4**
Dada la parametrización *P(t) = A + t(B – A), 0≤t≤1*, la trayectoria corresponde a un recorrido:
1. Circular.
2. Rectilíneo de *A* a *B*.
3. Rectilíneo de *B* a *A*.
4. Del punto medio del segmento *AB* hacia el extremo *B*.
5. Ninguno de los anteriores.
Resolución:
2, rectilíneo de *A* a *B*.
- **Problema 5**
Se considera la parametrización de una trayectoria de animación *P(t) = (2 + 3t, –1 + 2t, 4 – 4t)*, con 0≤t≤1. Describid el tipo de trayectoria, su inicio y su final.
Resolución:
Vamos a reescribirla, separando las partes con parámetro de las que no lo contienen: *P(t) = (2, –1, 4) + (3t, 2t, –4t) = (2, –1, 4) + t(3, 2, –4)*. Corresponde a una trayectoria rectilínea, sobre la recta que pasa por el punto *A = (2, –1, 4)* y tiene vector director *w = (3, 2, –4)*. Otras características concretas dependen del parámetro y de su variación. Dado que el parámetro varía en un intervalo, el intervalo *[0, 1]*, la trayectoria recorrida es un segmento, de extremo inicial *I = P(0) = A* y de extremo final *B = P(1) = (5, 1, 0)*. La trayectoria se recorre, pues, de *A* hacia *B*.
- **Problema 6**
Suponed una esfera animada cuyo centro describe la trayectoria dada por:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 2 + 5\cos t \\ y(t) &= -2 \\ z(t) &= 3 + 5\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

Describid cómo es el recorrido, incluyendo inicio y final.
Resolución:
La curva es plana, contenida en el plano *y = –2*, plano perpendicular al eje de coordenadas *y*, o bien paralelo al plano de coordenadas xz que pasa por el punto *(0, –2, 0)*. Corresponde a una circunferencia, de radio *R = 5* y de centro *C = (2, –2, 3)*. Dada la variación del parámetro, la circunferencia se recorre completamente, con lo que coinciden el inicio y el final de la animación de traslación. El inicio es *I = (x(0), y(0), z(0)) = (7, –2, 3)*. Un último detalle descriptivo correspondería al sentido de giro, visto (por ejemplo) desde el semieje *y+*: si tuviéramos la circunferencia (5cost, 0, 5sint), el inicio estaría en *(5, 0, 0)*,

punto del semieje *x+;* para *t = 90 grados*, el punto correspondiente es *(0, 0, 5)*, punto del semieje z+. El comportamiento de nuestra trayectoria es del mismo tipo. Por tanto, visto desde *y+*, el sentido de giro es horario.

- **Problema 7**
  Escribid una parametrización de la circunferencia contenida en el plano $x = 0$, cuyo centro es el punto $C = (0, d, 0)$, que pasa por el origen de coordenadas.
  Resolución:
  Existen varias parametrizaciones posibles. Dada la posición del centro, $C = (0, d, 0)$, el radio de la circunferencia, dada la condición de pasar por el origen de coordenadas, es $R = d$. Podemos escribir la parametrización:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= d + d\cos t \\ z(t) &= d\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

- **Problema 8**
  Considerad un móvil que realiza una animación formada por dos tramos. En el primer tramo la animación se da sobre una circunferencia en el plano $z = 0$, su centro es el origen de coordenadas y el radio R. El inicio de la animación está en el eje *x+*, y se realiza de forma antihoraria, vista desde *z+* para finalizar cuando se ha girado 60 grados, en el punto A. El segundo tramo es una animación rectilínea que se inicia en A y se termina en B, punto del semieje *z+* que dista diez unidades del origen de coordenadas.
  Resolución:
  La parametrización pedida es $P(t) = A + t(B - A)$, con $0 \le t \le 1$. El problema es obtener A, B:
  Por la descripción se escribe inmediatamente $B = (0, 0, 10)$. Para obtener A, basta con usar la parametrización usual de la circunferencia: $C(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$ con $t = 60$ grados, o por cálculo trigonométrico directo:

$$A = C(60) = (R \cos 60,\ R \sin 60,\ 0) = \left(R\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{R}{2}, 0\right)$$

  Por tanto,

$$P(t) = \left(R\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{R}{2}, 0\right) + t\left((0, 0, 10) - \left(R\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{R}{2}, 0\right)\right)$$

- **Problema 9**
  El centro de un dodecaedro sigue una trayectoria dada por la parametrización:

$$\left\{\begin{aligned} x(t) &= 6 \\ y(t) &= 3 + 4\cos t, 0 \le t \le 2\pi \\ z(t) &- 3 + 4\sin t \end{aligned}\right.$$

  Describid completamente la trayectoria de animación del dodecaedro.
  Resolución:
  Dado que $x(t) = 6$, la trayectoria está contenida en el plano de ecuación $x = 6$, perpendicular al eje Ox pasando por el punto $(6, 0, 0)$. Es un plano paralelo al de coordenadas yz. De la comparación con las parametrizaciones conocidas resulta que la trayectoria es una circunferencia, de centro $C = (6, 3, -3)$, de radio $R = 4$. Se recorre completamente, dada la variación del parámetro t, por lo que el inicio y el final coinciden. El punto de inicio corresponde al valor $t = 0$ del parámetro; por tanto, será $I = (x(0), y(0), z(0)) = (6, 3 + 4\cos 0, -3 + 4\sin 0) = (6, 7, -3)$. Vista la trayectoria desde el semiespacio $x > 6$, se recorre en sentido antihorario (o, si se quiere, de forma equivalente, desde *x+*, con $x > 6$).

- **Problema 10**
  Parametrizad la circunferencia del plano $y = 4$, de radio $R = 5$ y centro $C = (3, 4, 2)$.
  Resolución:
  Todos los puntos de la circunferencia están en el plano $y = 4$, por lo que $y(t) = 4$. Una parametrización será

$$\left\{\begin{aligned} x(t) &= 3 + 5\cos t \\ y(t) &= 4 \\ z(t) &= 2 + 5\sin t \end{aligned}\right.$$

  con $0 \le t \le 2\pi$.

- **Problema 11**

Parametrizad la trayectoria de un punto que recorre el paralelo correspondiente a la latitud de 45 grados de la esfera de radio *R = 4* y centro *C = (0, 0, 0)*. El inicio del recorrido debe ser el punto de longitud 0. El sentido de recorrido es libre, de entre los dos posibles.
Resolución:
Consideremos un punto *P = (x, y, z)* del paralelo, y todos sus puntos están a latitud *L = 45* grados. Sea *t* la longitud del punto *P*. Siendo *R* la distancia de *P* al origen *O*, podemos escribir, por trigonometría elemental:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos L\cos t = 4\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t = 2\sqrt{2}\cos t \\ y(t) = R\cos L\sin t = 4\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t = 2\sqrt{2}\sin t \\ z(t) = R\sin L = 4\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Falta indicar el dominio de variación del parámetro *t*: $0 \leq t \leq 2\pi$. Se efectúa una vuelta completa, con inicio en el punto *A = (R, 0, 0) = (4, 0, 0)*. Observando la trayectoria desde z+, con $z \geq R \sin L = 2\sqrt{2}$, ésta se recorre de forma antihoraria.

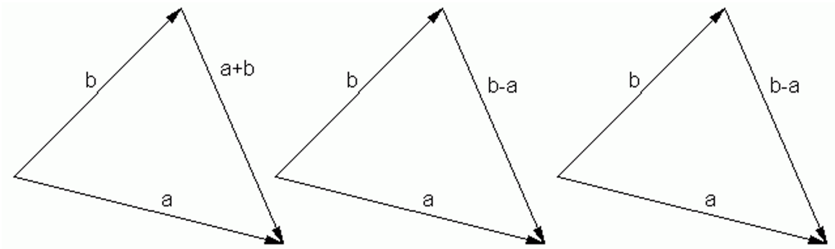
- **Problema 12**
  Parametrizad la circunferencia del plano x = 2, de radio R = 5 y centro C = (2, 4, 3).
  Resolución:
  Existen varias posibilidades, dependiendo de dónde deseemos que se inicie y cómo queramos que se efectúe la rotación, es decir, la generación de los puntos de la curva. Veamos una:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 2 \\ y(t) &= 4 + 5\cos t \\ z(t) &= 3 + 5\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

- **Problema 13**
  Un cubo efectúa una animación rectilínea tal que su centro parte del punto *A = (1, 1, 0)* y sigue sobre la bisectriz del primer cuadrante del plano *xy*, de modo que se aleja del origen de coordenadas. Escribid una parametrización de la trayectoria.
  Resolución:
  El punto inicial de la trayectoria está situado sobre la bisectriz del primer cuadrante del plano de coordenadas horizontal *xy*. En este problema la trayectoria no está limitada a un segmento, sino que partiendo de *A* puede seguir de forma indefinida. Necesitamos, por tanto, un vector director *w* de la recta trayectoria que la oriente de modo que la parametrización *P(t) = A + tw, t ≥ 0* produzca la animación indicada en el enunciado.
  Existen múltiples soluciones posibles. Elijamos, por ejemplo, *w = (2, 2, 0)* (o incluso *w = (1, 1, 0)*). No sería correcto elegir, por ejemplo, *w = (–1, –1, 0)*, ya que el movimiento se produciría en sentido contrario al buscado.
  Así pues, P(t) = A + tw = (1, 1, 0) + t(2, 2, 0), t ≥ 0.
  Si queremos desarrollar para obtener una parametrización en términos escalares:
  P(t) = (1, 1, 0) + t(2, 2, 0) = (1, 1, 0) + (2t, 2t, 0) = (1 + 2t, 1 + 2t, 0). Así,
  x(t) = 1 + 2t, y(t) = 1 + 2t, z(t) = 0.
- **Problema 14**
  Un dodecaedro inicia una animación rectilínea tal que su centro parte del punto *A = (2, 2, 0)* y sigue sobre la bisectriz del primer-tercer cuadrante del plano *xy*, hacia el tercer cuadrante de coordenadas negativas *x–y–*. Escribid una parametrización de la trayectoria.
  Resolución:
  El móvil se desplaza a lo largo de una semirrecta de origen *A = (2, 2, 0)*, punto de la bisectriz del primer-tercer cuadrante. Por tanto, una parametrización posible será *P(t) = A + tw, t ≥ 0*, siendo w vector director de la bisectriz indicada, de tal modo que la orientación sea la requerida. Basta tomar *w = –(1, 1) = (–1, –1)*. La parametrización correspondiente sería *P(t) = (2, 2, 0) + t(–1, –1, 0) = (2 – t, 2 – t, 0)*. Desglosado por coordenadas, *x(t) = 2 – t, y(t) = 2 – t, z(t) = 0.*

Ejercicios de autoevaluación

1. Indicar cuál de la figuras siguientes es correcta:



a) Derecha.
b) Izquierda.
c) Centro.
d) No se puede determinar.
e) Ninguna de las anteriores.

2. El producto de un escalar por un vector...

a) conserva la dirección.
b) no conserva la dirección.
c) siempre conserva la orientación o sentido.
d) Ninguna de las opciones anteriores.

3. ¿Cuál es el vector w si (4,3)+2w=(10,1)?

a) (2,-4)
b) (3,-1)
c) (-1,0)
d) (2,4)
e) Ninguno de los anteriores.

4. El vector –3w, con w no nulo,...

a) es de la misma dirección y sentido que w.
b) no es de la misma dirección que w.
c) es de la misma dirección que w, pero de sentido opuesto.
d) no se puede determinar ni dirección ni sentido en comparación con w.
e) Ninguno de los anteriores.

5. Si un ángulo es de 63 grados, su medida en radianes es

a) $63(180/\pi)$
b) $63(\pi/180)$
c) $63(360/\pi)$
d) $180/(\pi 63)$

6. El intervalo [2,3] de la recta es el conjunto de los valores numéricos

a) comprendidos entre 2 y 3.
b) menores que 2 y mayores que 3.
c) menores que 3.
d) mayores que 2.
e) Ninguno de los anteriores.

7. El vector –(a,b) es...

a) (–a,–b)
b) (a,b)
c) No tiene sentido.
d) No se puede determinar.
e) Ninguno de los anteriores.

8. Una rueda de bicicleta vertical de radio R gira sin resbalar produciendo un desplazamiento según una recta del plano de coordenadas horizontal. Sea P el punto de la rueda que inicialmente está en contacto con el suelo. Supongamos que P efectúa una rotación de 120 grados alrededor del centro de la rueda (circunferencia). ¿Qué distancia lineal se ha recorrido?

a) 120R
b) 120 (π/180)R
c) 120(180/π)R
d) No se puede calcular.
e) Ninguna de las opciones anteriores.

9. Una rueda de bicicleta vertical de radio R gira sin resbalar produciendo un desplazamiento según una recta del plano de coordenadas horizontal. Sea P el punto de la rueda que inicialmente está en contacto con el suelo. Supongamos que se recorre una distancia lineal de 200 unidades. El ángulo que P ha girado alrededor del centro de la circunferencia (rueda) es...

a) No se puede calcular.
b) 200/R radianes.
c) 200/R grados.
d) R/200 radianes.
e) Ninguno de los anteriores.

10. En una rotación de una rueda respecto de su centro, una rotación de $\pi/4$ radianes corresponde a...

a) media vuelta.
b) un cuarto de vuelta.
c) un octavo de vuelta.
d) una vuelta completa más un cuarto.
e) Ninguna de las opciones anteriores.

11. Sea A una matriz de n filas y m columnas. Sea B una matriz de p filas y q columnas. El producto AB se puede efectuar...

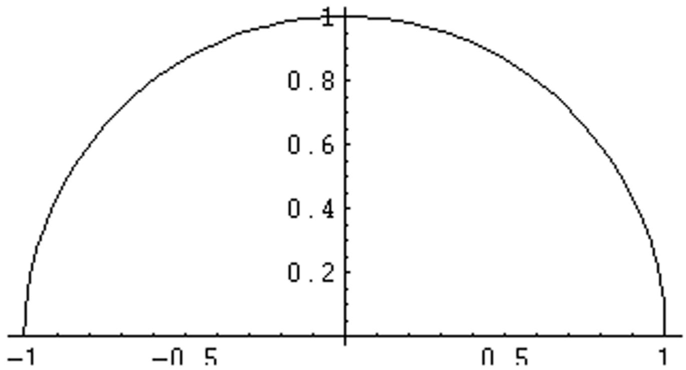
a) sólo si es posible calcular BA.
b) siempre.
c) sólo si m=p.
d) sólo si n=q.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

12. Si escribimos 0≤t≤1, queremos indicar

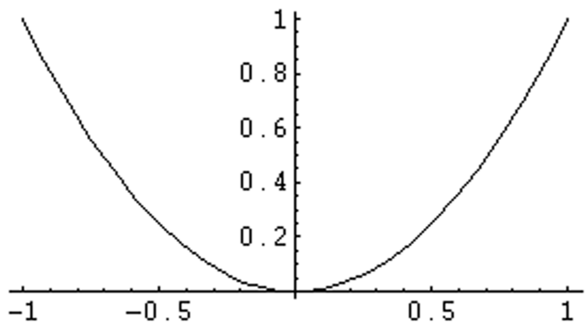
a) que t es un numero comprendido entre 0 y 1.
b) que t es el punto medio del intervalo.
c) que t es mayor que 1.
d) Ninguna de las opciones anteriores.

13. Identificar entre las siguientes una curva sinusoidal:

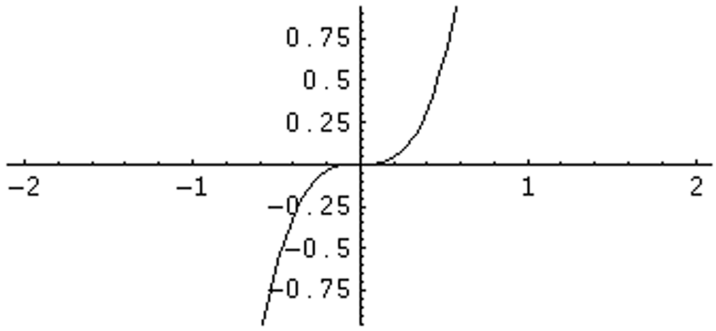
a)



b)



c)



d) Ninguna de las anteriores.

14. Si consideramos el recorrido de la circunferencia de radio R y centro O según la expresión dada (Rcost, Rsint) en términos de ángulo t, la figura se recorre en sentido...

a) horario.
b) antihorario.
c) No está determinado.
d) No se puede afirmar nada, ya que depende de los arcos.
e) Ninguna de las opciones anteriores.

15. Si expresamos la circunferencia de centro O y radio R mediante (Rcost, Rsint), variando t entre 0 y 2π, el recorrido sobre la misma

a) se inicia en el punto (R,0).
b) se inicia sobre el semieje y+.
c) termina en el semieje y–.
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

16. El producto de matrices A(BC)

a) supone calcular primero BC y después multiplicar por la izquierda por A.
b) no se puede calcular.
c) supone calcular primero AB y después multiplicar por la derecha por C.
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

17. El producto MA, con $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es...

a) A.
b) Depende de cuál sea la matriz A.
c) 0.
d) Depende de la dimensión.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

18. Si $\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, entonces

a) a=1, b=0
b) a=0, b=1
c) a=2,b=0
d) a=–1, b=1
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

19. El producto de matrices AB...

a) puede no ser igual a BA.
b) siempre es igual a BA.
c) nunca es igual a BA.
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

20. $cos^2\, a + sin^2\, a =$

a) 1.
b) 0.
c) Depende del ángulo a.
d) No se puede afirmar nada.
e) Ninguno de los anteriores.

21. El punto (a,0,0), a no nulo, es un punto...

a) del eje x.
b) del eje y.
c) del plano y = 7.
d) del plano z = –1.
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

22. El punto (0,b,0), con b no nulo, pertenece

a) al plano de coordenadas xy.
b) a la bisectriz del cuadrante de x,y positivas del plano z = 0.
c) al plano bisector x = y.
d) al plano y = x.
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

23. El punto (3,–5,7) es...

a) la proyección ortogonal del punto (3,–5,13) sobre el plano z = –7.
b) la proyección ortogonal del punto (3,–5,12) sobre el plano z = 7.
c) la proyección ortogonal del punto (3,5,12) sobre el plano z = 7.
d) la proyección ortogonal del punto (3,5,13) sobre el plano z = –7.
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

24. El punto (3,0,3)...

a) pertenece al eje x.
b) pertenece a la bisectriz de uno de los planos de coordenadas verticales.
c) es de la bisectriz del cuadrante de las coordenadas x,z positivas del plano xz.
d) es del eje z.
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

25. Sea P = (a,b,c). La proyección ortogonal de P sobre el plano xy es (3,4,0). La proyección ortogonal sobre el plano xz es (3,0,6). El punto P es...

a) (4,3,6).
b) (6,3,4).
c) (3,4,6).
d) (6,4,3).
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

26. La ecuación y = 6 en el espacio tridimensional corresponde...

a) a un punto.

b) a un plano.
c) a una recta.
d) No se puede determinar.
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

27. La ecuación y = x en el espacio tridimensional es la ecuación de...

a) una recta.
b) un plano.
c) la bisectriz del primer cuadrante del plano z = 0 del espacio tridimensional.
d) No se puede determinar.
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

28. La ecuación y = –x corresponde

a) a una recta.
b) a un plano.
c) a un punto.
d) Depende de la dimensión del espacio en el que se considere.
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

29. El punto (0,0,3) pertenece

a) al plano de coordenadas z = 0.
b) al plano z = 3.
c) al plano z = –3.
d) al eje de coordenadas x.
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

30. Dado el punto P = (4,5,0),

a) no hay ningún punto que se proyecte ortogonalmente a z = 0 sobre P.
b) sólo hay un punto que se proyecte ortogonalmente a z = 0 sobre P.
c) hay infinitos puntos que se proyectan ortogonalmente a z = 0 sobre P.
d) es la proyección ortogonal sobre el plano xz del punto (4,5,–4).
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

31. Los puntos del plano de coordenadas xz son de la forma

a) (a,0,c).
b) (0,b.c).
c) (a,b,0).
d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

32. Los puntos del plano paralelo al plano de coordenadas xy y que pasa por el punto (2,3,4) son de la forma

a) (a,b,4).
b) (2,3,c).
c) (a,b,–4).
d) (2,3,4).
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

33. El plano de coordenadas xz es

a) z = 0.
b) x = y.
c) x = z.
d) x = 0.
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

34. El plano paralelo al de coordenadas xy, de z positivas, que dista 3 unidades del origen es

a) x = 3.
b) z = 3.
c) z = –3.
d) y = 3.
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

35. El origen de un sistema de coordenadas del espacio tridimensional tiene coordenadas, en dicho sistema,

a) (–1,–1,–1).
b) Depende del sistema.
c) (0,0,0).
d) No se puede determinar.
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

36. Dado el punto P = (3,4,5)...

a) se proyecta ortogonalmente sobre el plano xy en el punto (3,4,5).
b) se proyecta ortogonalmente sobre el plano xy en el punto (3,–4,0).
c) se proyecta ortogonalmente sobre el plano xy en el punto (0,4,0).
d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

37. La proyección ortogonal del punto P = (a,b,c) sobre el plano de coordenadas xz es

a) (a,b,0).
b) (a,0,c).
c) (0,b,0).
d) (0,b,c).
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

38. El segmento de extremos A,B, orientado de B a A viene dado por la parametrización

a) $P(t)=A + t(B - A), 0 \leq t \leq 1$
b) $P(t)=B + t(B - A), 0 \leq t \leq 1$
c) $P(t)=(1 - t)A + tB, 0 \leq t \leq 1$
d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

39. El punto del eje z+ que dista 200 unidades del origen de coordenadas es...

a) (200,0,0).
b) (0,0,–200).
c) (0,0,200).
d) (200,200,200).
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1. c

2. a

3. b

4. c

5. b

6. a

7. a

8. b

9. b

10. c

11. c

12. a

13. d

14. b

15. a

16. a

17. a

18. b

19. a

20. a

21. a

22. a

23. b

24. c

25. c

26. b

27. b

28. d

29. b

30. c

31. a

32. a

33. e

34. b

35. c

36. d

37. b

38. a

39. c