Anexo 3. Curvas y superficies

Joan Trias Pairó

PID_00150821

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares del copyright.

Índice

Objetivos 5

1. Curvas 7
1.1. Curvas, ¿para qué? 7
1.2. Descripción de curvas 7
1.2.1. Descripción en forma explícita 7
1.2.2. Descripción en forma implícita 9
1.2.3. Descripción en coordenadas polares 9
1.2.4. Descripción paramétrica 10
1.3. Algunas curvas importantes 12
1.3.1. Circunferencia 12
1.3.2. Elipse 12
1.3.3. Parábola 14
1.3.4. Otras curvas bidimensionales 15

2. Superficies 18
2.1. Expresión de superficies 18
2.1.1. Forma explícita 18
2.1.2. Forma implícita 18
2.1.3. Forma paramétrica 18
2.2. Superficies notables 19
2.2.1. Cilindro circular recto 19
2.2.2. Esfera 21
2.2.3. Toro 22
2.2.4. Cono circular recto 23
2.2.5. Elipsoide 23
2.2.6. Cilindro elíptico 24
2.2.7. Generación de superficies por transformaciones geométricas: superficies de revolución 25

Actividades 27

Ejercicios de autoevaluación 63

Solucionario 69

Objetivos

Curvas

En este apartado introduciremos unos de los objetos más importantes de la geometría, en relación con sistemas de grafismo 3D y animación: el concepto de curva. Esta introducción se limitará a presentar los casos o ejemplos más importantes o más usuales. No se incluyen, en cambio, los tecnicismos propios de este amplio campo de la geometría.

Superficies

En este apartado presentamos la teoría básica de superficies. Se dedica especial atención a la descripción de las más frecuentes en términos que nos permitan efectuar cálculo geométrico: la obtención de parametrizaciones.

1. Curvas

1.1. Curvas, ¿para qué?

Las curvas son importantes para una considerable cantidad de operaciones creativas de composiciones y de animación:

- Las curvas pueden servir de base de partida para generar superficies de revolución. Las superficies de revolución se obtienen por rotación alrededor de una recta de una curva "perfil".

- Las curvas pueden servir de eje o base para generar superficies muy complejas (solevado), de tipo tubular, de sección fija o variable (una nueva curva), y de eje, la curva dada.

- Las curvas pueden ser la base de prismas generalizados, obtenidos por extrusión.

- Las curvas editadas interactivamente pueden ser la base de trayectorias de animación de objetos.

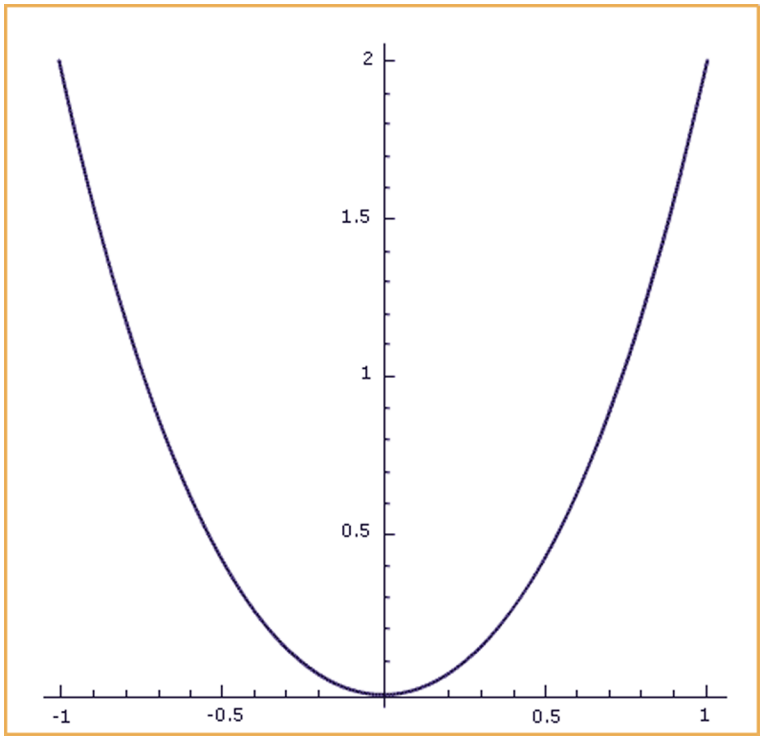
1.2. Descripción de curvas

Existen varios métodos para describir curvas, aunque no todos son aplicable a todas ellas, dependiendo de su naturaleza.

1.2.1. Descripción en forma explícita

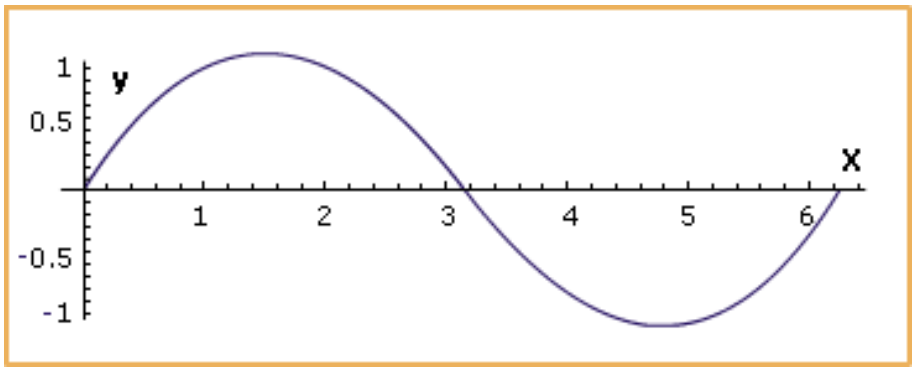
Las curvas en forma explícita son las que pueden expresarse como $y=f(x)$, variando x en un determinado intervalo de la recta numérica real. Los puntos de la curva son los de la forma $(x,f(x))$. Ejemplos bien conocidos son:

- La función lineal $y=ax+b$, que corresponde a una recta.
- La función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, que corresponde a una *parábola*. La figura siguiente es la gráfica, para $-1 \leq x \leq 1$, de la parábola $y = 2x^2$



El coeficiente a de $y = ax^2$ es el coeficiente de apertura de la parábola.

- Las funciones trigonométricas $y=sin\ x$, $y=cosx$ (por ejemplo, $x \in [0, 2\pi]$ u otro intervalo). Véase una gráfica de la función seno en el intervalo indicado anteriormente:



La forma explícita es la más conveniente, si se puede disponer de ella, ya que permite calcular los puntos de la curva con facilidad. Estos puntos son necesarios a efectos de representación gráfica, ya que finalmente las curvas se representan como poligonales.

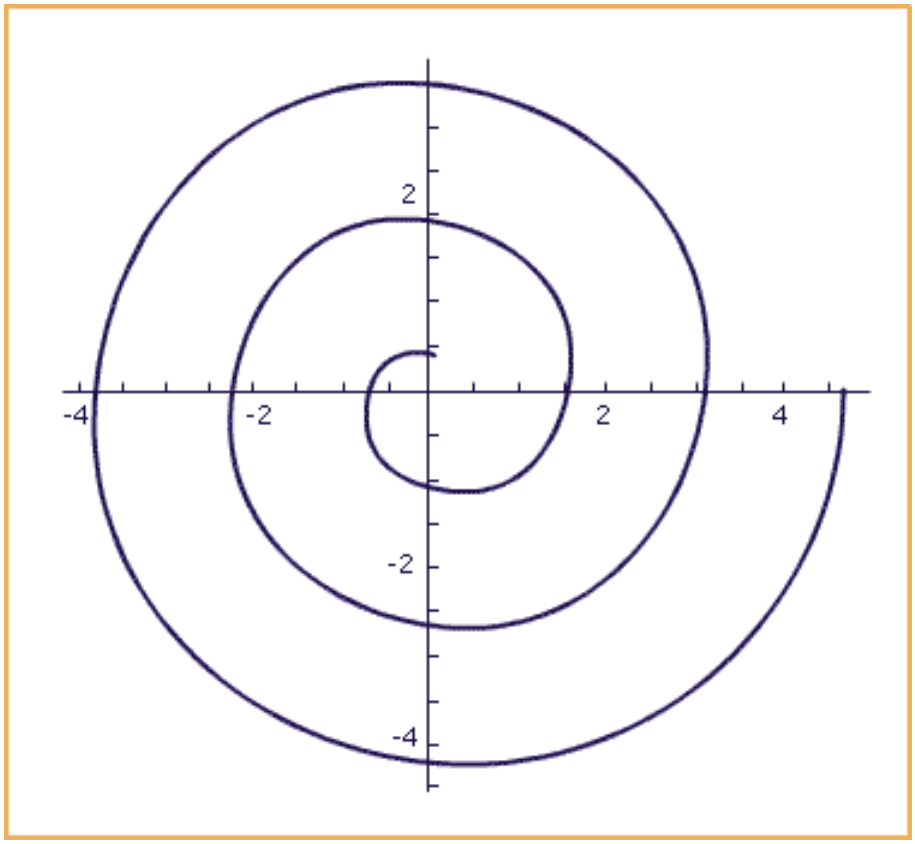
No obstante, para gran cantidad de curvas de interés no disponemos de la forma explícita. En particular, este tipo de expresión es sólo posible, si es el caso, para curvas del plano bidimensional.

1.2.2. Descripción en forma implícita

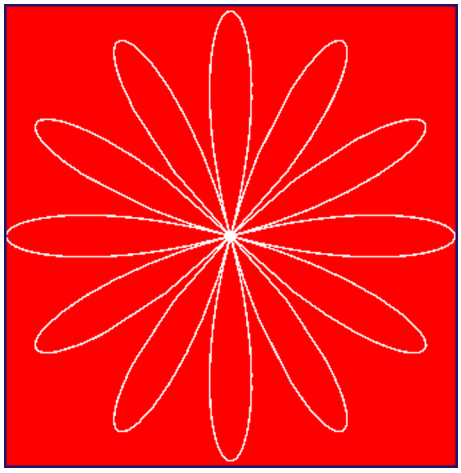
Los puntos de la curva se describen como los puntos que satisfacen una ecuación $F(x,y)=0$. Uno de los ejemplos más sencillos es el de la circunferencia de centro el origen y radio R, que es de ecuación $x^2+y^2=R^2$. En esta modalidad, también para curvas del plano bidimensional, puede resultar difícil calcular los puntos de la figura.

1.2.3. Descripción en coordenadas polares

Esta variante es válida sólo para curvas del plano bidimensional. La curva se describe mediante una ecuación que se plantea en términos de la coordenadas polares (r,t) del plano. Por ejemplo, la curva $r=at$ es una espiral de Arquímedes (véase figura posterior), con t ángulo polar:



La siguiente es una *rodonea*, de ecuación polar $r=a\cos nt$:



1.2.4. Descripción paramétrica

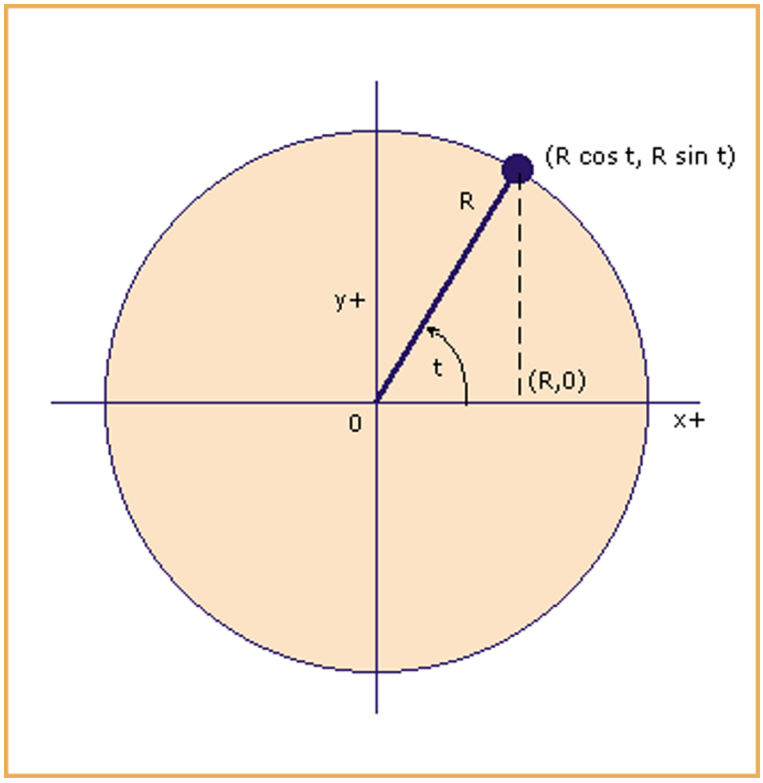
En esta descripción los puntos de la curva se expresan mediante un parámetro adecuado, que varía en un intervalo conveniente.

Esta descripción es ideal para obtener fácilmente los puntos de la curva. Además, es uno de los métodos más convenientes para expresar curvas tridimensionales.

En esta modalidad, los puntos de la curva se expresan como $P(t) = \gamma(t), a \leq t \leq b$. La función $y(t)$ es la *función de parametrización, t* es el parámetro y [a,b] es el *intervalo de variación del parámetro*. Desglosado por coordenadas, tendremos *P(t)=(x(t),y(t))* en dimensión 2, en el plano bidimensional. En dimensión 3, es decir, en el espacio tridimensional, será *P(t)=(x(t),y(t),z(t))*, siempre con indicación de la variación del parámetro *t*.

Uno de los ejemplos ya vistos anteriormente es el del *segmento* de extremos *A,B*, que podemos ver como curva paramétrica: $P(t) = A + t(B - A), 0 \leq t \leq 1$. Otro ejemplo importante, ya visto con anterioridad es el de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio R, que se parametriza mediante el ángulo polar:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{array}\right\}, 0 \leq t \leq 2\pi$$



Podemos considerar la circunferencia en el espacio tridimensional, contenida en el plano *z=0*, de centro el origen y radio *R*. Para formular una parametrización usaremos las fórmulas anteriores y asignaremos una tercera coordenada 0, correspondiente al hecho de estar contenida en el plano *z=0*. Usando el ángulo polar del plano *xy*, la parametrización correspondiente sería:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= R\cos t \\ y(t) &= R\sin(t) \\ z(t) &= 0 \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

La curvas en forma explícita también pueden expresarse en forma paramétrica. En efecto, *(x,f(x))* es la forma paramétrica correspondiente a la explícita *y=f(x)*. Por ejemplo, la sinusoide puede parametrizarse por *P(t)=(x,sin x)*. La parábola puede parametrizarse por (x,x^2).

Las curvas dadas en coordenadas polares pueden parametrizarse fácilmente: dado que es *r=f(t)*, resulta:

$$\begin{cases} x(t) = f(t)\cos t \\ y(t) = f(t)\sin t \end{cases}$$

Por ejemplo, en el caso de la espiral de Arquímedes *r=at* resulta:

$$\begin{cases} x(t) = at\cos t \\ y(t) = at\sin t \end{cases}$$

1.3. Algunas curvas importantes

Damos a continuación algunas curvas paramétricas interesantes para propósitos de grafismo y animación. El lector puede experimentar con algunas formas y con las variables.

1.3.1. Circunferencia

La ecuación de la circunferencia en el plano puede obtenerse fácilmente a partir de la definición de la misma: conjunto de los puntos *P=(x,y)* que están a distancia *R* (el radio) de un punto fijo *C=(a,b)*, el centro de la circunferencia. Expresada esta propiedad en términos métricos, resulta: *d(P,C)=R*, de donde $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$. Elevando al cuadrado, resulta la ecuación:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$$

En el caso particular en que el centro sea el origen de coordenadas, es decir *a=b=0*, resulta:

$$x^2+y^2 = R^2$$

Para la circunferencia de centro el origen la parametrización usual es *P(t)=(Rcost, Rsint)*, con $0 \le t \le 2\pi$. Si se quiere generar un arco de circunferencia, entonces hay que restringir concordantemente el dominio de variación del parámetro: $t_1 \le t \le t_2$.

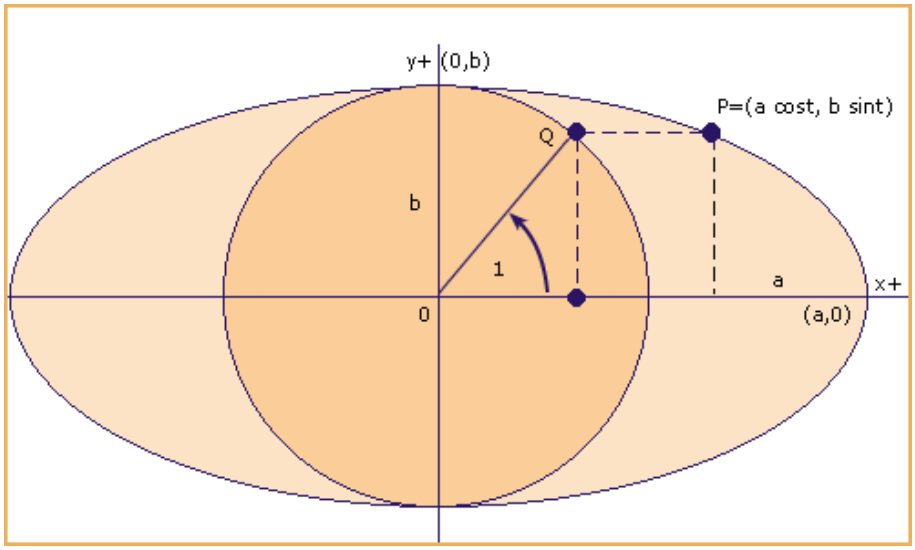
En el caso de que la circunferencia sea de centro arbitrario *C=(a,b)*, obtenemos una parametrización aplicando la traslación T_c, con lo que resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = a + R\cos t \\ y(t) = b + R\sin t \end{array}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

1.3.2. Elipse

La elipse de centro *C=(0,0)* (origen), de ejes principales los ejes de coordenadas y de semiejes respectivos *a,b* es la figura que se muestra a continuación y su ecuación es:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$



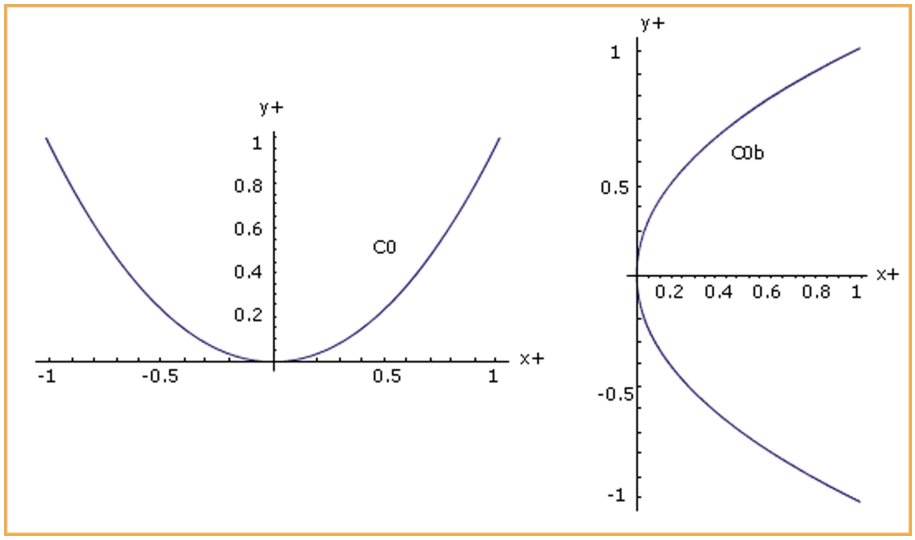
Puede parametrizarse mediante:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{array}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

Si el centro es el punto *C=(p,q)*, entonces, aplicando la traslación correspondiente, obtenemos la parametrización:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = p + a\cos t \\ y(t) = q + b\sin t \end{array}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

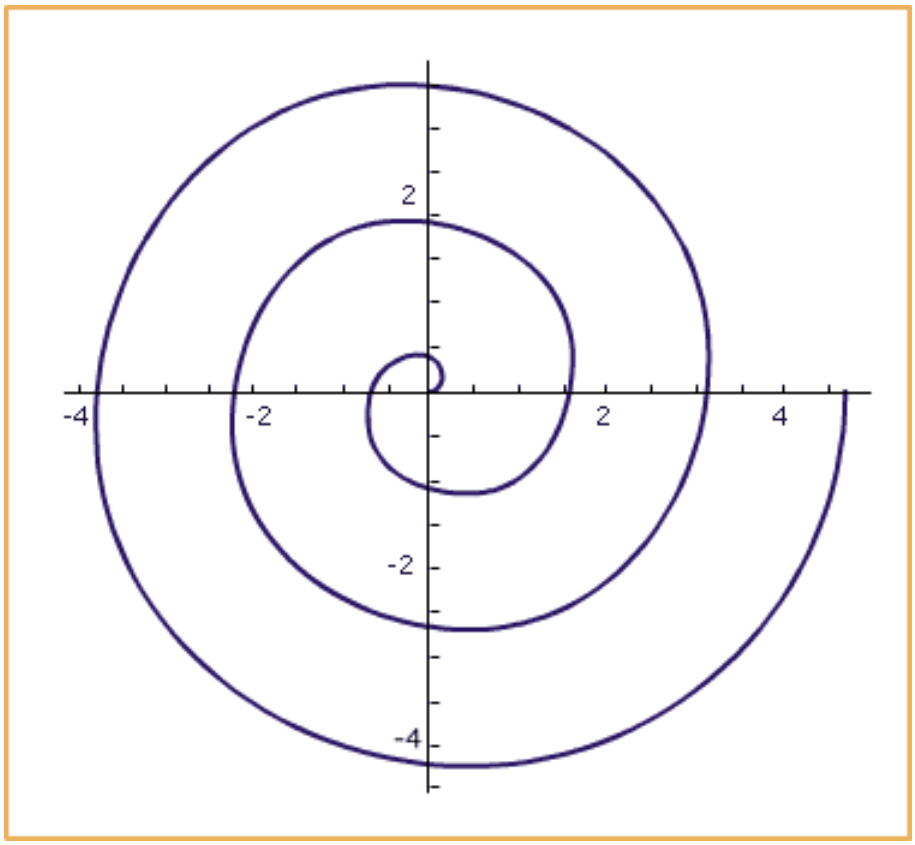
1.3.3. Parábola



La figura de la izquierda corresponde a una parábola, de ecuación *y=ax2+bx +c*. Podemos formular una posible parametrización tomando x=s como parámetro:

$$\left.\begin{aligned} x(s) &= s \\ y(s) &= as^2 + bs + s \end{aligned}\right\}, s_0 \leq s \leq s_1$$

1.3.4. Otras curvas bidimensionales



El gráfico anterior corresponde a la *espiral de Arquímedes*, de parametrización:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = at\cos t \\ y(t) = at\sin t \end{array}\right\}, 0 \le t \le t_1,$$

siendo *t* el ángulo polar del punto *P=(x,y)*.

La variación del parámetro controla el número de vueltas.

- **Cardioide**

  La *cardioide* es la curva que en coordenadas polares se expresa como *r=a(1+cost)*. La parametrización correspondiente es:

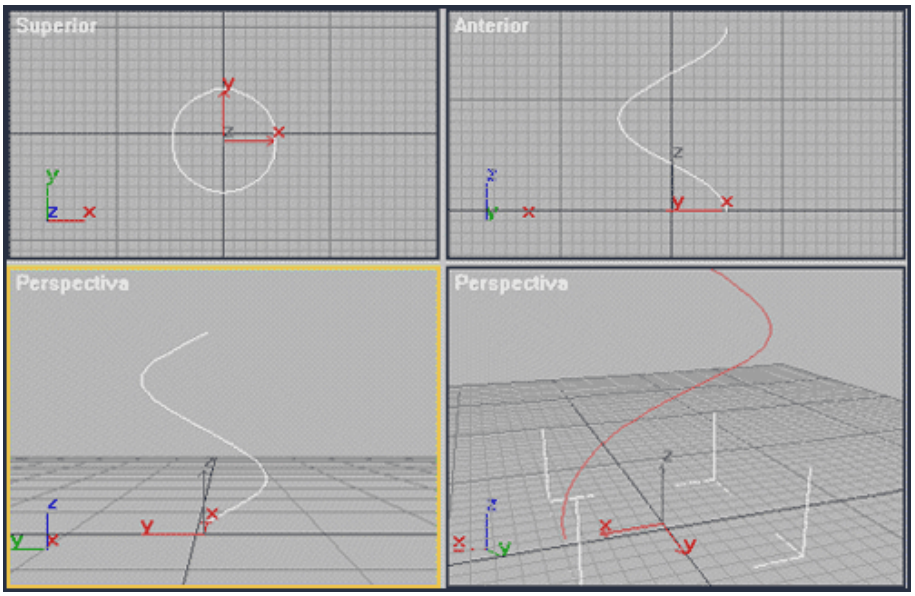
  $$\left.\begin{array}{l} x(t) = a(1+\cos t)\cos t \\ y(t) = a(1+\cos t)\sin t \end{array}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

  La *rodonea* es la curva parametrizada por:

  $$\left.\begin{array}{l} x(t) = a\cos nt\cos t \\ y(t) = a\cos nt\sin t \end{array}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

  La variable *n* está relacionada con el número de "pétalos" de la "flor".

- **Hélice circular**

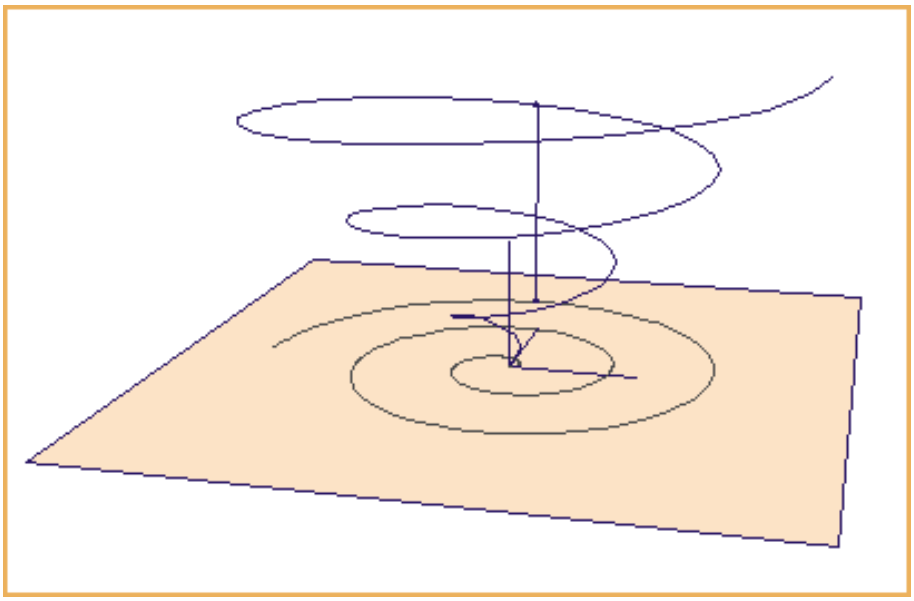


La hélice circular es una curva tridimensional. La parametrización

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos t \\ y(t) &= a\sin t \\ z(t) &= bt \end{aligned}\right\}, t \geq 0$$

corresponde a la hélice circular de radio a, de "paso de rosca *b*", siendo *t* el ángulo polar del punto de la proyección ortogonal *P'=(x,y,0)* sobre el plano *xy* del punto *P=(x,y,z)* de la curva. El eje de coordenadas *z* es el eje de la hélice. Atendiendo a las expresiones de *x(t),y(t)*, resulta que los puntos de la curva se proyectan en el plano *xy* sobre la circunferencia de radio *a*, de centro el origen de coordenadas, contenida en *z=0*. Por tanto, la curva está contenida en el cilindro de radio *a* y de eje el eje de coordenadas *Oz*. La expresión *z(t)=bt* nos indica cómo crece la altura de los puntos a medida que se incrementa el ángulo t, es decir a medida que se va girando en torno al cilindro.
La variación del parámetro controla el número de vueltas.

- **Hélice espiral de Arquímedes**



La curva se proyecta perpendicularmente al plano *xy* sobre una espiral de Arquímedes. El crecimiento en altura está controlado por una expresión idéntica a la correspondiente a la de la hélice circular.
Una parametrización posible es:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= at\cos t \\ y(t) &= at\sin t \\ z(t) &= bt \end{aligned}\right\}, t \geq 0$$

La variación del parámetro controla el número de vueltas.

2. Superficies

2.1. Expresión de superficies

Las superficies son objetos tridimensionales, del espacio tridimensional. Dependiendo de la naturaleza de la superficie, existen varias maneras de describir una superficie, no todas siempre aplicables.

2.1.1. Forma explícita

En esta forma la superficie es el conjunto de los puntos del espacio para los que podemos expresar z en función de las otras dos coordenadas, es decir $z=f(x,y)$, con x,y variando en intervalos numéricos reales adecuados. Por ejemplo, $z = x^2 + y^2$, donde $f(x,y) = x^2 + y^2$. No consideraremos esta modalidad, ya que la mayoría de las superficies que nos interesan no se pueden expresar de este modo.

2.1.2. Forma implícita

En esta forma las superficies se describen por una ecuación del tipo $F(x,y,z)=0$. Por ejemplo,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

es la ecuación de la esfera de centro el origen de coordenadas y radio R. En este caso es:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

La ecuación del plano $ax+by+cz+d=0$ es otro ejemplo.

Este tipo de expresiones tiene el inconveniente de que no resulta fácil, sobre todo si F es una función complicada, calcular las coordenadas de sus puntos.

2.1.3. Forma paramétrica

En forma paramétrica expresamos los puntos de la superficie en función de dos parámetros. Así, $P(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ es la fórmula paramétrica de la superficie (parametrizada), u,v son los parámetros, que varían en sendos intervalos de la recta numérica real, es decir, $u_1 \leq u \leq u_2$, $v_1 \leq v \leq v_2$.

Por ejemplo, en el caso del plano que pasa por el punto A y tiene vectores de dirección w_1, w_2, entonces podemos describir los puntos del plano como superficies paramétricas: $P(a,b) = A + aw_1 + bw_2$, con a,b números reales.

Esta expresión es una de las más interesantes, puesto que permite obtener fácilmente los puntos de la superficie, a medida que los parámetros van variando.

2.2. Superficies notables

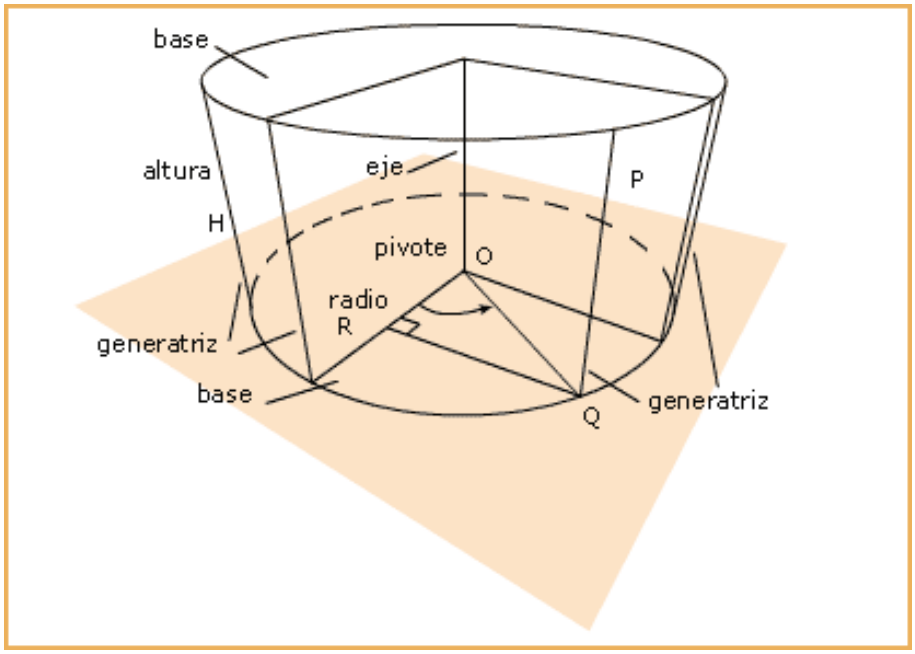
Vamos a decubrir algunas de las superficies notables.

2.2.1. Cilindro circular recto

El cilindro circular recto de radio R y de eje una recta e del espacio tridimensional es la superficie que está formada por las rectas que son paralelas el eje e, que pasan por una circunferencia de radio R, con centro en el eje e, y contenida en un plano perpendicular al eje.

El caso más sencillo es el del cilindro de radio R y de eje el eje de coordenadas cartesianas Oz. Según la definición anterior, en principio el cilindro sería una superficie no acotada. En la práctica se suele trabajar con porciones del mismo, las que están comprendidas entre dos planos perpendiculares al eje del cilindro; la distancia entre estos planos es la altura; las secciones de dichos planos con el cilindro son circunferencias, las bases del mismo.

En la figura siguiente se muestran algunos elementos geométricos constitutivos del cilindro.



Estamos interesados en formular una parametrización del cilindro de eje el eje *z* de radio *R*, con la base inferior sobre el plano *z=0*, incluido en el semiespacio de las coordenadas *z* positivas o nulas, y de altura *H*.

Necesitamos dos parámetros. En este tipo de problemas es recomendable, si es posible, analizar qué cantidades, ligadas al objeto, permiten describir con comodidad los puntos del mismo. En este caso, si consideramos el punto *P=(x,y,z)* de la superficie, puede describirse con facilidad mediante dos parámetros: *t*, ángulo polar en el plano *xy* del punto *Q=(x,y,0)*, proyección ortogonal de *P* sobre el plano horizontal *z=0*. La proyección ortogonal del cilindro sobre este plano es la circunferencia de radio *R* y centro el origen, con lo que podemos expresar las coordenadas *x,y* en función de *t* de forma similar al caso de la circunferencia.

Tenemos, por tanto: *x=Rcost, y=Rsint, z=z*. Para evitar confusiones notacionales, introducimos un cambio en el nombre del parámetro altura: *s=z*. La expresión completa de la parametrización, expresando la dependencia respecto de ambos parámetros, sería:

$$\begin{cases} x(t,s) = R\cos t \\ y(t,s) = R\sin t \\ z(t,s) = s \end{cases}$$

Aun así, esta expresión es incompleta, porque toda parametrización debe incluir la expresión del dominio de variación de los parámetros:

$$\left.\begin{aligned} x(t,s) &= R\cos t \\ y(t,s) &= R\sin t \\ z(t,s) &= s \end{aligned}\right\} ; 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le s \le H$$

Obsérvese que si queremos generar sólo una parte del cilindro (un semicilindro, por ejemplo) bastará restringir el dominio de variación de parámetros.

Resulta fácil escribir la parametrización del cilindro de eje paralelo al eje *Oz*, pasando por el punto *(a,b,*)*, de radio *R*, con la base inferior sobre *z=0*:

$$\left.\begin{aligned} x(t,s) &= a + R\cos t \\ y(t,s) &= b + R\sin t \\ z(t,s) &= s \end{aligned}\right\} ; 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le s \le H$$

También resulta inmediato escribir parametrizaciones para cilindros de eje *Ox* (o paralelo a dicho eje), o similarmente para *Oy*. Bastará intercambiar el papel de la coordenada que juega el papel de la altura. Por ejemplo, la siguiente es una parametrización de un cilindro de eje el eje de coordenadas *Ox*.

$$\left.\begin{aligned} x(t,s) &= s \\ y(t,s) &= R\cos t \\ z(t,s) &= R\sin t \end{aligned}\right\};0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le s \le H$$

2.2.2. Esfera

La esfera de radio *R* y de centro el punto *C=(a,b,c)* es el conjunto de los puntos *P=(x,y,z)* del espacio que están a distancia *R* de *C*.

A partir de esta definición podemos obtener fácilmente la ecuación correspondiente. En efecto, expresando en coordenadas la condición de distancia, *d(P,C)=R*, resulta

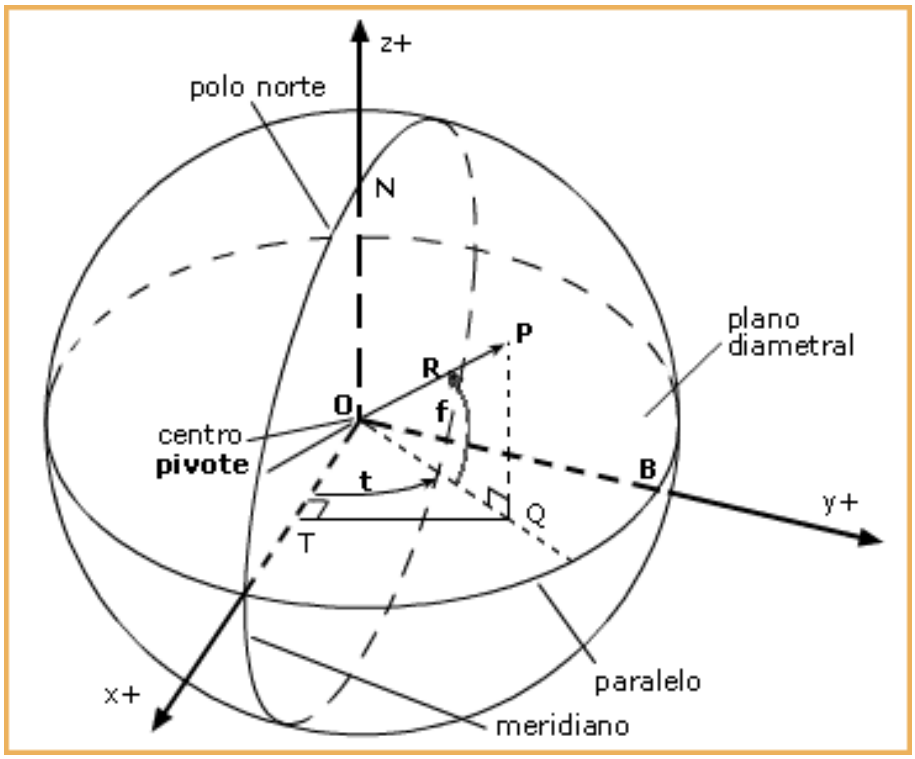
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = R$$

Elevando al cuadrado resulta la ecuación buscada:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$$

Obsérvese que si *a=b=c=0*, es decir, si el centro coincide con el origen de coordenadas, obtenemos la expresión que ya se había indicado con anterioridad.

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$



Estamos interesados en parametrizar la esfera de radio *R* y centro el origen de coordenadas.

Elegimos como parámetros las ángulos *t* ("longitud", por analogía en cartografía) y *f* ("latitud"). Obtener las coordenadas *(x,y,z)* del punto *P* sobre la esfera en función de *t,f* es un simple ejercicio de trigonometría tomando en consideración los triángulos rectángulos *OPQ, OTQ*. Resulta:

P(t,f)=(R cos f cos t, R cos f sin t, R sin f)

Esta expresión resulta insuficiente, pues no se explicita la variación de los parámetros. La versión completa sería:

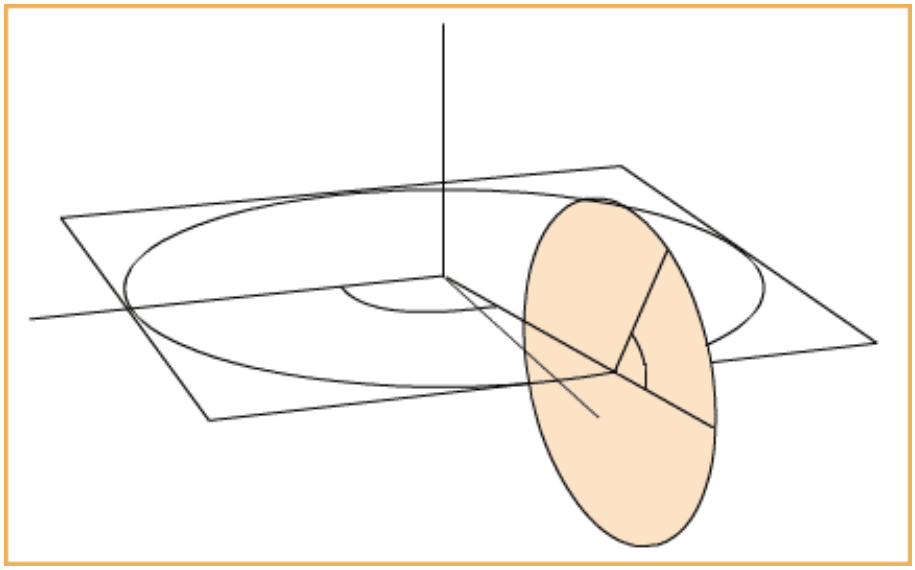
$$\left.\begin{aligned} x(t,f) &= R\cos f\cos t \\ y(t,f) &= R\cos f\sin t \\ z(t,f) &= R\sin f \end{aligned}\right\};0 \le t \le 2\pi;-\frac{\pi}{2} \le f \le \frac{\pi}{2}$$

Si queremos la parametrización de la esfera de radio *R* y de centro *C=(a,b,c)*, entonces bastará efectuar una traslación T_C y se obtendrá:

$$\left.\begin{aligned} x(t,f) &= a + R\cos f\cos t \\ y(t,f) &= b + R\cos f\sin t \\ z(t,f) &= c + R\sin f \end{aligned}\right\};0 \le t \le 2\pi;-\frac{\pi}{2} \le f \le \frac{\pi}{2}$$

2.2.3. Toro

El toro es la superficie que se genera por la rotación de una circunferencia alrededor de una recta (*eje del toro*), siendo dicha recta exterior a la circunferencia y ambas figuras coplanarias. El *plano diametral* del toro es el plano que pasa por el centro de la circunferencia generadora y es perpendicular al eje. Su intersección con el eje es el *centro* del toro. En las figuras posteriores se muestran todos estos elementos.



A partir de la figura vamos a obtener una posible parametrización del toro, utilizando los parámetros angulares *a,b*. Para ello, consideraremos los triángulos rectángulos *OPQ,OQT*. Obsérvese que *OQ=OC+CQ=R+rcosb*.

Así, podemos escribir *x,y,z* del punto *P=(x,y,z)* en función de *a,b*:

$$\left.\begin{array}{l} x(a,b) = (R + r\cos b)\cos a \\ y(a,b) = (R + r\cos b)\sin a \\ z(a,b) = r\sin b \end{array}\right\} ; 0 \le a \le 2\pi,\ 0 \le b \le 2\pi$$

2.2.4. Cono circular recto

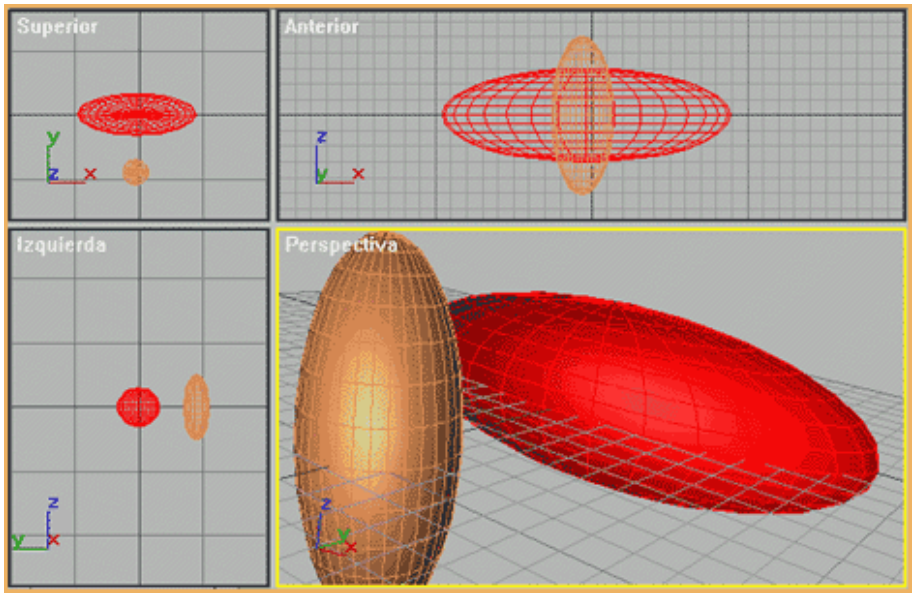
Es la superficie generada por las rectas que pasan por una circunferencia y por un punto *V* común (vértice) no contenido en el plano de la circunferencia. Además, la recta por V que es perpendicular al plano de la circunferencia pasa por su centro.

2.2.5. Elipsoide

El elipsoide de centro el origen, ejes principales los ejes de coordenadas y semiejes *a,b,c* es la superficie de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Las secciones de la esfera por planos paralelos a los de coordenadas son elipses. La figura puede obtenerse por cambio de escala aplicado a la esfera de radio 1.

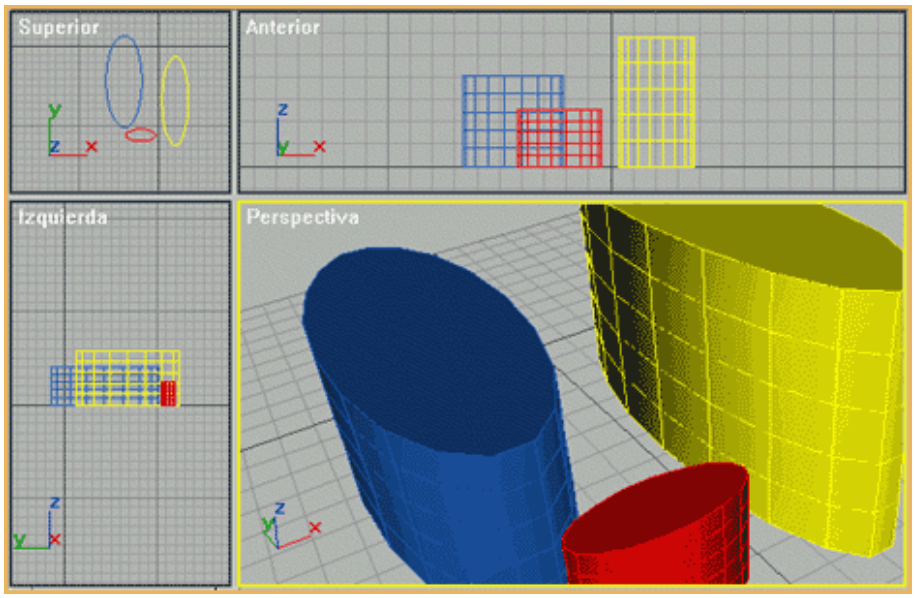


2.2.6. Cilindro elíptico

El cilindro elíptico de eje el eje de coordenadas *Oz* y de directriz una elipse contenida en *z=0* con centro en el origen de coordenadas es el conjunto de las rectas que son paralelas al eje y pasan por la elipse.

Las secciones por planos perpendiculares al eje son elípticas.

De forma similar pueden definirse cilindros elípticos respecto de ejes distintos de los ejes de coordenadas.



2.2.7. Generación de superficies por transformaciones geométricas: superficies de revolución

Una de las construcciones más potentes para generación de formas son las superficies de revolución.

Para la generación de dichas superficies hacen falta dos elementos: una *curva* (curva *directriz*) y una *recta*, que será eje de rotación de la directriz. El resultado de la rotación completa de la curva directriz alrededor del eje es una superficie de revolución.

Estamos interesados en disponer de una parametrización (no se presentará la deducción). Supongamos, para ello, que conocemos una parametrización para la curva directriz:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t));\ a \le t \le b$$

Supongamos que el eje de revolución es el eje *Oz*.

Una posible parametrización de la superficie generada por una rotación completa de la curva alrededor del eje *Oz* es:

$$\left.\begin{aligned} x(t,\theta) &= \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\cos\theta \\ y(t,\theta) &= \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\sin\theta \\ z(t,\theta) &= z(t) \end{aligned}\right\};a \le t \le b;0 \le \theta \le 2\pi$$

Pueden obtenerse también partes de la superficie restringiendo los dominios de variación de los parámetros.

La esfera, el cono, el cilindro y el toro pueden obtenerse también como superficies de revolución.

Actividades

Ejercicios

- **Problema 1**
  Parametrizar la hélice circular de radio *a>0*, de paso de rosca *b>0*, de eje el eje de coordenadas Ox, contenida en el semiespacio x^3 0, y tal que el inicio de la curva esté en el punto *P=(0,a,0)*.
  Respuesta:

$$\begin{cases} x(t) = bt \\ y(t) = a\cos t \\ z(t) = a\sin t \end{cases}$$

  tomando como parámetro el ángulo polar en el plano *yz*, con origen de ángulos el semieje *y+* y hacia *z+* por el camino más corto. La variación depende del número de vueltas que queramos describir; por ejemplo, para una vuelta sería $0 \leq t \leq 2\pi$.
- **Problema 2**
  Utilizando transformaciones geométricas, obtener una parametrización de la parábola *C1* de eje *Oz*, vértice en el punto *V=(0,0,1)*, situada en el plano *x=y*, idéntica en cuanto a forma a la parábola *C0* de ecuación $y = x^2$ contenida en el plano *xy*.
  Respuesta:
  Parametricemos *C0*, escogiendo como parámetro *s=x*. Resulta:

$$C0: \begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = s^2 \\ z(s) = 0 \end{cases}$$

  Vamos a resolver el problema por concatenación de transformaciones.
  En primer lugar efectuamos una rotación positiva de ángulo de 90 grados *(a=π /2)* respecto del eje *x*, que convertirá *C0* en una parábola idéntica C00, situada sobre el plano *xz, z* positivo, de eje *z* y con el vértice en el origen:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & -1 & s^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ s^2 \end{pmatrix}$$

  Por supuesto, también podríamos haber partido de ahí, parametrizando directamente *C00*.
  Efectuemos ahora una rotación de 45 grados (*b=π /4* radianes) respecto del eje z para convertir el plano *xz* en el bisector *y=x*, con lo cual convertimos la parábola intermedia *C00* en la *C000*, de eje *x*, contenida en el semiespacio de las z positivas, contenida en el plano *y=x* y con el vértice en el origen.

$$\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \\ \widehat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b & 0 \\ \sin b & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ s^2 \end{pmatrix}$$

  Finalmente, efectuamos una traslación para cumplir con la condición del vértice, traslación de vector V=(0,0,1); el resultado final es C1:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \\ \widehat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ s^2 + 1 \end{pmatrix}$$

  Por tanto, una parametrización posible sería:

$$\begin{cases} x(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ y(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ z(s) = s^2 + 1 \end{cases}$$

El intervalo de variación del parámetro depende del tramo de parábola que queramos generar.

- **Problema 3**
  Escribir una parametrización de la cardioide del plano de ecuación *r=a(1+cos t)* en coordenadas polares.
  Respuesta:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a(1+\cos t)\cos t \\ y(t) &= a(1+\cos t)\operatorname{sen} t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

- **Problema 4**
  Escribir una parametrización de la circunferencia del espacio tridimensional de radio *R=6*, contenida en el plano x=0 y de centro *C=(0,2,3)*.
  Respuesta:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= 2 + 6\cos t \\ z(t) &= 3 + 6\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

- **Problema 5**
  Considérese la parábola *C0* en el plano dada por $y = ax^2$. Obtener una parametrización de la parábola *C1*, resultado de aplicar a *C0* la rotación horaria de 45 grados respecto del origen de coordenadas.
  Respuesta:
  Escribamos *C0* en forma paramétrica:

$$\left.\begin{aligned} x(s) &= s \\ y(s) &= as^2 \end{aligned}\right\}, s \in R$$

Aplicaremos la rotación indicada a los puntos de la forma anterior:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ as^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ as^2 \end{pmatrix}$$

Efectuando el producto matricial:

$$\left.\begin{aligned} x(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2}s - \frac{\sqrt{2}}{2}(as^2) \\ y(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2}s - \frac{\sqrt{2}}{2}(as^2) \end{aligned}\right\}, t \in R$$

- **Problema 6**
  Escribir una parametrización de la circunferencia del espacio tridimensional de radio *R=3*, contenida en el plano *y=4* y de centro *C=(2,4,8)*.
  Respuesta:

$$\begin{cases} x(t) = 2 + 3\cos t \\ y(t) = 4 \qquad , 0 \le t \le 2\pi \\ z(t) = 8 + 3\sin t \end{cases}$$

- **Problema 7**
  Escribir una parametrización de la espiral de Arquímedes del plano de ecuación *r=at* (3 vueltas) en coordenadas polares.

Respuesta:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= at\cos t \\ y(t) &= at\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 6\pi$$

- **Problema 8**

Considérese en el espacio tridimensional la parábola *C0* del plano de coordenadas vertical *x=0*, dada por $z=ay^2;x=0$. Sea *C1* el resultado de aplicar a *C0* la rotación positiva de 45 grados respecto del eje de coordenadas *Oz*. Obtener una parametrización de *C1*.

Respuesta:

Consideremos la parametrización de la parábola inicial *C0*:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= t \\ z(t) &= at^2 \end{aligned}\right\}, t \in R$$

Aplicaremos la transformación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a los puntos de la parábola *C0*:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ at^2 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ z(t) &= a\frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \end{aligned}\right\}, t \in R$$

- **Problema 9**

Supóngase que una esfera se desplaza de forma que su centro sigue la trayectoria dada por la curva:

$$\begin{cases} x(t) = 6 \\ y(t) = 3 + 5\cos t \quad , 0 \le t \le \pi \\ z(t) = -2 + 4\sin t \end{cases}$$

Describir completamente la trayectoria.

Respuesta:

En primer lugar se observa que se trata de una curva plana, contenida en el plano de ecuación *x=6*. La parametrización corresponde a puntos de una elipse, de centro *C=(6,3,-5)*, con los semiejes *a=5* (correspondiente al eje *y*), y *b=4*. Los ejes principales son respectivamente paralelos a los ejes de coordenadas *Oy* (correspondiente a *a=5*), *Oz* (correspondiente a *b=4*). La trayectoria es una semielipse, dada la variación del parámetro. El punto inicial será *I=(x(0),y(0),z(0))=(6,3+5cos0,-2+4sin0)=(6,8,-2)*. El punto final de la trayectoria corresponderá al valor extremo del parámetro t y será $F = (x(\pi), y(\pi), z(\pi)) = (6, -2, -2)$. La trayectoria es antihoraria vista desde *x=7*.

- **Problema 10**

Supóngase que una esfera se desplaza de manera que su centro sigue la trayectoria dada por la curva:

$$\begin{cases} x(t) = 3 + 7\cos t \\ y(t) = 6 \\ z(t) = 4 + 7t\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 20\pi$$

Describir completamente la trayectoria.
Respuesta:
Se trata de una curva plana, contenida en el plano *y=6*, paralelo al de coordenadas *xz*. De la observación de las expresiones para *x(t)* y *z(t)* se deduce que se trata de una espiral de Arquímedes, idéntica a la espiral de ecuación polar *r=at, a=7*, con 10 vueltas, y con centro u origen *C=(3,6,4)*. Observando desde y>6, la espiral gira antihorariamente.

- **Problema 11**
El centro de un icosaedro sigue una trayectoria dada por la parametrización:

$$\begin{cases} x(t) = 2 + 4\cos t \\ y(t) = 6 \\ z(t) = 3 + 5\sin t \end{cases}; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Describir completamente la trayectoria de animación del icosaedro.
Resolución:
La trayectoria es una curva plana, contenida en el plano *y=6*, paralelo al plano de coordenadas xz. Se trata de una elipse de centro *C=(2,6,3)* y de semiejes *a=4, b=5*. Los ejes principales son respectivamente paralelos a los ejes de coordenadas *x,z*. El eje correspondiente a *a=4* (menor) es paralelo al eje *Ox;* el eje correspondiente a *b=5* (mayor) es paralelo al eje *Oz*. El recorrido es una vuelta completa, con inicio en *I=(x(0),y(0),z(0))=(6,6,3)*. El recorrido se realiza antihorariamente visto desde *y+*, con *y>6*.

- **Problema 12**
Parametrícese la circunferencia del plano *x=2*, de radio *R=5* y centro *C=(2,4,3)*.
Resolución:
Hay varias posibilidades, dependiendo de dónde deseemos que se inicie y cómo queramos que se efectúe la rotación, es decir, la generación de los puntos de la curva. Veamos una:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = 2 \\ y(t) = 4 + 5\cos t \\ z(t) = 3 + 5\sin t \end{array}\right\}; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

- **Problema 13**
Supóngase que una esfera se desplaza de forma que su centro sigue la trayectoria dada por la curva:

$$\begin{cases} x(t) = 5t \\ y(t) = 3 + 4\cos t; \quad 0 \le t \le 12\pi \\ z(t) = 2 + 4\sin t \end{cases}$$

Describir completamente la trayectoria.
Resolución:
Es una hélice circular de radio *a=4*, paso de rosca *b=5*, de eje la recta que pasa por el punto *(0,3,2)* y es paralela al eje de coordenadas *Ox*. Es una hélice de 6 vueltas. El punto de inicio corresponde al valor inicial del parámetro, *t=0*, de manera que será *I=(x(0),y(0),z(0))=(0,7,2)*, en el plano *x=0*. El sentido de avance es en el sentido de *x+;* observando la proyección ortogonal sobre el plano *yz*, el avance se observa en proyección como antihorario visto desde *x>0*.

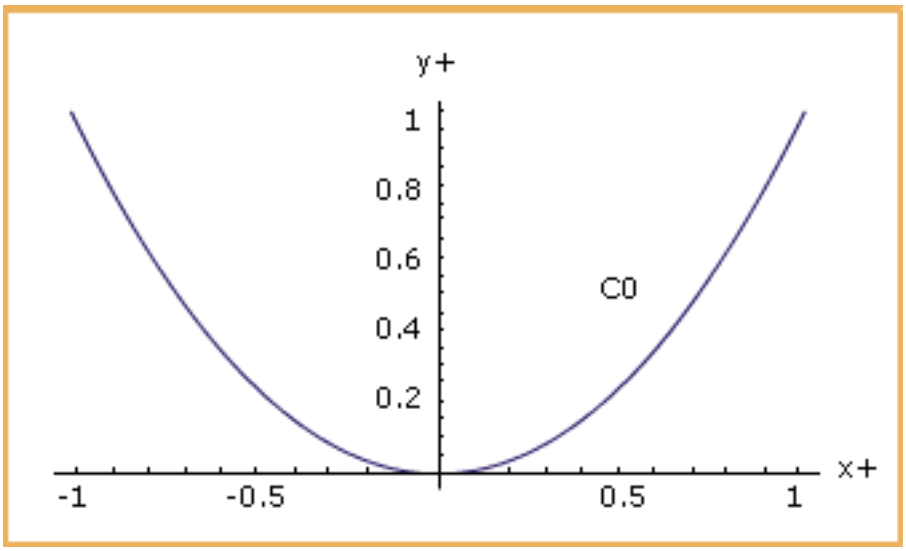
- **Problema 14**
Supóngase que una esfera se desplaza de manera que su centro sigue la trayectoria dada por la curva:

$$\begin{cases} x(t) = 4 + 6t\cos t \\ y(t) = 2 + 6t\sin t; \quad 0 \le t \le 18\pi \\ z(t) = 5 \end{cases}$$

Describir completamente la trayectoria.
Resolución:
De la tercera ecuación resulta que la curva es plana y está contenida en el plano horizontal *z=5*.
La curva auxiliar en el plano bidimensional (6tcost, 6tsint) es una espiral de Arquímedes de origen el origen de coordenadas, de ecuación polar *r=at*, con *a=6*. Observada desde el

semieje *z+*, el sentido de desarrollo o despliegue de la curva es antihorario. La variación del parámetro *t* indica que se efectúan 9 vueltas alrededor del origen. La curva dada tiene las mismas características que la auxiliar descrita, de la cual resulta por traslación. Por tanto, la curva dada es de centro el punto (4,2,5).

- **Problema 15**
  Utilizar transformaciones geométricas afines para obtener una parametrización de la parábola de coeficiente de apertura a=3, vértice *(2,5)* y eje la recta r de ecuación *2x+3y=29*, contenida en el semiplano *y≥ 0*.
  Resolución:
  Vamos a resolver el problema por transformaciones geométricas. Diversas variantes son posibles; veamos una, consistente en escribir *directamente* la transformación afín que nos permite construir la curva deseada.
  Consideremos la curva C0, idéntica a la forma que se pide construir en el enunciado, pero colocada en la que podemos llamar posición estándar, tal como se muestra en el gráfico que sigue.



La parábola *C0* es la parábola de vértice *V=(0,0)*, el eje de la parábola es el eje de coordenadas *Oy*, el coeficiente de apertura es *a=3*, y está contenida en el semiplano *y≥ 0*. Es decir, es la curva

$$y = 3x^2$$

.

Esta curva admite la parametrización:

$$\left.\begin{array}{l} x(s) = s \\ y(s) = 3s^2 \end{array}\right\}, s_0 \le s \le s_1$$

En el caso de la figura es $s_0 = -1,\ s_1 = 1$.

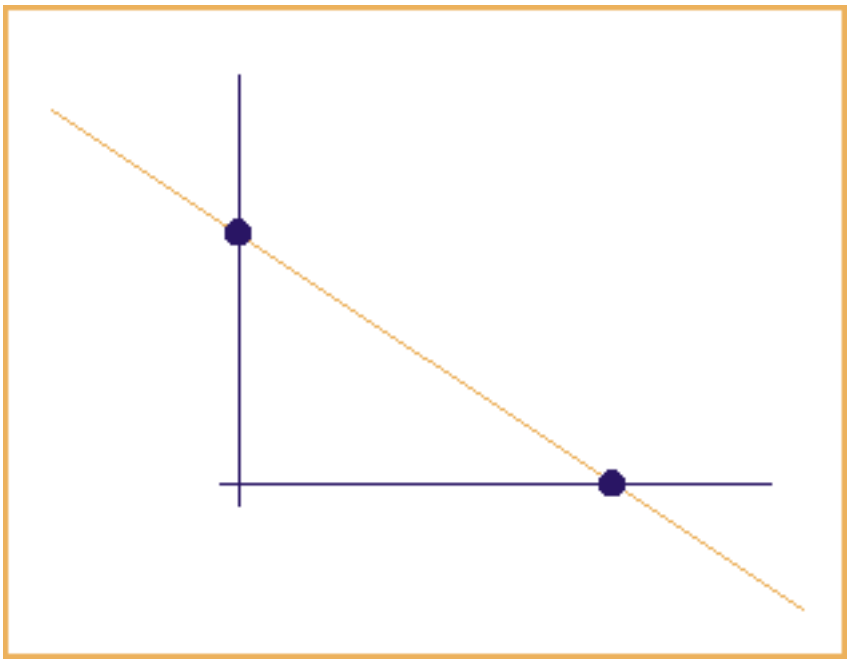
Ahora vamos a formular la transformación afín que nos convertirá finalmente la curva *C0* en la curva pedida. Ya que la estructura de este tipo de transformaciones es *X'=AX+W*, donde A es la matriz de la parte lineal de la transformación y *W* es el vector de traslación, basta determinar, pues, *A* y *W*.

En cuanto a W, para que el vértice de C0 se transforme en el vértice de la parábola pedida, teniendo en cuenta que el vértice de *C0* es el origen de coordenadas, basta tomar *W=(2,5)*, nuevo vértice.

En cuanto a *A*, basta dar la imagen o el transformado de los vectores de la base usual $\{e_1, e_2\}$ del espacio vectorial bidimensional. Para ello, el vector e_2, dirección del eje de la parábola, debe convertirse en la dirección del eje de la parábola pedida, que debe ser paralelo a la recta *2x+3y=29*, con lo que $e_2{}'$, transformado de

$$e_2$$

, debe ser vector director de la citada recta, convenientemente orientado para cumplir con la condición relativa al semiplano. Hallemos, pues, $e_2{}'$.



Podríamos obtener dos puntos de la recta, por ejemplo las intersecciones con los ejes. Si A es la intersección con *Ox*, y *B* es la intersección con *Oy*, entonces *B-A* es un vector director de la recta; habría que normalizar.
Otra manera de proceder, ahorrando cálculos, consiste en considerar la recta paralela a la dada, pero pasando por el origen, *2x+3y=0*. Podemos reescribirla en la forma: *0=2x +3y=(2,3).(x,y)*, lo cual nos dice que el vector *u=(2,3)* es ortogonal a la recta, cosa que también nos hace falta. Hallando una dirección ortogonal a u obtenemos un vector director de la recta, lo cual es muy fácil: tomando *v=(-3,2)* obtengo un vector ortogonal. Además, *{u,v}* es una base de orientación positiva y la orientación de v permitirá resolver el problema con el requerimiento de estar contenida la curva imagen en el semiplano de las y positivas. Normalizando, resulta finalmente:

$$\begin{cases} e_1' = \dfrac{1}{\|u\|}u = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2,3) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right) \\ e_2' = \left(-\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right) \end{cases}$$

Por tanto, la matriz de la transformación afín debe ser:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{13}} & -\dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{13}} & \dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

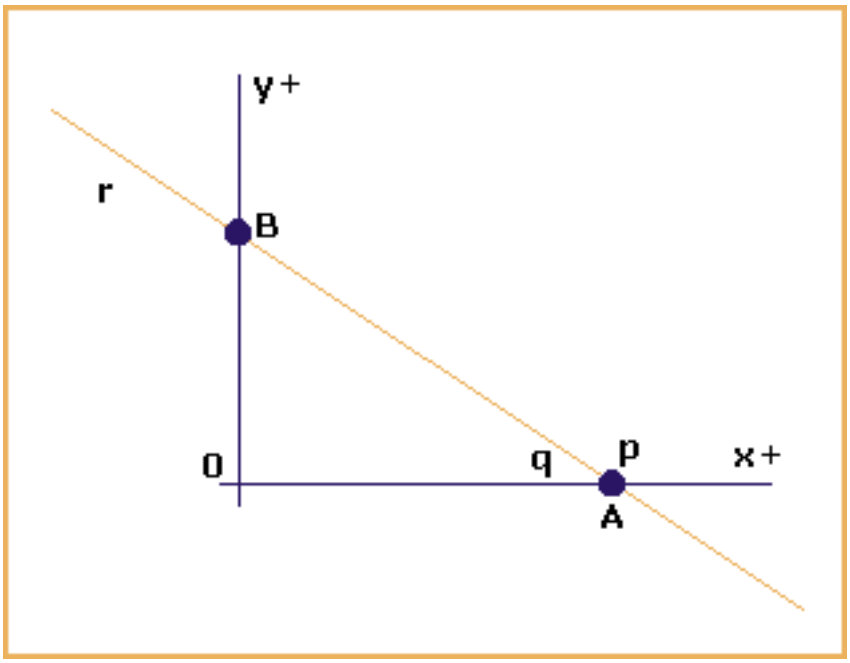
Por tanto, la parametrización derivada por transformación afín es:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} + W = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{13}} & -\dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{13}} & \dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 3s^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

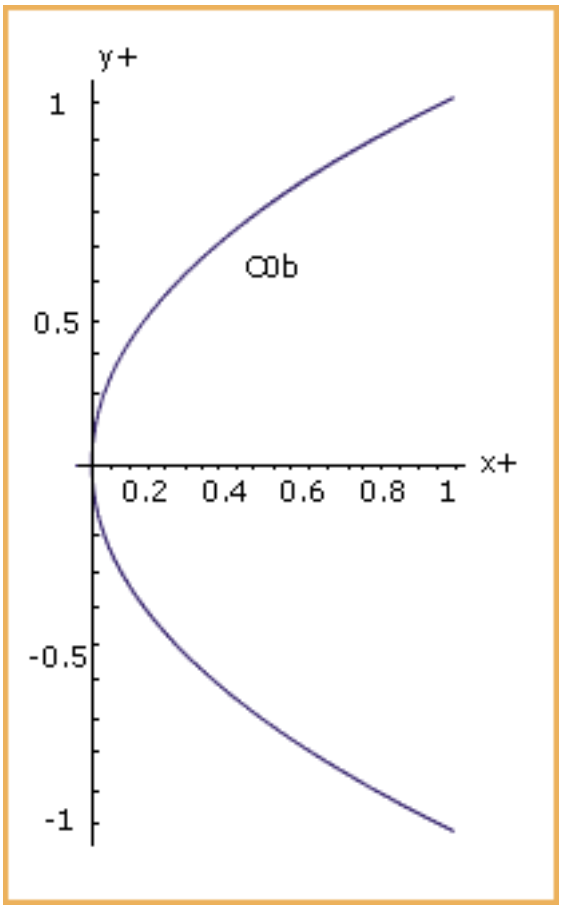
Efectuando los cálculos anteriores, y eliminando la notación de "primas", resulta finalmente:

$$\begin{cases} x(s) = \dfrac{2}{\sqrt{13}}s - \dfrac{3}{\sqrt{13}}3s^2 + 2 \\ y(s) = \dfrac{3}{\sqrt{13}}s + \dfrac{2}{\sqrt{13}}3s^2 + 5 \end{cases}$$

Segunda variante. Ya hemos visto una manera de resolver el problema. La que planteamos a continuación deberíais intentar terminarla vosotros. Es esencialmente equivalente a la anterior, pero ahora por *concatenación de transformaciones*: de rotación respecto del origen $R^p{}_O$ y posteriormente de traslación T_w.
Para ello, consideremos el esquema siguiente:



Recordemos la definición de la *inclinación* de una recta *r*: si *r* es una recta que no es paralela al eje *x*, y si *A* es la intersección de la recta con el eje *x*, entonces el ángulo de inclinación de *r* es el ángulo mínimo que debe girar el eje *x* en sentido antihorario respecto de *A* para coincidir con *r*. En el caso de paralelismo el ángulo de inclinación es 0. En el diagrama anterior el ángulo de inclinación es *p*.
Por tanto, habría que calcular el ángulo de inclinación *p* y aplicar la rotación indicada a una copia de la curva en otra posición, la que se indica en el esquema siguiente:



En este caso hay que utilizar la parametrización de la curva C0b, de ecuación explícita $x = y^2$, de la que se deriva la parametrización $x(s) = s^2$, $y(s) = s$, tomando la misma coordenada y como parámetro.
Podéis terminar de resolver el problema por esta vía. Incluso aquí son posibles dos variantes, con el fin de escribir la matriz de rotación:
Variante a: la indicada anteriormente, consistente en calcular el ángulo de inclinación *p* y posteriormente calcular sen *p*, cos p para escribir la matriz.
Variante b: puesto que sólo necesitamos las razones trigonométricas del ángulo *p*, prescindir de su cálculo y obtener directamente *sen p, cos p*, por geometría analítica y trigonometría elemental.

- **Problema 16**

Consideremos la elipse de ecuación $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$. Hay que construir una copia métricamente idéntica pero con centro en el punto *C=(5,3)*, de manera que su semieje mayor sea paralelo a la recta *y=– x*. Formular una parametrización de la elipse resultante. ¿Qué modificaciones habría que realizar para obtener una parametrización de la mitad superior de la figura?
Resolución:
Vamos a resolver el problema mediante transformaciones geométricas afines, sólo que en vez de formularse para puntos genéricos *(x,y)* del plano, se aplicarán a los puntos que sean de la elipse tal como está dada en el enunciado.
Veamos, pues, en primer lugar, cómo se puede parametrizar la elipse. De la ecuación $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, que queda claro que es una elipse de centro el origen de coordenadas, de ejes principales coincidentes con los ejes de coordenadas, y con semiejes *a=3, b=2*. Se puede parametrizar esta curva mediante:

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Por tanto, los puntos de esta elipse son de la forma (3*cost*,2*sint*). Obtenemos la "mitad superior", es decir, la semielipse correspondiente al semiplano y≥ 0, limitando la variación del parámetro *t* al intervalo [0,π]. Para el valor inicial *t* = 0 iniciamos el recorrido de

la semielipse en el punto (a,0); para el valor final $t = \pi$, finalizamos el recorrido de la semielipse en el punto (-a,0). La variación de t produce, además, un sentido de recorrido sobre la curva.

Vamos a designar esta elipse por L_0.

Analicemos ahora la recta $y = -x$. Es la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes. Obsérvese que puede obtenerse a partir del eje Ox por rotación respecto del origen de dos maneras: efectuando una rotación positiva de ángulo $\alpha = 45 + 90 = 135$ grados (es decir, $R_O{}^{\alpha}$) o bien una rotación negativa de $\beta = -45$ grados (es decir, $R_O{}^{\beta}$).

Entonces podemos construir una copia de la elipse completa anterior, de tal modo que pase a ocupar la posición pedida, aplicando transformaciones derivadas del análisis anterior a la elipse "original" L_0. Hay más de una posibilidad:

Posibilidad 1: aplicamos primero a L_0 la rotación $R_O{}^{\alpha}$, y seguidamente la traslación $T_C = T_{(5,3)}$.

Posibilidad 2: aplicamos primero a L_0 la rotación $\beta = -45$ grados, (es decir, $R_O{}^{\beta}$), y seguidamente la traslación $T_C = T_{(5,3)}$.

Ambas posibilidades son equivalentes si sólo estamos interesados en obtener la elipse completa y resulta indiferente cómo se recorren al variar t en [0,2p]; en cambio, ya no son equivalentes si lo que deseamos es sólo una de las dos semielipses "superior" o "inferior", con el recorrido de t en [0,p]. Hay que controlar por dónde empezamos para obtener una u otra.

Si queremos obtener la semielipse que está por "encima" de la recta $y = -x$, entonces hay que usar la segunda posibilidad. Resultará finalmente la parametrización siguiente:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (T_{(5,3)} \circ R_O^{\beta})\begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} = T_{(5,3)}\left(R_\beta{}^{O}\left(\begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}\right)\right) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(-45^0) & -\sin(-45^0) \\ \sin(-45^0) & \cos(-45^0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}3\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}2\sin t + 5 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}3\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}2\sin t + 3 \end{pmatrix}$$

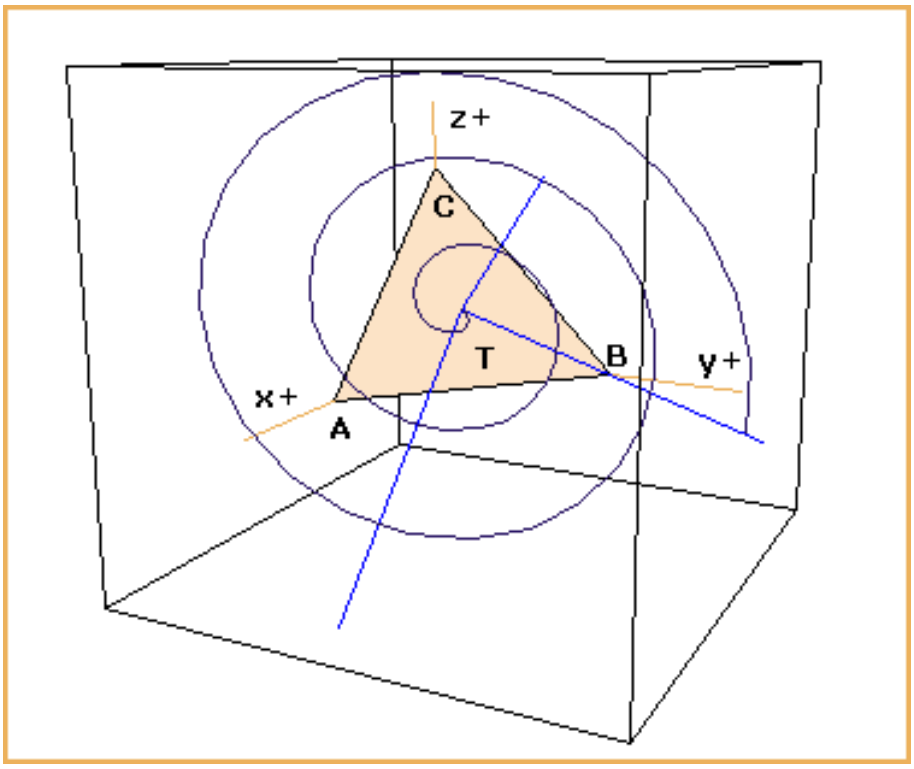
Por tanto, la parametrización buscada es:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos t + \sqrt{2}\sin t + 5 \\ y(t) &= -\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos t + \sqrt{2}\sin t + 3 \end{aligned}\right\}, t \in [0, \pi]$$

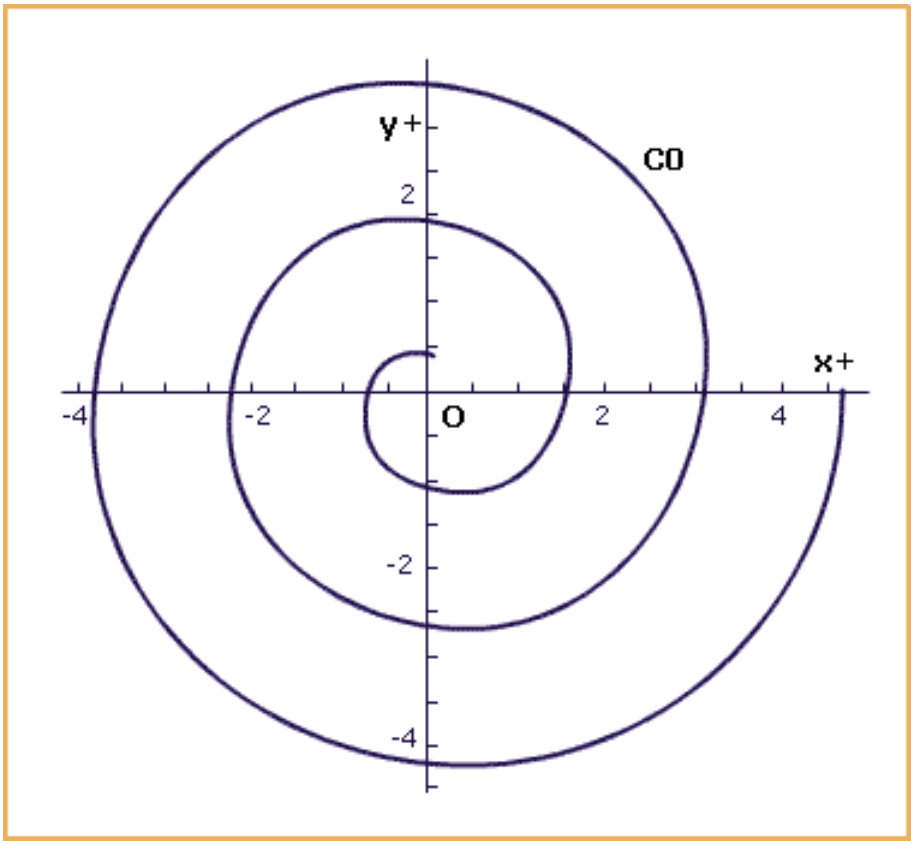
Estas ecuaciones corresponden a la semielipse. La elipse completa se obtiene variando con la variación $0 \le t \le 2\pi$.

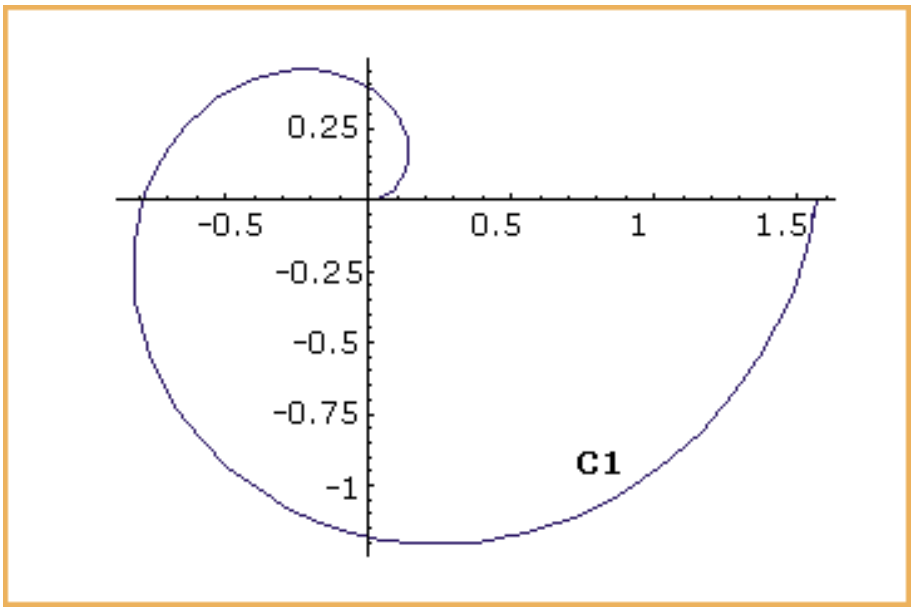
- **Problema 17**

Considérese el triángulo ABC en el espacio tridimensional, de vértices $A = (3,0,0)$, $B = (0,3,0)$, $C = (0,0,3)$, y sea T el baricentro del triángulo ABC. Constrúyase una copia de la espiral de Arquímedes $r=at$, con $a = \frac{1}{4}$, que da 3 vueltas alrededor del origen, sobre el triángulo de vértices ABC, de tal forma que el centro de la espiral se encuentre en el baricentro T del triángulo. Obtener una parametrización de la curva.

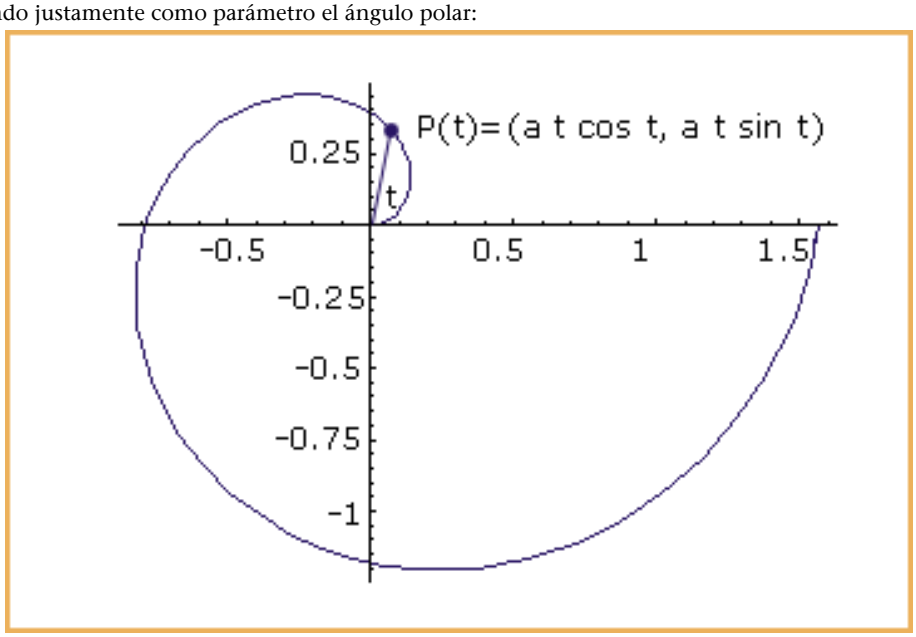


Resolución:
Este ejercicio está relacionado con el tema de curvas y de transformaciones geométricas arbitrarias, distintas de las básicas. Es también un ejemplo de cómo usar las transformaciones geométricas para propósitos de construcción geométrica, y para obtener parametrizaciones de curvas en posiciones arbitrarias, lo cual tiene su interés para MaxScript y para el editor de expresiones paramétricas.
En el gráfico siguiente se muestra una espiral de Arquímedes $r=at$, con $a=1/4$, siendo t el ángulo polar en el plano. Véase también una sola vuelta *(C1);* en nuestro caso deberá ser $0\leq t\leq 3(2\pi)=6\pi$, variación del parámetro correspondiente a 3 vueltas *(C0)*.





Considerando la curva *C0*, en el plano *xy*, puede parametrizarse inmediatamente utilizando justamente como parámetro el ángulo polar:

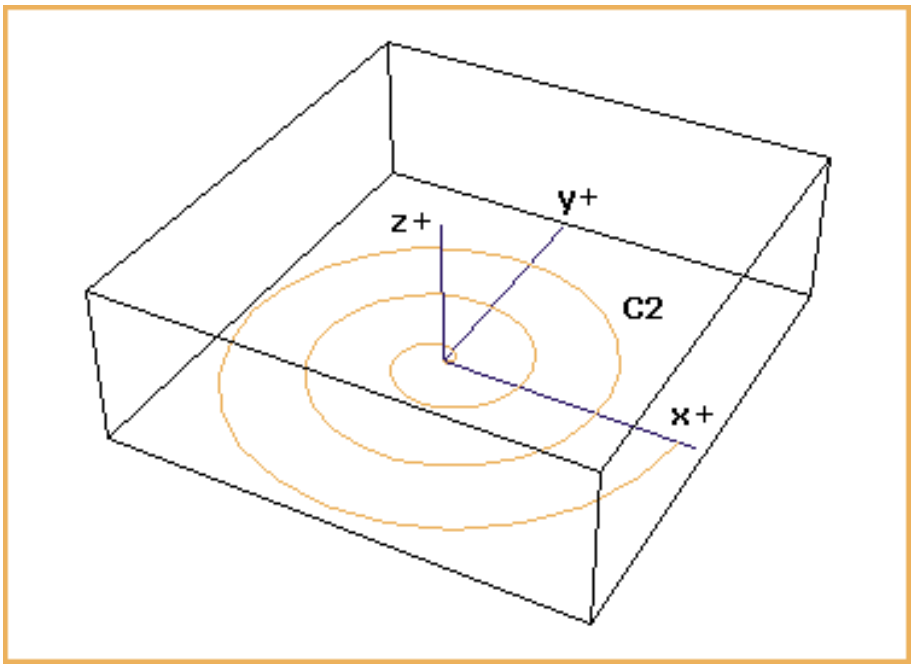


La parametrización derivada es:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= at\cos t \\ y(t) &= at\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 6\pi$$

Vamos a resolver el problema constructivo por transformaciones geométricas. La idea es considerar una copia del objeto que finalmente debemos obtener, parametrizarla (en una posición en la que nos resulte fácil hacerlo), y aplicar a la parametrización la transformación geométrica afín conveniente para que se transforme en la que a nosotros nos interesa. La transformación geométrica se definirá construyendo una adecuada base ortonormal.

Consideremos la espiral de Arquímedes en la misma posición que antes, pero ahora en el plano *xy*, inmerso en el espacio tridimensional, de modo que es el plano de coordenadas horizontal *z=0*, como se muestra en la figura siguiente:



La parametrización correspondiente de *C2* es:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = at\cos t \\ y(t) = at\sin t \\ z(t) = 0 \end{array}\right\}, 0 \le t \le 6\pi$$

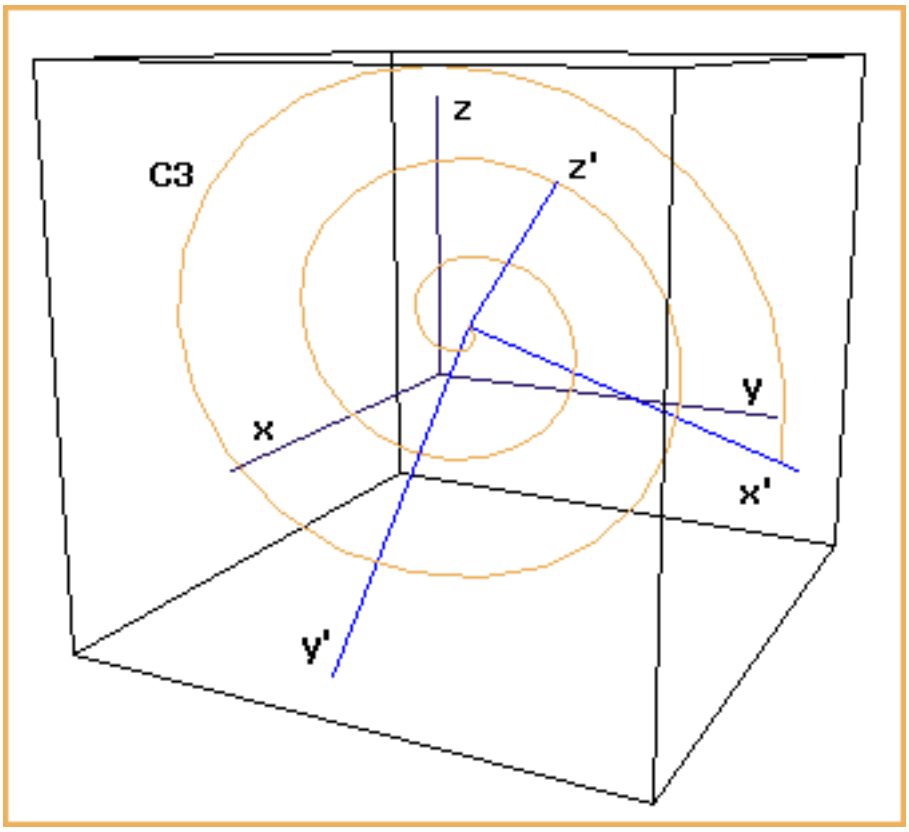
Vamos a definir la transformación afín 3D que transforma la curva *C2* en la definitiva *C3*, que es la que nos piden obtener. Tenemos que dar, para ello, la parte lineal (matricial) M y la parte (vectorial) de traslación *W*, para luego aplicar *X'=MX+W* a los puntos del espacio que sean justamente los de *C2*, es decir, los que tienen la forma dada por su parametrización. Por tanto, sería:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + W = M\begin{pmatrix} at\cos t \\ at\sin t \\ 0 \end{pmatrix} + W$$

La determinación del vector de traslación es inmediata:

$$W = T = \frac{1}{3}(A+B+C) = \frac{1}{3}((3,0,0)+(0,3,0)+(0,0,3)) = \frac{1}{3}(3,3,3) = (1,1,1)$$

En cuanto a la matriz *M*, hay que escoger los transformados de los vectores de la base usual de coordenadas cartesianas, transformados que, en el orden correspondiente, formarán las columnas de la matriz *M*. Ello equivale a decir cuáles van a ser los ejes orientados *x',y',z'* en los que se transformarán los ejes orientados *x,y,z* (con mantenimiento de la unidad de medida y la ortogonalidad mutua), como se indica en el esquema siguiente:



Calculemos los vectores transformados por la transformación que vamos a construir: e'_1 será el transformado de $e_1 = (1,0,0)$, e'_2 será el transformado de $e_2 = (0,1,0)$, e'_3 será el transformado de $e_3 = (0,0,1)$. La matriz M tendrá como columnas los nuevos vectores: $M = (e'_1\ e'_2\ e'_3)$.

Hay varias posibilidades, aunque z' debe ser perpendicular al plano *ABC* (incluso para ello hay dos posibilidades, relativas a la orientación). Escogeremos, por tanto, la dirección perpendicular al plano *ABC*, que vendrá dada por el producto vectorial de dos vectores sobre el plano, por ejemplo *TB, TC* u otra combinación, utilizando datos de los que disponemos directamente. Tenemos *TB=B-T=(0,3,0)-(1,1,1)=(-1,2,-1), TC=C-T=(0,0,3)-(1,1,1)=(-1,-1,2)*. Calculemos el producto vectorial de ambos vectores, en el orden que seguidamente indicamos:

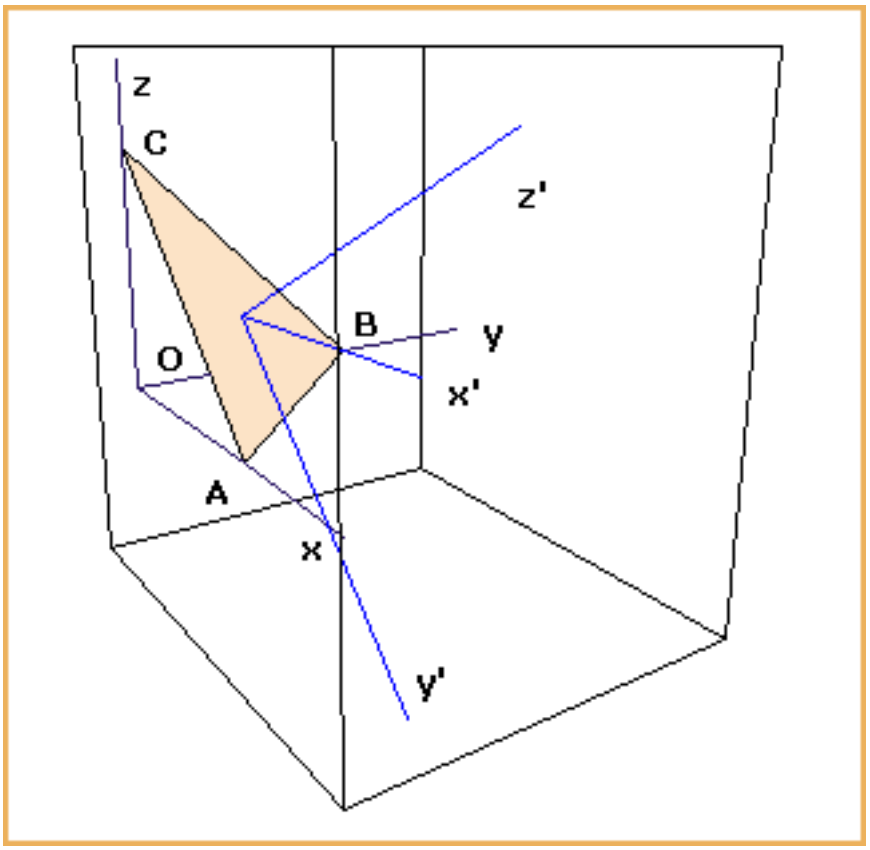
$$a'_3 = TB \wedge TC = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (3, 3, 3)$$

Su norma o módulo es $\|a'_3\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$

Finalmente se normaliza y se obtiene:

$$e'_3 = \frac{1}{\|a'_3\|} a'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Alternativamente, se puede obtener también la ecuación del plano *ABC*, que resulta ser *x+y+z=3*, con lo que un vector normal es *N=(1,1,1)*, a partir del cual puede obtenerse el que hemos elegido, por normalización. También se podrían haber usado otros vectores, como por ejemplo *AB, AC* u otros.



En cuanto a x' podemos escoger cualquier dirección sobre el plano. La elección que hagamos permitirá controlar la posición de la curva, en lo que se refiere a la dirección equivalente al eje x de $C2$. Vamos a elegir aquí la dirección TB (aunque hay otras posibilidades).

Calculemos $e'_1 = \frac{1}{\|\vec{TB}\|}\vec{TB}$. Para ello: TB=B-T=(0,3,0)-(1,1,1)=(-1,2,-1). Calculemos la norma:

$$\|TB\| = \|(-1, 2, -1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Por tanto,

$$e'_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

El segundo vector transformado debe ser ortogonal a los dos anteriores, lo cual se puede obtener calculando el producto vectorial, en cualquier orden. Por ejemplo:

$$e'_2 = e'_1 \wedge e'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

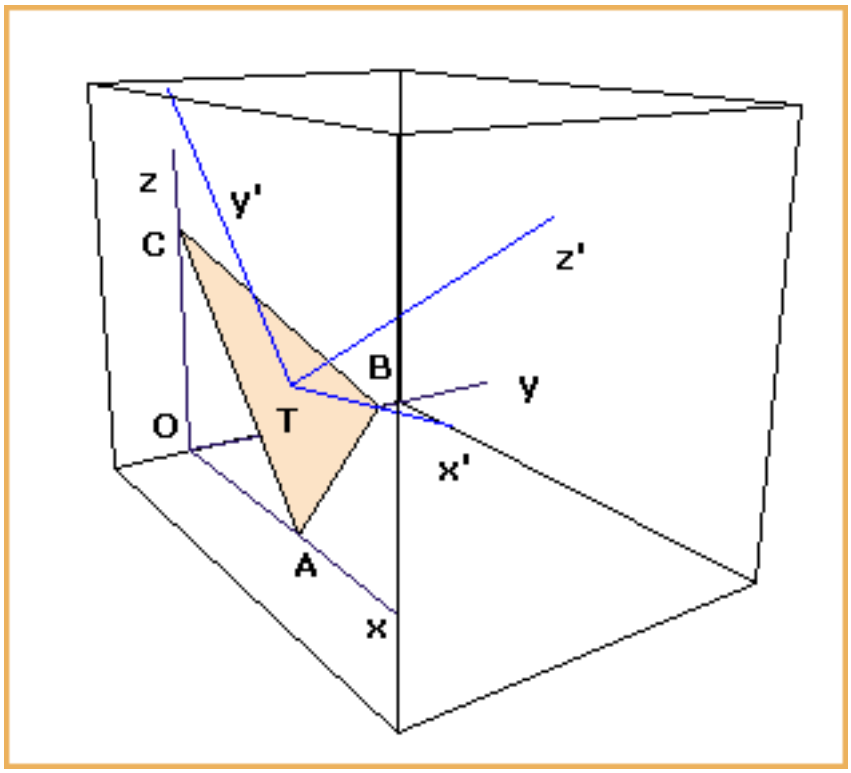
Se puede comprobar que ya resulta unitario, de módulo 1, por lo que no hace falta normalizar.
Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} at\cos t \\ at\sin t \\ 0 \end{pmatrix} + W = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} at\cos t \\ at\sin t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

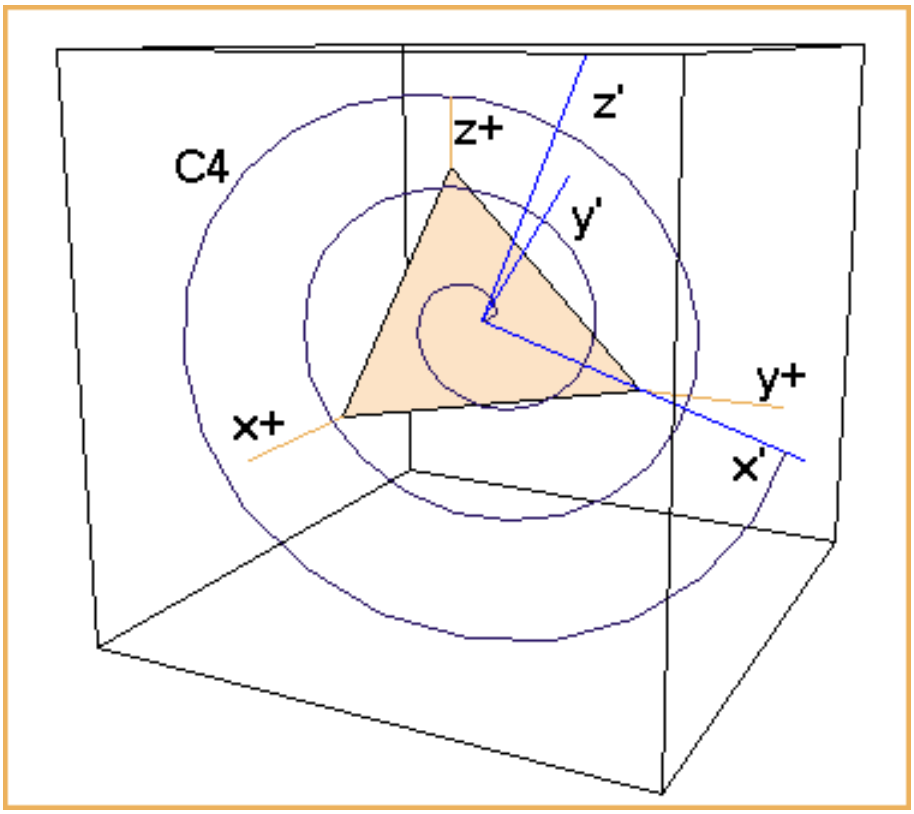
Efectuando los cálculos matriciales indicados anteriormente (y eliminando definitivamente la notación "prima") obtenemos la parametrización que se deriva de este desarrollo:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= -\frac{a}{\sqrt{6}}t\cos t + \frac{a}{\sqrt{2}}t\sin t + 1 \\ y(t) &= \frac{2a}{\sqrt{6}}t\cos t + 1 \\ z(t) &= \frac{a}{\sqrt{6}}t\cos t - \frac{a}{\sqrt{2}}t\sin t + 1 \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 6\pi$$

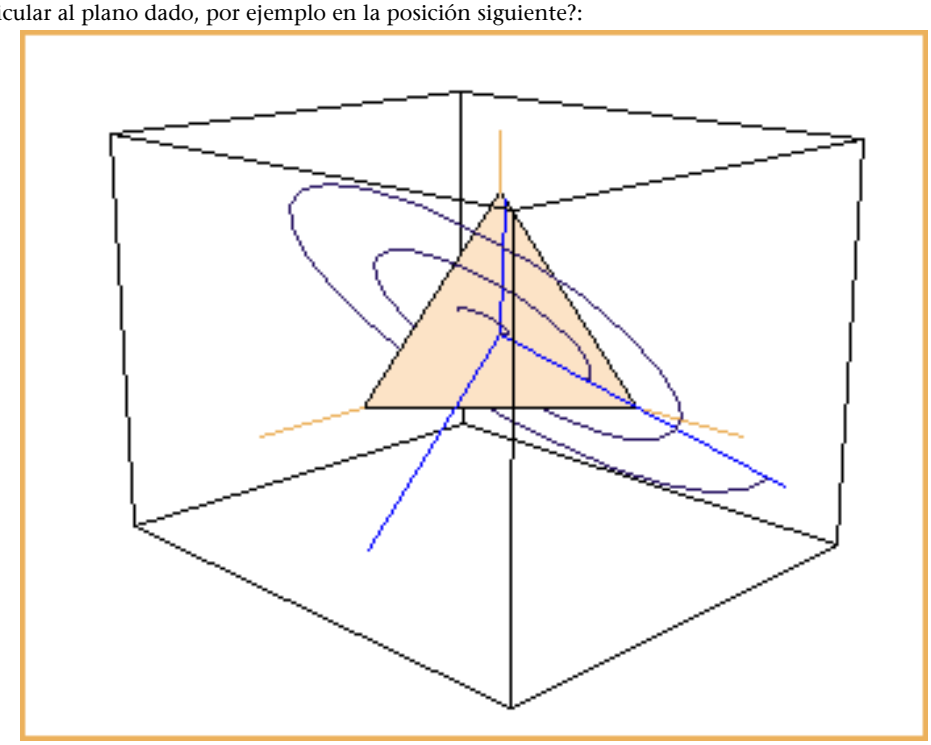
Obsérvese que una vez escogida la dirección orientada x', resulta fijada la dirección de y', pero no su orientación, para la cual tenemos aún otra posibilidad, lo cual se traduce en una forma diferente de generar la curva, con lo que, de hecho, se obtiene una curva nueva, como se muestra en los gráficos siguientes. Basta cambiar de signo el segundo vector transformado:



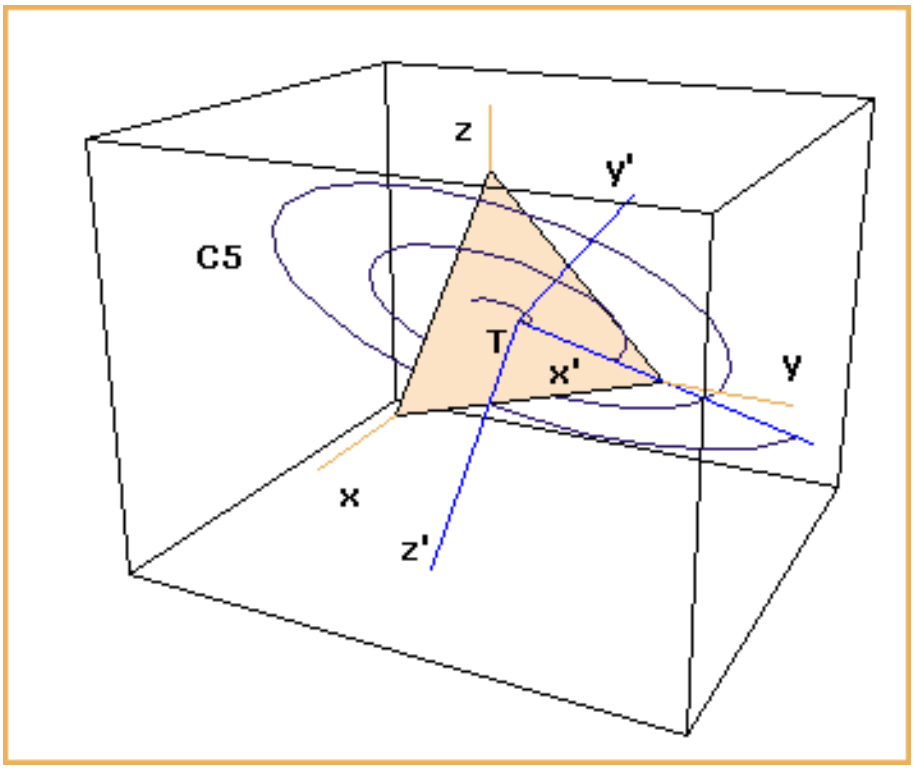
El efecto de esta variación puede verse en el esquema siguiente:

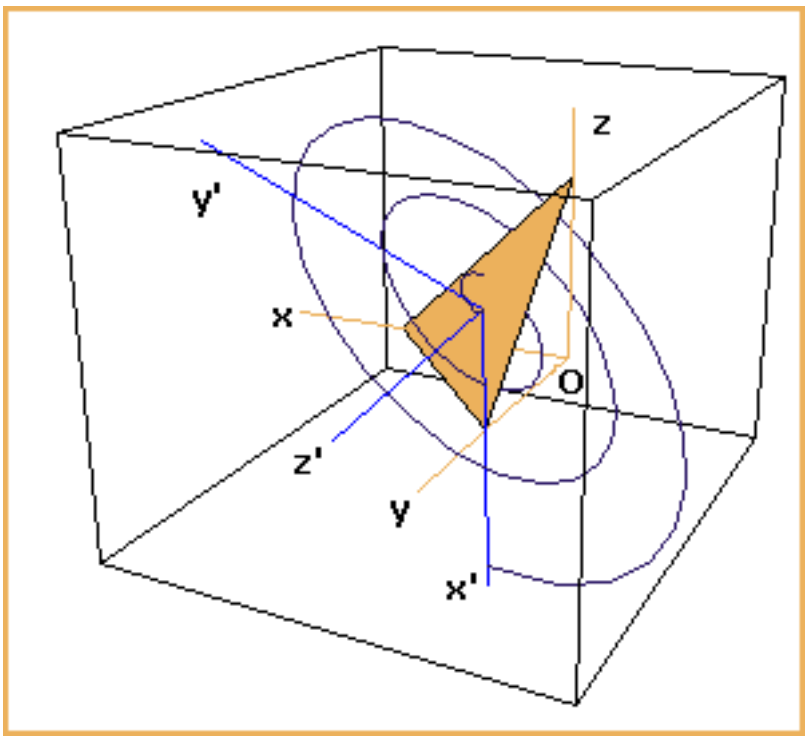


Puestos a considerar variaciones sobre el enunciado, ¿por qué no considerar otra variante para obtener una espiral de Arquímedes con vértice en T contenida en un plano perpendicular al plano dado, por ejemplo en la posición siguiente?:



Aquí simplemente hemos tenido que permutar en la matriz los vectores imagen (transformados) correspondientes a y', z':





- **Problema 18**

  Considérese la parábola *P0*, de ecuación $y = 2x^2 + 12$, y la parábola *P1*, de ecuación $x = -2y^2 + 13$. Considérense varias secuencias ordenadas de transformaciones geométricas (leyendo de derecha a izquierda):

  a. $T_{(13,0)} \circ R_O^{90} \circ T_{(0,-12)}$

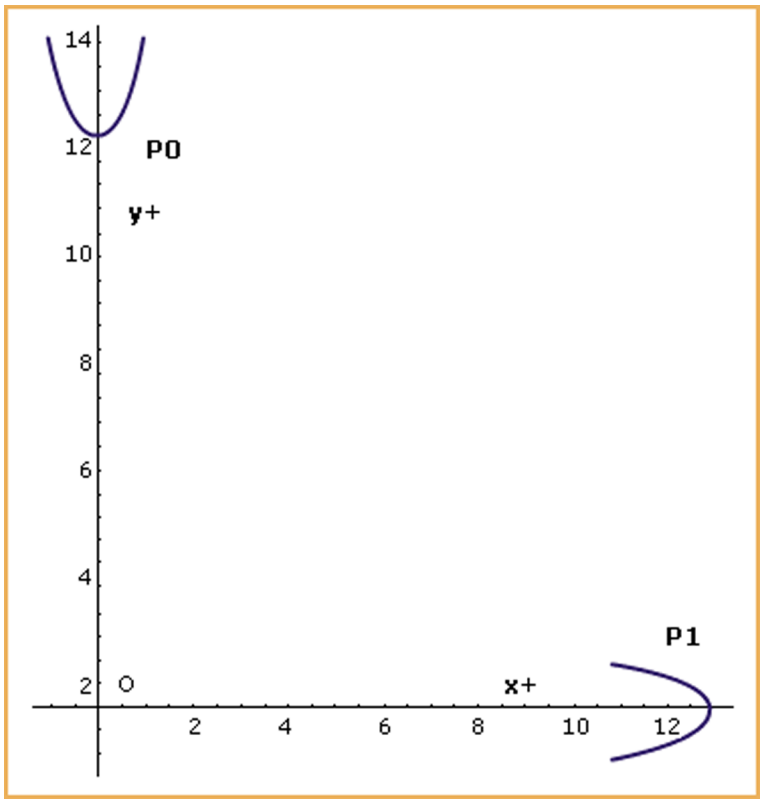
  b. $T_{(13,0)} \circ R_O^{90} \circ T_{(-12,0)}$

  c. $T_{(0,-12)} \circ R_O^{90} \circ T_{(13,0)}$

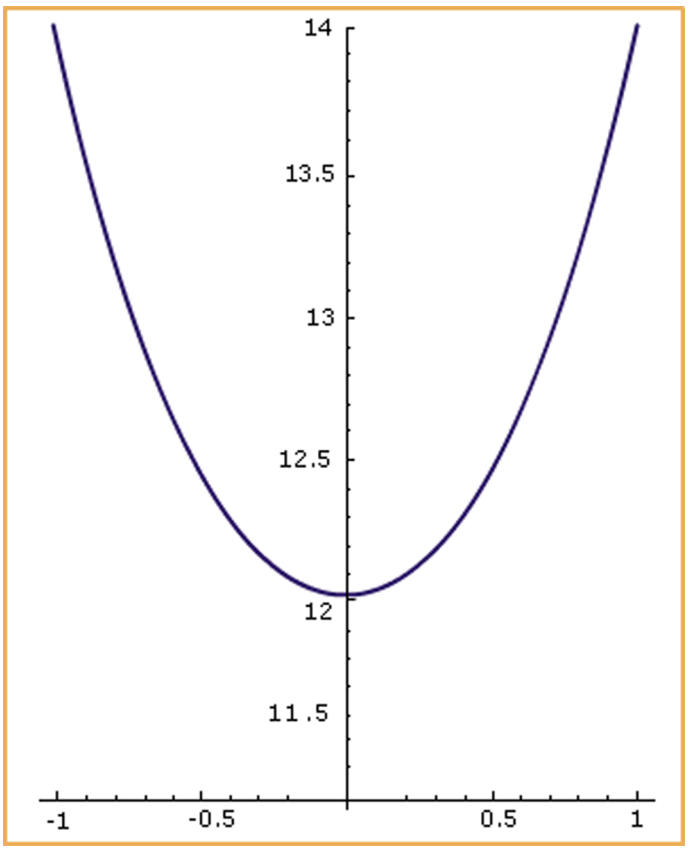
  d. $T_{(13,0)} \circ R_O^{-90} \circ T_{(0,-12)}$

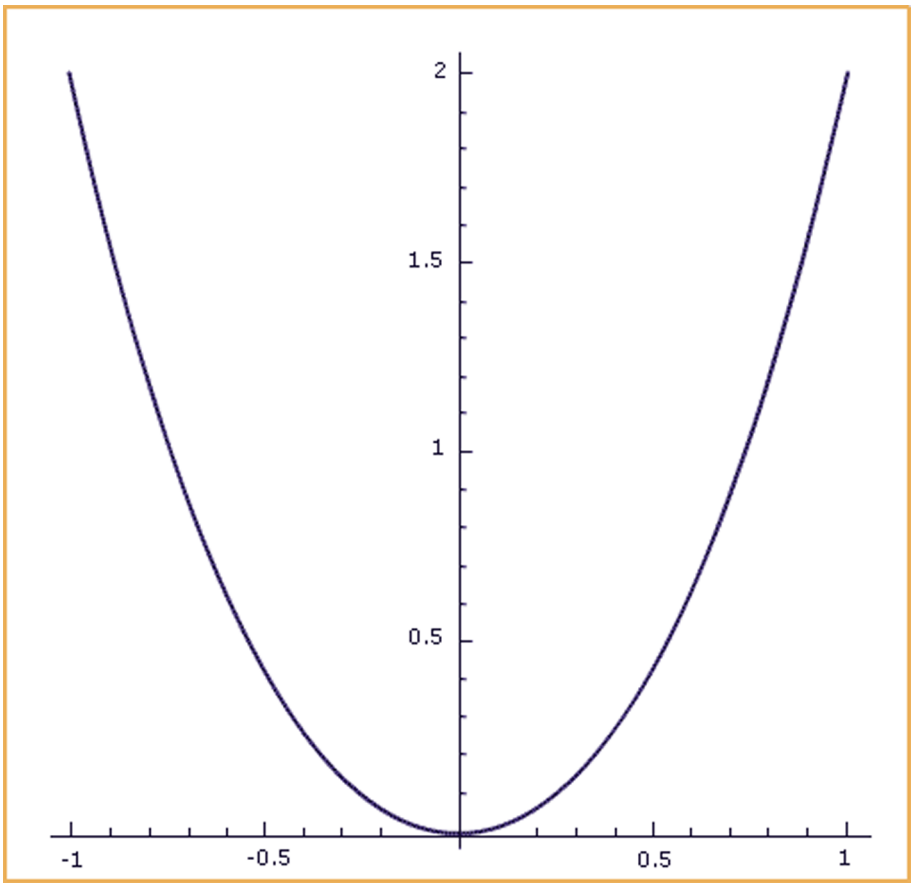
  Indicar cuál transforma la figura P0 en la figura *P1* (si hay alguna).

Resolución:
En primer lugar, en el gráfico siguiente se indican las figuras inicial y final:



La primera transformación geométrica será una traslación de *P0*, que convertirá el actual vértice de la parábola, el punto (0,12), en el punto (0,0), origen de coordenadas. La transformación es $T_{-(0,12)} = T_{(0,-12)}$. El resultado es la parábola del gráfico siguiente, parábola de ecuación $y = 2x^2$:





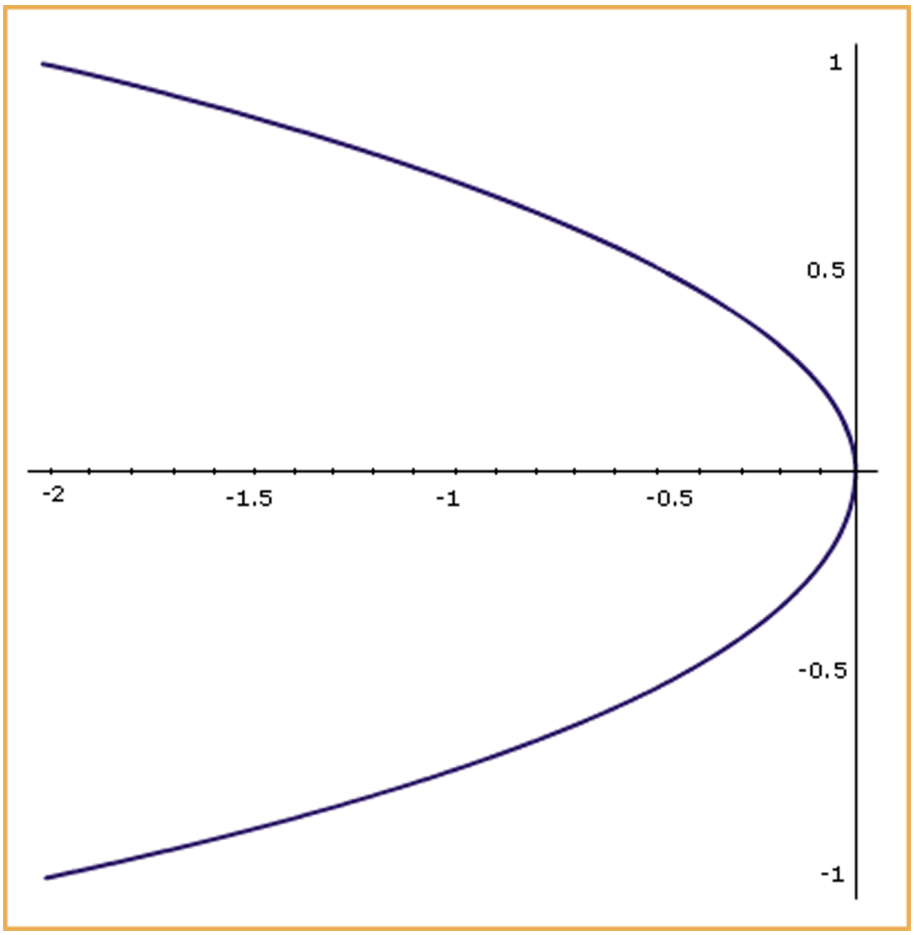
A continuación vamos a efectuar una rotación de 90 grados, antihoraria, respecto del origen de coordenadas,

$$R_O^{90}$$

. Esta transformación convierte la parábola anterior en la parábola

$$x = -2y^2$$

:



Forma parte del "saber general previo" que esta parábola tiene la ecuación anterior. No obstante, también es fácil deducirlo aplicando la transformación a la parametrización de: $y=2x^2$. En efecto, tomando s=x como parámetro una parametrización de $y=2x^2$ es:

$$\begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = 2s^2 \end{cases}$$

Apliquemos la rotación a los puntos de la parábola:

$$R_O^{90}\begin{pmatrix} s \\ 2s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 2s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 2s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s^2 \\ s \end{pmatrix}$$

Por tanto, la parametrización de la parábola resultante es:

$$\begin{cases} x(s) = -2s^2 \\ y(s) = s \end{cases}$$

Es fácil obtener la ecuación de la parábola resultante: $x = -2s^2 = -2y^2$. Finalmente, $z=-2y^2$.

Queda por realizar una traslación final, aplicada a la última parábola obtenida, la de vector (13,0), es decir:

$$T_{(13,0)}$$

.

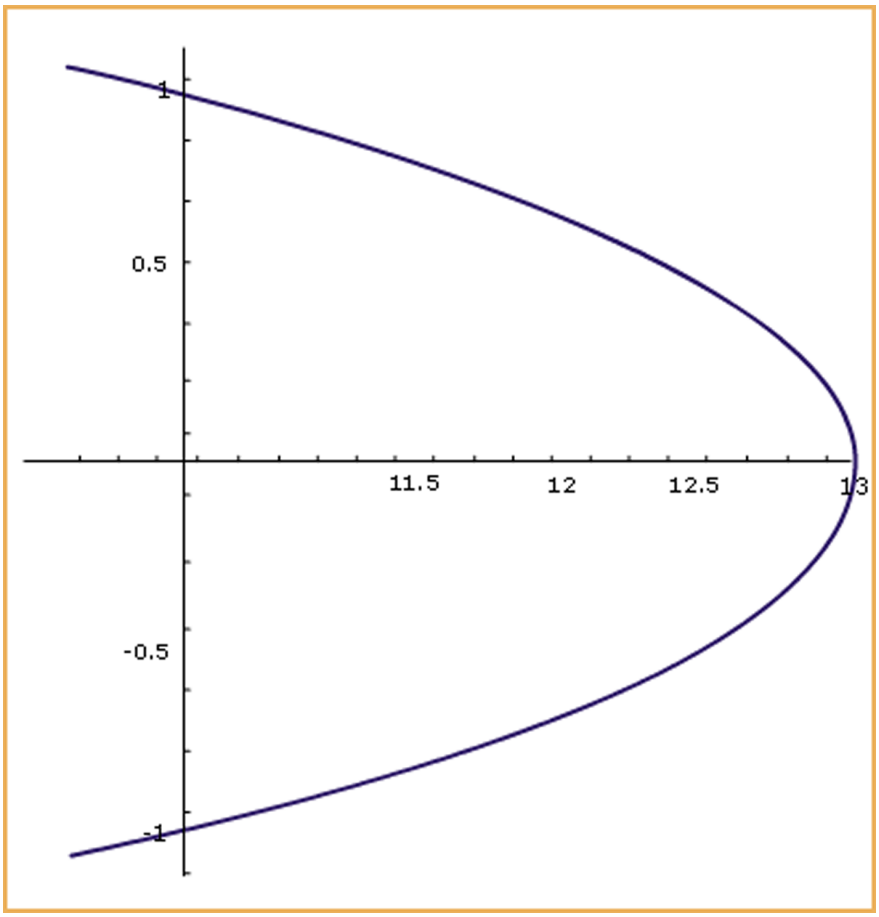
Por tanto,

$$T_{(13,0)} \circ R_O^{90} \circ T_{(0,-12)}$$

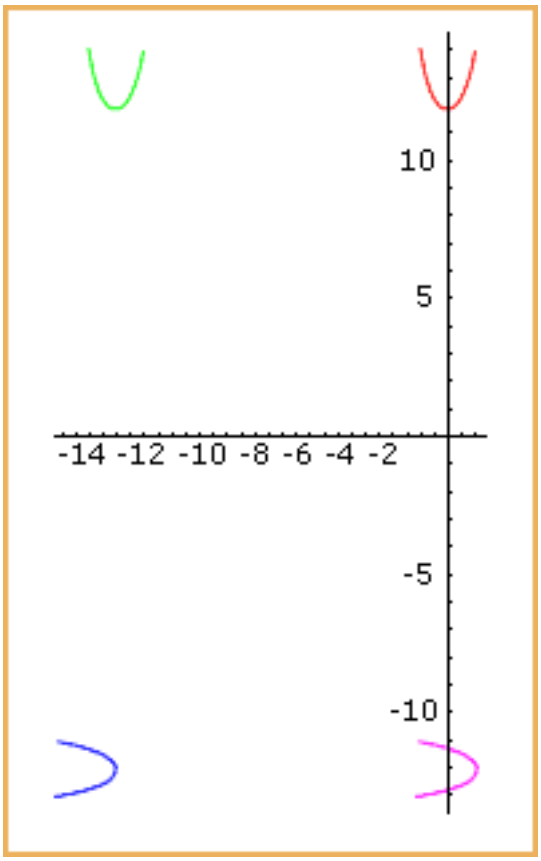
Esta composición debe leerse de derecha a izquierda. Tendremos:

$$P1 = T_{(13,0)} \circ R_O^{90} \circ T_{(0,-12)}(P0)$$

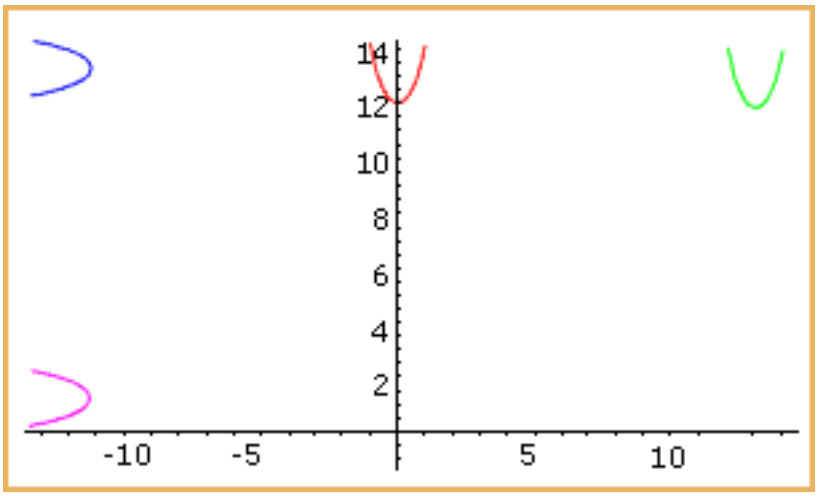
El resultado es, por tanto, (**a**).



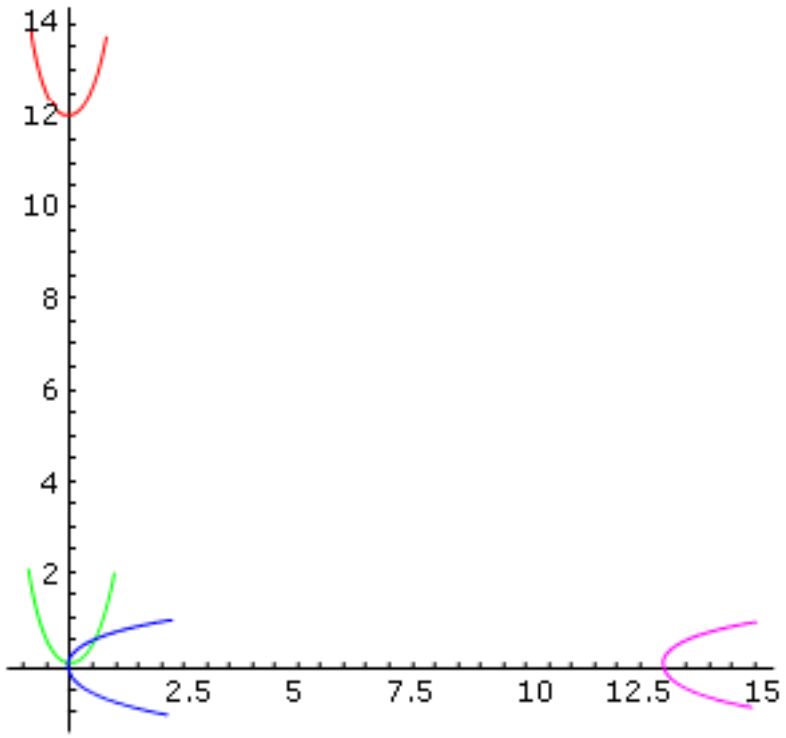
Ninguna de las demás posibilidades produce el resultado requerido. Se puede ver efectuando el análisis correspondiente. No obstante, si efectuamos las transformaciones, como se ve el los gráficos siguientes la afirmación resulta inmediata. Tenemos:
Rojo: figura inicial
Verde: resultado de la primera transformación
Azul: resultado de la segunda transformación
Magenta: resultado de la última transformación
Opción b:



Opción c:



Opción d:



- **Problema 19**

Considérese la hélice espiral de Arquímedes *E0* dada por la parametrización:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = at\cos t \\ y(t) = at\sin t \\ z(t) = bt \end{array}\right\}, 0 \le t \le 16\pi$$

Se efectúa una rotación de ángulo – 45 grados respecto del eje de coordenadas Ox, transformación que convierte la hélice *E0* en la hélice *E1*. Obtener una parametrización de la hélice espiral *E1*.

Respuesta:

Vamos a obtener en primer lugar las ecuaciones de la transformación. Posteriormente, las aplicaremos a los puntos de la curva, es decir, los de la forma

(x(t),y(t),z(t))=(atcost,atsint,bt).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-45) & -\sin(-45) \\ 0 & \sin(-45) & \cos(-45) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & \sin 45 \\ 0 & -\sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \end{pmatrix}$$

Aplicándola al vector *(x(t),y(t),z(t))=(atcost,atsint,bt)*, resultará una parametrización de la curva resultante de la rotación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at\cos t \\ \frac{\sqrt{2}}{2}at\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}bt \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}at\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}bt \end{pmatrix}$$

Finalmente, la parametrización será:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= at\cos t \\ y(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2}at\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}bt \\ z(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}at\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}bt \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 16\pi$$

- **Problema 20**
  Considérese la trayectoria de animación dada por la parametrización

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 2 + 3\cos t \\ y(t) &= 12t \\ z(t) &= -4 + 3\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 30\pi$$

  Describir completamente la trayectoria (tipo de curva, principio, final, sentido de giro y todos los detalles pertinentes).
  Respuesta:
  La curva es una hélice circular de radio *R=3*, de paso de rosca *b=12*, de eje la recta que pasa por el punto *P=(2,0,-4)* y es paralela al eje de coordenadas *Oy*. La hélice es de 15 vueltas. El inicio de la curva es el punto *I=(x(0),y(0),z(0))=(2+3cos0,12.0,-4+3sin0)=(5,0,-4)*, correspondiente al valor inicial del parámetro, *t=0*. El final corresponde al valor final del parámetro t, es decir,

$$F(x(30\pi), y(30\pi), z(30\pi)) = (2 + 3\cos(30\pi), 12.30\pi, -4 + 3\sin(30\pi))$$

  Si consideramos la hélice circular *(3cost, 12t, 3sint)*, de eje el eje de coordenadas *Oy*, observamos que para el punto $t = \frac{\pi}{2}$ por el que pasa es $(0, 6\pi, 3)$, que se proyectó perpendicularmente sobre el plano *xz* en el punto *(0,0,3)*, punto del eje *z+*. Ello significa que el sentido de rotación o de circulación sobre la hélice es horario visto desde *y+*.
- **Problema 21**
  Supongamos que queremos programar una animación de trayectoria circular en un plano paralelo al plano vertical yz. Parametrizar la circunferencia de radio *R*, centro en *C=(a,b,c)* situada sobre el plano *x=a*.
  Respuesta:
  Tomando como parámetro el ángulo polar resulta:

$$\begin{cases} x(t) = a \\ y(t) = b + R\cos t \\ z(t) = c + R\sin t \end{cases}$$

  con 0≤ t≤ 2π.
- **Problema 22**
  Razonar brevemente si puede existir una circunferencia de radio 20, de centro *(2,4,9)*, situada en el plano de coordenadas xz.
  Respuesta:
  No, puesto que los puntos del plano xz son de la forma *(a,0,b)*. Si la circunferencia estuviera contenida en este plano, también lo estaría su centro (2,4,9), que no es de la forma anterior.
- **Problema 23**
  Supongamos que deseamos programar una animación 2D en la que se recorra una circunferencia en sentido horario. Parametrizar la circunferencia de centro el origen de coordenadas, radio R, para que se recorra en sentido horario cuando el parámetro descriptivo t varíe desde *t=0* hasta *t=2π*.
  Respuesta:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(2\pi - t) \\ y(t) = R\sin(2\pi - t) \end{cases}$$

Ejercicios 2

- **Problema 1**
  Identificar la superficie que corresponde a la parametrización siguiente expresada en el sistema de coordenadas habitual:

$$\left.\begin{aligned} x(t,z) &= 2\ \cos t \\ y(t,z) &= 2\ \sin t \\ z(t,z) &= z \end{aligned}\right\}, 0 \le z \le H, 0 \le t \le \pi$$

Respuesta:
Es un semicilindro de eje *Oz*, de radio 2, altura *H*, situado en el semiespacio de las *z* positivas, con la base en *z=0*. El semicilindro corresponde a la variación del ángulo polar habitual *t* entre 0 y *p* (correspodiente al semiespacio de las y positivas).

- **Problema 2**
Considerar en el espacio tridimensional el cilindro de radio *R*, de eje el eje de coordenadas *Ox*, con una base en el plano *x=0*, contenido en el semiespacio de las *x* positivas, y de altura *H*. Escribir una parametrización del cilindro.
Respuesta:

$$\left.\begin{aligned} x(t,s) &= s \\ y(t,s) &= R\cos t \\ z(t,s) &= R\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le s \le H; 0 \le t \le 2\pi$$

- **Problema 3**
Considerar en el espacio tridimensional la esfera de radio *R=6* y centro *C=(3,4,5)*. Considerar el paralelo correspondiente a la latitud de 45 grados. Dar una parametrización de dicho paralelo.
Respuesta:
La parametrización de la esfera es:

$$\begin{cases} x(t,s) = 3 + 6\cos t\cos s \\ y(t,s) = 4 + 6\cos t\sin s \\ z(t,s) = 5 + 6\sin t \end{cases}$$

Ahora bastará sustituir *t=45* (en radianes) para obtener la parametrización correspondiente al paralelo:

$$\begin{cases} x(s) = 3 + 6\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos s \\ y(s) = 4 + 6\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin s \\ z(s) = 5 + 6\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

con $0 \le s \le 2\pi$.

- **Problema 4**
Sea *C* el cilindro del espacio tridimensional de radio 3, de altura 2 y de eje que pasa por el punto *Q=(6,5,7)* y es perpendicular al plano *y=0*. Supongamos que una base está situada sobre el plano *y=1* y que el cilindro está contenido en el semiespacio de las y positivas. Escribir una parametrización de *C*.
Respuesta:

$$\left.\begin{aligned} x(t,s) &= 6 + 3\cos t \\ y(t,s) &= s \\ z(t,s) &= 7 + 3\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi; 1 \le s \le 3$$

- **Problema 5**
Se considera el cilindro *C* del espacio tridimensional de radio 4, de altura 6, de eje el eje de coordenadas *z*, con una base en el plano *z=0* y que está contenido en el semiespacio de las *z* positivas. Se considera la curva *K* resultado de intersecar el cilindro *C* con el plano *z=3*, perpendicular al eje del cilindro. Dar una parametrización de la curva *K*.
Respuesta:
La curva *K* es una circunferencia. Está situada en el plano *z=3*, de radio 4 y con centro en el eje de coordenadas *Oz*, es decir, en *(0,0,3)*.

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 4\cos t \\ y(t) &= 4\sin t \\ z(t) &= 3 \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

- **Problema 6**

Escribir una parametrización para el cilindro C1 resultado de aplicar al cilindro C0 la secuencia ordenada de transformaciones geométricas:
1. Traslación de vector *w=(1,2,3)*
2. Rotación positiva de ángulo 45 grados respecto del eje *Ox*.
El cilindro *C0* es el cilindro vertical de radio *R=7*, de eje que coincide con el eje de coordenadas *Oz*, con la base sobre el plano *z=0*, de altura *h=6* y contenido en el semiespacio de las $z \geq 0$.
Respuesta:
En primer lugar, vamos a obtener la expresión de la transformación. Posteriormente la aplicaremos a los puntos del cilindro C0.
Traslación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T_w \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \\ z+3 \end{pmatrix}$$

Rotación:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = R_x^{45} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & -\sin 45 \\ 0 & \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y'\cos 45 - z'\sin 45 \\ y'\sin 45 + z'\cos 45 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x' \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} - z'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} + z'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Concatenando ambas transformaciones se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} - z'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} + z'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora debemos escribir una parametrización para el cilindro C0:

$$\begin{cases} x(t,s) = 7\cos t \\ y(t,s) = 7\sin 7 \ ; \ 0 \leq t \leq 2\pi; 0 \leq s \leq 6 \\ z(t,s) = s \end{cases}$$

Finalmente, el cilindro C1 se obtendrá aplicando la transformación anteriormente obtenida a los puntos de la forma anterior, los del cilindro C0:

$$\begin{pmatrix} x''(t,s) \\ y''(t,s) \\ z''(t,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cos t + 1 \\ (7\sin t + 2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (s+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (7\sin t + 2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (s+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

La parametrización buscada es, finalmente:

$$\begin{cases} x''(t,s) = 7\cos t + 1 \\ y''(t,s) = (7\sin t + 2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (s+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ 0 \leq t \leq 2\pi; 0 \leq s \leq 6 \\ z''(t,s) = (7\sin t + 2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (s+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

- **Problema 7**

Parametrizar la trayectoria de una esfera que se mueve de tal manera que su centro recorre el meridiano correspondiente a la longitud de 45 grados de la esfera de radio *R=5* y centro *C=(0,0,0)*. El inicio del recorrido debe ser el polo norte (punto *N=(0,0,5)*). El sentido de recorrido es libre, dentro de los dos posibles.
Respuesta:
Vamos a particularizar la parametrización de los puntos de la esfera de radio 5 y de centro el origen usando como parámetros la longitud *t* y la colatitud *u* (la colatitud del punto *P* de la esfera es el ángulo *NOP)*. Se toma como origen de colatitudes el semieje *z+;* la colatitud varía de 0 a 2π.
La curva meridiano se obtiene a partir de la parametrización de la esfera (variante con colatitud), haciendo *t* constantemente igual a 45 grados.
La parametrización de la esfera es:

$$\left.\begin{aligned} x(t,u) &= R\sin u\cos t \\ y(t,u) &= R\sin u\sin t \\ z(t,u) &= R\cos u \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi; 0 \le u \le \pi$$

Concretando, resulta una posible parametrización del meridiano:

$$\left.\begin{aligned} x(u) &= R\sin u\cos 45 \\ y(u) &= R\sin u\sin 45 \\ z(u) &= R\cos u \end{aligned}\right\}, 0 \le u \le 2\pi$$

Finalmente, sustituyendo por los valores correspondientes:

$$\left.\begin{aligned} x(u) &= 5\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u \\ y(u) &= 5\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u \\ z(u) &= 5\cos u \end{aligned}\right\}, 0 \le u \le 2\pi$$

- **Problema 8**
Escribir una parametrización para el cilindro *C1* resultado de aplicar al cilindro *C0* la secuencia ordenada de transformaciones geométricas:
Rotación positiva de ángulo α respecto del eje *Ox*.
Rotación positiva de ángulo γ respecto del eje *Oz*.
Traslación de vector *w=(a,b,c)*.
El cilindro *C0* es el cilindro vertical de radio *R*, de eje que coincide con el eje de coordenadas *Oz*, con la base sobre el plano *z=z0*, de altura *h* y contenido en el semiespacio de las z≥0.
Resolución:
Escribamos, en primer lugar, la composición de las transformaciones geométricas descritas, en el orden descrito (leyendo de derecha a izquierda): $T_w \circ R_z^{\gamma} \circ R_x^{\alpha}$.
Calculemos el producto de las matrices correspondientes a $R_z^{\gamma} \circ R_x^{\alpha}$:

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma\cos\gamma & \sin\gamma\sin\alpha \\ \sin\gamma & \cos\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Apliquemos la transformación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (T_w \circ R_z^{\gamma} \circ R_x^{\alpha})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma\cos\gamma & \sin\gamma\sin\alpha \\ \sin\gamma & \cos\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Efectuando las operaciones matriciales resulta:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma\cos\gamma & \sin\gamma\sin\alpha \\ \sin\gamma & \cos\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\gamma - y\sin\gamma\cos\alpha + z\sin\gamma\sin\alpha + a \\ x\sin\gamma + y\cos\gamma\cos\alpha - z\cos\gamma\sin\alpha + b \\ y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{pmatrix}$$

En coordenadas sería:

$$\begin{cases} x' = x\cos\gamma - y\sin\gamma\cos\alpha + z\sin\gamma\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\gamma + y\cos\gamma\cos\alpha - z\cos\gamma\sin\alpha + b \\ z' = y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{cases}$$

El cilindro *C0* puede parametrizarse por:

$$\left.\begin{aligned} x(t,s) &= R\cos t \\ y(t,s) &= R\sin t \\ z(t,s) &= s \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi,\ z_0 \le s \le z_0 + h$$

Finalmente, sustituiremos las expresiones en la parametrización anterior en las ecuaciones de la composición de transformaciones

$$\begin{cases} x'(t,s) = R\cos t\cos\gamma - R\sin t\sin\gamma\cos\alpha + s\sin\gamma\sin\alpha + a \\ y'(t,s) = R\cos t\sin\gamma + R\sin t\cos\gamma\cos\alpha - s\cos\gamma\sin\alpha + b, \\ z'(t,s) = R\sin t\sin(\alpha + s\cos\alpha) \end{cases}$$

con la variación de los parámetros anteriormente indicada.

- **Problema 9**

  Sea *C0* el cilindro de radio *R=5*, de eje el eje de coordenadas *Oz*, de altura *h=10*, con la base inferior situada sobre el plano de coordenadas *z=0*. Se aplica a *C0* la secuencia de transformaciones siguientes, en el orden que se indica:
  Primera transformación: cambio de escala no uniforme respecto del origen de coordenadas, que triplica la dimensión según el eje *y*, duplica la dimensión según el eje *x*, y reduce a la mitad la dimensión según el eje *z*.
  Segunda transformación: rotación de 60 grados respecto del eje Oy.
  Tercera transformación: traslación de vector w=(1,1,0).
  Sea *C1* la figura resultante de aplicar a *C0* las transformaciones anteriores. Obtener una parametrización de *C1*.
  Respuesta:
  Primera transformación:
  Vamos a obtener las ecuaciones de la primera transformación. Los factores de cambio de escala son:
  2, en la dirección del eje de coordenadas Ox,
  3, en la dirección del eje de coordenadas Oy,
  0.5, en la dirección del eje de coordenadas Oz.
  La matriz de la transformación es:

$$E_O^{2,3,0.5} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

  Aplicando la matriz:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \\ z' = 0.5z \end{cases}$$

  Segunda transformación:
  La matriz de la rotación es:

$$R_y^{60} = \begin{pmatrix} \cos 60 & 0 & \sin 60 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 60 & 0 & \cos 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Aplicamos la matriz a un vector:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = R_y^{60} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}z' \\ y' \\ -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}z' \end{pmatrix}$$

Tercera transformación:

$$\begin{cases} x''' = x'' + 1 \\ y''' = y'' + 1 \\ z''' = z'' \end{cases}$$

Ahora escribiremos el resultado de la concatenación en función de las coordenadas iniciales *(x,y,z)*:

$$\begin{cases} x''' = x'' + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}z' + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}2x + \frac{1}{2}0.5z + 1 = \sqrt{3}x + \frac{1}{4}z + 1 \\ y''' = y'' + 1 = y' + 1 = 3y + 1 \\ z''' = z'' = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}z' = \frac{1}{2}2x + \frac{\sqrt{3}}{2}0.5z = -x + \frac{\sqrt{3}}{4}z \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{cases} x''' = \sqrt{3}x + \frac{1}{4}z + 1 \\ y''' = 3y + 1 \\ z''' = -x + \frac{\sqrt{3}}{4}z \end{cases}$$

Formulemos una parametrización del cilindro *C0*:

$$\begin{cases} x(t,s) = 5\cos t \\ y(t,s) = 5\sin t \ , \ 0 \le t \le 2\pi; 0 \le s \le 10 \\ z(t,s) = s \end{cases}$$

Ahora hay que aplicar las ecuaciones anteriores a los puntos del cilindro, es decir, los que son de la forma dada por la anterior parametrización:

$$\begin{cases} x(t,s) = \sqrt{3}.5\cos t + \frac{1}{4}s + 1 \\ y(t,s) = 3.5\sin t + 1 \qquad ; \ 0 \le t \le 2\pi; 0 \le s \le 10 \\ z(t,s) = -5\cos t + \frac{\sqrt{3}}{4}s \end{cases}$$

Ésta es una posible parametrización del cilindro resultante *C1*.

- **Problema 10**

  Considerar el cilindro *C0* de radio *R*, de eje el eje de coordenadas *Oz*, de altura *H*, situado en el semiespacio z≥ 0, con la base en *z=0*. Se construye el cilindro *C1* como resultado de aplicar a C0 la rotación positiva de 45 grados respecto del eje *Oy*. Obtener una parametrización de *C1*.

  Respuesta:

  En primer lugar, obsérvese que 45 grados son a=π/4 radianes y $\cos a = \sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Una parametrización de C0 es

$$\left.\begin{aligned} x(t,s) &= R\cos t \\ y(t,s) &= R\sin t \\ z(t,s) &= s \end{aligned}\right\} 0 \le s \le H,\ 0 \le t \le 2\pi$$

La pedida se obtendrá aplicando la matriz de rotación correspondiente a los puntos de la forma anterior:

$$\begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix} = R^{Y}{}_{a}\begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & 0 & \sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ s \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{cases} x(t,s) = R\cos a\cos t + \sin a \\ y(t,s) = \sin t \\ z(t,s) = -R\sin a\cos t + s\cos a \end{cases}$$

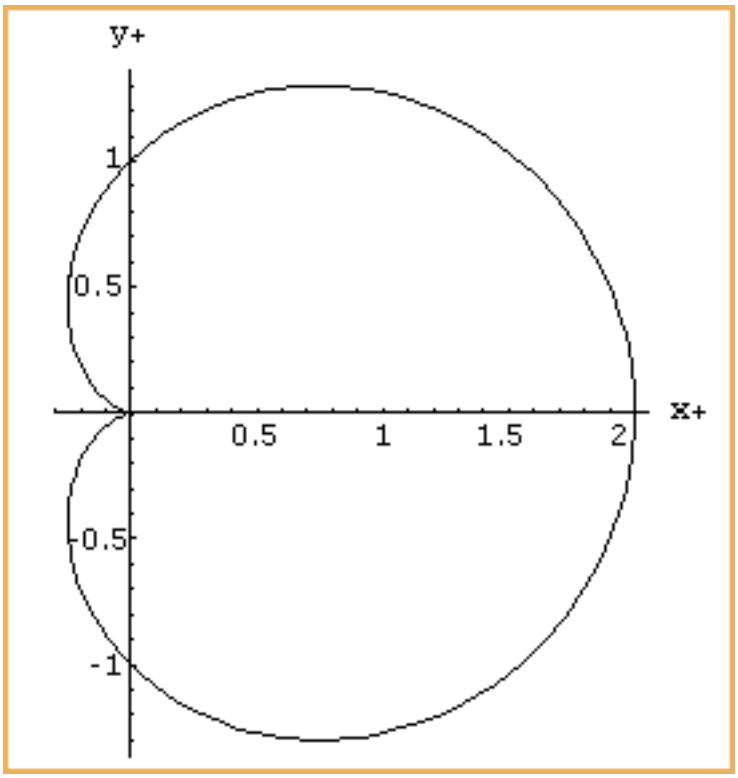
- **Problema 11**
  Supongamos que tenemos que programar en MaxScript o bien mediante "expresiones paramétricas" en 3D Studio Max interactivo una animación consistente en desplazar una esfera pequeña a lo largo de un meridiano de una esfera de radio mayor. Considérese la esfera de radio *R* de centro el origen de coordenadas. Parametrizar el meridiano de esta esfera correspondiente a la longitud de 30 grados.
  Respuesta:
  En primer lugar, 30 grados es igual a $a=\pi/6$ radianes. Usemos la parametrización habitual de la esfera en coordenadas esféricas, en términos de la longitud θ y la latitud φ, tomando $\theta=\pi/6$. Escogemos el parámetro j, variando en $[0,2\pi]$:

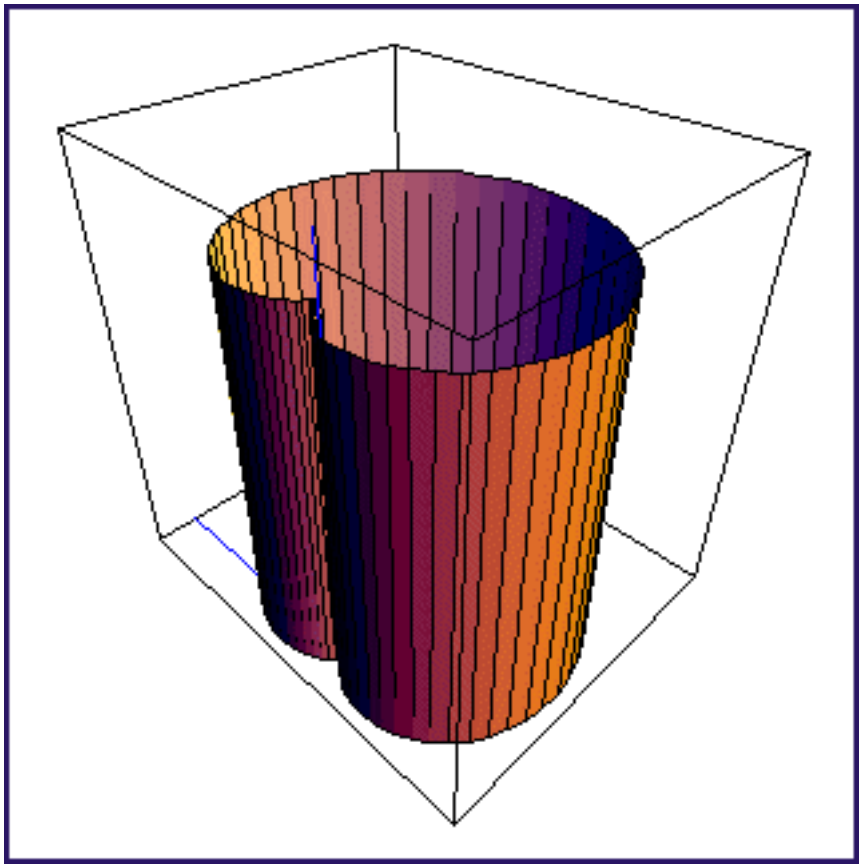
$$\begin{cases} x(\theta) = R\cos\varphi\cos\dfrac{\pi}{6} \\ y(\theta) = R\cos\varphi\cos\dfrac{\pi}{6} \\ z(\theta) = R\sin\varphi \end{cases}$$

- **Problema 12**
  ¿Se puede considerar la esfera como superficie de revolución? Razonar la respuesta.
  Respuesta:
  Sí, producida por la rotación de 360 grados alrededor del eje *z*. De la semicircunferencia del plano *xz*, de centro el origen y radio *R*, contenida en el semiespacio $x \ge 0$.
- **Problema 13**
  Indicar cómo se puede obtener el hemisferio superior de la esfera de centro *O* y de radio *R* si la generamos como superficie de revolución.
  Respuesta:
  Se puede obtener por la rotación respecto del eje *z*, de 360 grados, aplicada a un cuarto de la circunferencia de centro el origen de coordenadas *O*, de radio *R*, contenida en el cuadrante de coordenadas *x,z* positivas del plano vertical *xz*.
- **Problema 14**
  Supongamos que tenemos que programar una animación consistente en desplazar una esfera pequeña a lo largo de un paralelo de una esfera de radio mayor. Considérese la esfera de radio *R* de centro el punto (1,2,3). Parametrizar el paralelo de esta esfera correspondiente a la latitud de 30 grados (norte, medida desde el ecuador).
  Respuesta:
  Utilizaremos la parametrización de la esfera en coordenadas esféricas (longitud y latitud) y particularizaremos la latitud al valor constante de 30 grados (igual a $a=\pi/6$ radianes). Haremos que varíe entonces la longitud θ entre 0 y 2π.

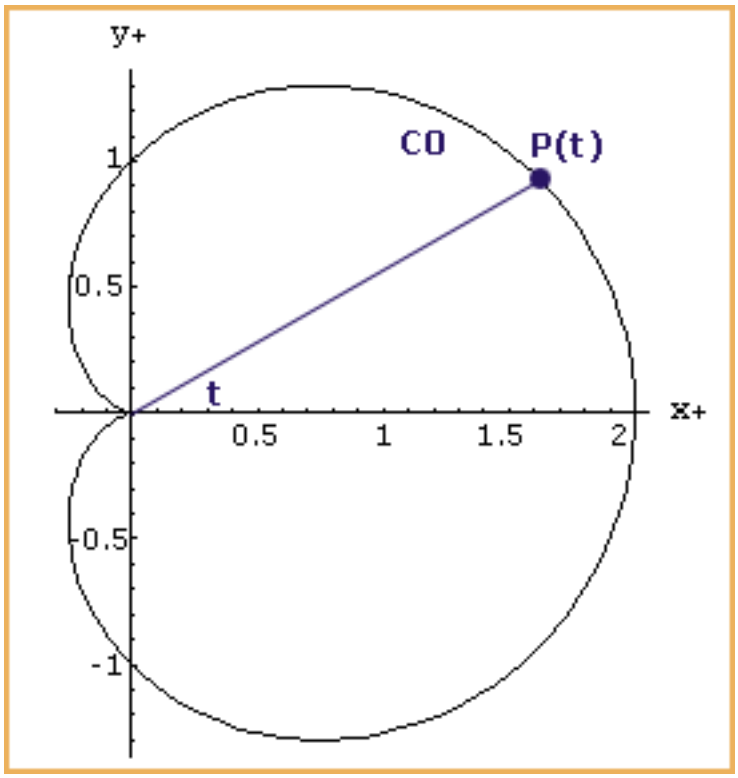
$$\begin{cases} x(\theta) = 1 + R\cos a\cos\theta \\ y(\theta) = 2 + R\cos a\sin\theta \\ z(\theta) = 3 + R\sin a \end{cases}$$

  Finalmente hay que sustituir $\cos a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin a = \dfrac{1}{2}$.
- **Problema 15**
  Obtener una parametrización del cilindro generalizado de eje *Oz* que tiene por directriz (o base o sección) la cardioide de ecuación en coordenadas polares *r=a(1+cost)*, del plano *xy*. Véanse las imágenes siguientes.





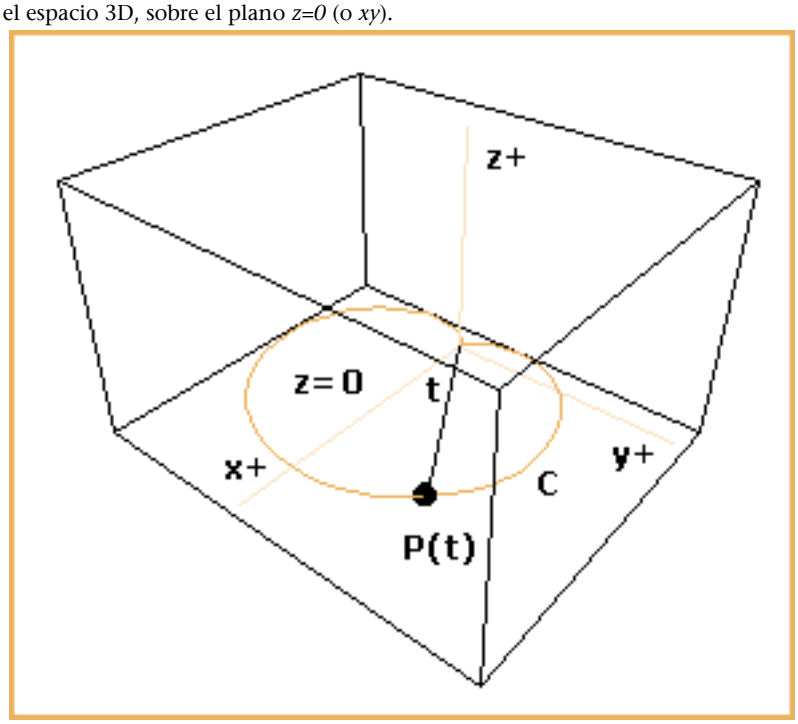
Respuesta:
Consideremos la cardioide *C0* del plano *xy*.



La curva *C0* se parametriza a partir de la ecuación polar, en términos del ángulo polar *t*, mediante trigonometría elemental. El punto *P(t)=(x(t),y(t))* se expresa:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a(1+\cos t)\cos t \\ y(t) &= a(1+\cos t)\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

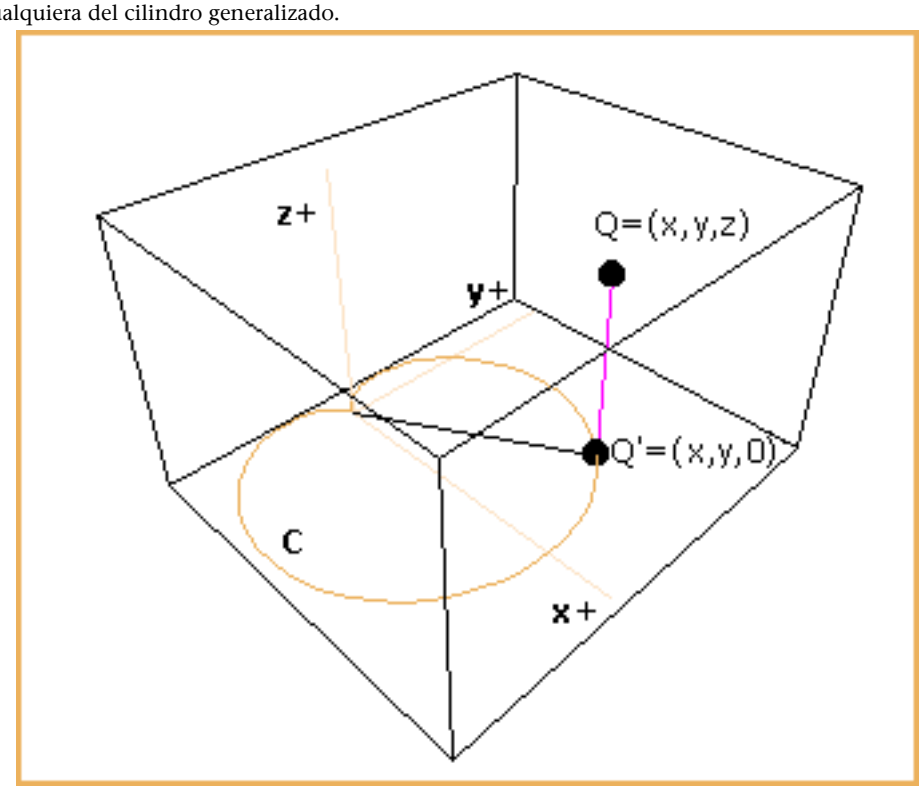
Consideremos la curva *C*, copia de *C0*, en la misma posición y dimensiones, pero inmersa en el espacio 3D, sobre el plano *z=0* (o *xy*).



Podemos formular una parametrización de *C* derivada de la parametrización de *C0*, simplemente añadiendo coordenada *z* igual a 0, y siendo *t* el ángulo polar (desde una interpretación geométrica, pues el parámetro basta que varíe en un intervalo):

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a(1+\cos t)\cos t \\ y(t) &= a(1+\cos t)\sin t \\ z(t) &= 0 \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$$

El cilindro generalizado que hay que parametrizar se genera mediante las infinitas rectas que, siendo perpendiculares al plano *xy*, pasan por la curva *C*. Sea *Q=(x,y,z)* un punto cualquiera del cilindro generalizado.

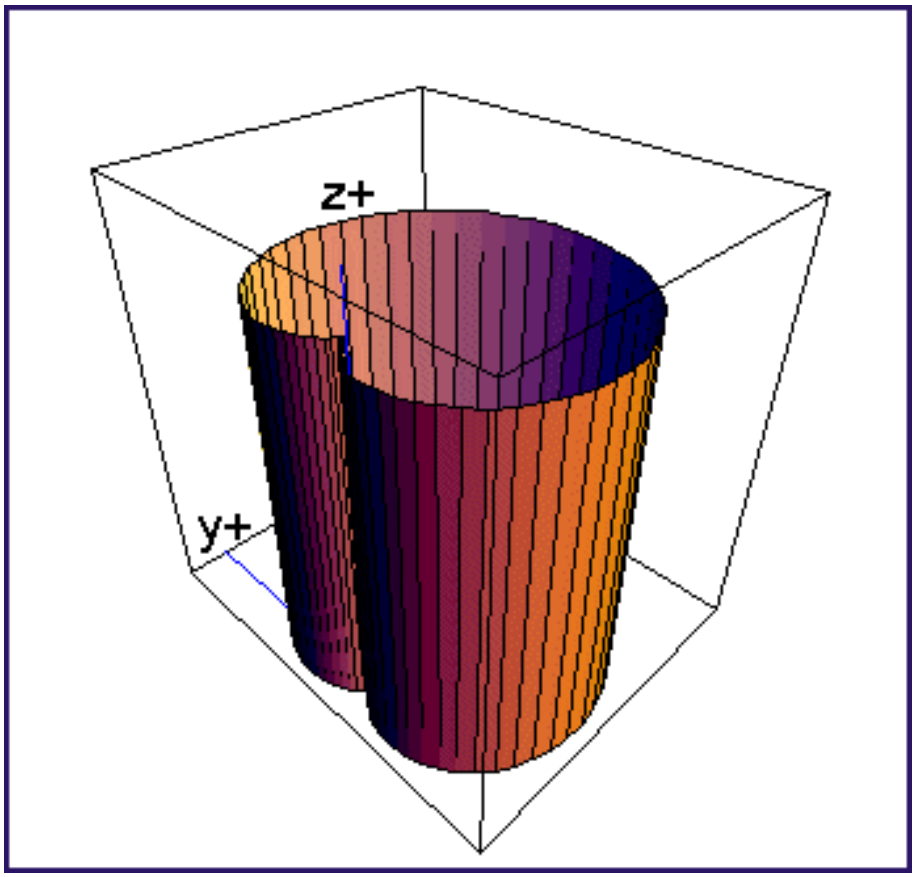


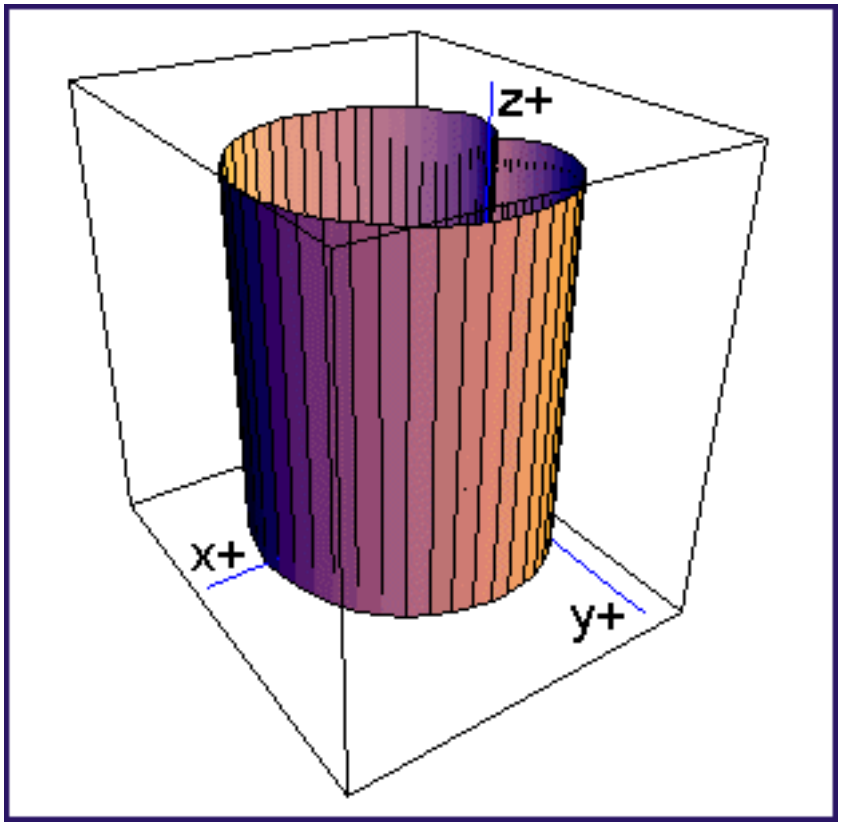
Se proyecta ortogonalmente sobre el plano *xy*, sobre un punto *Q'* de la cardioide *y*, por tanto, se expresará en función de *t* de acuerdo con la parametrización de la cardiode base, y será:

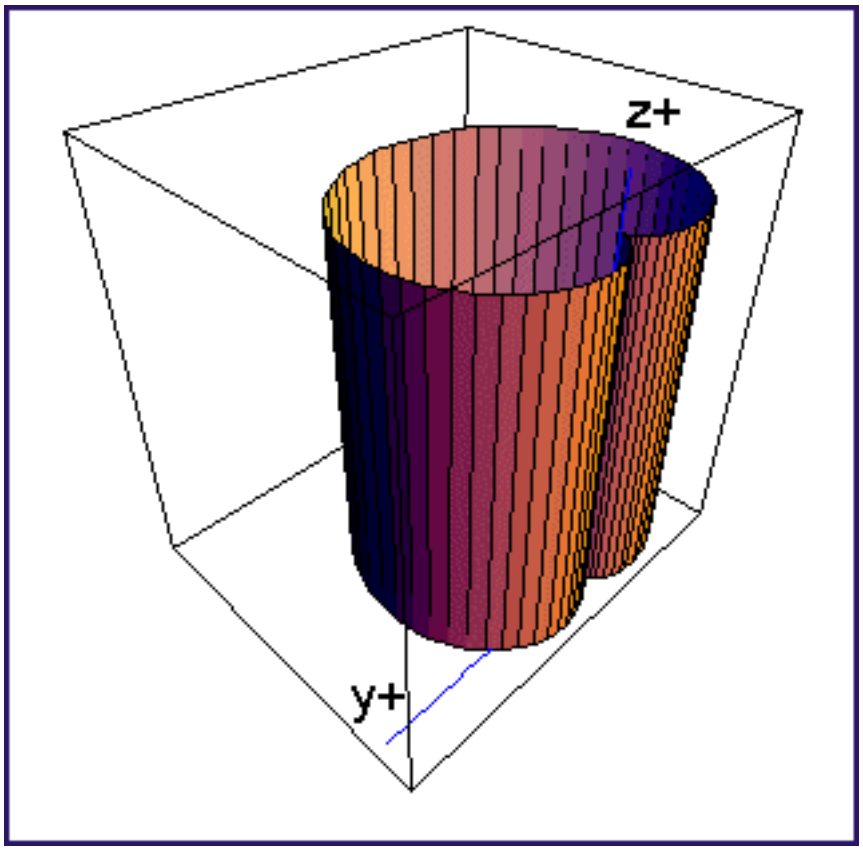
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a(1+\cos t)\cos t \\ y(t) &= a(1+\cos t)\sin t \end{aligned}\right\}$$

En cuanto a la coordenada *z*, "altura respecto del plano horizontal", varía libremente haciendo que *Q* describa una generatriz del cilindro, dependiendo del trozo de cilindro que queramos generar. Por tanto, los puntos del cilindro generalizado son de la forma: *Q(t,z)=(a(1+cost)cost, a(1+cost)sint,z)*.
Así pues, parece que *t,z* pueden tomarse como buenos parámetros para describir la superficie. Por tanto, para un cilindro de altura H, con la base en el plano *z=0*, resulta la parametrización:

$$\left.\begin{aligned} x(t,h) &= a(1+\cos t)\cos t \\ y(t,h) &= a(1+\cos t)\sin t \\ z(t,h) &= h \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi, 0 \le h \le H$$


z+
y+


z+
x+
y+



En cuanto a la variante correspondiente al eje Oy y cardioide en xz, tenemos la parametrización:

$$\left.\begin{aligned} x(t,y) &= a(1+\cos t)\cos t \\ y(t,y) &= y \\ z(t,y) &= a(1+\cos t)\sin t \end{aligned}\right\}, 0 \le t \le 2\pi, 0 \le y \le H$$

- **Problema 16**
  Obtener una parametrización de la superficie de revolución generada por la recta de ecuación

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 1+t \\ y(t) &= 2-2t \\ z(t) &= 4t \end{aligned}\right\}, t \in R$$

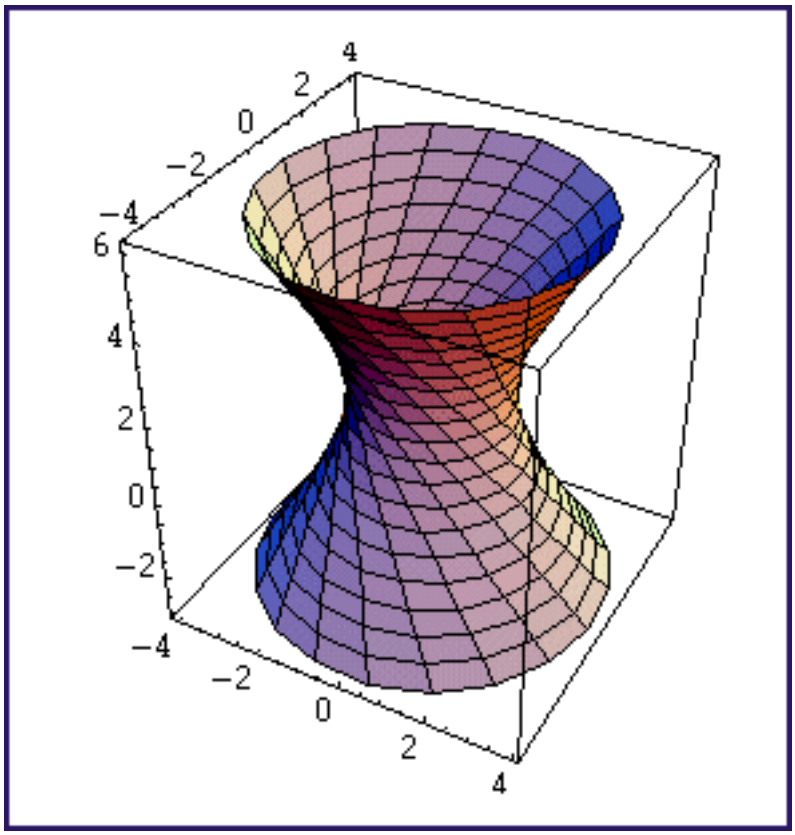
al girar alrededor del eje *Oz*.
Respuesta:
Véase que la curva puede reescribirse en la forma *P(t)=(x(t),y(t),z(t))=(1+t,2-2t,4t)=(1,2,0)+t(1,-2,4)*, con lo que observamos que es la recta que pasa por el punto (1,2,0) y tiene vector director (1,-2,4).
Método 1. Simplemente efectuamos una rotación respecto del eje *Oz*. Para ello aplicamos a los puntos de la curva (recta, en este caso) la matriz correspondiente a una rotación de ángulo q respecto de dicho eje. Utilizando como parámetros el parámetro t que controla el recorrido sobre la curva y el ángulo q de rotación obtendremos una parametrización de la superficie:

$$\begin{pmatrix} x(t,\theta) \\ y(t,\theta) \\ z(t,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-2t \\ 4t \end{pmatrix}$$

Efectuando el producto matricial se obtiene la parametrización derivada de este método:

$$\left.\begin{aligned} x(t,\theta) &= (1+t)\cos\theta-(2-2t)\sin\theta \\ y(t,\theta) &= (1+t)\sin\theta+(2-2t)\cos\theta \\ z(t,\theta) &= 4t \end{aligned}\right\}, t_0 \le t \le t_1, 0 \le \theta \le 2\pi$$

Véase la superficie que se obtiene. En este caso, $t_0 = -1, t_1 = 2$.



El mallado depende del tipo de parametrización, como se verá escogiendo posteriormente otro tipo de parametrización.
En el caso de rotación alrededor del eje *Oy*, basta utilizar la matriz de rotación respecto del eje *Oy*:

$$\begin{pmatrix} x(t,\theta) \\ y(t,\theta) \\ z(t,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-2t \\ 4t \end{pmatrix}$$

La parametrización correspondiente es:

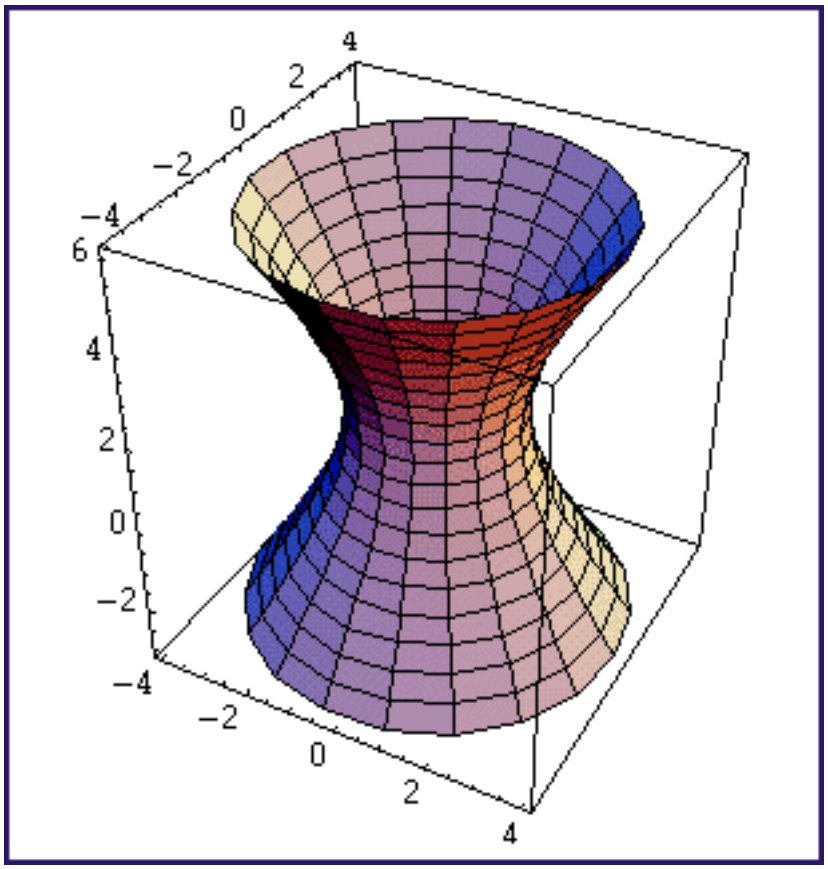
$$\left.\begin{aligned} x(t,\theta) &= (1+t)\cos\theta+4t\sin\theta \\ y(t,\theta) &= 2-2t \\ z(t,\theta) &= -(1+t)\sin\theta+4t\cos\theta \end{aligned}\right\}, t_0 \le t \le t_1, 0 \le \theta \le 2\pi$$

Método 2. Utilicemos el método que se basa en el cálculo de la distancia *d(t)* del punto *P(t)=(x(t),y(t),z(t))* de la curva al eje Oz, distancia dada por $d(t) = \sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2} = \sqrt{5-6t+5t^2}$ para la parametrización concreta de esta curva. Por tanto, podemos escribir:

$$\left.\begin{aligned} x(t,\theta) &= d(t)\cos\theta \\ y(t,\theta) &= d(t)\sin\theta \\ z(t,\theta) &= z(t) \end{aligned}\right\}, t_0 \le t \le t_1, 0 \le \theta \le 2\pi$$

Con lo cual resulta finalmente la parametrización:

$$\left.\begin{aligned} x(t,\theta) &= \sqrt{5-6t+5t^2}\cos\theta \\ y(t,\theta) &= \sqrt{5-6t+5t^2}\sin\theta \\ z(t,\theta) &= 4t \end{aligned}\right\}, t_0 \le t \le t_1, 0 \le \theta \le 2\pi$$



Como se ve, ambas parametrizaciones generan el mismo objeto, pensado como conjunto global de puntos. Ahora bien, la malla que se puede obtener, la aproximación poligonal, el sistema de "meridianos" y "paralelos" son bien distintos en un caso o en el otro. Completad el ejercicio estudiando cuál sería la parametrización correspondiente respecto a los otros ejes de coordenadas.

Ejercicios de autoevaluación

1. La ecuación *y=3sin(4x+5)* corresponde a una curva...

a) en forma paramétrica.
b) en forma polar.
c) en forma explícita.
d) en forma implícita.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

2. Una curva en forma explícita...

a) siempre puede escribirse en forma paramétrica.
b) nunca puede escribirse en forma implícita.
c) en ocasiones puede escribirse en forma paramétrica, pero no siempre.
d) en ocasiones puede escribirse en forma implícita, pero no siempre.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

3. Tenemos la parametrización siguiente:

a) Es una hélice circular de eje Ox.
b) Es una hélice circular de eje Oy.
c) Es una circunferencia en el espacio.

d) Es una elipse en el plano.
e) Es intersección de un plano y un cilindro.
f) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

4. Si con la parametrización de la circunferencia *P(t)=(R cost, R sint)* queremos obtener el segundo cuarto (en el segundo cuadrante), debemos restringir la variación del parámetro *t* al intervalo:

a) $[0,\pi]$
b) $[\pi/2, \pi]$
c) $[\pi/4, \pi]$
d) $[0, \pi/2]$
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

5. Dada la hélice circular *P(t)=(4cost, 4sint, 3t)*, el radio *a* y el paso de rosca *b* son

a) a=3, b=4
b) a=4, b=3
c) $b=3/\pi$
d) No tiene sentido, pues no es ninguna hélice.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

6. La elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ puede obtenerse aplicando un cambio de escala, respecto del origen, a la circunferencia de centro el origen y radio 1. ¿Cómo?

a) Es imposible.
b) $E_o^{a,b}$
c) $E_o^{b,a}$
d) $E_o^{1/a,1/}b$
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

7. Considérese la hélice circular *P(t)=(3cost,3sint,2t)*. Un punto móvil se desplaza sobre la hélice partiendo del plano horizontal y da 4 vueltas alrededor del cilindro que contiene la curva. La altura alcanzada por el móvil es...

a) 4p
b) 8p
c) 16p
d) No se puede calcular.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

8. Considérese la hélice espiral de Arquímedes *P(t)=(4tcost,4tsint, 3t)*. Un punto móvil parte del punto de la curva situado a altura 5. A continuación efectúa media vuelta alrededor del eje de la hélice (el eje *z*). La altura alcanzada por el móvil es

a) 3p
b) 5 + 3p
c) 3p - 5
d) No se puede determinar.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

9. Tenemos una hélice circular de eje el eje de coordenadas *Oz*. Supongamos que al dar una vuelta completa al eje el incremento en altura es de 2 unidades. Entonces el paso de rosca *b* es

a) p
b) $1/\pi$
c) $\pi/2$
d) Necesitamos el radio para poder calcularlo.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

10. Si la ecuación de la espiral de Arquímedes en el plano bidimensional es *r=at* en coordenadas polares, la parametrización derivada, correspondiente a 6 vueltas, es

a) $x(t)=at \cos t$, $y(t)=at \sin t$; $0\leq t\leq 12\pi$
b) $x(t)=a \cos t$, $y(t)=at \sin t$; $0\leq t\leq 12\pi$
c) $x(t)=at \cos t$, $y(t)=a \sin t$; $0\leq t\leq 12\pi$
d) $x(t)=at \cos t$, $y(t)=at \sin t$; $0\leq t\leq 6\pi$
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

11. Considérese la hélice circular $P(t)=(a \cos t, a \sin t, bt), 0 \leq t$. El inicio de la curva está en el punto...

a) (–a,0,0)
b) (a,0,0)
c) (a,a,b)
d) (0,0,0)
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

12. La curva $P(t)=(3\cos t, 5, 3\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

a) está sobre el plano z=5.
b) está sobre un plano paralelo al xz.
c) es una cardioide.
d) es una espiral de Arquímedes contenida en el plano y=5.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

13. La espiral de Arquímedes, copia de $r=at$, pero de centro $(x0,y0)$, se parametriza mediante...

a) (atcost –x0,atsint- y0, bt)
b) (x0+atcost,y0+atsint, bt)
c) (atcost,atsint, bt)
d) (y0+atcost,x0+atsint, bt)
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

14. Con la parametrización de la circunferencia $P(t)=(R\cos t, R\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, obtenemos un recorrido

a) en el sentido de las agujas del reloj.
b) en sentido contrario a las agujas del reloj.
c) únicamente sobre un cuadrante del plano.
d) que se inicia en y+.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

15. Con la parametrización de la circunferencia $P(t)=(R\cos t, R\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, obtenemos un recorrido...

a) que se inicia en el punto (0,R).
b) que se inicia en el eje x+.
c) que se inicia en el origen de coordenadas.
d) que termina en el eje y–.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

16. Si queremos parametrizar la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio R de manera que el recorrido sobre la misma empiece en el punto $(R,0)$ debemos parametrizarla mediante...

a) $P(t)=(R \sin t, R \cos t); 0 \leq t \leq 2\pi$
b) $P(t)=(R \cos t, R \sin t); 0 \leq t \leq 2\pi$
c) $P(t)=(R \cos(t+p), R \sin(t+p)); 0 \leq t \leq 2\pi$
d) $P(t)=(R + R \cos T, R \sin t); 0 \leq t \leq 2\pi$
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

17. Si queremos que el recorrido de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio R se inicie en el semieje $y+$, la parametrizaremos por...

a) $P(t)=(R \cos t, R \sin t); \pi/2<t<2\pi$
b) $P(t)=(R \cos(t+(\pi/2)), R \sin(t+(\pi/2))); \pi/2<t<2\pi$
c) $P(t)=(R \cos(t+(\pi/2)), R \sin(t+(\pi/2))); 0<t<2\pi$
d) $P(t)=(R \cos t, (\pi/2) + R \sin t); 0<t<2\pi$
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

18. Con la parametrización $P(t) = (R\cos t, R\sin t)$; $\pi/2 \leq t \leq \pi$

a) se recorre un cuarto de una circunferencia de radio R.
b) se recorre un cuarto de circunferencia.
c) se recorre una circunferencia completa.

d) se recorre el cuarto de circunferencia situado en el primer cuadrante de las coordenadas x,y positivas.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

19. Dada la hélice circular P(t)=(5 cos t, 2t, 5 sin t),0≤t≤16π, se efectúan

a) 16 vueltas alrededor del eje de coordenadas Oy.
b) 4 vueltas alrededor del eje de coordenadas Oy.
c) 8 vueltas alrededor del eje de coordenadas Ox.
d) 8 vueltas alrededor del eje de coordenadas Oy.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

20. La curva P(t)=(3t, 4 cos t, 4 sin t),0≤t≤8π...

a) es una hélice circular de eje el eje de coordenadas Oz.
b) es una hélice circular de eje el eje de coordenadas Ox.
c) es una espiral de Arquímedes.
d) es una hélice circular de eje el eje de coordenadas Oy.
e) es una cardioide.

21. La hélice circular *P(t)=(2+3cost,5+3sint,4t)* está situada...

a) sobre la esfera de radio 3 y centro (2,5,0).
b) sobre el cilindro de radio 3 y de eje coincidente con el eje de coordenadas Oz.
c) sobre un cilindro de radio 3 y de eje que pasa por el punto (2,3,0) y es paralelo al eje de coordenadas Oy.
d) No es una hélice circular.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

22. Con la parametrización del cilindro P(t,s)=(a cos t, a sin t, s);0≤t≤2π,0≤s≤H, se obtienen las generatrices...

a) haciendo t constante, variando el otro parámetro.
b) haciendo s constante, variando el otro parámetro.
c) No se pueden obtener a partir de esta parametrización.
d) Sólo se puede obtener la correspondiente al ángulo polar t=0.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

23. Con la parametrización del cilindro P(t,s)=(a cos t, a sin t, s);0≤t≤2π,0≤s≤H, se obtienen las secciones circulares, intersección con planos perpendiculares al eje

a) haciendo t constante, variando el otro parámetro.
b) haciendo s constante, variando el otro parámetro.
c) No se pueden obtener a partir de esta parametrización.
d) Sólo se puede obtener la correspondiente al plano horizontal z=0.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

24. P(t,s)=(c + a cos t,d + a sin t, s);0≤t≤2π,0≤s≤H es la parametrización de...

a) una esfera de centro (c,d,0) y radio a.
b) un cilindro de radio a, de eje que es perpendicular a z=0 y que pasa por (c,d,9).
c) un cilindro de radio a, de eje que es perpendicular a z=0 y que pasa por (-c,-d,9).
d) un toro.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

25. Dado el cilindro de eje el eje de coordenadas *Oz* y de radio *a*, al cortar por el plano *x=y* obtenemos...

a) una sección circular.
b) una única generatriz.
c) dos generatrices.
d) No hay intersección.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

26. Considérese el cilindro de parametrización P(t,s)=(4 cos t,4 sin t, s);0≤t≤2π,-1≤s≤8. La sección con el plano horizontal *xy* es...

a) la circunferencia P(t)=(4cost,4sint,0),0≤t≤2π
b) la semicircunferencia P(t)=(4cost,4sint,0),0≤t≤π

c) la circunferencia P(t)=(4cost,4sint,-1),0≤t≤2π
d) La semicircunferencia P(t)=(4cost,4sint,-1),0≤t≤π
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

27. Si tenemos un cilindro de eje el eje de coordenadas Oy, la sección con el plano x=z...

a) es una circunferencia.
b) es un cuarto de circunferencia.
c) es una generatriz.
d) No hay intersección.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

28. Si cortamos el cilindro de radio 6 y de eje el eje de coordenadas *Ox* con el plano *z=4* obtenemos...

a) el conjunto vacío.
b) dos generatrices.
c) un rectángulo.
d) una única generatriz.
e) el eje.
f) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

29. Transformamos la esfera de centro el origen de coordenadas y de radio 1 en el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ mediante

a) No hay ninguna transformación geométrica posible.
b) $E_o^{1/a,1/b,1/c}$
c) $E_o^{a,b,c}$
d) $E_o^{c,b,a}$

30. Consideremos un toro *T0* de centro el origen y plano diametral coincidente con el plano de coordenadas *xz* y un toro *T1* de centro el origen y plano diametral coincidente con el plano *yz*. Transformamos *T0* en *T1* mediante...

a) R_x^{-90}
b) R_z^{90}
c) R_z^{90}, *pero no con* R_z^{-90}, pero no con R_z^{90}, *pero no con* R_z^{-90}
d) una simetría respecto del eje *z*.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

31. Dada la esfera de parametrización $P(\theta,\varphi) = (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi)$; $0 \le \theta \le 2\pi$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$, obtenemos la parte de la superficie contenida en el octante de coordenadas *x,y,z* positivas con los intervalos de variación de los parámetros...

a) $0<\theta\le\pi$, $-\pi/2 \le\varphi\le\pi/2$
b) $0\le\theta\le\pi/2$, $0 \le\varphi\le\pi/2$
c) $0\le\theta\le\pi$, $0 \le\varphi\le\pi/2$
d) No se puede obtener con esta parametrización.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

32. No es superficie de revolución...

a) el toro.
b) el dodecaedro.
c) el cilindro.
d) la esfera.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

33. Con la parametrización *P(t)=(4cost,s,4sint)*, con 0≤s≤6, obtenemos un semicilindro (lámina semicilíndrica) con la variación del parámetro angular

a) [π,2π]
b) [0,2π]
c) [π/2, π]
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

34. Un cilindro elíptico recto puede obtenerse a partir de un cilindro circular recto de la misma altura mediante, como mínimo,

a) un cambio de escala uniforme.
b) un cambio de escala no uniforme.
c) un cambio de escala de coeficientes 1,1,1.
d) No es posible la transformación.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

35. El eje del cilindro de parametrización

$P(t)=(s,2+a\cos t,-1+a\sin t),\ 0\leq t\leq 2\pi,\ -3\leq s\leq 7$...

a) es el eje z.
b) es el eje x.
c) es paralelo al eje x.
d) es paralelo al vector (0,2,–1).
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

36. La intersección del plano $x=-y$ con un toro de centro el origen y plano diametral el plano de coordenadas xy es...

a) vacía.
b) una circunferencia.
c) dos circunferencias.
d) una elipse.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

37. Si tenemos una esfera de centro el origen de coordenadas, la intersección de la misma con un plano que contiene al eje z es...

a) un paralelo.
b) un meridiano.
c) dos circunferencias.
d) vacía.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

38. Dada la parametrización correspondiente a una esfera ($\theta\varphi$) $P(\theta,\varphi) = (R\cos\varphi\cos\theta,\ R\cos\varphi\sin\theta,\ R\sin\varphi)$, se obtiene la semiesfera (hemisferio) superior con...

a) $0\leq\theta\leq 2\pi, -\pi/2 \leq\varphi\leq\pi/2$
b) $0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0 \leq\varphi\leq\pi/2$
c) $0\leq\theta\leq 2\pi,\ -\pi/2 \leq\varphi\leq 0$
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

39. Dada la parametrización correspondiente a una esfera ($P(\theta,\varphi) = (R\cos\varphi\cos\theta,\ R\cos\varphi\sin\theta,\ R\sin\varphi)$),...

a) manteniendo fijo θ y variando φ se obtiene un meridiano.
b) manteniendo fijo θ y variando φ se obtiene un paralelo.
c) variando θ y manteniendo φ se obtiene un meridiano.
d) No es la parametrización de una esfera.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

40. Para obtener arcos de paralelo situados en el octante de las x,y,z positivas utilizando la parametrización de la esfera dada por ($P(\theta,\varphi) = (R\cos\varphi\cos\theta,\ R\cos\varphi\sin\theta,\ R\sin\varphi)$) el parámetro latitud varía en...

a) $[0, \pi/4]$
b) $[0, \pi/2]$
c) $[\pi/4, 3\pi/4]$
d) $[0,\pi]$
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1. c

2. a

3. b

4. b

5. b

6. b

7. c

8. b

9. b

10. a

11. b

12. b

13. b

14. b

15. b

16. b

17. c

18. b

19. d

20. b

21. e

22. b

23. b

24. b

25. c

26. a

27. e

28. b

29. c

30. b

31. b

32. b

33. a

34. b

35. c

36. c

37. b

38. b

39. a

40. b