Diseño y proporción

Pere Cruells
Germán Sáez

PID_00150820

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares del copyright.

Índice

1. El concepto de proporción 5
1.1. Introducción 5
1.2. Teorema de Tales 7
1.3. Definición de proporción 9
1.4. Propiedades de la proporción 11

2. Proporciones racionales y proporciones √n 18
2.1. Proporciones racionales 18
2.2. Proporciones racionales y música 19
2.3. Conmensurabilidad 22
2.4. Proporciones tipo √n 23
2.5. La proporción √2 y la familia DIN 24
2.6. Construcción geométrica de la proporción √n 29

3. El número de oro y aplicaciones 33
3.1. La divina proporción 33
3.2. Propiedades del número de oro 34
3.3. La proporción en el arte 37
3.4. Ejemplos de proporción áurea 39
3.5. Proporción en la naturaleza 43
3.6. Medidas, proporción y tipografía 44

Ejercicios de autoevaluación 49

Solucionario 51

1. El concepto de proporción

1.1. Introducción

La **teoría de la proporción** ha sido de gran importancia en todas las ramas del arte y en la estética. Editores, publicistas, pintores, escultores, arquitectos e incluso músicos se han basado en la teoría de la proporción a la hora de diseñar sus obras.

Encontramos aplicaciones de la teoría de la proporción en las pirámides egipcias, los edificios de la Grecia clásica, las pinturas de Leonardo da Vinci, las esculturas de Miguel Ángel y las obras del arquitecto Le Corbusier. En algunas de estas obras queda claro que sus autores usaron sus conocimientos sobre la teoría de la proporción, como es el caso de Le Corbusier o de Leonardo da Vinci. En otras, estudios posteriores han encontrado algunas proporciones clásicas en su composición, lo que hace suponer que sus autores tenían algunos conocimiento de éstas. La intención de estos autores era conseguir un ritmo en sus obras que creara un agradable efecto visual. El ejemplo más palpable y actual para cualquiera de nosotros es el de las tarjetas de crédito: ¿por qué las tarjetas de crédito tienen las medidas que tienen? Simplemente se escogieron estas medidas por cuestión estética. Se trata de un rectángulo ni demasiado alargado ni demasiado cuadrado, y las propiedades matemáticas de sus medidas lo hacen muy interesante. Su proporción se basa en el número de oro, que trataremos al final de este módulo.

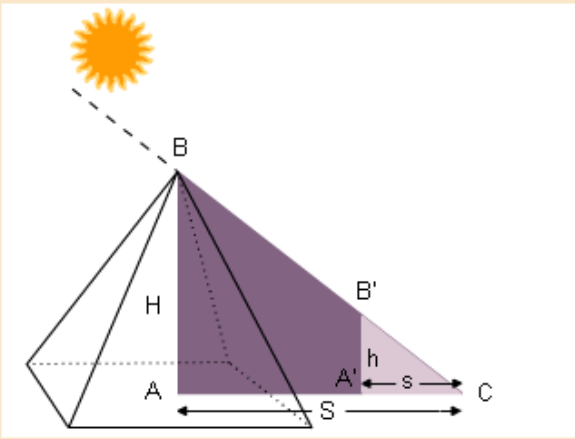
Leonardo da Vinci

Al observar la naturaleza también encontramos ejemplos de proporciones que han sido estudiadas a lo largo de la historia. En estos estudios, la distribución de las ramas de los árboles o el mosaico que se forma en la cáscara de una piña tropical reencontramos algunas de las proporciones utilizadas a lo largo de la historia del arte.

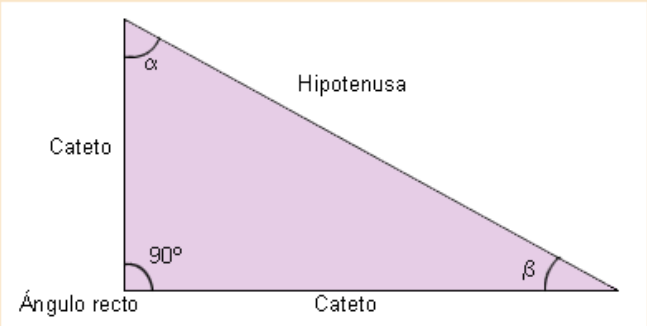
Ejemplo

Por ejemplo, las ya comentadas tarjetas de crédito actuales, algunos documentos de identidad e incluso los carnets de identificación de los estudiantes de esta universidad siguen esta proporción.

Carnet del Graduado Multimedia



Una de las primeras aplicaciones de la proporción que se conocen es la que hizo Tales de Mileto (s. IV a. C.) al medir la altura de las pirámides egipcias. Tales calculó la altura de las pirámides midiendo su sombra justo en el mismo momento en que la sombra proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura.



Un triángulo rectángulo es un triángulo con dos lados que forman un ángulo recto, es decir, de 90°. Los dos lados que forman este ángulo recto se denominan catetos, mientras que el tercer lado se llama hipotenusa. Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°. En el caso de un triángulo rectángulo, podemos afirmar que la suma de los dos ángulos que forma la hipotenusa con cada uno de los catetos da como resultado 90°.

Los dos triángulos que usa Tales tienen los mismos ángulos interiores, son triángulos rectángulos, y la inclinación del Sol hace que los dos triángulos presenten los mismos ángulos. Así, si un triángulo tiene los dos catetos de la

misma longitud, el otro también. Lo importante de este método es que Tales se dio cuenta de que estaba comparando dos triángulos, y que estos triángulos eran proporcionales. Las medidas de los triángulos eran diferentes, pero sus ángulos interiores eran exactamente iguales. Generalizando este hecho, tenemos el **teorema de Tales** tal como lo conocemos actualmente.

En la actualidad, la **proporción áurea** se ha utilizado tanto por toda su historia como por proporcionar un rectángulo estéticamente agradable a la vista.

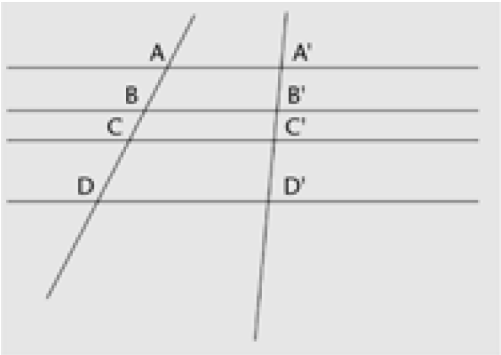
1.2. Teorema de Tales

Antes de tratar directamente el concepto de proporción, recordaremos el **teorema de Tales**, por ser un teorema básico en la teoría de la proporción. Como aplicación directa de este teorema, introduciremos qué se entiende por **triángulos semejantes**.

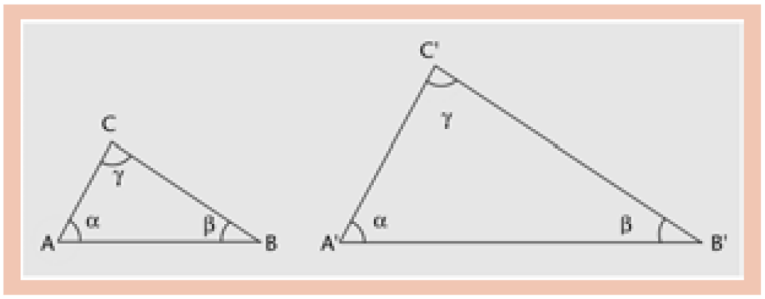
Dada una familia de rectas paralelas que cortan un par de rectas cualesquiera, los segmentos que se crean en una y otra recta son proporcionales.

Observando la figura adjunta, el teorema de Tales afirma que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = ..$$



La principal aplicación del teorema de Tales se da en el estudio de triángulos semejantes. Diremos que dos triángulos son semejantes cuando sus lados son proporcionales o cuando sus ángulos interiores iguales.



Los dos triángulos de la figura son semejantes y, por tanto, sus ángulos interiores son iguales y sus lados, proporcionales:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Para tener dos triángulos semejantes no es necesario comprobar todas las condiciones de la definición. Es suficiente con estos criterios:

- **Criterio 1**: si dos triángulos tienen los tres ángulos interiores iguales, entonces son semejantes. De aquí deducimos que si dos triángulos tienen sus lados paralelos dos a dos, entonces sus ángulos interiores serán iguales y, por tanto, serán triángulos semejantes. Este caso particular se puede observar en el dibujo anterior.

- **Criterio 2**: si dos triángulos tienen sus lados proporcionales dos a dos, entonces son semejantes.

- **Criterio 3**: si dos triángulos tienen dos lados proporcionales dos a dos y el ángulo que forman estos lados coincide en los dos triángulos, entonces los dos triángulos son semejantes. Un caso particular muy común de este último criterio se refiere a triángulos rectángulos: si dos triángulos rectángulos tienen los catetos proporcionales, estos triángulos deben ser semejantes.

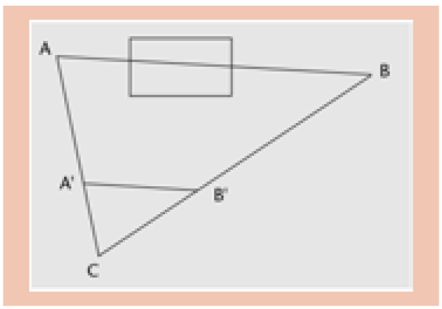
Estos criterios se deducen del teorema de Tales. Con este teorema y con el estudio de triángulos semejantes podremos efectuar cálculos con triángulos.

Ejemplo

Queremos calcular la distancia entre dos puntos, A y B, pero no podemos poner una cinta métrica de un punto al otro, ya que tenemos algún obstáculo en medio, por ejemplo, una casa. Nos situamos en un punto C desde el que podamos medir las distancias AC y BC. Con esto estamos construyendo un triángulo del que conocemos sólo 2 lados. Nos interesa conocer el tercero. Para ello construimos otro triángulo menor que éste pero semejante a él. Tomamos A' y B' de forma que las longitudes CA' y CB' sean proporcionales a las longitudes CA y CB respectivamente. Es decir: $\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'}$. Esto lo podemos conseguir fácilmente tomando, por ejemplo, CA' como una décima parte de CA, y CB'

como una décima parte de CB. Si lo tomamos así, tendremos: $\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'} = 10$, con lo que obtenemos dos triángulos semejantes: el triángulo ABC y el triángulo A'B'C, con dos lados proporcionales y el ángulo igual que forman estos dos lados. Por el tercer criterio de semejanza podemos afirmar que los dos triángulos son semejantes y, por lo tanto:

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'} = \frac{AB}{A'B'}$$



En caso de que hubiéramos tomado la décima parte, ahora podríamos afirmar que $AB = 10 \cdot A'B'$, y así conseguimos la distancia que nos interesaba conocer.

Como hemos visto, las propiedades de las proporciones y, sobre todo, las de algunas proporciones clásicas, influyen enormemente en el arte y, además, se pueden observar en la naturaleza.

1.3. Definición de proporción

WEB

Recurso interactivo accesible sólo en la web.

La definición de **proporción** es sumamente sencilla. Dados dos números positivos *a* y *b*, se define la proporción entre éstos como el cociente del mayor entre el menor. Esto lo escribiremos usando las funciones *máx(a,b)* y *mín(a,b)*, que dan el mayor y el menor de los dos números *a* y *b*. Así, tenemos que la proporción entre los números *a* y *b* se define como:

$$p(a, b) = \frac{\text{máx}(a, b)}{\text{mín}(a, b)}$$

Ejemplo

Queremos calcular la proporción entre 2 y 3, esto es, *p(2,3)*. Para ello planteamos el cálculo:

$$p(2, 3) = \frac{\text{máx}(2, 3)}{\text{mín}(2, 3)}$$

Puesto que *máx(2,3)=3,mín(2,3)=2*, tenemos que $p(2, 3) = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Simplemente tenemos que pensar que el cociente se obtiene del mayor entre el menor.

Otros ejemplos pueden ser:

$$p(4, 2) = \frac{\text{máx}(4, 2)}{\text{mín}(4, 2)} = \frac{4}{2} = 2;\ p(10, 6) = \frac{\text{máx}(10, 6)}{\text{mín}(10, 6)} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$$

Comparación de fracciones

Para calcular la proporción de dos números que estén representados por fracciones, deberemos saber cómo compararlos, para establecer cuál de los dos es el mayor y cual el menor. La forma más sencilla es dividiéndolos, es decir, buscando la expresión decimal de la fracción (se puede hacer con una calculadora) y comparando sus expresiones decimales.

También se puede comparar siguiendo el criterio siguiente: Si a, b, c y d son positivos, entonces:

$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ equivale a $ad \leq cb$

Así, podemos calcular proporciones del tipo:

$$p\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right) = \frac{\text{máx}\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right)}{\text{mín}\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right)} = \frac{2/3}{3/5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9}$$

En este ejemplo sabemos que 2/3 es mayor que 3/5, ya que $2 \cdot 5 = 10$ es mayor que $3 \cdot 3 = 9$.

Calcular una proporción requiere saber comparar y dividir números. No sólo números naturales, sino también números racionales y números reales.

N conjunto de los números naturales: {1, 2, 3, 4, 5, 6, ... }

Z conjunto de los números enteros: {..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... }

Q conjunto de los números racionales:

$$\left\{\frac{m}{n} \text{ siendo } m, n \text{ números enteros con } n \neq 0\right\}$$

Números naturales, enteros y racionales

Distintos tipos de problemas nos obligan a introducir diferentes tipos de números. Problemas tan simples como contar el número de ovejas de un rebaño o comparar extensiones de terreno para su cultivo han llevado a la humanidad a introducir los números. Los más intuitivos son los **números naturales** y sus fracciones. Contar *uno*, *dos*, *tres*,... es lo primero que aprendemos de los números, y con ello introducimos los números naturales. Los números naturales nos permiten contabilizar objetos que tengamos clasificados de una forma u otra. Por ejemplo, podemos contabilizar el número de ovejas de un rebaño. Así, el conjunto de los números naturales, que denotaremos con **N**, es el conjunto formado por los números 1, 2, 3, 4, 5, etc., es decir, **N** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ... }

A partir de los números naturales podemos crear fracciones. Las **fracciones** también aparecen de forma natural al comparar números naturales. Los mismos ejemplos de proporción nos llevan de los números naturales a sus fracciones.

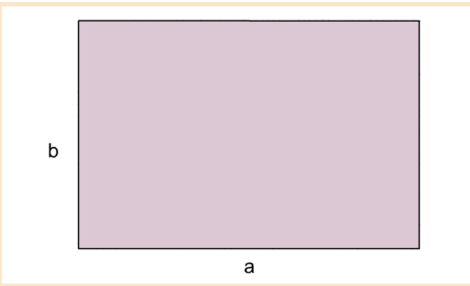
Dada una fracción, por ejemplo $\frac{n}{m}$ con n y m números naturales y siendo m distinto de cero, al número que tenemos en la parte superior se llama **numerador**, mientras que el número de la parte inferior se llama **denominador**.

Tanto los naturales como sus fracciones se pueden sumar y multiplicar sin ningún problema. Pero encontramos un obstáculo al intentar restar estos números. No siempre es posible restar dos números naturales para obtener otro número natural. Esto nos obliga a introducir los **números con signo**. Para cada número natural, n, introducimos dos nuevos símbolos: + n y - n. También es necesario introducir el número cero: 0. El conjunto de los números naturales con signo es **conjunto de los números enteros**. Se denota con

la letra **Z** y podemos escribirlo como **Z** = {..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... }. Dentro de este conjunto ya podemos sumar y restar sin ningún problema. También podemos introducir las fracciones con números enteros. El conjunto de todas las fracciones que se obtienen al realizar el cociente entre números enteros es el **conjunto de los números racionales**. Este conjunto también incluye el cero, pero no puede incluir las fracciones con cero en el denominador. Incluye todas las fracciones positivas y negativas y se denota con la letra **Q**.

Cabe destacar que todo número natural es un número entero y, a su vez, todo número entero es un número racional.

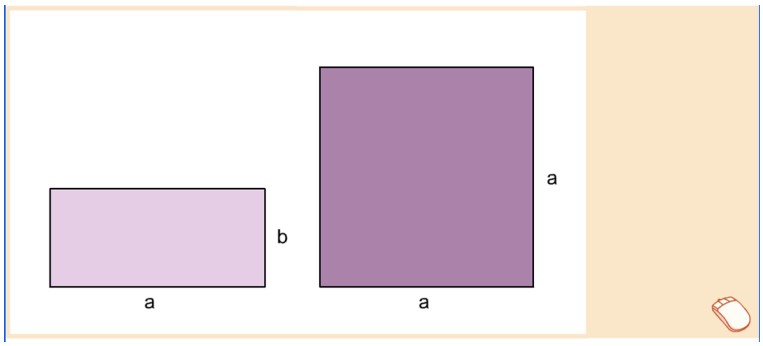
1.4. Propiedades de la proporción



La definición de proporción también se puede interpretar como la proporción de un rectángulo de lados a y b, o simplemente como la proporción entre dos segmentos de longitudes a y b.

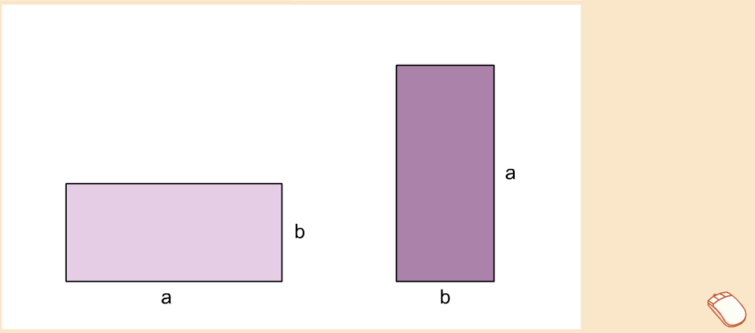
Con esta definición tan sencilla intentaremos razonar varias propiedades sobre la proporción. Nos centraremos en algunas proporciones que, por razones históricas o por la belleza de sus propiedades, se han convertido en **proporciones clásicas**.

Lo primero que se desprende de la definición es que la proporción es siempre mayor o igual que 1, y sólo será 1 cuando a y b sean iguales. Esta propiedad se deduce simplemente del hecho de dividir dos cantidades en las que el numerador siempre supera o es igual al denominador. En caso de interpretar la proporción desde el punto de vista de los rectángulos, esta propiedad nos indica que todo rectángulo tiene una proporción mayor que 1, y sólo tiene proporción 1 si este rectángulo es, en realidad, un cuadrado.



También es fácil apreciar que la proporción no depende del orden de los datos. Es obvio que siempre obtendremos cociente entre el mayor y el menor de los datos y, por tanto, tendremos: $p(a,b) = p(b,a)$. Esta propiedad la podemos

interpretar con rectángulos, ya que la proporción no depende de la posición del rectángulo. Observamos que la definición de proporción de un rectángulo no es "base partido por altura", sino "lado mayor entre lado menor".



El teorema de Tales, que hemos mencionado en la introducción, se puede interpretar como otra propiedad de la proporción, ya que ésta es invariable por ampliaciones o reducciones. Esto quiere decir que:

$$p(ka,kb) = p(a,b)$$

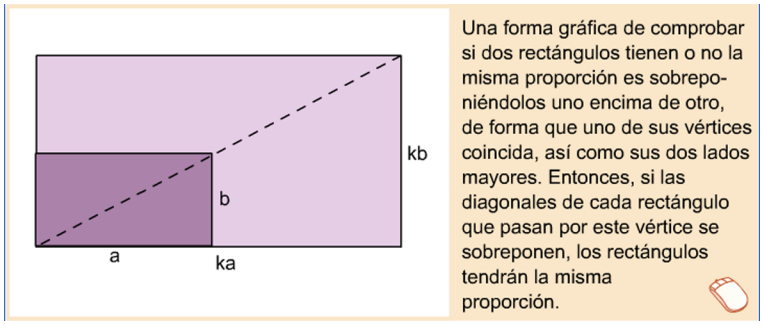
Esta propiedad es cierta, ya que si denominamos a al mayor y b al menor, tenemos $a \geq b$, y entonces:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$$

Esta igualdad es cierta, si recordamos que en una fracción se pueden eliminar factores que coincidan en numerador y denominador, o bien recordando que dos fracciones son iguales cuando el producto en cruz coincide:

$$(ka)b = (kb)a$$

Interpretando esta propiedad de las proporciones como la proporción de un rectángulo, tendremos que, dado un rectángulo de lados a y b, al multiplicar sus lados por una misma constante positiva, k, se obtiene un rectángulo de la misma proporción.

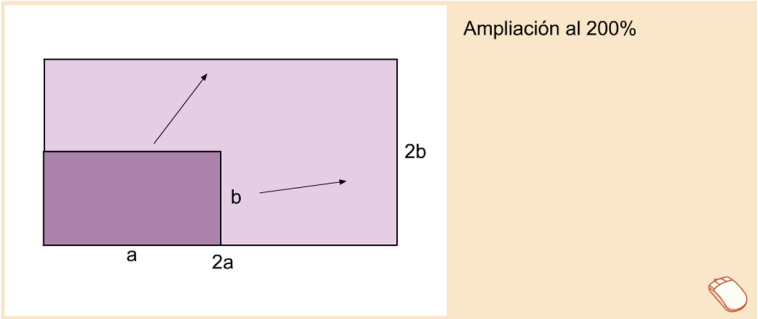


Una forma gráfica de comprobar si dos rectángulos tienen o no la misma proporción es sobreponiéndolos uno encima de otro, de forma que uno de sus vértices coincida, así como sus dos lados mayores. Entonces, si las diagonales de cada rectángulo que pasan por este vértice se sobreponen, los rectángulos tendrán la misma proporción.

El recíproco de esta propiedad también se satisface: si dos rectángulos tienen la misma proporción, sus diagonales se sobreponen al situar un rectángulo encima del otro (de la forma que hemos indicado). Las justificaciones de estas afirmaciones se razonan gracias al teorema de Tales.

Una de las maneras más cómodas de obtener en la práctica un rectángulo ampliado o reducido es mediante el uso de una fotocopiadora. Si damos la orden a la fotocopiadora de que haga una ampliación del 200%, veremos que la proporción entre los lados correspondientes del rectángulo ampliado y del original es 2. Por ejemplo, si una hoja de papel mide 30 cm x 20 cm, para ampliarla a un 200% deberemos poner una hoja de 60 cm x 40 cm, es decir, que multiplicamos las longitudes por 2. Estos ocurre de forma parecida en el caso de una reducción: si marcamos un factor de ampliación del 50%, reduciremos todos los lados de la hoja a la mitad; en este caso multiplicamos las longitudes por el factor 0,5. Observemos que la proporción entre los lados de la hoja original a la reducida también será 2, y no ½, ya que en proporción siempre consideramos el mayor entre el menor a la hora de obtener el cociente.

En estas ampliaciones y reducciones nos hemos fijado en cómo cambian las longitudes de los lados, pero ¿qué sucede con sus áreas? Si ampliamos una hoja un 150% estamos multiplicando sus dos lados por 1,5. Si los lados originales era de longitudes a y b, su área original era de $a \cdot b$. La hoja ampliada presentará un área $1{,}5a \cdot 1{,}5b = 1{,}5^2ab$, es decir, $1{,}5^2 = 2{,}25$ veces el área de la hoja original. Esto se puede apreciar claramente en la figura adjunta en el caso de que la ampliación sea al 200%; en este caso, el área se multiplica por $2^2 = 4$. En resumen, cuando las longitudes se amplían por un cierto factor k, las áreas quedan afectadas por el factor k^2. Análogamente ocurre en el caso de las reducciones; la única diferencia es que en este caso, los factores de reducción serán menores que 1.



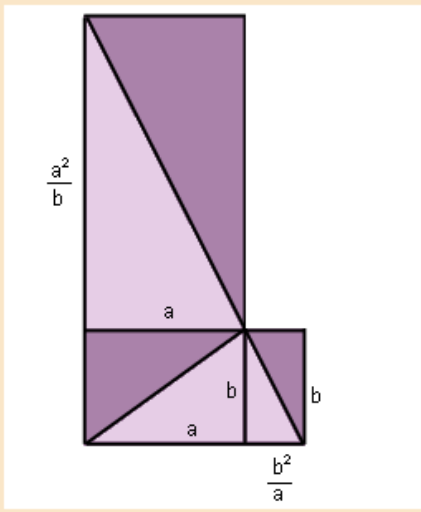
Este mismo hecho se produce con las letras que están impresas en una hoja que queramos ampliar o reducir. Si ampliamos una hoja un 200%, su altura y su anchura se multiplican por 2, mientras que su superficie se multiplica por 4. Así, llegamos a la conclusión de que al ampliar una hoja impresa al 200% gastamos 4 veces más de tinta (o tóner de fotocopiadora).

Hacer un X % de una cantidad significa multiplicar esta cantidad por $\frac{X}{100}$. Por ejemplo, si queremos ampliar una hoja de papel al 150%, deberemos multiplicar las longitudes de la hoja por $\frac{150}{100} = 1{,}5$. Si lo que queremos es una reducción al 50%, el factor de reducción será $\frac{50}{100} = 0{,}5$. En general, para las ampliaciones tendremos factores mayores que 1, mientras que los factores menores que la unidad se referirán a las reducciones. En lenguaje habitual es frecuente hablar de una "ampliación del 50%". En este caso, se entiende que el factor de ampliación es del 150% = 1,5.

WEB

Recurso interactivo
accesible sólo en la web.

Rectángulos recíprocos



Dado un rectángulo, se pueden construir sus dos rectángulos recíprocos de la forma siguiente: para cada uno de los lados del rectángulo, se construye otro rectángulo con este lado y de forma que su diagonal sea perpendicular a la diagonal del rectángulo inicial tal como indica la figura adjunta.

Es fácil apreciar que estos rectángulos tendrán la misma proporción, ya que si recortamos cada uno de los rectángulos recíprocos y lo sobreponemos encima del inicial con un giro de 90°, sus diagonales se sobrepondrían. De este hecho podemos deducir, además, que los lados de los rectángulos recíprocos serán: a y $\frac{a^2}{b}$ uno y b, $\frac{b^2}{a}$ el otro.

Ejercicio 1

Comprobad esta última propiedad, es decir, que los lados de los dos rectángulos recíprocos de un rectángulo de lados a y b miden b y $\frac{b^2}{a}$ en un caso y a y $\frac{a^2}{b}$ en el otro.

Solución

Observad que por el dibujo b<a. Entonces la proporción del rectángulo es $\frac{a}{b}$.

Hay una propiedad de los números muy fácil de comprobar que dice que si b<a y k>0, entonces b·k < a·k (por ejemplo, como 4<10, entonces 4·5<10·5).

Tomando k = b en nuestro caso, obtenemos que b^2 <a·b, y ahora multiplicando por k= $\frac{1}{a}$ obtenemos que $\frac{b^2}{a}$< b. Observad que $\frac{b^2}{a}$ y b son los lados de uno de los

triángulos recíprocos. Si calculamos la proporción haciendo el lado grande entre el pequeño, obtenemos... b:$\frac{b^2}{a}$ =$\frac{b}{1}$: $\frac{b^2}{a}$ =$\frac{ba}{b^2}$ =$\frac{a}{b}$.

De la misma manera se puede ver que a<$\frac{a2}{b}$ y entonces la proporción también es $\frac{a}{b}$.

Veamos un ejemplo, tomando a = 100 y b = 10, obtenemos que la proporción es 10.

Los rectángulos recíprocos son en un caso 10(=b), 1(=$\frac{b^2}{a}$) y en el otro caso 100(=a),1000(=$\frac{a2}{b}$).

Comprobamos para asegurarnos de que la proporción del primero es 10/1 =10 y la del segundo 1000/100 =10, que coincide con la del primer rectángulo.

Ejercicio 2

Comprobad que el rectángulo que se obtiene al reunir los 4 rectángulos de la figura también tiene la misma proporción que el rectángulo inicial.

Nota: Estos dos ejercicios son de muy alto nivel. Son demostraciones matemáticas generales de propiedades de los rectángulos.

Solución

Aplicando que a +$\frac{b^2}{a}$< b +$\frac{a2}{b}$, podemos calcular la proporción muy fácilmente, proporción = lado grande: lado pequeño = b +$\frac{a2}{b}$: a +$\frac{b^2}{a}$ =$\frac{b^2+a2}{b}$:$\frac{a2+b^2}{a}$ =$\frac{(a2+b^2).a}{(a2+b^2).b}$ =$\frac{a}{b}$ tal como queríamos ver.

Ahora tendremos que demostrar que a +$\frac{b^2}{a}$ < b +$\frac{a2}{b}$, o si hacemos mínimo común múltiplo, que $\frac{a2+b^2}{a}$ <$\frac{a2+b^2}{b}$.

Como sabemos que b < a, multiplicando por k =$\frac{1}{a}$ obtenemos $\frac{b}{a}$ <$\frac{a}{a}$ o equivalentemente $\frac{b}{a}$ < 1, si ahora volvemos a multiplicar por k =$\frac{1}{b}$ obtenemos que $\frac{b}{ab}$ <$\frac{1}{b}$ o simplificando la b en la primera fracción tenemos $\frac{1}{a}$ <$\frac{1}{b}$. Entonces multiplicando por k = (a^2+b^2) obtenemos lo que queríamos ver:

$\frac{a2+b^2}{a}$<$\frac{a2+b^2}{b}$

Otra forma de calcular un tanto por ciento es por medio de una regla de tres. Por ejemplo, para calcular un 16% de 3 metros procederemos de la manera siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 16 \text{ —— } 100 \\ x \text{ —— } 3 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{16}{x} = \frac{100}{3} \Rightarrow 100x = 16 \cdot 3 \Rightarrow x = \frac{48}{100} = 0{,}48 \text{ m}$$

Podemos resumir las propiedades de la proporción comentadas hasta ahora:

$p(a,b) \geq 1$

$p(a,b) = 1$ únicamente en el caso de que $a = b$

$p(a,b) = p(b,a)$

$p(ka,kb) = p(a,b)$ =para cualquier valor de k positivo.

Actividad

Ejercicio 1

De un negativo de 24 mm x 36 mm se saca a una fotografía de 40 cm x A cm. ¿Cuál puede ser el valor de A?

Solución

Al pasar de un negativo a un positivo con una ampliadora se mantienen las proporciones del rectángulo que enmarca el negativo y el positivo. La proporción del negativo es: $p(36,\ 24) = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$. La proporción del positivo será $p(40,\ A) = \frac{\text{máx}(40,\ A)}{\text{mín}(40,\ A)}$. No sabemos si el valor del lado A será mayor o menor que 40 cm, por lo que estudiaremos las dos posibilidades. Si $A \geq 40$, entonces $p(40,\ A) = \frac{\text{máx}(40,\ A)}{\text{mín}(40,\ A)} = \frac{A}{40}$. Imponiendo que se mantengan las proporciones, tenemos: $\frac{A}{40} = \frac{3}{2} \rightarrow A = 40\frac{3}{2} = 60$ cm. En el caso de que $A \leq 40$, tenemos que $p(40,\ A) = \frac{\text{máx}(40,\ A)}{\text{mín}(40,\ A)} = \frac{40}{A}$ y, por lo tanto, $\frac{40}{A} = \frac{3}{2} \rightarrow A = 40\frac{2}{3} = \frac{80}{3} = 26{,}67$ cm. Así, tenemos dos posibilidades como solución, usar un papel de 40 cm x 60 cm o bien uno de 26,67 cm x 40 cm.

Ejercicio 2

Nos dan la siguiente imagen para insertarla en una página web. Por cuestiones de formato queremos reducirla hasta una altura de 1,5 cm. ¿Qué ancho debemos darle?

Solución

La solución puede variar un poco en función de las medidas que toméis de la imagen. Por ejemplo, medid con una regla la impresión de los apuntes y calculad la proporción.

Ejercicio 3

¿Para qué valores x, y tenemos que $p(x, y)=p(x^2, y^2)$ y para cuáles tenemos $p(x, y) = p(1/x,1/y)$?

Solución

Supondremos que $x \geq y$. En caso contrario, se intercambian sus valores. Entonces observamos que $x^2 \geq y^2$. Así, tenemos que: $p(x, y) = \frac{x}{y} = (p2, x2) = \frac{x2}{y2}$. La condición que tenemos para x e y será: $\frac{x}{y} = \frac{x2}{y2} \rightarrow \frac{x}{y} = 1 \rightarrow x = y$. Así, concluimos que esta igualdad sólo se dará para proporciones iguales a 1.

En un ejercicio anterior se puede ver que si x $\geq$ y, entonces $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{x}$. Entonces $P\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} : \frac{1}{x} = \frac{x}{y}$.

Entonces como imponemos que P(x,y) $= P\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, tenemos que $\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$ y esto es verdad siempre, sean cuales sean los valores de x e y. Por ejemplo, si tenemos x =10 e y = 2, observad que la proporción es 5. Los números $\frac{1}{10}$= 0,1 y $\frac{1}{2}$ = 0,5 forman un nuevo rectángulo de proporción = lado grande: lado pequeño = 0,5:0,1 = 5. La misma proporción que el rectángulo original.

2. Proporciones racionales y proporciones √n

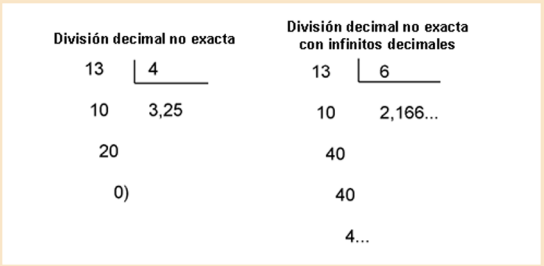
2.1. Proporciones racionales

Ya hemos introducido los números racionales al definir la proporción y hablar de distintos conjuntos de números: **naturales**, **enteros** y **racionales**. Si al calcular una proporción se obtiene un número que se puede expresar como cociente de números enteros, entonces esta proporción se denomina **proporción racional**. Este tipo de proporciones se ha usado a lo largo de la historia en numerosas ramas del arte. Pitágoras descubrió proporciones racionales en la escala musical. Los arquitectos y constructores han usado estas proporciones en las medidas de unas baldosas, la separación entre unas columnas de una catedral o al diseñar la división de una ventana para la distribución de sus cristales. Al dividir una hoja en tercios para preparar un tríptico publicitario estamos usando proporciones racionales.

Representación decimal y números reales

Recordemos que todo número racional se puede expresar como una fracción de números enteros; ésta, además, se puede representar como un número decimal. Dado un número racional en forma de fracción, podemos efectuar la división para obtener su expresión decimal. Al realizar esta división pueden ocurrir dos cosas. La división puede ser exacta o puede tener decimales. En caso de ser exacta, este número racional también será entero. Si la división requiere decimales, volvemos a tener dos posibilidades distintas. Puede que la división tenga un número finito de decimales o puede que sea una división con infinitos decimales.

Veamos un par de divisiones como ejemplo:



En el primer ejemplo, el número de decimales es finito, ya que al dividir hemos llegado a 0 en el resto, con lo que la división acaba. En el segundo caso entramos en una repetición sin salida, con lo que el número de decimales es infinito, pero con una repetición cíclica.

Estas dos posibilidades son todas las que se pueden dar con números racionales. Así, podemos afirmar que todo número racional se expresa de forma decimal con un número finito de cifras o bien con una parte decimal con periodicidad. En caso de representación decimal finita, se puede completar esta representación con un periodo de ceros a su derecha. Por ejemplo, el número racional 3/2 se puede expresar como 1,5, pero también como 1,5000... con el cero como parte periódica de la parte decimal. Podemos resumir que todos los números racionales son los que tienen representación decimal con una parte decimal periódica.

Es fácil ver que existen números cuya representación decimal no es periódica, por ejemplo:

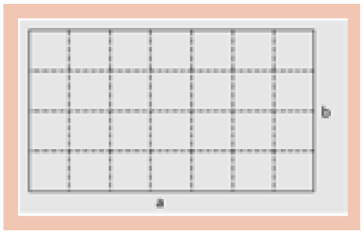
0,101001000100001000001000000...

Estos números se denominan **irracionales**. Aparte de este ejemplo, podemos dar muchos más ejemplos de números irracionales: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, el número π, etc. Todos los números racionales junto con los irracionales forman el conjunto de los **números reales**, que se representa por **R**.

Ejemplo

Por ejemplo, el rectángulo de la figura se puede solapar con una cuadrícula que encaje perfectamente con sus vértices, con lo cual su proporción se puede calcular de forma directa:

$$p(a, b) = \frac{7}{4}$$



Así, los únicos rectángulos que se pueden embaldosar con baldosas cuadradas son los que tengan proporción racional.

La propiedad más interesante de los rectángulos de proporción racional es que son los únicos que se pueden obtener como unión de cuadrados iguales no solapados. En otras palabras, si dado un rectángulo podemos construir una cuadrícula que se adapte perfectamente a éste, es decir, que los vértices del rectángulo coincidan con los vértices de la cuadrícula, su proporción será racional y, recíprocamente, si construimos un rectángulo sobre una cuadrícula, seguro que su proporción será racional.

Expresión de las proporciones racionales por medio de cuadrículas

Si un rectángulo de lados a y b, con $a \geq b$, tiene proporción racional, por ejemplo $\frac{m}{n}$, entonces podremos construir una cuadrícula cuyos cuadrados midan $\frac{a}{m} \times \frac{a}{m}$. Para ver que esta cuadrícula se adapta perfectamente al rectángulo, sólo tenemos que comprobar que la medida $\frac{a}{m}$ se adapta un número entero de veces en los lados del rectángulo. Esto es así ya que $a = m \cdot \frac{a}{m}$ y $b = n\frac{a}{m}$. La primera igualdad es obvia, y la segunda surge de la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

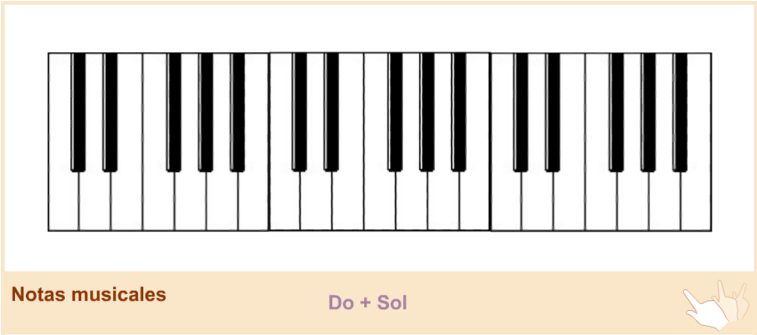
El recíproco de esta propiedad es inmediato.

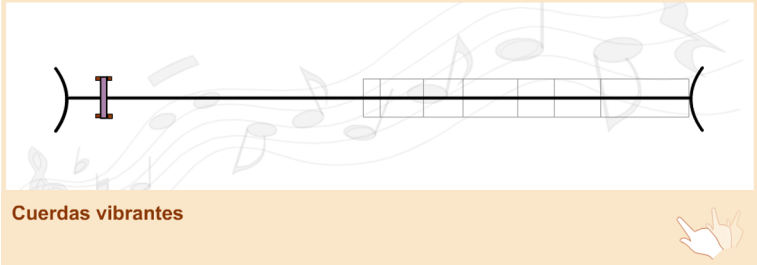
2.2. Proporciones racionales y música

La utilización de la **teoría de la proporción** también se ha aplicado a la música como garantía de armonía y belleza. Pitágoras y sus seguidores fueron los primeros en introducir una **estructura matemática** en la música. La **escala musical** se compone de siete notas: do, re, mi, fa, sol, la, si, que junto con el siguiente do, componen lo que se llama una **octava**. Cada una de estas notas representa una tonalidad de sonido. Pitágoras observó que al hacer vibrar distintas cuerdas tensadas de longitudes de **proporciones racionales** sencillas, como 2/3, 3/4, etc., los tonos que se obtienen son **armoniosos**, entendiendo que un sonido es armonioso cuando resulta agradable al oído.

Entre estas siete notas de la escala musical se insertan algunas otras llamadas **sostenidas** y representadas con el signo #. Así, la escala musical completa se compone de doce notas. Cada una de estas notas está separada de sus vecinas por medio tono:

..., do, do#, re, re#, mi, fa, fa#, sol, sol#, la, la#, si, do...





Al pasar de un do al siguiente, diremos que hemos aumentado una octava. Esto es debido a que al pasar de una nota a otra, sin contar las notas con sostenido (#), pasamos por ocho notas.

En palabras actuales, Pitágoras diría que si una cuerda tensada reproduce la tonalidad mi al vibrar, al doblar la longitud de la cuerda ésta produce la misma tonalidad, otro mi, aunque una octava más baja. A partir de la primera tonalidad de mi se construyen otras tonalidades. Las demás notas de la escala musical se producirán al considerar cuerdas de longitudes intermedias entre las dos cuerdas iniciales que producen los dos mi. Así, al considerar una cuerda de proporción 16/9 con respecto a la primera, obtendremos un fa, con 8/5 obtendremos un sol, 3/2 para el la, 4/3 para el si, 6/5 para el do y, finalmente, 16/15 para el re.

Las proporciones relacionadas con la música jugaron un papel muy importante en la arquitectura gótica. En esta época, la música era considerada una manifestación divina y también una alabanza a Dios. Esto impuso que las construcciones religiosas tuvieran medidas con proporciones musicales en sus diseños, por lo que se encuentran numerosas proporciones racionales en la arquitectura gótica.

Observad que la definición de proporción que dimos considera siempre proporciones mayores que uno. En este caso, hemos partido cuerdas en 2/3 y otras fracciones que son menores que 1. A pesar de ello, al considerar la proporción entre dos cuerdas obtendremos un número mayor que 1. La proporción entre una cuerda de longitud 1 y una de longitud 2/3 será:

$$p(1,\, 2/3) = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Ejercicio

Si al hacer vibrar una cuerda tensada obtenemos un mi, ¿qué nota obtendremos al considerar sólo 2/3 de cuerda? ¿Y si tomamos la cuerda de longitud 3/2? ¿Qué relación se establece entre un caso y otro?

Solución

Si tenemos una cuerda de longitud 1 que tensada produce un mi, al doblarla también producirá un mi. Sabemos que al tomar 4/3 de la primera produce un si.

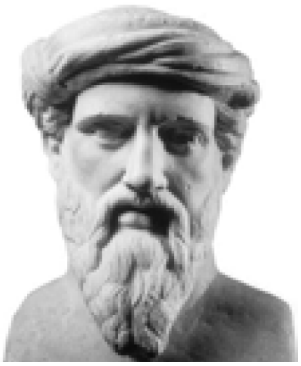
Dividiendo estas cuerdas por la mitad subimos una octava y obtenemos las mismas notas. Así, 2/3 de la cuerda inicial produce un si.

Si tomamos 3/2 obtenemos, tal como se ha explicado, un la. Aunque las cuerdas estarán en la misma proporción (p(1, 2/3) = p(1, 3/2) = 3/2).

Jámblico, un erudito del siglo XIV, en uno de sus nueve libros sobre la escuela pitagórica explica la leyenda que cuenta que Pitágoras descubrió las proporciones racionales en la música de forma casual, al observar el sonido de los martillos de una fragua. Pitágoras se dio cuenta de que, al golpear a un tiempo varios martillos a la vez, se producía un sonido armónico, excepto cuando se usaba un martillo concreto. Pitágoras estudió esos martillos y se dio cuenta de que los pesos de los martillos que producían sonidos armónicos estaban en proporciones del tipo 1/2, 2/3 o 3/4, mientras que el peso del martillo que producía un sonido desagradable al golpear junto a los demás no mantenía una relación simple con los demás pesos. A partir de este episodio, Pitágoras aplicó estas observaciones a la teoría de la música con cuerdas vibrantes, tal como hemos explicado anteriormente.

2.3. Conmensurabilidad

Pitágoras, y con él sus seguidores, quienes constituyen la escuela pitagórica, basaron su concepción del mundo en los números. Para los pitagóricos, todo era número; de esta forma trataban de matematizar la percepción que tenían de su entorno. Para ello, uno de los problemas que se plantearon fue el siguiente:

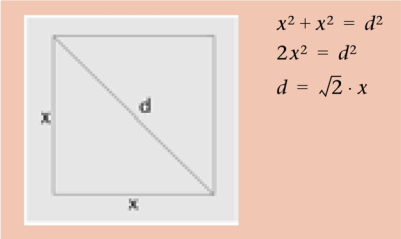


Pitágoras

> **"Consideremos un segmento rectilíneo que se toma como unidad de medida de longitudes. ¿Es posible medir cualquier otro segmento rectilíneo con esta unidad?"**

Los mismos pitagóricos dieron respuesta a esta pregunta. Su idea era poder **medir** cualquier segmento a partir de esta unidad de medida. El significado que ellos daban a medir era que un segmento fuera la mitad, un tercio, cinco cuartos, etc. de esta unidad. Para ellos, sólo eran mensurables los segmentos de longitudes racionales. Estas medidas las denominaban **conmensurables**. Su teoría de que todo era número y, por tanto, conmensurable se vino abajo al intentar medir la diagonal de un cuadrado.

Dado un cuadrado de lado x, podemos comprobar mediante el teorema de Pitágoras que su diagonal medirá exactamente $d = \sqrt{2} \cdot x$.



Si tomamos x como unidad, es imposible encontrar un número racional que pueda medir esta diagonal. Los griegos fueron capaces de demostrar esta afirmación, pero esta demostración provocó un gran choque con su concepción de las matemáticas. Las medidas que, como $\sqrt{2}$, no podían medir las denominaros **inconmensurables**.

Otras medidas inconmensurables aparecen al querer medir la longitud de una circunferencia tomando como unidad de medida su diámetro. O lo que es lo mismo, al calcular la proporción entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. En este caso aparece **el número π** (letra del alfabeto griego equivalente a la letra p de nuestro abecedario, se lee *pi*). Este número no se puede expresar ni como una fracción (no es racional) ni como ninguna combinación finita de raíces cuadradas y otras operaciones elementales como la suma y el producto. La representación decimal de este número es infinita y sin ningún periodo. Su valor numérico aproximado es:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 95...$$

Este número aparece en muchos campos de aplicación de la matemática, pero sobre todo, de una forma más frecuente, en geometría. Un ejemplo curioso es el de la longitud de los ríos desde el nacimiento a su desembocadura. Fruto del azar y del orden (la ley de la gravedad y la orografía) el trazado no es rectilíneo. Sin embargo, la proporción entre la longitud real de los ríos y la longitud calculada en línea recta es próxima al número π.

2.4. Proporciones tipo √n

Las proporciones del tipo $\sqrt{n}$ más usuales son: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$. Los rectángulos de proporción $\sqrt{2}$ se han hecho muy comunes gracias a la familia de hojas tipo DIN A, y esto es debido a la siguiente propiedad.

Los rectángulos de proporción $\sqrt{n}$ son los únicos que, al recortarlos en n rectángulos iguales (como indica la figura), se obtienen rectángulos con la misma proporción $\sqrt{n}$.

Veámoslo para $n = 5$. Si al dividir un rectángulo de lados a y b en 5 partes iguales, tal como muestra la figura, obtenemos 5 rectángulos de la misma proporción, podremos afirmar que:

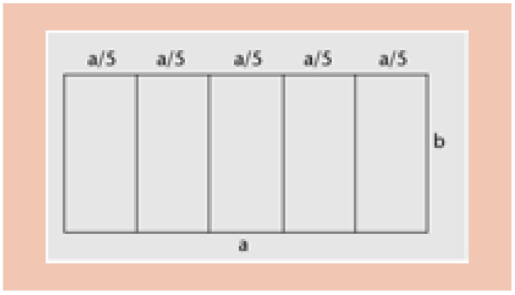
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/5}$$

de donde deducimos que:

$$\frac{a^2}{b^2} = 5$$

y entonces:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{5}$$



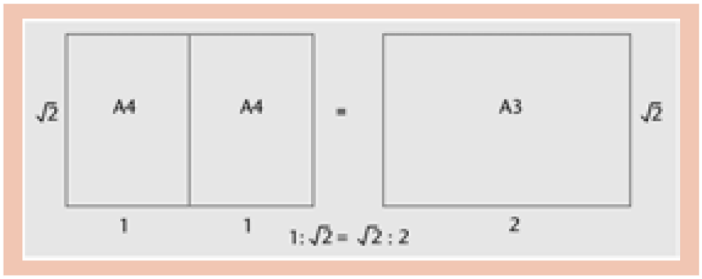
En general, esta propiedad de las proporciones del tipo $\sqrt{n}$ se debe al hecho de que $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Esto se puede comprobar calculando el producto en cruz: $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}^2 = n$.

Observemos que, en general, estos rectángulos no tendrán proporción racional. Sólo los casos en los que n tenga raíz exacta, como por ejemplo, 4, 9, 16, 25, etc.

2.5. La proporción √2 y la familia DIN

Leamos la propiedad antes anunciada para n=2. Si tenemos un rectángulo de proporción $\sqrt{2}$, al dividirlo por la mitad, obtenemos dos rectángulos que también tienen proporción $\sqrt{2}$. Además, dado que esto sólo ocurre con estos rectángulos, resulta que si al dividir un rectángulo por la mitad obtenemos dos rectángulos que tienen la misma proporción que el inicial, entonces éste tiene proporción $\sqrt{2}$.

Usando esta propiedad se creó la serie de hojas DIN A tan importante, como es bien sabido, en las artes gráficas.



Las reglas por las que se rige la familia de hojas DIN de la serie A son las siguientes:

- Todas las hojas de esta serie deben tener proporción raíz de 2 ($\sqrt{2} \approx 1{,}4142$).
- La hoja A0 tiene una superficie de 1 metro cuadrado.
- Al cortar una hoja de formato A0 por la mitad se obtienen dos hojas de formato A1. Así, la altura de A1 coincide con la anchura de A0, mientras que su anchura es la mitad de la altura de A0.
- El resto de hojas de la serie A se forma de igual modo al dividir su precedente en dos partes iguales por una línea paralela a su lado más corto.
- Las medidas estándar de esta serie se redondean en milímetros.

A partir de esta información, vamos a crear una tabla con las medidas de la serie DIN A, desde A0 hasta A10.

Las medidas de la serie A se obtienen al imponer que su proporción sea $\sqrt{2}$ y su área 1 m^2. Si sus lados son x (altura) e y (anchura), entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 1 \\ \dfrac{x}{y} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 1 \\ x = \sqrt{2}y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{2}y^2 = 1 \\ x = \sqrt{2}y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} \\ x = \sqrt{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \sqrt{\sqrt{2}} \approx 1{,}189 \text{ m} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} \approx 0{,}840 \text{ m} \end{array}\right\}$$

A partir de estos resultados, podemos crear la tabla siguiente:

Nombre serie	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Medidas (mm)	841×1189	594×841	420×594	297×420	210×297	148×210	105×148	74×105	52×74	37×52	26×37

Por ejemplo, un DIN A4, que es el de uso más común, tiene medidas 210 mm x 297 mm. Se puede comprobar que su proporción es aproximadamente $\sqrt{2}$. Al juntar dos hojas DIN A4, obtenemos una hoja DIN A3, cuyas medidas son: 297 mm x 420 mm. En cambio, al dividirlo por la mitad obtenemos un DIN A5, y sus medidas son 148 mm x 210 mm. Las medidas de estas dos nuevas hojas también nos dan una proporción próxima a $\sqrt{2}$.

Al usar una fotocopiadora se observa que cuando se quiere fotocopiar una hoja de papel DIN A4 ampliándola a DIN A3 se tiene que poner un factor de ampliación de 1,414. Justamente ésta es una aproximación de $\sqrt{2}$. En cambio, para reducir a la mitad, se debe poner el factor 0,7071, que es el inverso de $\sqrt{2}$, y también la mitad de $\sqrt{2}$.

Ejemplo

Nos encontramos en una biblioteca y queremos fotocopiar un artículo en una revista que se edita en formato DIN A4. Para ahorrar papel, queremos fotocopiar cada dos páginas de la revista en una sola hoja DIN A4 de la fotocopiadora. Al abrir la revista, cada dos hojas del formato A4 equivalen a una hoja de formato A3. Así para obtener la reducción deseada, señalaremos el factor de ampliación en 71% (que es una aproximación de $1/\sqrt{2}$), o bien con el botón A3→A4 , que muchas fotocopiadoras llevan incorporado. Las dos páginas de la revista en formato DIN A4 quedarán exactamente fotocopiadas en una sola página A4, sin ampliar márgenes ni perder texto. La reproducción de una hoja A4 equivale, ahora, a un A5.

Actividad

Ejercicio 1

Existe otra serie de hojas de la familia DIN llamada JIS B o serie japonesa JB (distinta de la usual DIN B). Ésta se define igual que la serie A pero con la diferencia de que la hoja B0 tiene una superficie de 1,5 m2. Construid la tabla de las medidas de las hojas desde B0 hasta B10.

Solución

Aplicando la fórmula para encontrar las medidas de la serie A, a partir de las expresiones x*y = 1,5 y x/y = √2 obtenemos x = 1,029 e y = 1,455, por tanto un B0 = 1029 × 1455 y de aquí se puede obtener el resto de medidas.

La tabla de las medidas de las hojas desde B0 a B10 son las siguientes:

B0 = 1029 × 1456

B1 = 728 × 1029

B2 = 514,5 × 728

B3 = 364 × 514

B4 = 257 × 364

B5 = 182 × 257

B6 = 128,5 × 182

B7 = 91 × 128

B8 = 64 × 91

B9 = 45,5 × 64

B10 = 32 × 45

Nota: Hemos obtenido 1029 por aproximación por corte pero es "más" correcto empezar por 1030 en lugar de 1029, ya que el primer valor sale 1,029883 y cuando se aproxima por redondeo en lugar de por corte, el primer valor es 1030.

Ejercicio 2

¿Qué factor de ampliación deberemos poner en la fotocopiadora para reproducir una hoja A5 en una B5?

Solución

Aquí tenemos un pequeño problema. Podemos hacer lo siguiente:

p(A5) = p(148, 210) = √2
p(B5) = p(182, 257) = √2

Si miramos la proporción de las longitudes respectivas es:

p(148,182) = 182/148=1,23
p(210,257) = 257/210=1,23

Entonces la ampliación del 123% sería la solución correcta.

Lo que pasa es que al haber hecho aproximaciones hemos perdido que p(148, 210) = √2 y p(B5) = p(182, 257) = √2.

Entonces es "más" correcto hacer:

Una hoja A5 tiene dimensiones 148 × 210

Una hoja B5 tiene dimensiones 182 × 257

El factor de ampliación es del 122,9% por la altura y del 122,3% por la anchura

X = (182 / 148) × 100 = 122,9

Y = (257 / 210) × 100 = 122,3

Y ahora podemos pensar que la ampliación ha de ser del 122% (no estamos seguros de que en una fotocopiadora valgan los decimales; si valen, hemos de coger

122,3 y nunca 122,9, ya que nos excederíamos de medidas) puesto que con una ampliación del 123% nos pasaríamos de las medidas de la hoja de B5. Vamos a comprobarlo:

123% de 148 = 182,04

Ejercicio 3

Otra serie de la familia DIN sirve para las dimensiones de sobres de correo. Ésta se llama DIN C. Además de que su proporción vuelve a ser $\sqrt{2}$, las dimensiones del sobre C0 se obtienen al imponer que el cuadrado de su área también sea $\sqrt{2}$. Calculad las medidas de la familia de sobres DIN C, desde C0, hasta C10.

Solución

Sabiendo que (x*y)^2 = √2, i x/y = √2, podemos aplicar la ecuación del ejercicio 1 y el resultado que obtenemos es: x = 1,294 y y = 0,918. Por tanto, la medida de un Din C0 es 918 × 1294, y así sucesivamente, C1 es 647 × 918, C2 es 459 × 647, etc.

Nota: es más correcto comenzar por 917 en lugar de 918. Véase: http://www.gusgsm.com/sobres_iso

La mayoría de las fotocopiadoras modernas disponen de teclas para ampliaciones y reducciones entre estos tipos de formato: A4→B5, A3→A4, etc., con lo que resulta fácil hacer reproducciones de unas hojas a otras con sólo pulsar una tecla.

Los usos más frecuentes de las hojas de estas familias DIN que hemos presentado son:

Serie	Se usa en
A0, A1	Pósters, dibujo técnico, planos de arquitectos.
A2, A3	Dibujo, tablas de gran formato, diagramas.
A4	Cartas, revistas, formularios, catálogos, etc. Es la medida más común para impresoras y fotocopiadoras.
A5	Libros de notas, agendas.
A6	Postales.
B5, A5, B6, A6	Libros.
C4, C5, C6	Sobres para cartas en formato A4: sin doblar (C4), con un doblez (C5), con dos dobleces (C6).
B4, A3	Periódicos. Es la segunda serie más usada en impresoras y fotocopiadoras después del A4.

Actividad

Ejercicio 1

¿Cuál será el peso del contenido de una carta de 15 hojas de papel de formato DIN A4, sabiendo que el peso de dicho papel es de 80 gr/m^2? ¿Cuánto pesará en total si metemos las 15 hojas en un sobre de formato C4 hecho con papel de la misma calidad?

Solución

Un A0 pesa 80 gramos. Dos A1 puestos juntos forman un A0, entonces el A1 ha de pesar 40 gramos. Dos A2 hacen un A1, entonces un A1 tiene un peso de 20 gramos. Dos A3 hacen un A2, entonces el A3 pesa 10 gramos. Finalmente, como dos A4 hacen un A3, consecuentemente, el A4 pesa 5 gramos.

Entonces:

Sabiendo que un Din A0 pesa 80 gramos, un Din A4 pesa 5 gramos, así que 15 hojas Din A4 pesan 75 gramos.

Para la segunda pregunta no tenemos suficientes datos para poder responder. Podríamos, sin embargo, encontrar unos valores que aseguraran que superan su peso. Por ejemplo, 75 gramos es una cuota mínima por el peso del sobre con las 15 hojas.

Sembla que 75 + el peso de dos medidas de papel C4 puede ser un valor muy aproximado, pero no el correcto (pensad que con dos papeles de medida C4 no podéis hacer un sobre porque necesitáis más papel, ya que hay que hacer lengüetas, etc.).

La medida de un sobre C4 es 229 × 324.

El área total de las dimensiones de un sobre en papel de medida C4 en m^2 es: 0,229 × 0,324 = 0,0742. Como necesitamos dos hojas para hacer el sobre tenemos un área de papel de 0,1484 m^2.

Si hacemos una regla de tres para encontrar el peso:

x -> 0,1484m^2

80gr -> 1m^2

obtenemos que x = 11,872 gramos.

Entonces el peso total es de: 75 + 11,872 = 86,872 gramos.

Ejercicio 2

Al partir una hoja DIN A4 en tres rectángulos iguales, ¿qué proporción tienen los tres rectángulos obtenidos? ¿Y si lo partimos en 4 rectángulos?

Solución

Si la proporción de un Din A4 es √2, para conservar esta misma proporción hay que dividir el rectángulo en dos partes iguales, entonces:

297/2=148,5 i p(210, 148,5)= √2

En ningún sitio del enunciado dice que hayan de conservar la misma proporción una vez se haya dividido el rectángulo en 3 o 4 partes, ¿no?

Pensad que si x/y =$\sqrt{2}$ (o equivalentemente x =$\sqrt{2}$ y), como $\sqrt{2}$ = 1,4142, entonces tenemos que x>y, ya que x = 1,4142 * y.

Si dividimos los dos lados por 3, obtenemos:

$\frac{x}{3} = 0{,}4714...y$ Si pensáis un poco, veréis que prácticamente $\frac{x}{3}$ es la mitad de y. Entonces podemos concluir que $\frac{x}{3}$<y.

Entonces la proporción de los rectángulos = lado grande/lado pequeño = y /$\frac{x}{3}$ =$\frac{3y}{x}$.

Pensemos que si x/y =$\sqrt{2}$, entonces y/x = 1/$\sqrt{2}$ y entonces tenemos:

Proporción de los rectángulos = lado grande/lado pequeño = y /$\frac{x}{3}$ =$\frac{3y}{x}$ =$\frac{3}{\sqrt{2}}$

Nota: Si repetís por 4 obtendréis $\frac{4}{\sqrt{2}}$.

Recursos

Si estáis interesados en medidas estándares para papel, podéis visitar las siguientes webs:

Artículo muy completo sobre la familia DIN (en inglés):

http://www.cl.cam.ac.uk/~mgk25/iso-paper.html

Página oficial de DIN (en alemán):

http://www.din.de/

Página oficial de la Organización Internacional para la Estandarización (International Organization for Standardization, ISO). Esta organización trabaja para la globalización de todas las medidas.

http://www.iso.ch/

Listado de la mayoría de los formatos de papel que se usan en el mundo:

http://www.twics.com/~eds/paper/papersize.html

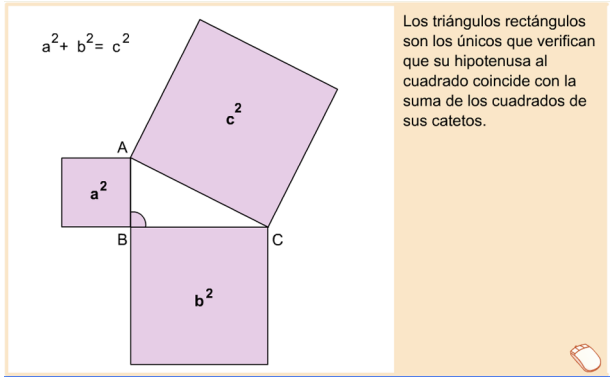
2.6. Construcción geométrica de la proporción √n

Pasemos a trabajar un poco otras proporciones del tipo $\sqrt{n}$. Para n = 3, la propiedad estudiada anteriormente se leerá de la siguiente forma:

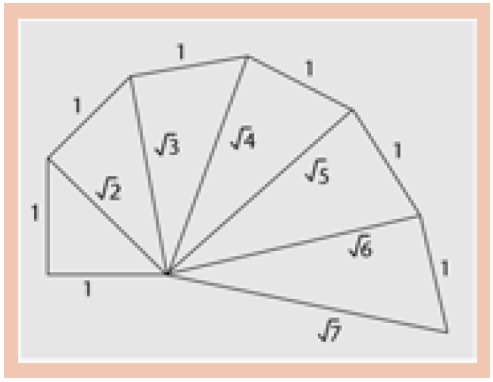
Un rectángulo de proporción $\sqrt{3}$, al dividirlo en tres partes iguales por cortes paralelos a su lado menor, proporciona tres rectángulos de proporción $\sqrt{3}$.

Estos rectángulos son los únicos con esta propiedad, la cual puede resultar muy útil a la hora de diseñar un tríptico. Así, al doblar o desdoblar el tríptico obtendremos formatos de igual proporción. Este hecho producirá en nosotros un efecto estéticamente agradable al mantenerse las proporciones de las distintas formas del tríptico. Lo mismo se puede aplicar si queremos editar un folleto que se doble en más partes, por ejemplo 4, 5, 6, etc.

Como dato curioso, remarcaremos que para construir rectángulos de proporciones del tipo $\sqrt{n}$ podemos usar el teorema de Pitágoras. Recordemos su enunciado:



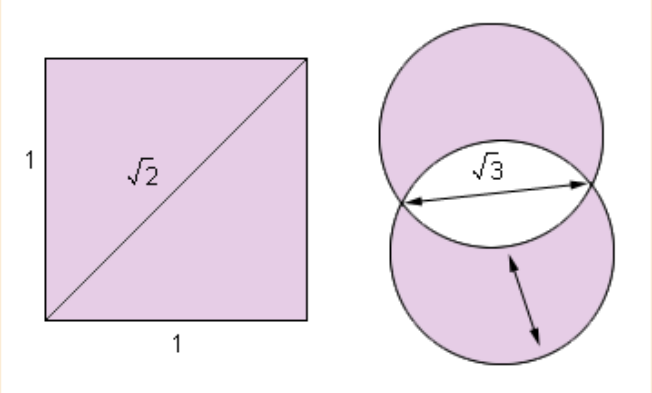
Consideremos ahora un triángulo que tenga un cateto de longitud $\sqrt{n}$ y su otro cateto mida 1. Entonces, su hipotenusa medirá $\sqrt{n+1}$. Esto se puede comprobar usando el teorema de Pitágoras: si **h** es la longitud de la hipotenusa, entonces $h^2 = (\sqrt{n})^2 + 1^2 = n+1$, y por tanto $h = \sqrt{n+1}$. Así, podemos construir rectángulos de proporción $\sqrt{n}$ con la sucesión siguiente:



Esta sucesión de triángulos se ha construido a partir de un triángulo de rectángulo cuyos catetos son de la misma longitud y que tomaremos como unidad. Su hipotenusa mide $\sqrt{2}$. Tomamos esta hipotenusa como cateto de un nuevo triángulo rectángulo cuyo otro cateto tiene longitud 1. Entonces, su hipotenusa será $\sqrt{3}$. Repitiendo el mismo proceso obtenemos el resto de triángulos y, de esta forma, vamos construyendo medidas de longitud $\sqrt{n}$ para cualquier valor de n natural. Una vez creado el triángulo cuyos catetos están en proporción $\sqrt{n}$, podemos construir un rectángulo con estos dos lados del triángulo.

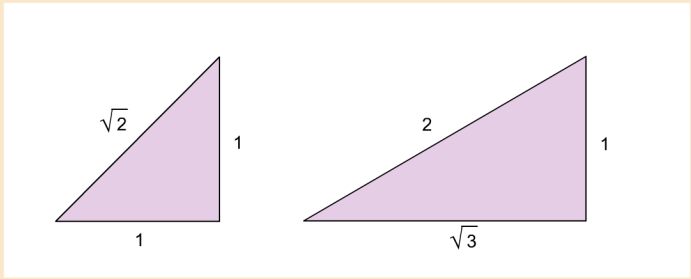
Todas las proporciones del tipo $\sqrt{n}$ para valores de n que no nos den una raíz exacta son proporciones no racionales, es decir, son proporciones a las que los griegos llamaban inconmensurables, ya que no podían expresarlas como fracciones de números enteros.

Las razones de este tipo más usadas a lo largo de la historia han sido, sin duda, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, en parte porque son bastante simples de construir de forma geométrica. El número $\sqrt{2}$ aparece como la diagonal de un cuadrado de lado 1, mientras que $\sqrt{3}$ aparece como la longitud del lado de un triángulo inscrito en una circunferencia de radio 1, y también como la distancia entre los dos puntos de intersección de dos circunferencias de radio 1 cuando cada una pasa por el centro de la otra.



El número $\sqrt{2}$ aparece como la diagonal de un cuadrado de lado 1, mientras que $\sqrt{3}$ aparece como la longitud del lado de un triángulo inscrito en una circunferencia de radio 1, y también como la distancia entre los dos puntos de intersección de dos circunferencias de radio 1 cuando cada una pasa por el centro de la otra.

Esta forma de construir $\sqrt{2}$ nos conduce al **cartabón**. El cartabón es una herramienta de dibujo en forma de triángulo rectángulo isósceles (los dos catetos de la misma longitud), con lo que la hipotenusa tiene proporción $\sqrt{2}$ con respecto a los catetos. Otra herramienta de dibujo es la **escuadra**, que presenta forma de triángulo rectángulo, pero ahora su hipotenusa tiene proporción 2 respecto a uno de sus catetos. Esto obliga al otro cateto a tener una proporción de $\sqrt{3}$ respecto al primer cateto.



El cartabón y la escuadra

Observemos que uniendo dos cartabones por su hipotenusa obtenemos un cuadrado y, al unir dos escuadras por su cateto mayor, obtenemos un triángulo equilátero.

Estas dos proporciones están íntimamente relacionadas con cuatro de los **cinco sólidos platónicos**. Los sólidos platónicos, a los que también llamamos **poliedros regulares**, son figuras geométricas en el espacio tridimensional formadas por polígonos regulares. Los únicos cinco existentes son el **tetraedro**, el **cubo**, el **octaedro**, el **dodecaedro** y el **icosaedro**. Las caras del tetraedro, del octaedro y del icosaedro son triángulos equiláteros, y de ahí su relación con la proporción $\sqrt{3}$. Las caras del cubo son cuadradas y, por tanto, está relacionado con $\sqrt{2}$. Los filósofos griegos asociaban estos cuatro sólidos a los cuatro elementos básicos de la naturaleza: tierra, aire, agua y fuego, y les atribuían, por combinación, el poder de crear todas las cosas que nos rodean. Las caras del dodecaedro son pentagonales. Más adelante os proporcionaremos una relación de proporción.

3. El número de oro y aplicaciones

3.1. La divina proporción

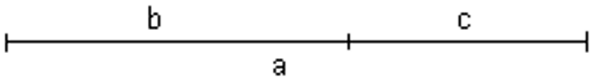
Una de las proporciones más usadas a lo largo de la historia por todo tipo de artistas y diseñadores ha sido la **proporción áurea**, también llamada **divina proporción**. Aunque sólo tengamos intención de crear un rectángulo, podemos preguntarnos cuál será el rectángulo que no sea ni demasiado alargado ni demasiado cuadrado.

Ejemplo

Los griegos crearon la fachada del Partenón con unas medidas concretas, de forma que la proporción entre la anchura y la altura de la fachada fuera el **número de oro**. Y para poner un ejemplo más actual, las medidas de las tarjetas de crédito se escogieron de forma que su proporción fuera el número de oro.

A la hora de dividir un segmento en dos partes, podemos hacerlo de infinidad de maneras. Quizá la estándar sea dividirlo por la mitad. Estudiemos ahora algunas formas posibles de dividir un segmento según las proporciones que obtengamos.

Consideremos un segmento de longitud a que dividiremos en dos segmentos, llamando b a la longitud del segmento mayor y c al segmento menor. Observemos que $a = b + c$. Las únicas proporciones que podemos hacer con estos tres segmentos son: $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$.



Las posibles relaciones de igualdad entre estas proporciones nos conducen a los tres casos siguientes:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{c} \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \qquad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Del primer caso deducimos $b = c$, con lo que obtenemos la división del segmento por su mitad. En este caso, el valor de estas proporciones es 2. El segundo caso nos lleva a la igualdad $a = b$, con lo que no estaríamos dividiendo el segmento. El caso más interesante es, sin duda, el tercero. Este caso nos conduce a la **proporción en media y extrema razón de un segmento**. Se

llama proporción en media y extrema razón de un segmento la división de un segmento de forma que la proporción entre el total y el mayor de los dos segmentos coincide con la razón entre el mayor y el menor.

Calculemos el valor de dicha proporción. Como $a = b + c$, tenemos que:

$$\frac{b+c}{b} = \frac{b}{c} \qquad \text{y por tanto} \qquad 1 + \frac{c}{b} = \frac{b}{c}$$

Sea x la proporción $\frac{b}{c}$. Entonces tenemos que: $1 + \frac{1}{x} = x$.

Esto nos lleva a la ecuación de segundo grado: $x^2 - x - 1 = 0$ que tiene por soluciones: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

El segundo de estos valores es negativo, con lo cual no puede ser la solución a nuestro problema. Así, la única solución será el número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, al que llamaremos **número de oro** y que notaremos con la letra Φ, en honor a Fidias, escultor griego que usó dicho número en su obra. Esta letra griega corresponde a nuestra letra *f* y se pronuncia *fi*. Su valor numérico aproximado es

$$\Phi \approx 1{,}6180339887498948482045868343656 4...$$

Al ser un número irracional, su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales y no es periódica.

Resolución de la ecuación de segundo grado

Recordemos la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado. Dada la ecuación $ax + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, b y c son tres números reales cualesquiera, la fórmula para determinar la incógnita x es: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. En general, obtendremos dos valores para la incógnita, en el caso de que el número que obtengamos dentro de la raíz sea positivo. Si fuera cero, entonces sólo tendríamos una solución y, en caso de ser negativo, no tendríamos solución alguna.

La ecuación se resuelve teniendo en cuenta que $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$ y se obtiene:

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

3.2. Propiedades del número de oro

Las primeras propiedades curiosas de este número provienen de la misma ecuación de la que hemos obtenido el valor. Sabemos que Φ es solución de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, que también podemos escribir como $x^2 = x + 1$. Por tanto, podemos afirmar que $\Phi^2 = \Phi + 1$. Así, tenemos que el número de oro al cuadrado coincide con el número de oro más uno. Multiplicando esta expresión por Φ, tenemos:

$$\Phi^3 = \Phi^2 \cdot \Phi = (\Phi + 1)\ \Phi = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\ \Phi + 1$$

y, así sucesivamente, observamos que:

$$\Phi^1 = \Phi$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\Phi^5 = 5\Phi + 3$$

$$\Phi^6 = 8\Phi + 5$$

$$\Phi^7 = 13\Phi + 8$$

Fijándonos en esta Serie de igualdades, observamos que los coeficientes que aparecen delante de cada Φ en la parte derecha de cada igualdad son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, etc. y los términos independientes a partir la segunda igualdad son estos mismos números. Esta sucesión de números se denomina **sucesión de Fibonacci**:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,...

Números de Fibonacci

Vamos a proponer un problema que relaciona el número de oro con la sucesión de Fibonacci y la cría de conejos. Supongamos que tenemos una granja de conejos, pero de una clase de conejos que se comportan de forma muy mecánica en cuanto a su reproducción. Supondremos que el periodo de gestación es de un mes y cada embarazo trae una nueva pareja de conejos que es productiva al mes de vida. Empezamos la empresa con una pareja de conejos acabados de nacer. Cuando una pareja acaba de tener conejitos, inmediatamente está dispuesta a quedar embarazada otra vez para seguir reproduciéndose. Además, supondremos que todos estos conejos viven indefinidamente. Vamos a contar cuántas parejas de conejos tendremos al cabo de 12 meses. Puesto que empezamos con una pareja de conejos recién nacidos, al cabo de un mes seguiremos teniendo sólo una pareja, pero ya adulta. Al mes siguiente nacerá la primera pareja de conejos, con lo que el segundo mes tenemos 2 parejas de conejos. El tercer mes tendremos 3 parejas de conejos, la pareja inicial más su primera y su segunda pareja de hijos. El cuarto mes tendremos 5 parejas de conejos, ya que la primera pareja nacida en la empresa ya tendrá su primera pareja de hijos. Así sucesivamente, de modo que obtenemos la sucesión:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,...

Fijémonos en que esta sucesión sigue una regla, que llamaremos **recurrencia**. Cada número de esta sucesión se obtiene como la suma de sus dos predecesores. Por tanto, a partir de los dos primeros términos y con esta recurrencia podemos crear todos los términos de la sucesión. Así, al cabo de 12 meses tendremos 233 parejas de conejos.

Este problema lo formuló Leonardo da Pisa, más conocido como Fibonacci, en 1202. De ahí que esta sucesión de números lleve su nombre.

Fibonacci

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Fibonacci.html

Acabamos de observar una relación entre el número de oro y la sucesión de Fibonacci. Pero aún hay más.

Al calcular el cociente entre un término y el siguiente, obtenemos números que se aproximan cada vez más al número de oro. La tabla siguiente refleja los cálculos detallados:

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/34	89/55	144/89	233/144	377/233
1	2	1,5	1,6667	1,6	1,625	1,61538	1,61905	1,61765	1,61818	1,61798	1,61798	1,61805

Estos cocientes nos servirán para dar una aproximación del número de oro tan buena como queramos utilizando una fracción.

Además, se puede comprobar que se pueden calcular los números de la sucesión de Fibonacci sustituyendo n por 1, 2, 3, ... en la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

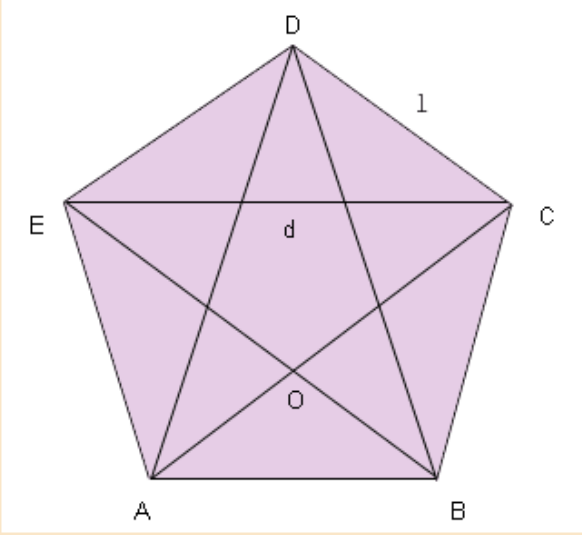
Parece sorprendente que una sucesión de términos donde todos sus números son naturales pueda expresarse de forma general con una fórmula con números irracionales. Observad que el número que aparece en el primer paréntesis es el número de oro.

Web complementaria

Más información sobre la sucesión de números de Fibonacci:

http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html

Geométricamente, el número de oro está ligado al pentágono regular. Un pentágono regular es un polígono plano de cinco lados iguales, con sus ángulos interiores también iguales.



Dado un pentágono regular, podemos trazar cinco diagonales principales que formarán una estrella de cinco puntas.

Si *l* es la longitud de cada lado del pentágono y *d* la longitud de sus diagonales, entonces la proporción entre estos dos segmentos es el número de oro.

Justificación de la relación del número de oro con el pentágono

La justificación de esta información se basa en el teorema de Tales. Observemos que cada uno de los lados del pentágono es paralelo a una de las diagonales. Así, podemos afirmar que los triángulos EOC y AOB son triángulos semejantes. Estos dos triángulos son isósceles, es decir, tienen dos lados iguales. Dado que el cuadrilátero EOCD es un paralelogramo, podemos afirmar que el segmento EO tiene una longitud igual al lado del pentágono l. Así, los lados del triángulo EOC son l, l y d, mientras que los lados del triángulo AOB tienen longitudes d-l, d-l y l. Por ello, del teorema de Tales deducimos que:

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$$

Si llamamos *x* la expresión $\frac{d}{l}$, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\frac{d}{l} = \frac{1}{\frac{d-l}{l}} \rightarrow \frac{d}{l} = \frac{1}{\frac{d}{l}-1} \rightarrow x = \frac{1}{x-1} \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

y como hemos visto anteriormente, esta ecuación nos conduce al número de oro.

3.3. La proporción en el arte

La escuela pitagórica conocía perfectamente la proporción áurea y su relación con el pentágono regular. Anteriormente hemos relacionado las proporciones $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ con cuatro de los cinco poliedros regulares. Con esta propiedad del pentágono tenemos una relación del dodecaedro con la proporción áurea, ya que el número de oro aparece en sus caras. Si los cuatro primeros sólidos representaban los cuatro elementos básicos, el dodecaedro era el símbolo del universo. Este sólido es el que formaba la materia del lugar donde vivían los dioses, que ellos denominaban firmamento inmutable. El papel sagrado del dodecaedro se extendió a la razón áurea de forma que sólo se utilizaba en el diseño de las partes más especiales o incluso sagradas en el caso de la arquitectura religiosa, de forma que se daba a la proporción áurea una simbología muy especial, predominante sobre las demás proporciones. La sección áurea

representaba la máxima armonía y equilibrio, conllevaba ritmo y belleza a todo lo que guardara relación con esta proporción. Durante la Edad Media fue la proporción más secreta y rodeada de carga mística y simbólica.

El esquema cósmico que los griegos idealizaron con los cinco poliedros regulares maravilló a la humanidad durante siglos.

Como acabamos de ver, el número de oro aparece en el dodecaedro, al ser sus caras pentagonales, pero también aparece en otro poliedro regular, el icosaedro. Un icosaedro está formado por veinte caras triangulares, con un total de doce vértices. En cada uno de sus vértices confluyen cinco aristas y, por tanto, cinco triángulos equiláteros. Fijándonos en un vértice cualquiera, las aristas opuestas de cada uno de los cinco triángulos que tiene alrededor forman un pentágono regular. Las diagonales de este pentágono son interiores al icosaedro, y su proporción con respecto a la arista del icosaedro es el número de oro. Fijándonos en una de las diagonales de este pentágono podemos formar un rectángulo de proporción áurea junto con dos aristas del icosaedro y otra diagonal de otro pentágono. En total, se pueden formar tres rectángulos de este tipo que, además, son perpendiculares entre sí y pasan por el centro del icosaedro. Esta propiedad nos permite construir un icosaedro de forma muy simple. Tomamos los doce vértices del icosaedro de cuatro en cuatro, de modo que se pueden formar de forma adecuada tres rectángulos interiores y centrados en el icosaedro de proporciones áureas; estos rectángulos son perpendiculares dos a dos. Así, para construir un icosaedro, podemos crear tres rectángulos de proporción áurea perpendiculares dos a dos y que se intersequen en su centro; uniendo los doce vértices mediante aristas creamos un icosaedro.

Como hemos dicho anteriormente, la teoría de la proporción y, en especial, la proporción áurea han sido usadas en el arte: en pintura, escultura, arquitectura, etc.

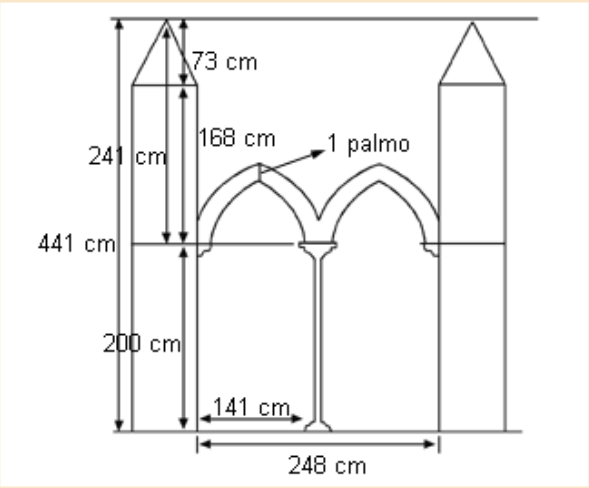
3.4. Ejemplos de proporción áurea

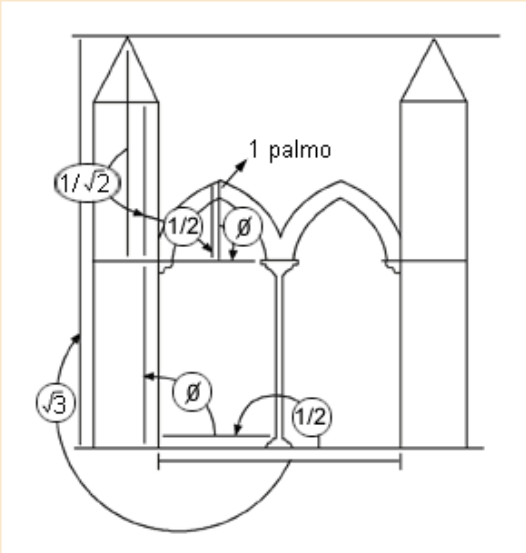
Miss Helen de Leonardo da Vinci. La última imagen refleja las proporciones áureas en el rostro de Miss Helen.

Imágenes escaneadas del libro: de Matila C. Ghyka. El número de oro. Vol.I. Los ritmos. Ed. Poseidon...páginas 71, 72 y 73).

El Monasterio de San Jeroni de la Murtra, construido en las inmediaciones de la ciudad de Badalona, es otro buen ejemplo de la aplicación de la teoría de la proporción al arte, en este caso en arquitectura. Se trata de una de las principales construcciones del gótico catalán tardío.

Medidas principales en el diseño de la primera planta el Monasterio de Sant Jeroni de la Murtra.





Proporciones que se deducen de los cálculos correspondientes.

Con este estudio de las proporciones se obtiene, además, un modelo para la construcción y diseño de la fachada de dicho monasterio.

El misticismo en la utilización de las proporciones en la construcción religiosa hizo que en la Edad Media se presentara a Cristo como un geómetra que diseña el universo con compás.

Un último ejemplo en el que se encuentra presente la razón áurea es el del cociente entre la apotema de una cara cualquiera de la Gran Pirámide de Giza y la mitad de la base de la pirámide. En la siguiente figura se observan los cálculos:

Proporciones que se aproximan a losarmónicos fundamentales de las notas musicales

En medidas egipcias (en cubits), la mitad de la base mide 220 y la apotema mide 356. El cociente 356 / 220=1,618 es una buena aproximación del número de oro.

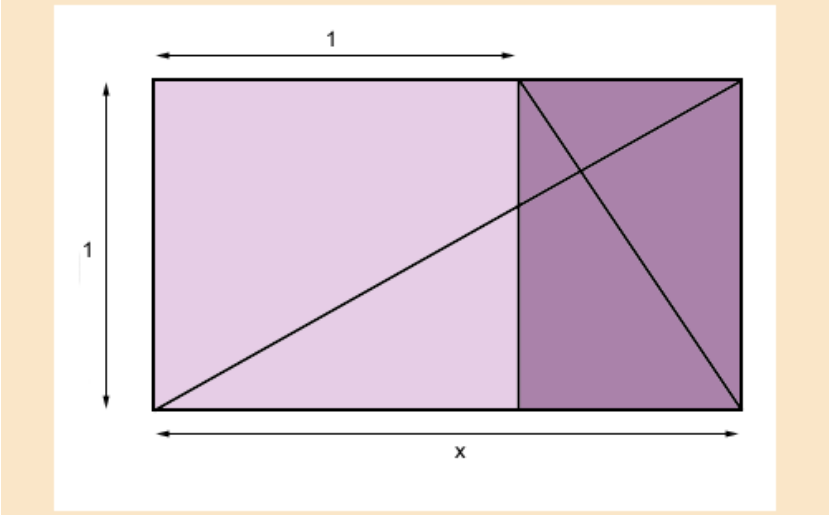
De todos modos, se han desarrollado varias leyendas en torno a la construcción de las pirámides. Como ejemplo tenemos la que explica que la Gran Pirámide se construyó de forma que la razón del perímetro de la base a la altura es igual a 2π. Por lo que se sabe actualmente de los conocimientos de geometría de los egipcios, esta leyenda es infundada.

También el arquitecto Le Corbusier llevó a cabo varios estudios sobre proporción en el cuerpo humano que reflejó en su libro El **modulor**. La razón áurea aparece en su obra escrita, y también en sus edificios. Por ejemplo, la fachada del edificio de las Naciones Unidas en Nueva York es rectangular y su proporción es áurea.

Actividad

Ejercicio 1

Demostrad que si las dos diagonales de los rectángulos de la figura son perpendiculares, su proporción es áurea. Considerad que el valor de x es siempre mayor que 1.



Solución

Al igual que sus diagonales perpendiculares, los dos rectángulos tienen la misma proporción. El rectángulo mayor tendrá proporción: $p(1,\ x) = \frac{x}{1} = x$, mientras que el rectángulo menor tiene proporción: $p(1, x-1) = \frac{1}{x-1}$. Igualando las proporciones, tenemos la ecuación:

$$x = \frac{1}{x-1} \rightarrow x(x-1) = 1 \rightarrow x^2 - x = 1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Como se ha visto anteriormente, esta ecuación tiene una única solución positiva, que es el número de oro y que coincide con la proporción de estos rectángulos.

Ejercicio 2

Calculad qué proporción tiene un rectángulo de lados 1 y x, con 1 < x < 2, si le recortamos el cuadrado máximo y al rectángulo que queda le recortamos otro cuadrado máximo y obtenemos un rectángulo que tiene la misma proporción que el inicial.

Solución

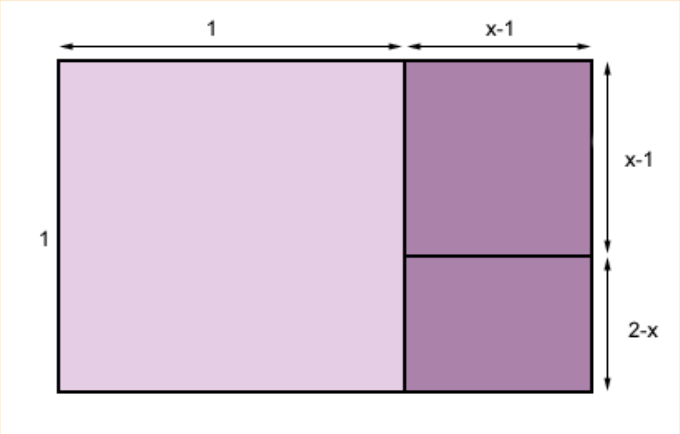
Puesto que 1 < x < 2, podemos calcular las proporciones según los rectángulos que se indican en la figura adjunta:

$$p(1,\ x) = \frac{x}{1} = x \quad p(x-1, 2-x) = \frac{x-1}{2-x}$$

Igualando estas dos proporciones, tenemos la ecuación:

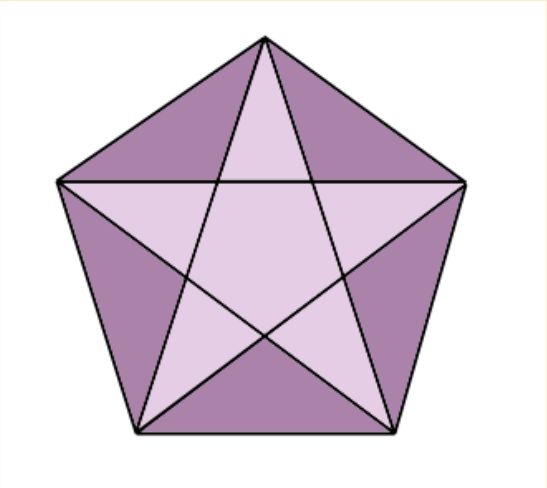
$$x = \frac{x-1}{2-x} \rightarrow 2x - x^2 = x - 1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Que tiene por solución positiva el número de oro.



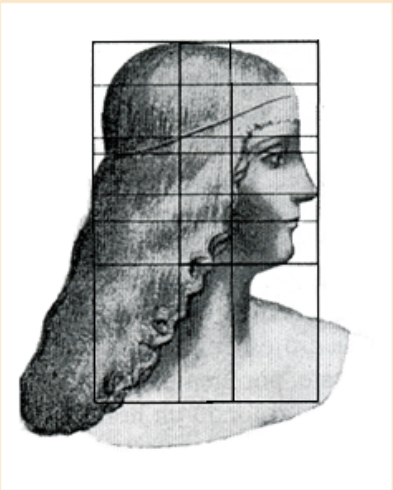
Ejercicio 3

Calculad la proporción entre el lado de un pentágono regular y el lado del pentágono interior de la estrella inscrita. Se pueden medir las distancias construyendo el pentágono regular y la estrella inscrita con el 3D Studio o con algún otro programa gráfico para poder realizar el cálculo de las proporciones.



Ejercicio 4

Estudiad las proporciones de esta lámina de Leonardo da Vinci titulada Isabel de Este.



Isabel de Este

Imagen escaneada del libro: de Matila C. Ghyka.
El número de oro. Vol. I. Los ritmos.
Ed Poseidon... pàgina 75)

Ejercicio 5

Observad el folleto siguiente y analizar qué uso de la proporción se ha hecho en el mismo.

3.5. Proporción en la naturaleza

Las proporciones clásicas que hemos estudiado están presentes, también, en la naturaleza. Un ejemplo de ello es la proporción áurea en el cuerpo humano, como hemos visto con los ejemplos de Leonardo da Vinci. Uno de los fenómenos más interesantes es el conocido como **filotaxis**, que estudia el crecimiento de plantas, árboles, frutos, etc.

Los números de Fibonacci aparecen de forma natural en el fenómeno biológico llamado filotaxis, que es el estudio de la distribución de las hojas en una rama de una planta o de un árbol. En algunos árboles, como por ejemplo el olmo, las hojas de sus ramas aparecen alternativamente en dos lados opuestos a medida que van creciendo las hojas. Este hecho se conoce como filotaxis en relación 1/2. En otros árboles, como la haya o el nogal, el paso de una hoja a otra aparece dando un giro de un tercio de vuelta, como si siguieran una espiral, dando nombre a la filotaxis en relación 1/3. Otras relaciones de filotaxis son 2/5 para el roble y el albaricoque; el álamo y el peral dan una relación de 3/8; el sauce y el almendro, de 5/15, etc. Todas estas fracciones están formadas por números alternos de la sucesión de Fibonacci. Esta observación también se podría hacer con números consecutivos en la sucesión de Fibonacci, ya que un giro de 2/5 en un sentido equivale a un giro de 3/5 en sentido contrario. Esto se justifica porque la suma de estas dos fracciones es la unidad. Lo mismo ocurre con el resto de las fracciones que hemos dado.

Relaciones parecidas entre la sucesión de Fibonacci y la naturaleza se pueden encontrar en la distribución de las pipas en una flor de girasol, o en las pequeñas baldosas que se pueden apreciar en la piel de una piña tropical.

3.6. Medidas, proporción y tipografía

Hasta este momento no hemos utilizado unidades de medida en los cálculos de proporciones. Esto es debido a que la proporción no depende de las unidades de medida con las que trabajemos. Obviamente, si queremos calcular la proporción de un rectángulo, deberemos medir sus lados con la misma unidad de medida, pero no importa qué unidad tomemos. Sólo importa que tomemos la misma unidad para medir los dos lados.

Las unidades de medida más usuales nos las proporciona el sistema métrico decimal. La unidad básica, el **metro**, se define como la diezmillonésima parte del cuadrante meridiano terrestre. Esta medida la instauró la Asamblea Nacional Francesa en 1792 con la intención de uniformizar la gran variedad de unidades de medida existentes en la época según cada región o país. A partir del metro y multiplicando o dividiendo sucesivamente por 10 obtenemos el resto de unidades de medida de longitud del sistema métrico decimal.

Tabla de equivalencias		
Miriámetro	1 mam	10.000 m
Kilómetro	1 km	1.000 m
Hectómetro	1 hm	100 m
Decámetro	1 dam	10 m
Metro	1 m	1 m
Decímetro	1 dm	0,1 m
Centímetro	1 cm	0,01m
Milímetro	1 mm	0,001
Micrón	1 μ	0,000001 m
Angström	1 Å	0,0000000001 m

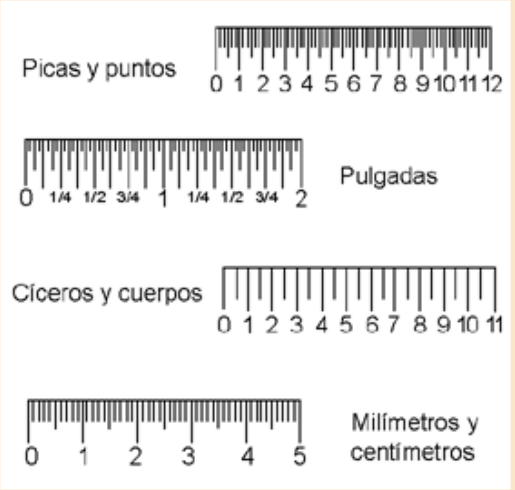
En determinadas áreas de trabajo, el sistema métrico no se ha impuesto, de modo que se mantiene el sistema tradicional, aunque también se haya intentado unificar de un país a otro. Éste es el caso de las medidas que se usan en

tipografía. Las unidades de medida para los caracteres de textos tipográficos son el **punto**, la pica y el cícero. Estas medidas difieren de la Europa continental a Estados Unidos y Reino Unido. Esta diferencia proviene de las distintas medidas que utilizaban las fundiciones para las imprentas. A principios del siglo XVIII, un francés llamado Pierre Fournier propuso una unidad estándar a la que llamó punto. Más adelante, otro francés llamado Firmin Didot desarrolló las innovaciones que había propuesto Fournier con la finalidad de instaurar una unidad común europea, aunque este sistema no fue adoptado ni por el Reino Unido ni por Estados Unidos. El sistema angloamericano se basa en la división de la pulgada en 72 puntos. La pica está formada por 12 puntos, es decir, una pulgada son 6 picas. El punto europeo, también llamado punto Didot, tiene un valor de 0,37592 mm, de modo que resulta un poco mayor que el punto usado en Estados Unidos y en el Reino Unido; 12 puntos Didot equivalen a un cícero (esta medida recibe distintos nombres según el país).

WEB

Recurso interactivo
accesible sólo en la web.

Estas medidas usadas en tipografía son las que aún prevalecen en muchos programas de diseño, tratamiento de imágenes o editores de textos.



Tabla

Equivalencias	Milímetros	Pulgadas
1 punto (angloamericano)	0,35146 mm	1/72 pulgadas
1 punto Didot (europeo continental)	0,37592 mm	0,0148 pulgadas
1 pica (angloamericano)	4,223 mm	1/6 pulgadas
1 cícero (europeo continental)	4,512 mm	0,1776 pulgadas

Un personaje muy importante en cuanto a diseño de publicaciones y tipografías fue Jan Tschichold, nacido en Leipzig, Alemania, en 1902. Convivió con el llamado **movimiento Bauhaus**, y aunque él mismo no formó parte de este movimiento, estuvo muy influenciado por sus ideas. El movimiento Bauhaus

fue un movimiento arquitectónico y de diseño que se formó en Alemania entre 1919 y 1933. Este movimiento nació con la idea de aplicar una simplicidad radical al diseño, intentando que todas las formas tuvieran una función. Las tipografías más importantes que se crearon bajo la influencia de la Bauhaus no fueron creadas por ninguno de sus miembros directamente. Jan Tschichold fue un diseñador de tipografías y uno de los responsables del diseño tipográfico dentro del movimiento Bauhaus; Herbert Bayer, creó el tipo de letra universal.

Tschichold dedicó su vida entera a la filosofía del diseño, que ha dejado reflejada en dos libros. En 1928 publicó *Die Neue Typographie* ('La nueva tipografía') en la que defiende la asimetría rectilínea en la composición del diseño y donde defiende las tipografías del tipo Sans Serif. En 1935 publicó *Typographische Gestaltung* ('Arreglos tipográficos'), en la que se opuso radicalmente a sus anteriores afirmaciones y donde defendió la tipografía tradicional y equilibrada. En esta obra fue donde estudió y defendió el uso de la proporción áurea en el diseño tipográfico. Por esta razón se conoció a Tschichold como un diseñador perfeccionista y contradictorio. Una de las tipografías creadas por Tschichold más conocidas fue la llamada **Sabon**, actualmente en uso y comercializada por Adobe.

Dibujo de Tschichold para el tipo de letra Sabon

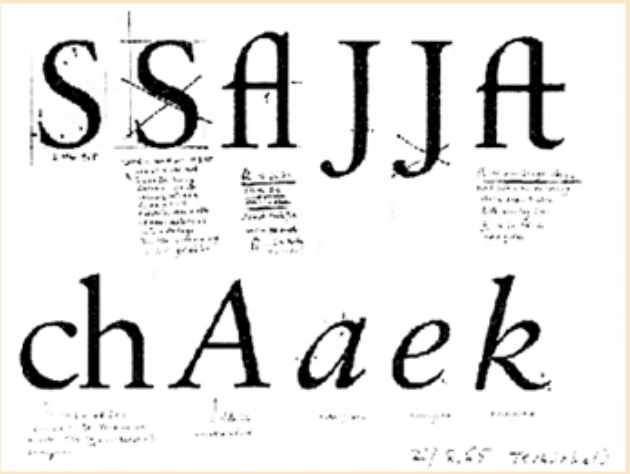


Imagen sacada de la web: http://www.slip.net/~graphion/tschetch.html

Tschichold también propuso sus diseños para la edición de libros. Dedicó mucho tiempo al estudio de manuscritos medievales y renacentistas, y descubrió el uso las proporciones 2, 3, 4 y 6 para las medidas de los márgenes interior, superior, exterior e inferior respectivamente. También descubrió que, en muchos de estos manuscritos, si la proporción de la página entre altura y anchura era 3/2, entonces la proporción que se usaba en el tipo de letra seguía la misma, también entre altura y anchura. Este canon que descubrió Tschichold fue usado por Gutenberg, entre otros. Después de estos estudios, Tschichold se encargó de remodelar el diseño de todas las publicaciones de la Penguin Books.

La proporción en la impresión de libros según Tschichold (hay un applet que permite variar las dimensiones de la página):
http://world.std.com/~wij/glad/tschichold.html

Para más información sobre el movimiento Bauhaus:
http://rhythm.iinet.net.au/~cmc010/99/0bauhaus/

http://www2.ucsc.edu/people/gflores/bauhaus/b1.html

Distintas tipografías de la casa Adobe:
http://www.adobe.com/type/browser/F/P_088/F_SABO-10005000.html

Museo de Tipografía Online:
http://www.slip.net/~graphion/museum.html

Propuesta de Tschichold, en cuanto a proporciones en la edición de libros

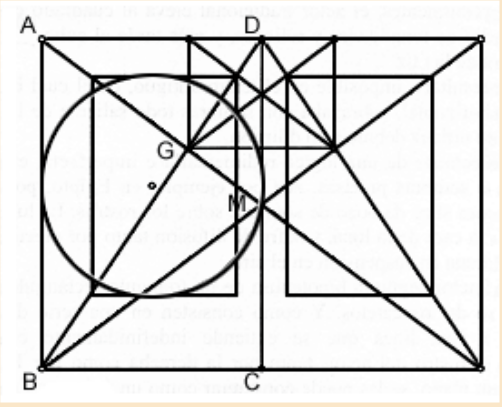


Imagen sacada de la página http://world.std.com/~wij/glad/tschichold.html

Actividad

Ejercicio 1

Usad el *applet* de la página: http://world.std.com/~wij/glad/tschichold.html para estudiar cómo diseñó Tschichold su canon para publicaciones.

Ejercicio 2

Diseñad una letra A mayúscula utilizando construcciones geométricas y alguna de las proporciones estudiadas.

Ejercicios de autoevaluación

1. Un cliente nos encarga su página web. El logotipo que la empresa nos proporciona es un dibujo en forma rectangular de 12 cm de base por 15 cm de altura. En la página web que estamos diseñando, la imagen aparece con 8 cm de base. ¿Cuánto mide la altura en la página web?

a) 10 cm
b) 11 cm
c) 6,4 cm

2. Un cilindro creado en 3D Studio mide 15 cm de altura por 4 cm de diámetro de la base. Haciendo una reducción del objeto a un 25% obtenemos un cilindro de medidas...

a) 7,5 cm de altura por 2 cm de diámetro de la base.
b) 3,75 cm de altura por 1 cm de diámetro de la base.
c) 1,875 cm de altura por 0,5 cm de diámetro de la base.

3. Si ampliamos una fotografía un 300% con un programa de tratamiento de imágenes, entonces...

a) las longitudes de los lados de la fotografía se multiplican por 300.
b) el área de la fotografía se multiplica por 3.
c) las longitudes de los lados de la fotografía se multiplican por 3.

4. Una pantalla de un monitor de televisión es de 28 cm x 21 cm. La proporción de la pantalla es de...

a) 0,75
b) 1,33
c) 7

5. Un negativo de 24 mm x 36 mm se puede positivar en papel de...

a) 25 cm x 37 cm
b) 13 cm x 18 cm
c) 30 cm x 45 cm

6. La proporción de una imagen es 1, entonces podemos afirmar que...

a) la imagen es un rectángulo con la base mayor que la altura.
b) la imagen es cuadrada.
c) la imagen es un rectángulo con la base menor que la altura.

7. Insertamos una imagen de 3 cm x 4 cm en un texto con un procesador de textos. Para resaltarla, incorporamos un marco de 0,5 cm de grosor alrededor de toda la imagen. Entonces podemos afirmar que...

a) la proporción de la imagen coincide con la proporción del marco.
b) la proporción de la imagen es mayor que la proporción del marco.
c) la proporción de la imagen es menor que la proporción del marco.

8. Consideramos una cuerda tensada que, al hacerla vibrar, da una tonalidad de do; entonces, al presionar justo por la mitad de la cuerda y hacerla vibrar, obtenemos...

a) otra tonalidad de do pero una octava más alta.
b) otra tonalidad de do pero una octava más baja.
c) una tonalidad de fa dentro de la misma octava.

9. La superficie de una hoja de tamaño DIN A4 es...

a) una cuarta parte de una hoja de tamaño DIN A0.
b) una octava parte de una hoja de tamaño DIN A1.
c) el doble de una hoja de tamaño DIN A6.

10. Al dividir una hoja cualquiera de la familia DIN A en tres trozos iguales por líneas paralelas a su lado más corto, obtenemos tres rectángulos de proporción...

a) igual a la de la hoja DIN A inicial.
b) $\sqrt{3}/2$
c) $3/\sqrt{2}$

11. La proporción entre la diagonal de una hoja cualquiera de la familia DIN A y su lado menor es...

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) 2

12. Dado un rectángulo de lados a y b, con $a < b < 2a$, le recortamos un cuadrado máximo, es decir, de lado a. El rectángulo que sobra tiene medidas a y $b - a$. Si este rectángulo tiene la misma proporción que el rectángulo inicial, podremos afirmar que su proporción es...

a) un número racional.
b) áurea.
c) $\sqrt{2}$

13. El número de oro está directamente relacionado con...

a) la sucesión de Fibonacci, el pentágono y el icosaedro.
b) la familia de hojas DIN A y DIN B.
c) las medidas del tipo de letra Arial.

14. La empresa Pantallonics ha creado una pantalla especial de cine para la proyección de cortometrajes sobre arte. Las medidas de la pantalla son 6,10 m x 3,77 m. Su proporción es aproximadamente...

a) $\sqrt{2}$
b) el número de oro.
c) el número π.

15. Un cícero equivale a...

a) 6 picas.
b) 12 puntos.
c) 1 centímetro.

Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1. a
b) Incorrecta. Si se mantiene la proporción se debería satisfacer la igualdad 15/12 = 11/8, pero esto no es cierto.
c) Incorrecta. Si se mantiene la proporción se debería satisfacer la igualdad 15/12 = 6,4/8, pero esto no es cierto.

2. b
a) Incorrecta. Se deben multiplicar las dos longitudes por 25%, es decir, por 25/100 = 0,25.
c) Incorrecta. Se deben multiplicar las dos longitudes por 25%, es decir, por 25/100 = 0,25.

3. c
a) Incorrecta. En este caso, la ampliación sería del 30.000%.
b) Incorrecta. El área se multiplica por (300/100)2 = 32 = 9 y no por 3.

4. b
a) Incorrecta. La proporción se calcula dividiendo el lado mayor entre el menor. Estáis haciendo la división al revés.
c) Incorrecta. La proporción se calcula dividiendo el lado mayor entre el menor y no da este resultado.

5. c
a) Incorrecta. La proporción del negativo y del positivo deben coincidir. En este caso no coinciden.
b) Incorrecta. La proporción del negativo y del positivo deben coincidir. En este caso no coinciden.

6. b
a) Incorrecta. Un rectángulo con la longitud de la base distinta a la de la altura tiene proporción estrictamente mayor que 1.
c) Incorrecta. Un rectángulo con la longitud de la base distinta a la de la altura tiene proporción estrictamente mayor que 1.

7. b
a) Incorrecta. La proporción de la imagen es 4/3, mientras que la proporción del marco será 5/4. Comparad estos dos números.
c) Incorrecta. La proporción de la imagen es 4/3, mientras que la proporción del marco será 5/4. Comparad estos dos números.

8. a
b) Incorrecta. Al presionar una cuerda por la mitad se obtiene la misma tonalidad, ésta es justamente la observación que hizo Pitágoras. Como la cuerda es más corta, la tonalidad es una octava más alta.
c) Incorrecta. Al presionar una cuerda por la mitad se obtiene la misma tonalidad, ésta es justamente la observación que hizo Pitágoras. Como la cuerda es más corta, la tonalidad es una octava más alta.

9. b
a) Incorrecta. Al dividir un DIN A0 en cuatro partes obtenemos hojas de tamaño DIN A2.
c) Incorrecta. El doble de un DIN A6 es un DIN A5.

10. c
a) Incorrecta. La proporción de las DIN A se mantiene al dividir por la mitad, no al dividir en tercios.
b) Incorrecta. La proporción tiene que ser un número mayor o igual que 1, y éste no lo es.

11. b
a) Incorrecta. Todas las hojas DIN A tienen proporción $\sqrt{2}$. Si las medidas de la hoja son a y $\sqrt{2} \cdot a$, podemos calcular la diagonal utilizando el teorema de Pitágoras.
c) Incorrecta. Todas las hojas DIN A tienen proporción $\sqrt{2}$. Si las medidas de la hoja son a y $\sqrt{2} \cdot a$, podemos calcular la diagonal utilizando el teorema de Pitágoras.

12. b
a) Incorrecta. Si x es la proporción del rectángulo original, 1/x-1 es la proporción del rectángulo recortado. Igualando obtenemos una ecuación de segundo grado cuyas soluciones no son racionales.
c) Incorrecta. Si x es la proporción del rectángulo original, 1/x-1 es la proporción del rectángulo recortado. Igualando obtenemos una ecuación de segundo grado cuyas soluciones no son $\sqrt{2}$.

13. a
b) Incorrecta. Las familias DIN están relacionadas con el número $\sqrt{2}$, pero no con el número de oro.
c) Incorrecta. Las proporciones en la letra Arial no son áureas.

14. b
a) Incorrecta. Comparar la proporción 6,10/3,77 con el número $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.
c) Incorrecta. Comparar la proporción 6,10/3,77 con el número $\pi \approx 3{,}14$.

15. b
a) Incorrecta. Un cícero se divide en 12 puntos en el sistema europeo continental de unidad de medidas en tipografía.
c) Incorrecta. Un cícero se divide en 12 puntos en el sistema europeo continental de unidad de medidas en tipografía.