



UNIVERSITAT
ROVIRA i VIRGILI



Universitat Oberta
de Catalunya

Màster en Enginyeria Computacional i Matemàtica

Treball final de màster

Simulació de comportaments mecànics:

La paret abdominal

Lluís Tuset Serra

Director: Dr. Gerard Fortuny Anguera

10/07/2018

Firma del director autoritzant l'entrega final del TFM:



Aquesta obra està subjecta a una llicència de
Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada
3.0 Espanya (CC BY-NC-ND 3.0 ES)

FITXA DEL TREBALL FINAL

| | |
|--------------------------------|---|
| Títol del treball: | Simulació de comportaments mecànics: la paret abdominal |
| Nom de l'autor: | Lluís Tuset Serra |
| Nom del director: | Gerard Fortuny Anguera |
| Nom del PRA: | Juan Alberto Rodríguez Velázquez |
| Titulació: | Màster en Enginyeria Computacional i Matemàtica |
| Àrea del treball final: | Biomecànica |
| Idioma del treball: | Català |
| Paraules clau: | Biomecànica, Simulació, Elements finits |

Resum del treball:

L'objectiu d'aquest treball és recórrer els passos per tal d'aconseguir simular el comportament mecànic de la paret abdominal. La motivació d'aquest estudi és l'interès per conèixer quina és la millor zona on aplicar un estoma a fi de reduir la posterior aparició d'hèrnies. Aleshores, se simularà la paret abdominal amb l'objectiu de determinar quines són les zones més afectades davant l'aplicació de càrregues externes.

La metodologia emprada comprèn una primera anàlisi fisiològica del cas concret, una investigació de les funcions d'energia com a eina per a la modelització matemàtica del comportament del teixit muscular, el desenvolupament matemàtic de dos models concrets i, posteriorment, la implementació computacional i obtenció de resultats.

Per a aquesta implementació s'ha fet ús de programari de codi obert i s'ha treballat a distància des d'un servidor remot situat al Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques de la URV. S'ha fet ús del generador de codi **MFront** i del paquet **Salome-Meca** que s'encarrega del mallat de la geometria, soluciona el problema plantejat a través del mètode dels elements finits i permet el postprocessament de les solucions.

Com a producte final, s'obté l'estat de tensió-deformació del modelat de la paret abdominal davant de diverses càrregues. D'aquesta manera, es poden determinar les zones més afectades i es poden treure conclusions a fi de resoldre el problema biomecànic concret.

Aquest treball mostra una aplicació directa de les matemàtiques i, més concretament, de la biomecànica fent ús de programari lliure.

Abstract:

The aim of this work is to follow the steps to simulate the mechanical behavior of the abdominal wall. The motivation of this study is to determine where is the best place to apply a stoma to reduce the subsequent appearance of hernias. The abdominal wall has been simulated in order to determine which areas are the most affected in the application of external loads.

The methodology used includes a first physiological analysis of the specific case, an investigation of the functions of energy as a tool for the mathematical modeling of the behavior of the muscle tissue, the mathematical development of two specific models and the computational implementation.

For this implementation, open source software has been used remotely from a remote server located in the Department of Computer and Mathematical Engineering of the Universitat Rovira i Virgili (Catalunya). To solve the problem the code generator **MFront** and the package **Salome-Meca** have been used to design the mesh of geometry, to solve the problem through the finite element method and to do the post-processing of the solutions.

This work shows a direct application of mathematics and, more specifically, biomechanics through the use of a free software.

Agraïments

Vull agrair la confiança i el recolzament rebut durant aquests mesos per part dels membres del Grup de Recerca MEDSIM del Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques de la URV. En tot moment m'heu donat suport i heu estat al meu costat en tot el que he necessitat. Gràcies a tots i totes, m'he sentit un més de vosaltres!

No em vull deixar a la Dra. Carme Olivé que, inicialment, em va orientar per tal de poder definir el meu TFM. Gràcies a ella em vaig introduir en aquest grup de recerca i va ser qui primer va confiar en mi, gràcies.

Finalment, i no menys important, et vull agrair a tu, Anabel, la paciència, suport i motivació que m'has ofert durant tot aquest temps, GRÀCIES!

Índex

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducció | 1 |
| 1.1 | Context i justificació del treball | 1 |
| 1.2 | Objectius del treball | 2 |
| 1.3 | Enfocament i mètode emprat | 2 |
| 1.4 | Planificació del treball | 3 |
| 1.5 | Breu sumari dels productes obtinguts | 4 |
| 1.6 | Breu descripció dels altres capítols de la memòria | 4 |
| 2 | Paret muscular i hèrnies | 5 |
| 2.1 | Ostomia | 5 |
| 2.2 | La problemàtica de les hèrnies | 6 |
| 2.3 | Fisiologia de la paret muscular | 7 |
| 2.4 | Teixits tous | 8 |
| 3 | Modelització de la paret muscular | 10 |
| 3.1 | Introducció | 10 |
| 3.2 | Tensor de deformació | 10 |
| 3.3 | Invariants | 12 |
| 3.4 | Funcions d'energia | 13 |
| 3.5 | Part volumètrica | 14 |
| 3.6 | Materials compostos | 16 |
| 3.7 | Part isocora | 17 |
| 4 | Models desenvolupats | 22 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.1 | Model de Pachera | 22 |
| 4.2 | Model d'Hernández-Grasa | 26 |
| 5 | Implementació computacional | 30 |
| 5.1 | Programari emprat | 30 |
| 5.2 | Implementació del model de Pachera amb MFront | 31 |
| 5.3 | Simulació de models matemàtics | 34 |
| 5.3.1 | Preprocessament | 35 |
| 5.3.2 | <i>Solver</i> | 36 |
| 5.3.3 | Postprocessament | 40 |
| 6 | Resultats | 42 |
| 6.1 | Estudi segons la càrrega aplicada | 44 |
| 6.2 | Estudi específic per a cada múscul | 48 |
| 7 | Conclusions | 54 |
| 7.1 | Línies de treball futures | 55 |
| 8 | Glossari | 56 |
| | Bibliografia | 59 |
| | Bibliografia complementària | 62 |
| | Figures | 64 |
| | Annex I - pachera.mfront | 65 |
| | Annex II - pachera.comm | 67 |
| | Annex III - exemple.export | 69 |
| | Annex IV - paret.comm | 71 |
| | Annex V - Dificultats durant el TFM | 74 |

Índex de figures

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Esquema d'una colostomia, un estoma i la bossa d'ostomia. | 5 |
| 2.2 | Esquema d'una hernia abans i després de la reparació. | 7 |
| 2.3 | Músculs de la paret abdominal. | 8 |
| 4.1 | Esquema de la configuració definida pels dos processos ficticis d'Hernández-Grasa. | 27 |
| 5.1 | Mallat de la paret abdominal. | 35 |
| 5.2 | Detall del mallat de la paret abdominal. | 36 |
| 5.3 | Camp de desplaçaments (en m) havent aplicat una força $F = 400$ N sobre el múscul recte (RA). | 40 |
| 6.1 | Modelització de la paret abdominal. | 42 |
| 6.2 | Parts de la modelització de la paret abdominal. | 43 |
| 6.3 | Condicions de contorn aplicades en la simulació, de color verd les cares de pressió i de color blanc els volums que envolten la paret abdominal amb càrrega nul·la. | 44 |
| 6.4 | Resultats obtinguts per a $F = 400$ N. | 45 |
| 6.5 | Resultats obtinguts per a $F = 600$ N. | 46 |
| 6.6 | Resultats obtinguts per a $F = 1000$ N. | 47 |
| 6.7 | Camp de desplaçaments en cada múscul per $F = 600$ N (en m). | 50 |
| 6.8 | Camp de tensions en cada múscul per $F = 600$ N (en Pa). | 51 |
| 6.9 | Camp de tensions en cada múscul per $F = 600$ N (en Pa), en verd els punts de tensió màxima. | 52 |
| 6.10 | Exemple de «mapa» de punts en el múscul transvers (TA) en els quals se superen els $2.1 \cdot 10^5$ Pa de tensió considerant una càrrega aplicada de $F = 600$ N. | 53 |

1. Introducció

1.1 Context i justificació del treball

La simulació matemàtica és un procediment que es pot aplicar en moltes àrees del coneixement: la física, l'enginyeria, la química, l'economia, les ciències socials, etc. Aquest treball se centrarà en el camp de la biomecànica amb l'objectiu de simular el comportament mecànic de la paret abdominal. La simulació matemàtica en biomecànica consisteix en una modelització de la zona que es vol estudiar així com un estudi del comportament mecànic d'una determinada zona amb l'ús de la computació com a eina principal. L'avantatge principal de la simulació en aquest àmbit és que es pot estudiar el comportament mecànic sense necessitat de fer proves destructives.

El treball se centrarà en la simulació de la paret abdominal amb l'objectiu d'estudiar el comportament d'aquest teixit muscular després d'una ostomia. Una ostomia és un procediment quirúrgic habitual que se sol fer en un punt de la zona de l'abdomen compresa entre el melic i un dels dos costats de la línia mitjana del pubis. Tot i que cal seguir un conjunt d'indicacions i recomanacions no hi ha un punt concret on fer aquestes intervencions. És sabut que, segons en quin punt exacte es fa aquesta cirurgia, el pacient és més propens a desenvolupar-hi una hèrnia.

Les hèrnies, tant si són provocades per un estoma o no, són una de les malalties més comunes actualment i l'ús de malles quirúrgiques és una de les principals solucions per aquesta malaltia. Aquestes malles han de tenir unes característiques molt similars a les de la paret muscular humana per tal que no provoqui rebuig amb la resta de teixit sa. A més, és important que es comportin com ho fan els músculs. Per aquest motiu és decisiu conèixer el comportament mecànic de la paret abdominal a fi de dissenyar malles el més precises possible.

Una de les estratègies més habituals és la modelització matemàtica d'aquest comportament sobre models de la paret muscular que reproduïxin el funcionament del teixit sa a fi de perfeccionar les malles. Nombrosos autors i autores han experimentat amb animals i, en algun cas concret amb cadàvers, per tal de conèixer el comportament dels músculs de l'abdomen. Aquesta informació permet millorar els models matemàtics que simularan el funcionament del teixit humà.

En aquest treball s'estudien diversos models matemàtics i s'implementen informàticament per tal de poder-los aplicar sobre modelitzacions que s'han desenvolupat des del Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques de la URV amb la col·laboració de cirurgians de l'Hospital Vall d'Hebron. Amb aquests resultats es volen obtenir models de malles quirúrgiques que reproduïxin de manera precisa el teixit muscular humà amb l'objectiu de millorar la cura dels pacients que pateixen hèrnies i el seu benestar. A més, es vol conèixer el comportament de la paret abdominal per tal de poder determinar la millor localització on realitzar una ostomia amb l'objectiu d'evitar la posterior aparició d'hèrnies.

1.2 Objectius del treball

L'objectiu general d'aquest treball és conèixer els aspectes més rellevants de la simulació matemàtica. Per fer-ho, no es fa una descripció general sinó que s'aplica aquest procediment sobre un cas concret, els estomes i la posterior aparició d'hèrnies. L'objectiu és fer un recorregut per totes les etapes que comprenen la simulació matemàtica en l'àmbit de la biomecànica: la formulació matemàtica, l'estudi dels comportaments mecànics, les eines computacionals necessàries i els resultats obtinguts.

Els objectius específics d'aquest treball són:

1. Conèixer què són els estomes i quina és la seva relació amb les hèrnies.
2. Conèixer la problemàtica que suposen les hèrnies i quin és l'estat actual de la qüestió.
3. Estudiar els models matemàtics que permeten modelitzar el comportament de la paret abdominal a través de la mecànica dels medis continus.
4. Analitzar models concrets de la literatura actual i d'altres de clàssics per tal d'obtenir les expressions matemàtiques concretes que permetin implementar-los fent ús de la computació.
5. Conèixer un dels paquets informàtics que permeten l'estudi a través del mètode dels elements finits i aplicar els models analitzats.
6. Utilitzar un llenguatge informàtic que permet traduir expressions matemàtiques a un codi útil per a programes de simulació.
7. Fer ús de programari lliure.
8. Col·laborar estretament amb el Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques de la URV.

1.3 Enfocament i mètode emprat

L'estratègia que se seguirà en aquest treball es basa en cinc fases ben diferenciades.

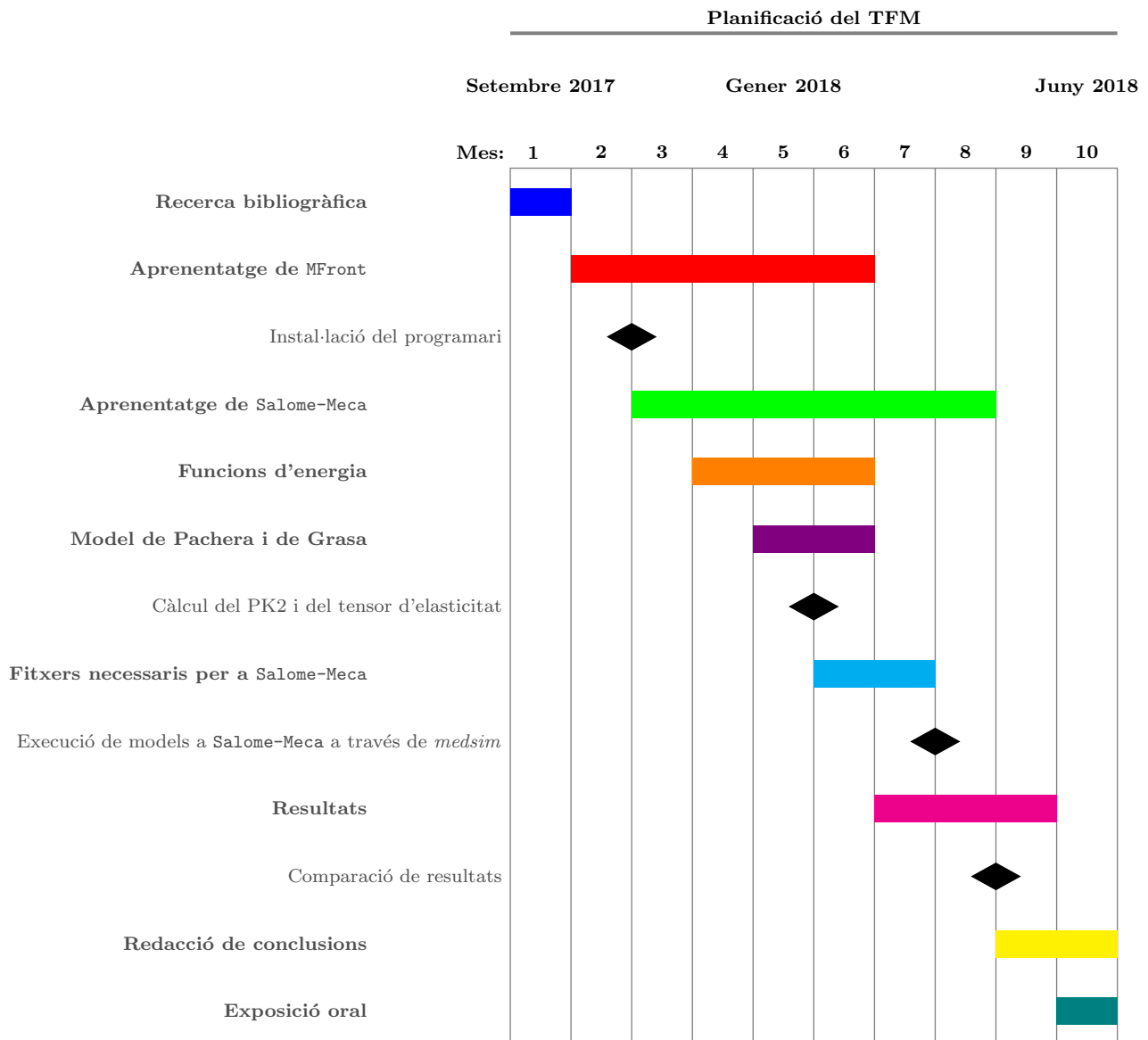
- En una primera part es descriurà un cas concret de biomecànica, quin és l'estat actual i què aportarà de nou aquest treball.
- En la segona part s'estudien les funcions d'energia com a la millor eina per tal de modelitzar el comportament de la paret muscular. En aquesta part es fa un desenvolupament exhaustiu d'aquestes funcions des d'un punt de vista matemàtic.
- En la tercera part es desenvolupen uns models concrets que utilitzen les funcions d'energia descrites anteriorment.
- Seguidament es descriu el programari emprat per a la simulació de la paret muscular i s'indiquen les seves principals característiques.
- Finalment, en la darrera part, s'obtenen els resultats d'haver implementat determinats models matemàtics sobre una geometria concreta.

Es creu que l'enfocament d'aquest treball és el més apropiat per aconseguir els objectius plantejats ja que parteix d'una descripció de l'estat de la qüestió actual, concreta aquest estat de l'art amb uns models específics i, finalment, s'extreuen uns resultats fent ús de programes d'anàlisi d'elements finits de codi obert.

1.4 Planificació del treball

Per tal de realitzar aquest TFM ha estat necessari l'ús de diversos programes. Per a l'escriptura dels models matemàtics, el **MFront** i per a la modelització, mallat i anàlisi el **Salome-Meca**. Ambdós programes són de codi lliure i es poden descarregar gratuïtament. S'ha treballat amb sistema operatiu Linux per tal de poder executar ambdós programes i per connectar-se a l'ordinador de treball *medsim*¹. Per tal d'aprendre el funcionament d'ambdós programes s'han consultat diversos manuals i fòrums d'ajuda.

Seguidament es mostra el diagrama de Grantt amb la planificació temporal de cadascuna de les tasques:



¹*medsim* és un servidor de docència del Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques de la URV al qual cal accedir-hi amb un túnel ssh.

1.5 Breu sumari dels productes obtinguts

Amb aquest treball s'ha aconseguit fer una descripció exhaustiva de les funcions d'energia que permeten modelitzar el comportament dels sòlids per tal d'obtenir, posteriorment, dades respecte les tensions i els desplaçaments. Per tal de poder demostrar l'aplicabilitat d'aquestes funcions s'han considerat diversos models concrets amb diferències evidents per tal de veure quines són les seves particularitats. A més, s'ha fet una descripció de les eines informàtiques que s'han utilitzat destacant-ne els seus punts forts. Aleshores, els productes obtinguts són:

- la implementació de diversos models matemàtics de forma computacional.
- una guia de les eines computacionals necessàries per tal de simular comportaments mecànics (s'ha apostat per aplicacions informàtiques de codi obert).
- els resultats obtinguts d'haver aplicat models matemàtics sobre geometries concretes.

1.6 Breu descripció dels altres capítols de la memòria

El segon capítol consta d'un estat de la qüestió en el qual s'ha estudiat quina és la problemàtica que es té i quines són les millors solucions que es plantegen per tal de poder resoldre-la. Aquest capítol és bàsicament descriptiu i permet situar a la persona lectora.

Al tercer capítol s'estudien les millors eines per tal de modelitzar la paret muscular i, en general, qualsevol sòlid que calgui estudiar a través de la mecànica dels medis continus. En aquest capítol es detallen les principals característiques de les funcions d'energia, les seves parts i les seves característiques. En general, es tracta d'un capítol amb un alt contingut matemàtic.

Al següent capítol es desenvolupen dos models concrets. Aquests dos models es troben en dos articles científics i es tracta de dues funcions d'energia diferents que es relacionen amb la descripció feta en el capítol anterior.

Al cinquè capítol es descriuen les eines computacionals utilitzades i es fa una breu introducció del seu funcionament. En aquest capítol s'implementa un dels models anteriors fent ús del programari emprat.

Finalment, el darrer capítol consta dels resultats obtinguts d'aplicar un model clàssic sobre una geometria complexa com és la modelització de la paret abdominal.

2. Paret muscular i hèrnies

2.1 Ostomia

Una ostomia és una intervenció quirúrgica que consisteix a crear un estoma¹ des d'una regió de dins del cos humà cap a l'exterior. És un procediment habitual per tal de tractar determinades malalties relacionades amb l'aparell digestiu i urinari. Aquesta obertura permet el pas de l'orina i la femta cap a l'exterior del cos [30].

Els tipus d'ostomies més habituals són [31]:

- Colostomia: és l'obertura creada entre el còlon (intestí gros) i la superfície del cos, a través de la paret abdominal, per on s'expulsen les matèries fecals. Una colostomia es crea quan s'extreu una part del còlon o del recte.
- Urostomia: consisteix en el desviament de l'orina des d'una bufeta malalta. Consisteix en extirpar una secció del final de l'intestí prim o del principi de l'intestí gros per tal d'ubicar-lo al ronyons de manera que faci la funció de conducte i pugui sortir l'orina a l'exterior a través d'un estoma.
- Ileostomia: es una obertura creada entre la darrera part de l'ili (*ileum*)² i la superfície del cos. En aquest cas l'intestí es porta cap a la paret abdominal per tal de crear un estoma. Aquesta pràctica pot comportar l'extracció total o parcial del còlon.

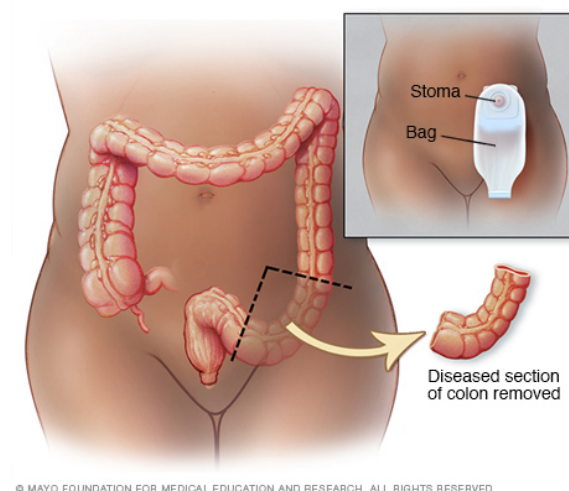


Figura 2.1: Esquema d'una colostomia, un estoma i la bossa d'ostomia.

¹Obertura artificial feta entre dues cavitats o conductes o entre aquests i la superfície del cos.

²Secció final de l'intestí prim.

La intervenció consisteix en una incisió des de la cintura fins a sota l'estèrnum que dóna accés als òrgans interns. En el cas de les colostomies, l'àrea infectada es retira i l'extrem rectal del còlon es tanca. L'extrem del còlon que surt de l'estómac es desvia cap a un estoma que es crea a la paret abdominal. Aquest estoma permet la sortida de gasos i femta cap a una bossa d'ostomia que se sella amb la pell a través d'adhesius. Aquesta bossa caldrà canviar-la freqüentment segons les necessitats de cada pacient.

A mesura que passa el temps, els pacients amb estomes tenen més probabilitats de desenvolupar una hèrnia. Una hèrnia es produeix quan un òrgan o una part tova del cos surt de forma total o parcial per una obertura, natural o accidental, de la paret del seu receptacle. En el cas dels pacients ostomitzats l'hèrnia més habitual és l'anomenada paraestomal i és la complicació més freqüent després de la creació d'un estoma permanent [7]. Consisteix en una protuberància o inflor al voltant o per sota de l'estoma. L'aparició de l'hèrnia paraestomal és deguda a un debilitament de la paret muscular que dóna suport i que provoca que l'estoma se separi del múscul del seu voltant permetent que una secció de l'intestí sobresurti.

Es creu que la localització del punt on se situa l'estoma és determinant en la posterior aparició de les hèrnies. Per aquest motiu, és important conèixer el funcionament de les hèrnies per tal de poder determinar el millor punt on situar un estoma permanent.

2.2 La problemàtica de les hèrnies

Actualment, una de les malalties més freqüents és l'aparició de les hèrnies. Les hèrnies són degudes a una fallada dels mecanismes de resistència de la paret abdominal davant d'un augment de la pressió intraabdominal (PIA). Aquest desequilibri mecànic entre la pressió interna, PIA, i les forces actives i passives del teixit de la paret abdominal provoquen àrees de debilitat que sobresurten a l'exterior.

A part de l'hèrnia paraestomal que s'ha vist anteriorment, hi ha altres tipus d'hèrnies segons quina sigui la zona debilitada. Les més comuns són:

- Hèrnies inguinals i crurals: són les més freqüents de totes i es nota una protuberància a la regió inguinal o a la cuixa. Les primeres són més habituals en homes i les segones en dones.
- Hèrnies umbilicals i epigàstriques: també són molt freqüents i apareixen, respectivament, per la zona del melic o a la línia mitjana de l'abdomen entre el melic i l'estèrnum. En general, la seva aparició està relacionada amb l'embaràs o amb un augment de pes.
- Hèrnies incisionals: són protuberàncies que apareixen en la cicatriu d'antigues operacions. També són conegudes com a eventracions.

Les hèrnies apareixen en zones dèbils de la paret muscular i són provocades per la presència d'estomes, l'aixecament d'objectes pesats, esforços en anar al bany i per qualsevol altra activitat que augmenti la PIA. En algun cas també són degudes a un augment excessiu de pes i en ocasions poden ser congènites.

Ja que la cavitat abdominal no està protegida per cap estructura rígida, la protecció i el suport és proporcionat per la paret abdominal. Aleshores, la integritat de la paret abdominal és essencial per al correcte funcionament fisiològic de la cavitat abdominal, és a dir, mantenir situacions dinàmiques com la tos o els vòmits i per suportar altes pressions que es donen en l'embaràs i en cas d'obesitat [23]. Una hèrnia abdominal pot afectar totes les capes musculars de la paret o només una sola capa [13].

La cirurgia és l'únic tractament amb el qual es pot reparar una hèrnia de forma permanent. Aquesta intervenció consisteix en la reintroducció del contingut abdominal i, posteriorment, en la reparació o reforç de la paret abdominal. Aquest reforç s'aconsegueix amb l'ús d'una pròtesi anomenada malla que reforça el defecte de la paret abdominal. A principis de la dècada dels 90, O. Witzel i R. Goepel van desenvolupar les primeres malles que estaven fetes de metall [24]. Tot i que l'ús de les malles s'ha imposat, les interaccions fisiològiques potencialment problemàtiques entre el teixit protèsic i el cos no es poden ignorar ja que el sistema immunitari de l'amfitrió reacciona ràpidament [8]. Per aquest motiu, l'ús de biomaterials s'ha convertit en la pràctica clínica més habitual i els dissenys de les malles se centren, principalment, en la maximització de la resistència a la tracció. Tanmateix, la reparació de les hèrnies, el dolor, la infecció o problemes en l'adherència entre el material implantat i els òrgans són encara habituals ([12], [5]).

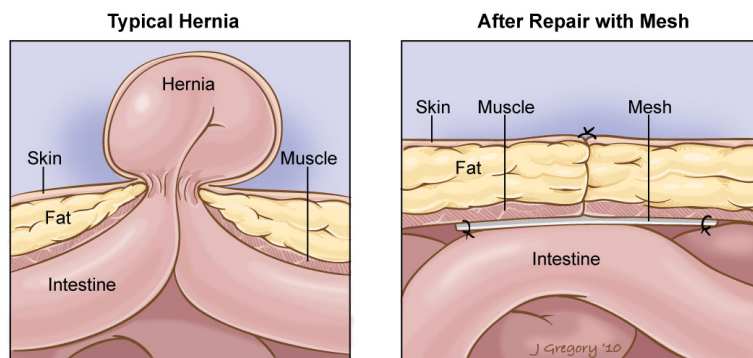


Figura 2.2: Esquema d'una hèrnia abans i després de la reparació.

Actualment, aquestes malles solen ser fetes de biomaterials macroporosos fabricats amb polipropilè [3], tot i que s'estan estudiant nombrosos materials nous. Gràcies a la fabricació d'additius, nous materials i noves tecnologies de fabricació, hi ha un important impuls cap a la generació d'implants personalitzats per a cada pacient [18]. L'elecció d'una malla adequada és fonamental per obtenir intervencions quirúrgiques amb èxit. La principal propietat de la malla que cal tenir en compte és la compatibilitat biomecànica entre l'implant i el teixit autòcton. Per aquest motiu, investigar les propietats mecàniques d'un abdomen sa és essencial. L'objectiu principal de les malles és que imitin la biomecànica fisiològica de la paret abdominal anterior humana.

Un primer pas cap a l'estudi del funcionament mecànic de la paret abdominal són els estudis experimentals a partir de l'observació. En aquest sentit, Song i altres [26] van mesurar in vivo les deformacions de la paret abdominal durant la insufllació en pacients sotmesos a cirurgia laparoscòpica. Per altra banda, Konerding i altres [19] van simular la PIA en cadàvers humans a partir de la inserció d'un globus ple d'aigua i es van mesurar les deformacions amb l'ajuda d'una càmera de vídeo. Un altre mètode per comprendre millor el comportament de la paret abdominal i, per tant, el comportament que han de tenir les malles quirúrgiques, és a través de les simulacions computacionals que permeten predir i comprendre millor la biomecànica que ha de suportar la pròtesi [14]. Aquests models computacionals ofereixen la possibilitat de simular observacions experimentals i obtenir variables internes, com les tensions i les deformacions [15]. El mètode d'elements finits és una poderosa eina per trobar solucions a aquests models matemàtics.

2.3 Fisiologia de la paret muscular

La paret abdominal humana és una complexa estructura composta per diverses capes que consisteix en la cavitat peritoneal, retroperitoneal, subperitoneal i extraperitoneal. S'estén des del sòl pèlvic fins al diafragma [19]. Per exemple, la paret abdominal central es compon, des de la part superficial fins a la part profunda, de la pell, el

greix subcutani, la beina dels músculs rectes abdominals, el múscul recte major de l'abdomen (que està dividit medialment per una banda de teixit conjuntiu anomenada línia alba), el greix preperitoneal i el peritoneu que recobreix els òrgans de l'abdomen [18].

El *panniculus adiposus* és el dipòsit de greix de la capa més superficial que també s'anomena fàscia³ de Camper. La fàscia de Scarpa és la membrana més profunda que la darrera i conté més teixit fibrós. Aquesta capa no té resistència per a la cura de l'hèrnia però sí que proporciona una capa de protecció quan s'utilitzen malles [2].

En les localitzacions laterals de la línia central, el múscul recte de l'abdomen es reemplaça per una capa muscular composta pels músculs oblics, els oblics interns i el múscul transvers de l'abdomen [4]. Cal destacar que la paret abdominal té una configuració anatòmica heterogènia ja que la tipologia de teixit varia segons la seva localització. Per exemple, la línia alba presenta diferents propietats estructurals al llarg de la seva amplada.

La paret abdominal anterior consta de quatre músculs: el múscul recte de l'abdomen (RA), el múscul oblic extern o major (EO), el múscul oblic intern o menor (IO) i el múscul transvers (TA). De superficial a profund, l'EO és la primera cap de músculs laterals seguida de l'IO i, finalment, el TA, essent l'EO el més gran dels tres [3]. Els músculs oblics externs i interns tenen com a funció donar suport a les vísceres abdominals i ajuden en la flexió i la rotació del tronc.

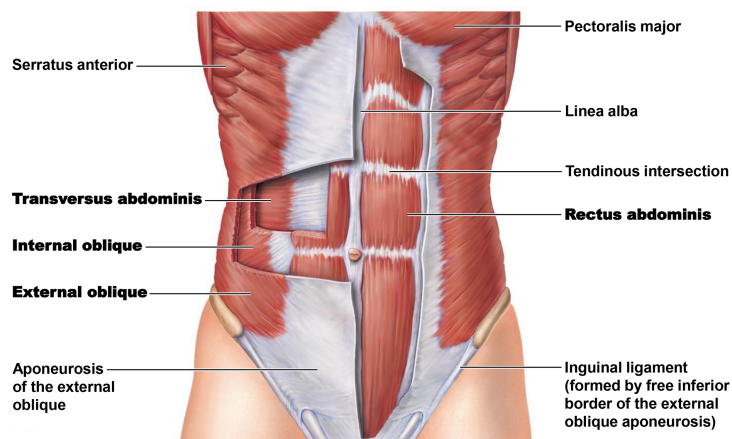


Figura 2.3: Músculs de la paret abdominal.

2.4 Teixits tous

Els teixits tous s'encarreguen de connectar, donar suport o envoltar altres estructures i òrgans dels cos. Els teixits tous inclouen els músculs, els tendons, el greix, els vasos sanguinis, els nervis i els teixits sinovials (teixits que estan al voltant de les articulacions). Estan formats per proteïnes, glicosaminoglicans (polisacàrids), aigua i no són ossos. Entre aquestes proteïnes els diferents tipus de col·lagen són crucials per a les propietats mecàniques dels teixits tous [6]. Ja que els músculs de la paret abdominal són teixits tous, és especialment interessant l'estudi d'aquests per entendre la biomecànica de la paret muscular.

Els teixits connectius tous són estructures complexes reforçades amb fibra de manera que el seu comportament mecànic està íntimament relacionat per la concentració i l'arranjament dels seus constituents, el col·lagen i l'elastina. El col·lagen és una proteïna que forma xarxes que proporcionen una estructura de reforç i presenta

³Membrana fibrosa i resistent, de color blanquinós brillant, que serveix d'embolcall als òrgans subjacents i els manté en la seva posició respectiva.

anisotropia ⁴ ja que les seves fibres tendeixen a tenir direccions principals. Quan les fibres de col·lagen estan sotmeses a tensió, aquestes es converteixen en el principal element de càrrega. Per altra banda, l'elastina també és una proteïna constituent dels teixits tous el comportament mecànic de la qual es pot explicar dins del concepte d'elasticitat entròpica⁵ [17].

Des d'un punt de vista microscòpic els teixits tous són materials no homogenis i la seva resposta a la tracció és la rigidesa no lineal, a més, la seva resistència depèn de la velocitat de deformació. A diferència dels teixits durs, com els ossos, els teixits tous poden experimentar grans deformacions. Generalment, aquesta resposta a la tensió té un alt comportament no lineal. Aleshores, des d'un punt de vista biomecànic, tant l'anisotropia com el comportament no lineal s'ha de tenir en compte en el model constitutiu que descriu el comportament dels teixits tous. En el camp elàstic, els models hiperelàstics són els que compleixen aquests dos requisits [6].

Pel que fa a la paret muscular, el col·lagen és el principal responsable de la resposta mecànica passiva (resistència a la deformació) mentre que les fibres musculars s'associen al comportament de contracció del múscul. Aquest darrer comportament forma part de la resposta mecànica activa (generació de força) [12]. És freqüent descriure el comportament mecànic de la paret muscular com a l'addició de les aportacions passives i actives tot i que en moltes ocasions es negligeix la part activa. En aquest treball s'estudiaran dos models, un que no té en compte la part activa (model de Pachera [23]) i un que sí que la té en compte (model d'Hernández-Grasa [15]).

⁴Variació d'una determinada propietat física quan es mesura al llarg de diferents eixos

⁵Ordenació molecular i, per tant, l'entropia varia amb la deformació

3. Modelització de la paret muscular

3.1 Introducció

Tal com s'ha justificat anteriorment, els models hiperelàstics són els que millor defineixen el comportament dels teixits tous i, per tant, el comportament de la paret muscular. La modelització dels teixits tous en el marc de la hiperelasticitat es fa mitjançant una funció de densitat d'energia de deformació expressada en termes dels invariants cinemàtics en el marc de la mecànica del medi continu [27]. La mecànica dels medis continus és una eina efectiva que permet explicar diferents fenòmens físics sense haver de detallar la complexitat de les estructures internes.

Per tal de modelitzar la paret muscular cal desenvolupar lleis constitutives que permetin aproximar el comportament físic del material que es vol estudiar. En el cas dels materials hiperelàstics, també anomenats materials elàstics de Green, la teoria constitutiva suposa l'existència d'una funció d'energia lliure de Helmholtz, Ψ , que acostuma a venir definida per unitat de volum enlloc de per unitat de massa. La resposta a la tensió dels materials hiperelàstics es deriva d'aquesta funció.

Ψ depèn del gradient de deformació F de manera que la funció d'energia es pot definir com a $\Psi(F)$. En general, F té nou components i caracteritza el comportament del moviment en l'entorn d'un determinat punt i es tracta d'un tensor ¹ de segon ordre. El gradient de deformació F és el tensor cinemàtic fonamental en la mecànica dels medis continus i és la primera mesura de deformació [16].

3.2 Tensor de deformació

Es defineix el canvi volumètric entre el volum de referència, dV , i la configuració actual a un determinat instant t i en una posició X , dv , com

$$dv = J(X, t)dV.$$

essent J la deformació jacobiana que s'obté a partir del determinant del gradient de deformació, F , i indica la relació de volum,

¹Un tensor de segon ordre, A , es pot pensar com una operació lineal que actua sobre un vector \vec{u} generant un vector \vec{v} , el qual defineix una transformació lineal que assigna un vector \vec{v} a cada vector \vec{u} [16],

$$\vec{v} = A\vec{u}.$$

$$J = \det(F). \quad (3.1)$$

En cas que no hi hagi moviment, es té $J = 1$ i s'anomenarà comportament isocor o de volum constant (incompressible). Una mesura de tensió important en les coordenades d'un material és el tensor dret de deformació de Cauchy-Green, C , ja que dóna informació sobre la configuració de referència. C es defineix com,

$$C = F^T F \quad (3.2)$$

i cal tenir en compte que F és simètric ($F = F^T$), és a dir,

$$C = F^T F = (F^T F)^T = C^T$$

i, per tant, C també és simètric. Considerant (3.1) i (3.2) s'obté,

$$\det(C) = \det(F^T \cdot F) = \det(F^T) \cdot \det(F) = \det(F) \cdot \det(F) = J \cdot J = J^2 > 0. \quad (3.3)$$

Tal com s'ha vist, C és un tensor simètric de segon ordre, per tant, se sap que diagonalitzarà en una base ortonormal. Aleshores, si λ és un valor propi de C i $v \neq 0$ el seu corresponent vector propi es té,

$$Cv = \lambda v \quad (3.4)$$

i, per tant, es dedueix que,

$$v^T Cv = v^T \lambda v = \lambda v^T v = \lambda \|v\|^2 \quad (3.5)$$

i de la mateixa manera,

$$v^T Cv = v^T F^T F v = (Fv)^T (Fv) = \|Fv\|^2 \quad (3.6)$$

aleshores, (3.5) i (3.6) demostren que λ és estrictament positiu ja que $v \neq 0$ i se sap que F té determinant no nul ($|F| \neq 0$). De (3.4) es dedueix que,

$$Cv - \lambda v = 0 \longrightarrow (C - \lambda \text{Id})v = 0 \quad (3.7)$$

per tal que (3.7) tingui solucions tals que $v \neq 0$, cal que es compleixi que,

$$\det(C - \lambda \text{Id}) = 0$$

de manera que s'obté el polinomi característic (o equació característica) de C ,

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \quad (3.8)$$

essent I_i els invariants escalars principals de C .

3.3 Invariants

Els invariants principals, I_i , tenen la següent expressió:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(C) \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left(\text{tr}(C)^2 - \text{tr}(C^2) \right) \\ I_3 &= \det(C) \end{aligned}$$

i tenint en compte (3.3) es pot reescriure el tercer invariant,

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(C) \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left(\text{tr}(C)^2 - \text{tr}(C^2) \right) = \frac{1}{2} \left(I_1^2 - \text{tr}(C^2) \right). \\ I_3 &= \det(C) = J^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

I_i són els invariants principals del tensor de tensió C . S'anomenen així ja que són independents de quin sigui el sistema de referència i, per tant, són *invariants* davant de qualsevol canvi de base. Segons el Teorema de Cayley-Hamilton es té que,

$$C^3 - I_1 \cdot C^2 + I_2 \cdot C - I_3 \cdot \text{Id} = 0$$

i tenint en compte (3.9) s'obté,

$$C^3 - \text{tr}(C) \cdot C^2 + \frac{1}{2} \left(\text{tr}(C)^2 - \text{tr}(C^2) \right) \cdot C - \det(C) \cdot \text{Id} = 0. \quad (3.10)$$

Pels següents càlculs serà necessari conèixer la primera derivada d'aquests invariants respecte C [32],

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial C} &= \text{Id} \\ \frac{\partial I_2}{\partial C} &= I_1 \cdot \text{Id} - C \\ \frac{\partial I_3}{\partial C} &= C^2 - I_1 \cdot C + I_2 \cdot \text{Id} = I_3 \cdot C^{-1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

i també la segona derivada,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 I_1}{\partial C^2} &= \mathbb{O} \\
\frac{\partial^2 I_2}{\partial C^2} &= \text{Id} \otimes \text{Id} - \mathbb{I} \\
\frac{\partial^2 I_3}{\partial C^2} &= \frac{\partial}{\partial C}(I_3 \cdot C^{-1}) = \partial C(I_3) \otimes C^{-1} + I_3 \frac{\partial C^{-1}}{\partial C} = I_3 \cdot C^{-1} \otimes C^{-1} - I_3 \cdot C^{-1} \odot C^{-1}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Cal remarcar que Id és el tensor identitat de segon ordre, \mathbb{O} el tensor nul de quart ordre i \mathbb{I} el tensor identitat de quart ordre.

3.4 Funcions d'energia

Tal com s'ha comentat anteriorment els models per a materials hiperelàstics encaixen amb el comportament de la paret abdominal que es vol modelitzar. En aquests casos, les funcions d'energia que es volen estudiar es donen en funció dels invariants principals,

$$\Psi = \Psi(I_1(C), I_2(C), I_3(C)).$$

En general, les funcions d'energia es presenten de forma desacoblada entre una part volumètrica en què el volum canvia i una part isocora en que el volum es manté constant, en aquests casos es parla de materials compressibles hiperelàstics. En aquest cas, sembla raonable dividir el gradient de deformació F entre una part volumètrica i una altra isocora. Per aconseguir-ho es fa una descomposició multiplicativa del gradient de deformació [21],

$$F = F_{iso} F_{vol}$$

la part F_{vol} és un tensor esfèric que té en compte el canvi de volum i es defineix com a,

$$F_{vol} = J^{1/3} F$$

aleshores, la part isocora resulta,

$$F_{iso} = F (F_{vol})^{-1} = F J^{-1/3} = \bar{F}.$$

Es pot aplicar aquest mateix resultat al tensor dret de deformació de Cauchy-Green, C , tenint en compte la relació (3.2) s'obté,

$$\bar{F} = J^{-1/3} F \quad \bar{C} = J^{-2/3} C \tag{3.13}$$

de manera que \bar{F} i \bar{C} s'anomenen, respectivament, gradient de deformació modificat i tensor dret de deformació de Cauchy-Green modificat. Aleshores, F i C s'associen amb la part volumètrica (canvi de volum), i \bar{F} i \bar{C} amb la part isocora (conservació del volum). Tenint tot això en compte, la funció d'energia es desacoblarà de

la manera següent,

$$\Psi(C) = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}(\bar{C}) \quad (3.14)$$

essent $\Psi_{vol}(J)$ la resposta volumètrica (canvi de volum) i $\Psi_{iso}(\bar{C})$ la resposta isocora (conservació del volum). Altres autors consideren l'efecte de la viscositat de la paret abdominal a través de models viscoelàstics que, en aquest cas, afegeixen al model hiperelàstic (3.14) un nou terme corresponent a la resposta viscosa [3]. En aquest treball, però, no es tindrà en compte la viscositat dels teixits tous per a la modelització de la paret muscular.

En el cas de materials no lineals, a part del tensor dret de deformació de Cauchy-Green es treballa amb altres tensors de tensió que acostumen a no tenir una interpretació física directa. Aquest és el cas del segon tensor de tensió de Piola-Kirchhoff (PK2), S , que és simètric i representa la tensió respecte la configuració inicial no deformada a diferència de C que representa la tensió respecte la configuració deformada,

$$S = 2 \frac{\partial \Psi(C)}{\partial C}$$

de nou, S també es desacobla amb una contribució purament volumètrica i una altra de isocora,

$$S = 2 \frac{\partial \Psi(C)}{\partial C} = S_{vol} + S_{iso}. \quad (3.15)$$

A més, per tal d'obtenir una solució numèrica del problema no lineal mitjançant el mètode Newton, és necessària la linealització de les equacions constitutives [15]. Per aquest motiu és necessari obtenir el tensor d'elasticitat, \mathbb{C} , que s'obté diferenciant (3.15) respecte C ,

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial S(C)}{\partial C}$$

de la mateixa manera, \mathbb{C} també es desacobla amb una part volumètrica i una altra de isocora,

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial S(C)}{\partial C} = \mathbb{C}_{vol} + \mathbb{C}_{iso}. \quad (3.16)$$

\mathbb{C} mesura el canvi en l'esforç que resulta d'un canvi en la tensió i es tracta d'un tensor de quart ordre. Per tant, obtenir la funció d'energia (Ψ), el segon tensor de tensió de Piola-Kirchhoff (S) i el tensor d'elasticitat (\mathbb{C}) serà necessari per poder resoldre el problema que es planteja. En els següents dos apartats es descriuen algunes formes de la funció d'energia Ψ que s'utilitzen de forma habitual en les lleis constitutives.

3.5 Part volumètrica

Per a materials compressibles, Ogden proposa el següent model [22],

$$\Psi_{vol}(J) = K\mathcal{G}(J) \quad \text{amb} \quad \mathcal{G} = \beta^{-2} \left(\beta \ln J + J^{-\beta} - 1 \right)$$

essent K el mòdul de compressibilitat². Simo i Miehe treballen amb la versió alternativa per a $\beta = -2$ [25],

$$\Psi_{vol}(J) = \frac{1}{4}K \left(J^2 - 1 - 2\ln J \right)$$

Una versió simplificada de l'anterior funció d'energia és,

$$\Psi_{vol}(J) = \frac{1}{2}K(J-1)^2. \quad (3.17)$$

Aquesta funció és la més utilitzada en la majoria de programes d'elements finits [29] i diversos autors l'utilitzen. En aquest cas, el segon tensor de Piola-Kirchhoff resulta,

$$\begin{aligned} S_{vol} &= 2 \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial C} = 2 \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{1}{2}K(J-1)^2 \right) = 2 \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{1}{2}K(J-1)^2 \right) \frac{\partial J}{\partial C} \\ &= 2 \frac{1}{2}K \frac{\partial}{\partial J} (J-1) \frac{1}{2J} \frac{\partial I_3}{\partial C} = \frac{K(J-1)}{J} I_3 C^{-1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

pel que fa al tensor d'elasticitat s'obté,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{vol} &= 2 \frac{\partial S_{vol}}{\partial C} = 2 \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \frac{\partial I_3}{\partial C} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \right) \frac{\partial I_3}{\partial C} + 2 \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \cdot \frac{\partial^2 I_3}{\partial C^2} \\ &= 2 \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \right) \frac{\partial J}{\partial C} \cdot \frac{\partial I_3}{\partial C} + 2 \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \cdot \frac{\partial^2 I_3}{\partial C^2} \\ &= 2 \left(\frac{-1}{J^2} \cdot \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial J^2} \right) \frac{\partial J}{\partial C} \cdot \frac{\partial I_3}{\partial C} + 2 \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \cdot \frac{\partial^2 I_3}{\partial C^2} \\ &= 2 \left(\frac{-1}{J^2} \cdot \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial J^2} \right) \frac{1}{2J} \frac{\partial I_3}{\partial C} \otimes \frac{\partial I_3}{\partial C} + 2 \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \cdot \frac{\partial^2 I_3}{\partial C^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial J^2} - \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \right) \frac{1}{J^2} \cdot \frac{\partial I_3}{\partial C} \otimes \frac{\partial I_3}{\partial C} + 2 \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \cdot \frac{\partial^2 I_3}{\partial C^2} \end{aligned}$$

i tenint en compte les derivades,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} = K(J-1) \\ \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial J^2} = \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \right) = K \end{cases}$$

resulta,

²El mòdul de compressibilitat (K) mesura la resistència a la compressibilitat d'un material. Es defineix com la relació entre l'augment infinitesimal de la pressió respecte el decreixement relatiu del volum i s'obté de forma experimental.

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{vol} &= \left(K - \frac{K(J-1)}{J} \right) \frac{1}{J^2} \cdot \frac{\partial I_3}{\partial C} \otimes \frac{\partial I_3}{\partial C} + 2 \frac{K(J-1)}{J} \cdot \frac{\partial^2 I_3}{\partial C^2} \\
&= \frac{K}{J^3} \cdot \frac{\partial I_3}{\partial C} \otimes \frac{\partial I_3}{\partial C} + 2 \frac{K(J-1)}{J} \cdot \frac{\partial^2 I_3}{\partial C^2} \\
&= \frac{K}{J} \left(\frac{1}{J^2} \cdot \frac{\partial I_3}{\partial C} \otimes \frac{\partial I_3}{\partial C} + 2(J-1) \cdot \frac{\partial^2 I_3}{\partial C^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Una altra forma de la part volumètrica és (3.20) que en aquest cas depèn de la pressió hidroestàtica $p = \frac{\partial \Psi_{vol}(J)}{\partial J}$,

$$\Psi_{vol}(J) = -\frac{1}{2}p(I_3 - 1). \tag{3.20}$$

En aquest cas, el segon tensor de Piola-Kirchhoff resulta,

$$\begin{aligned}
S_{vol} &= 2 \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial C} = 2 \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \cdot \frac{\partial J}{\partial C} \stackrel{\frac{\partial I_3}{\partial C} = \frac{2J\partial J}{\partial C}}{\uparrow} 2 \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \cdot \frac{\partial I_3}{\partial C} \cdot \frac{1}{2J} = 2 \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \cdot I_3 \cdot C^{-1} \cdot \frac{1}{2J} \\
&= 2 \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \cdot J^\sharp \cdot C^{-1} \cdot \frac{1}{2J} = \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \cdot J \cdot C^{-1} = JpC^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

De la mateixa manera es pot trobar el tensor d'elasticitat en aquest cas,

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{vol} &= 2 \frac{\partial S_{vol}}{\partial C} = 2 \frac{\partial}{\partial C} (Jp \cdot C^{-1}) = 2 \frac{\partial Jp}{\partial C} \cdot C^{-1} + 2Jp \frac{\partial C^{-1}}{\partial C} \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial J} (Jp) \frac{\partial J}{\partial C} \cdot C^{-1} - 2Jp \cdot C^{-1} \odot C^{-1} \\
&= 2 \left(p + J \frac{dp}{dJ} \right) \frac{\partial J}{\partial C} \cdot C^{-1} - 2Jp \cdot C^{-1} \odot C^{-1} \\
&= 2 \left(p + J \frac{dp}{dJ} \right) \frac{1}{2J} \frac{\partial I_3}{\partial C} \cdot C^{-1} - 2Jp \cdot C^{-1} \odot C^{-1} \\
&= \left(p + J \frac{dp}{dJ} \right) \frac{1}{J} I_3 \cdot C^{-1} \otimes C^{-1} - 2Jp \cdot C^{-1} \odot C^{-1} \\
&= J \left(p + J \frac{dp}{dJ} \right) \cdot C^{-1} \otimes C^{-1} - 2Jp \cdot C^{-1} \odot C^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

3.6 Materials compostos

Nombrosos materials estan formats per un material base i una o més famílies de fibres. Aquests materials heterogenis s'anomenen materials compostos o compostos reforçats amb fibres i la seva resposta mecànica

presenta anisotropia [16]. Tal com s'ha vist a la secció 2.4, els teixits tous precisament presenten aquest tipus d'estructura. Per aquest motiu, entendre el seu comportament mecànic és important en el disseny de malles per a la reparació de les hèrnies ja que els materials compostos són més eficients.

La tensió en un determinat punt d'aquests materials no només depèn del gradient de deformació F sinó també de la direcció de la fibra. Aquesta direcció ve definida pel vector unitari n_0 . Ja que la deformació dependrà de la direcció, la funció d'energia, Ψ , serà una funció tant del tensor dret de deformació de Cauchy-Green, C , com de n_0 que defineix la direcció local de les fibres de reforç orientades en la configuració inicial [23]. Per tal de poder treballar amb aquesta direccional principal de la fibra, s'obindrà el tensor de segon ordre $N = n_0 \otimes n_0$ i la funció d'energia vindrà definida com a,

$$\Psi = \Psi(C, N) \quad (3.23)$$

L'anisotropia del material provoca l'aparició de dos nous invariants, anomenats pseudoinvariants, que contribueixen en la funció d'energia i que depenen de C i n_0 ,

$$\begin{aligned} I_4(C, n_0) &= C : (n_0 \otimes n_0) = n_0^T \cdot C \cdot n_0 \\ I_5(C, n_0) &= C^2 : (n_0 \otimes n_0) = n_0^T \cdot C^2 \cdot n_0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

aquests materials descriuen les propietats de la fibra i la seva relació amb la resta de materials del compost [16]. Per a materials compostos amb una sola fibra de reforçament, la funció d'energia resulta,

$$\Psi = \Psi(I_1(C), I_2(C), I_3(C), I_4(C, n_0), I_5(C, n_0)). \quad (3.25)$$

En cas de tenir més d'una família de fibres, la funció d'energia haurà de tenir en compte les noves direccions d'aquestes fibres i apareixeran nous pseudoinvariants I_6, I_7, I_8, \dots associats a l'anisotropia generada per les noves fibres.

3.7 Part isocora

Tal com s'ha indicat a (3.14) la part isocora de la funció d'energia es dona en funció del tensor dret de deformació de Cauchy-Green modificat, \bar{C} , per tant, és necessari obtenir els invariants modificats, juntament amb les seves derivades, per poder definir la part isocora de la funció d'energia. En aquest cas, no només s'obtenen els tres invariants principals, sinó també els anomenats pseudoinvariants, I_4 i I_5 . Aquests depenen de \bar{C} i del vector unitari n_0 . Els invariants són [32],

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \text{tr}(\bar{C}) = J^{-2/3} I_1 \\ \bar{I}_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}(\bar{C})^2 - \text{tr}(\bar{C}^2)) = J^{-4/3} I_2 \\ \bar{I}_3 = \det(\bar{C}) = 1 \\ \bar{I}_4 = \bar{C} : (n_0 \otimes n_0) = n_0^T \cdot \bar{C} \cdot n_0 = J^{-2/3} I_4 \\ \bar{I}_5 = \bar{C}^2 : (n_0 \otimes n_0) = n_0^T \cdot \bar{C}^2 \cdot n_0 = J^{-4/3} I_5 \end{cases} \quad (3.26)$$

i la primera i segona derivada d'aquests resulta [16],

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} = \text{Id} \\ \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} = \bar{I}_1 \cdot \text{Id} - \bar{C} \\ \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} = \bar{C}^2 - \bar{I}_1 \cdot \bar{C} + \bar{I}_2 \cdot \text{Id} \\ \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} = n_0 \otimes n_0 \\ \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{C}} = n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \bar{C}^2} = \mathbb{O} \\ \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \bar{C}^2} = \text{Id} \otimes \text{Id} - \mathbb{I}d \\ \frac{\partial^2 \bar{I}_3}{\partial \bar{C}^2} = \bar{I}_3 \cdot \bar{C}^{-1} \otimes \bar{C}^{-1} - \bar{I}_3 \cdot \bar{C}^{-1} \odot \bar{C}^{-1} \\ \frac{\partial^2 \bar{I}_4}{\partial \bar{C}^2} = \mathbb{O} \\ \frac{\partial^2 \bar{I}_5}{\partial \bar{C}^2} = 2 \cdot n_0 \otimes \text{Id} \otimes n_0 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

La part isocora de la funció d'energia, ja que es considera incompressible (volum constant), compleix que $\bar{I}_3 = 1$ i es pot expressar com a funció dels altres quatre invariants independents,

$$\Psi_{iso} = \Psi(\bar{I}_1(\bar{C}), \bar{I}_2(\bar{C}), \bar{I}_4(\bar{C}, n_0), \bar{I}_5(\bar{C}, n_0)). \quad (3.28)$$

Tal com s'ha vist a la secció 3.5, l'invariant I_3 serà el que participarà de la part volumètrica de la funció d'energia. De manera que la funció d'energia, de forma global, tindrà en compte els cinc invariants repartits en cadascuna de les dues parts. Per a la part isocora, el segon tensor de Piola-Kirchhoff resulta,

$$\begin{aligned} S_{iso} &= 2 \frac{\partial \Psi_{iso}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_4, \bar{I}_5)}{\partial \bar{C}} = 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2} \cdot \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_5} \cdot \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{C}} \\ &= 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \text{Id} + 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2} \cdot (\bar{I}_1 \cdot \text{Id} - \bar{C}) + 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_4} \cdot n_0 \otimes n_0 + 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_5} \cdot (n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0) \\ &= 2 \left(\frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2} \right) \cdot \text{Id} - 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2} \cdot \bar{C} + 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_4} \cdot n_0 \otimes n_0 + 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_5} \cdot (n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Seguidament es calcula el tensor d'elasticitat per a la part isocora,

$$\bar{C}_{iso} = J^{4/3} \bar{C} = 2 \frac{\partial S_{iso}}{\partial \bar{C}} = 4 \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{C}^2}, \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{iso}}{\partial \bar{C}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left(2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2} \cdot \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_5} \cdot \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{C}} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left(2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_1} \right) \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + \left(2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_1} \right) \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \bar{C}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left(2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2} \right) \otimes \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} + \left(2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2} \right) \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \bar{C}^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left(2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_4} \right) \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} + \left(2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_4} \right) \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_4}{\partial \bar{C}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left(2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_5} \right) \otimes \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{C}} + \left(2 \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_5} \right) \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_5}{\partial \bar{C}^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Sigui,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} = \text{Id} \otimes (\bar{I}_1 \cdot \text{Id} - \bar{C}) = \bar{I}_1 \cdot \text{Id} \otimes \text{Id} - \text{Id} \otimes \bar{C} \\ \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} = (\bar{I}_1 \cdot \text{Id} - \bar{C}) \otimes (\bar{I}_1 \cdot \text{Id} - \bar{C}) = \bar{I}_1^2 \cdot \text{Id} \otimes \text{Id} - \bar{I}_1 \cdot \text{Id} \otimes \bar{C} - \bar{I}_1 \cdot \bar{C} \otimes \text{Id} + \bar{C} \otimes \bar{C} \\ \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} = n_0 \otimes n_0 \otimes (\bar{I}_1 \cdot \text{Id} - \bar{C}) = \bar{I}_1 \cdot n_0 \otimes n_0 \otimes \text{Id} - n_0 \otimes n_0 \otimes \bar{C} \\ \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} = (n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0) \otimes (\bar{I}_1 \cdot \text{Id} - \bar{C}) = \\ = \bar{I}_1 \cdot n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 \otimes \text{Id} - n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 \otimes \bar{C} + \bar{I}_1 \cdot n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0 \otimes \text{Id} - n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0 \otimes \bar{C} \end{array} \right. \quad (3.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} = \text{Id} \otimes n_0 \otimes n_0 \\ \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} = (\bar{I}_1 \cdot \text{Id} - \bar{C}) \otimes n_0 \otimes n_0 = \bar{I}_1 \cdot \text{Id} \otimes n_0 \otimes n_0 - \bar{C} \otimes n_0 \otimes n_0 \\ \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} = n_0 \otimes n_0 \otimes n_0 \otimes n_0 \\ \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} = (n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0) \otimes n_0 \otimes n_0 = n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 \otimes n_0 \otimes n_0 + n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0 \otimes n_0 \otimes n_0 \end{array} \right. \quad (3.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{C}} = \text{Id} \otimes (n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0) = \text{Id} \otimes n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + \text{Id} \otimes n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0 \\ \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{C}} = (\bar{I}_1 \cdot \text{Id} - \bar{C}) \otimes (n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0) = \\ = \bar{I}_1 \cdot \text{Id} \otimes n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + \bar{I}_1 \cdot \text{Id} \otimes n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0 - \bar{C} \otimes n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 - \bar{C} \otimes n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0 \\ \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{C}} = n_0 \otimes n_0 \otimes (n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0) = n_0 \otimes n_0 \otimes n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + n_0 \otimes n_0 \otimes n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0 \\ \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{C}} = (n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0) \otimes (n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0) = \\ = n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 \otimes n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 \otimes n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0 + \\ + n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0 \otimes n_0 \otimes \bar{C} \cdot n_0 + n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0 \otimes n_0 \cdot \bar{C} \otimes n_0 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Tenint en compte (3.33), (3.34), (3.35), (3.36), l'expressió del tensor elasticitat, $\bar{\mathbb{C}}_{iso} = J^{4/3} \bar{\mathbb{C}}$, se simplifica agrupant per tensors de la següent manera,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{C}}_{iso} &= J^{4/3} \bar{\mathbb{C}} = 2 \frac{\partial S_{vol}}{\partial \bar{\mathbb{C}}} = 4 \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial \bar{\mathbb{C}}^2} = A_1 \cdot \text{Id} \otimes \text{Id} + A_2 \cdot (\text{Id} \otimes \bar{\mathbb{C}} + \bar{\mathbb{C}} \otimes \text{Id}) + A_3 \cdot \bar{\mathbb{C}} \otimes \bar{\mathbb{C}} + A_4 \cdot \text{Id} + \\ &+ A_5 \cdot (\text{Id} \otimes n_0 \otimes n_0 + n_0 \otimes n_0 \otimes \text{Id}) + A_6 \cdot (\bar{\mathbb{C}} \otimes n_0 \otimes n_0 + n_0 \otimes n_0 \otimes \bar{\mathbb{C}}) \\ &+ A_7 \cdot (n_0 \otimes n_0 \otimes n_0 \otimes n_0) + A_8 \cdot \left(\text{Id} \otimes \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{\mathbb{C}}} + \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{\mathbb{C}}} \otimes \text{Id} \right) + A_9 \cdot \left(\bar{\mathbb{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{\mathbb{C}}} + \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{\mathbb{C}}} \otimes \bar{\mathbb{C}} \right) \\ &+ A_{10} \cdot \left(\frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{\mathbb{C}}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{\mathbb{C}}} \right) + A_{11} \cdot \left(n_0 \otimes n_0 \otimes \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{\mathbb{C}}} + \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{\mathbb{C}}} \otimes n_0 \otimes n_0 \right) + A_{12} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_5}{\partial \bar{\mathbb{C}}^2} \end{aligned} \quad (3.37)$$

essent els coeficients A_i ,

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = 4 \cdot \left(\frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_1} + 2\bar{I}_1 \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_1} + \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2} + \bar{I}_1^2 \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_2} \right) \\ A_2 = -4 \cdot \left(\frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_2} \right) \\ A_3 = 4 \cdot \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_2} \\ A_4 = -4 \cdot \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2} \\ A_5 = 4 \cdot \left(\frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_4 \partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_4 \partial \bar{I}_2} \right) \\ A_6 = -4 \cdot \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_4 \partial \bar{I}_2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A_7 = 4 \cdot \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_4 \partial \bar{I}_4} \\ A_8 = 4 \cdot \left(\frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_5 \partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_5 \partial \bar{I}_2} \right) \\ A_9 = -4 \cdot \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_5 \partial \bar{I}_2} \\ A_{10} = 4 \cdot \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_5 \partial \bar{I}_5} \\ A_{11} = 4 \cdot \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_5 \partial \bar{I}_4} \\ A_{12} = 4 \cdot \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_5} \end{array} \right.$$

4. Models desenvolupats

En aquest treball s'han estudiat dos models de la literatura. El primer que estudia el comportament mecànic passiu de la paret abdominal sana, model de Pachera i altres [23] i el segon que té en compte la part passiva i també el comportament actiu del teixit tenint en compte les direccions del col·lagen i de les fibres musculars, model d'Hernández, Grasa i altres [15].

4.1 Model de Pachera

El model de Pachera [23] es basa en un comportament hiperelàstic passiu reforçat amb fibra i gairebé incompressible. Les propietats mecàniques en aquest cas inclouen la presència de fibres de col·lagen orientades i condicions de conservació del volum degut a l'alt contingut en aigua. La mateixa formulació s'assumeix també per a les fibres musculars considerant un comportament passiu dels músculs.

Aleshores, aquest model negligeix la resposta activa del múscul, $\Psi_a = 0$, i només tindrà en compte la resistència a la deformació (resposta mecànica passiva), $\Psi_p \neq 0$. Es modelitzarà com un material compost format per un compost base (*ground matrix*) amb una aportació a la funció d'energia, Ψ_{fm} , que es considerarà la part volumètrica del model i un terme corresponent al reforçament amb fibres de col·lagen, Ψ_{ff} , considerat la part isocora. El vector unitari n_0 definirà la direcció d'aquestes fibres de reforç en la configuració inicial del teixit.

Degut a l'estructura dels teixits i els músculs, el model s'expressa com a suma de dos termes,

$$\Psi_f = \Psi_{fm} + \Psi_{ff} = \left[\frac{\mu_f}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{k_{fv}}{2}(J^2 - 1 - 2 \ln J) \right] + \frac{\alpha_{f1}}{2\alpha_{f2}} \left[\exp(\alpha_{f2}(\bar{I}_4 - 1)^2) - 1 \right] \quad (4.1)$$

essent k_{fv} el mòdul de compressibilitat inicial del compost base i μ_f la seva rigidesa a cisalla inicial. Per altra banda, α_{f1} (paràmetre de tensió) i α_{f2} (paràmetre adimensional) són dos paràmetres constitutius relacionats amb les fibres col·làgenes i amb la resposta passiva de les fibres musculars.

El PK2 vindrà donat per,

$$S = 2 \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{ff}}{\partial \bar{C}} = S_m + S_f. \quad (4.2)$$

Pel que fa al compost base,

$$\begin{aligned}
S_m &= 2 \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{C}} = 2 \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_3} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \\
&= 2 \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + \frac{\cancel{2} \partial \Psi_{fm}}{\cancel{2} J \partial J} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \\
&= 2 \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + \frac{\partial \Psi_{fm}}{J \partial J} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}}.
\end{aligned}$$

Tenint en compte que $\bar{I}_3 = J^2 \Rightarrow \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} = 2J \frac{\partial J}{\partial \bar{C}}$. Les derivades parcials resulten,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} = \frac{\mu_f}{2} \\ \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J} = \frac{k_{fv}}{2} \left(2J - \frac{2}{J} \right) \end{cases}$$

de manera que l'expressió del PK2 pel compost base resulta,

$$\begin{aligned}
S_m &= \cancel{2} \cdot \frac{\mu_f}{\cancel{2}} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + \frac{1}{J} \cdot \frac{k_{fv}}{2} \left(2J - \frac{2}{J} \right) \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \\
&= \mu_f \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + k_{fv} \left(1 - \frac{1}{J^2} \right) \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \\
&= \mu_f \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + k_{fv} \left(1 - \frac{1}{\bar{I}_3} \right) \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Pel que fa al reforç de col·lagen es té,

$$S_f = 2 \frac{\partial \Psi_{ff}}{\partial \bar{C}} = 2 \frac{\partial \Psi_{ff}}{\partial \bar{I}_4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}}$$

i tenint en compte que,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_{ff}}{\partial \bar{I}_4} = \frac{\alpha_{f1}}{\cancel{2\alpha_{f2}}} \cdot \exp(\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2) \cdot \cancel{2\alpha_{f2}} (\bar{I}_4 - 1) \\ \quad = \alpha_{f1} (\bar{I}_4 - 1) \cdot \exp(\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2) \end{cases}$$

resulta,

$$S_f = 2\alpha_{f1} (\bar{I}_4 - 1) \cdot \exp(\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2) \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}}. \tag{4.4}$$

La suma dels termes (4.3) i (4.4) dóna l'expressió del PK2 per al model de Pachera,

$$S = \mu_f \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + k_{fv} \left(1 - \frac{1}{\bar{I}_3} \right) \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + 2\alpha_{f1} (\bar{I}_4 - 1) \cdot \exp(\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2) \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}}. \tag{4.5}$$

Seguidament s'obté el tensor d'elasticitat, \mathbb{C} , que de nou es desacobla en dues parts,

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial S}{\partial \bar{C}} = \mathbb{C}_m + \mathbb{C}_f = 2 \frac{\partial S_m}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial S_f}{\partial \bar{C}}. \quad (4.6)$$

Pel que fa al compost base, recordant que,

$$S_m = 2 \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + \frac{1}{J} \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}}$$

s'obté,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_m}{\partial \bar{C}} &= 2 \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left(\frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \right) \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \bar{C}^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left(\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J} \right) \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_3}{\partial \bar{C}^2} = \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial \bar{I}_1} \left(\frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \right) \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \right) \frac{\partial J}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \bar{C}^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{I}_1} \left(\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J} \right) \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J} \right) \frac{\partial J}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_3}{\partial \bar{C}^2} = \\ &= 2 \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial J \partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial J}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \bar{C}^2} + \\ &+ \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1 \partial J} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + \left(\frac{-1}{J^2} \cdot \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J} + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial J^2} \right) \frac{\partial J}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_3}{\partial \bar{C}^2} \end{aligned}$$

i tenint en compte que $I_3 = J^2 \rightarrow \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} = \frac{2J \partial J}{\partial \bar{C}} \rightarrow \frac{\partial J}{\partial \bar{C}} = \frac{\partial \bar{I}_3}{2J \partial \bar{C}}$ s'obté,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_m}{\partial \bar{C}} &= 2 \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + \frac{2}{2J} \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial J \partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \bar{C}^2} + \\ &+ \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1 \partial J} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + \frac{1}{2J^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial J^2} - \frac{1}{J} \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J} \right) \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_3}{\partial \bar{C}^2} = \\ &= 2 \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + \frac{2}{2J} \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial J \partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \bar{C}^2} + \\ &+ \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1 \partial J} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + \frac{1}{2J^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial J^2} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} - \frac{1}{2J^3} \cdot \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_3}{\partial \bar{C}^2}. \end{aligned}$$

Les derivades parcials resulten,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial J \partial \bar{I}_1} = 0 \end{array} \right. \quad \text{i} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1 \partial J} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial J^2} = \frac{k_{fv}}{2} \left(2 + \frac{2}{J^2} \right) \end{array} \right.$$

per tant,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_m}{\partial \bar{C}} &= 2 \underbrace{\frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1}}_{=0} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + \frac{1}{J} \underbrace{\frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial J \partial \bar{I}_1}}_{=0} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \underbrace{\frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1}}_{=\frac{\mu_f}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \bar{C}^2}}_{=0} + \\
&+ \frac{1}{J} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial \bar{I}_1 \partial J}}_{=0} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + \frac{1}{2J^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \Psi_{fm}}{\partial J^2}}_{=\frac{k_{fv}}{2} \left(2 + \frac{2}{J^2}\right)} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \\
&- \frac{1}{2J^3} \cdot \underbrace{\frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J}}_{=\frac{k_{fv}}{2} (2J - \frac{2}{J})} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + \frac{1}{J} \cdot \underbrace{\frac{\partial \Psi_{fm}}{\partial J}}_{=\frac{k_{fv}}{2} (2J - \frac{2}{J})} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_3}{\partial \bar{C}^2} \\
&= 0 + \frac{1}{2J^2} \left(k_{fv} + \frac{k_{fv}}{J^2} \right) \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} - \frac{1}{2J^3} \left(k_{fv} J - \frac{k_{fv}}{J} \right) \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + k_{fv} \left(1 - \frac{1}{J^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{I}_3}{\partial \bar{C}^2} \\
&= \frac{k_{fv}}{2J^2} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + \frac{k_{fv}}{2J^4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} - \frac{k_{fv}}{2J^2} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + \frac{k_{fv}}{2J^4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + k_{fv} \left(1 - \frac{1}{J^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{I}_3}{\partial \bar{C}^2} \\
&= \frac{k_{fv}}{J^4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + k_{fv} \left(1 - \frac{1}{J^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{I}_3}{\partial \bar{C}^2}.
\end{aligned}$$

Aleshores,

$$\mathbb{C}_m = 2 \frac{\partial S_m}{\partial \bar{C}} = 2 \frac{k_{fv}}{J^4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + 2k_{fv} \left(1 - \frac{1}{J^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{I}_3}{\partial \bar{C}^2}. \quad (4.7)$$

Pel que fa a les fibres col·làgenes,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_f}{\partial \bar{C}} &= 2 \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left(\frac{\partial \Psi_{ff}}{\partial \bar{I}_4} \right) \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{ff}}{\partial \bar{I}_4} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_4}{\partial \bar{C}^2} \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial \bar{I}_4} \left(\frac{\partial \Psi_{ff}}{\partial \bar{I}_4} \right) \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{ff}}{\partial \bar{I}_4} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_4}{\partial \bar{C}^2} \\
&= 2 \frac{\partial^2 \Psi_{ff}}{\partial \bar{I}_4^2} \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \Psi_{ff}}{\partial \bar{I}_4} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_4}{\partial \bar{C}^2}.
\end{aligned}$$

Les derivades parcials resulten,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi_{ff}}{\partial \bar{I}_4^2} = \alpha_{f1} \exp \left(\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2 \right) + \alpha_{f1} (\bar{I}_4 - 1) \cdot \exp \left(\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2 \right) \cdot 2\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1) \\ \phantom{\frac{\partial^2 \Psi_{ff}}{\partial \bar{I}_4^2}} = \alpha_{f1} \exp \left(\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2 \right) \left[1 + 2\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2 \right] \end{cases}$$

aleshores,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_f}{\partial \bar{C}} &= 2\alpha_{f1} \exp\left(\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2\right) \left[1 + 2\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2\right] \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} + 2\alpha_{f1} (\bar{I}_4 - 1) \cdot \exp\left(\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2\right) \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_4}{\partial \bar{C}^2} \\
&= 2\alpha_{f1} \exp\left(\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2\right) \left[\left(1 + 2\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2\right) \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} + (\bar{I}_4 - 1) \frac{\partial^2 \bar{I}_4}{\partial \bar{C}^2} \right]
\end{aligned}$$

i tenint en compte que $\frac{\partial^2 \bar{I}_4}{\partial \bar{C}^2} = \mathbb{O}$, resulta,

$$\mathbb{C}_f = 2 \frac{\partial S_f}{\partial \bar{C}} = 4\alpha_{f1} \exp\left(\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2\right) \left(1 + 2\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2\right) \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}}. \quad (4.8)$$

Aleshores el tensor d'elasticitat per al model de Pachera resulta,

$$\mathbb{C} = 2 \frac{k_{fv}}{J^4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_3}{\partial \bar{C}} + 2k_{fv} \left(1 - \frac{1}{J^2}\right) \frac{\partial^2 \bar{I}_3}{\partial \bar{C}^2} + 4\alpha_{f1} \exp\left(\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2\right) \left(1 + 2\alpha_{f2} (\bar{I}_4 - 1)^2\right) \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}}. \quad (4.9)$$

4.2 Model d'Hernández-Grasa

El model de d'Hernández-Grasa [15], a diferència de l'anterior, també té en compte el comportament actiu del teixit considerant, en aquest cas, dues direccions principals: les del col·lagen, m_0 , i la de les fibres musculars, n_0 . Aleshores, la funció d'energia en aquest model dependrà del gradient de deformació F , de la contracció o elongació de les fibres musculars λ_a , dels tensors estructurals que defineixen les dues direccions principals, $M = m_0 \otimes m_0$ i $N = n_0 \otimes n_0$, i de la deformació elàstica dels ponts creuats¹ (*cross-bridges*) C_e ,

$$\Psi = \Psi(C, C_e, \lambda_a, N, M). \quad (4.10)$$

Com és habitual, aquesta funció d'energia es desacobla en dues parts, la volumètrica, Ψ_{vol} , i la isocora, Ψ_{iso} . En aquest cas però, a més a més, la part isocora es torna a desacoblar en dues part més, una que considera la contribució passiva deguda al col·lagen i l'elastina, Ψ_p , i una que té en compte la resposta activa deguda a les fibres musculars, Ψ_a ,

$$\Psi = \Psi_{vol} + \Psi_{iso} = \Psi_{vol}(J) + \bar{\Psi}_p(\bar{C}, N) + \bar{\Psi}_a(\bar{C}_e, \bar{\lambda}_a, M) \quad (4.11)$$

i en funció dels invariants es té,

$$\Psi = \Psi_{vol}(J) + \bar{\Psi}_p(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_4) + \bar{\Psi}_a(\bar{J}_4) \quad (4.12)$$

essent \bar{J}_4 el pseudoinvariant associat a \bar{C}_e i a la direcció preferent donada pel vector unitari m_0 ,

$$\bar{J}_4 = \bar{C}_e : (m_0 \otimes m_0) = m_0^T \cdot \bar{C}_e \cdot m_0.$$

¹Aquestes estructures són responsables del moviment i la força desenvolupada durant la contracció muscular.

S'assumeix que la deformació associada a l'activitat muscular es pot modelitzar a partir de dos processos ficticis [28] (vegeu Figura 4.1).

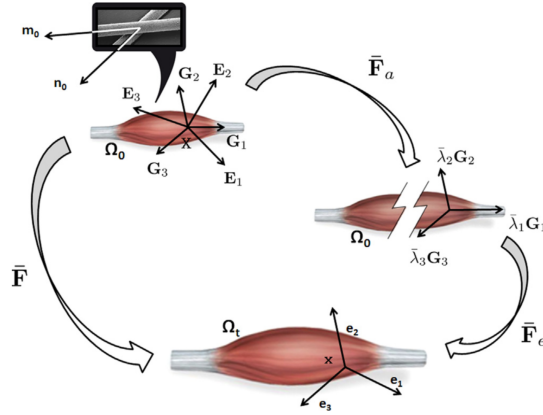


Figura 4.1: Esquema de la configuració definida pels dos processos ficticis d'Hernández-Grasa.

El primer, \bar{F}_e , associat amb el moviment relatiu entre la miosina² i l'actina³ i el segon, \bar{F}_a , vinculat amb la deformació elàstica dels punts creuats. Aleshores, el gradient de deformació es pot expressar de la següent manera,

$$\bar{F} = \bar{F}_e \bar{F}_a. \quad (4.13)$$

D'aquesta manera, la deformació elàstica deguda als punts creuats, \bar{C}_e , vindrà definida per,

$$\bar{C}_e = \bar{F}_e^T \bar{F}_e = \bar{F}_a^T \bar{C} \bar{F}_a^{-1}. \quad (4.14)$$

Per a un model hiperelàstic, i tenint en compte que el marc termodinàmic general es particularitza per modelar la contracció muscular amb un enfocament electromecànic [15], es té,

$$\Psi = \Psi_{vol}(J) + \bar{\Psi}_p(\bar{I}_1, \bar{I}_4) + f_1(\bar{\lambda}_a) f_2(f_r, t) \bar{\Psi}'_a(\bar{J}_4) \quad (4.15)$$

essent $f_1(\bar{\lambda}_a)$ un paràmetre que considera la superposició entre els filaments d'actina i miosina i $f_2(f_r, t)$ representa la resposta de l'estímul extern de l'experimentació que depèn de la freqüència de la senyal elèctrica, f_r , i del temps total de l'estímul, t .

La part volumètrica d'aquest model, $\Psi_{vol}(J)$, que no es concreta, es pot considerar qualsevol de les que s'han descrit a l'apartat 3.5. Concretament es considerarà (3.17) amb el PK2 (3.18) i el tensor d'elasticitat (3.19).

La part passiva de la funció d'energia se simula amb la següent expressió considerant que la resposta deguda al col·lagen és anisotròpica (en cas contrari, veure punt 3 de [15]),

$$\bar{\Psi}_p = c_1 (\bar{I}_1 - 3) + \frac{c_3}{c_4} \left[\exp \left(c_4 (\bar{I}_4 - \bar{I}_{40}) \right) - c_4 (\bar{I}_4 - \bar{I}_{40}) - 1 \right] \quad (4.16)$$

²Proteïna fibrosa que forma part del teixit muscular i que és responsable de les propietats contràctils i elàstiques del múscul.

³Proteïna del múscul, de solucions molt viscoses, que es combina amb la miosina per a formar l'actomiosina.

essent c_1 i c_3 constants positives del material que tenen unitat de tensió (MPa) i c_4 i \bar{I}_{4_0} paràmetres positius adimensionals. En aquest cas, el PK2 resulta,

$$\begin{aligned}
S_p &= 2 \frac{\partial \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{C}} = 2 \frac{\partial \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \\
&= 2c_1 \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \cdot \frac{c_3}{c_4} \left[\exp \left(c_4 (\bar{I}_4 - \bar{I}_{4_0}) \right) \cdot c_4 - c_4 \right] \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \\
&= 2c_1 \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2c_3 \left[\exp \left(c_4 (\bar{I}_4 - \bar{I}_{4_0}) \right) - 1 \right] \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \\
&= 2c_1 \cdot \text{Id} + 2c_3 \left[\exp \left(c_4 (\bar{I}_4 - \bar{I}_{4_0}) \right) - 1 \right] \cdot n_0 \otimes n_0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

i el tensor d'elasticitat serà,

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_p &= 2 \frac{\partial \bar{S}_p}{\partial \bar{C}} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left(2 \frac{\partial \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 2 \frac{\partial \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \right) \\
&= 2 \left[\frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left(2 \frac{\partial \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_1} \right) \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + \left(2 \frac{\partial \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_1} \right) \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \bar{C}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \left(2 \frac{\partial \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_4} \right) \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} + \left(2 \frac{\partial \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_4} \right) \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_4}{\partial \bar{C}^2} \right] \\
&= 4 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 4 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} + 4 \frac{\partial \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \bar{C}^2} + \\
&\quad + 4 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_4 \partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} + 4 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_4 \partial \bar{I}_4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} + 4 \frac{\partial \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_4} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_4}{\partial \bar{C}^2} \\
&= 4 \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}}}_{=0} + 4 \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}}}_{=0} + 4 \frac{\partial \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_1} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \bar{C}^2}}_{=0} + \\
&\quad + 4 \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_4 \partial \bar{I}_1} \cdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}}}_{=0} + 4 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_4 \partial \bar{I}_4} \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} + 4 \frac{\partial \bar{\Psi}_p}{\partial \bar{I}_4} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{I}_4}{\partial \bar{C}^2}}_{=0} \\
&= 4c_3 \left[\exp \left(c_4 (\bar{I}_4 - \bar{I}_{4_0}) \right) \cdot c_4 \right] \cdot \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{C}} \\
&= 4c_3 \cdot c_4 \cdot \exp \left(c_4 (\bar{I}_4 - \bar{I}_{4_0}) \right) \cdot (n_0 \otimes n_0) \otimes (n_0 \otimes n_0).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

La part activa del model, $\bar{\Psi}'_a$, es defineix com,

$$\bar{\Psi}'_a = \frac{1}{2} P_0 (\bar{J}_4 - 1)^2 \tag{4.19}$$

essent P_0 un factor de proporcionalitat relacionat amb la tensió màxima deguda a la contracció muscular. El PK2 resulta⁴,

⁴Cal considerar que les derivades del pseudoinvariant \bar{J}_4 segueixen el mateix patró que les de \bar{I}_4 , (3.27), però amb el vector unitari m_0 .

$$\begin{aligned}
S'_a &= 2 \frac{\partial \bar{\Psi}'_a}{\partial \bar{C}_e} = 2 \frac{\partial \bar{\Psi}'_a}{\partial \bar{J}_4} \cdot \frac{\partial \bar{J}_4}{\partial \bar{C}_e} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} P_0 \cdot 2 (\bar{J}_4 - 1) \cdot \frac{\partial \bar{J}_4}{\partial \bar{C}_e} \\
&= 2 P_0 (\bar{J}_4 - 1) \cdot m_0 \otimes m_0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

i el tensor d'elasticitat,

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}'_a &= 2 \frac{\partial \bar{S}'_a}{\partial \bar{C}_e} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{C}_e} \left(2 \frac{\partial \bar{\Psi}'_a}{\partial \bar{J}_4} \cdot \frac{\partial \bar{J}_4}{\partial \bar{C}_e} \right) \\
&= 2 \left[\frac{\partial}{\partial \bar{C}_e} \left(2 \frac{\partial \bar{\Psi}'_a}{\partial \bar{J}_4} \right) \otimes \frac{\partial \bar{J}_4}{\partial \bar{C}_e} + \left(2 \frac{\partial \bar{\Psi}'_a}{\partial \bar{J}_4} \right) \cdot \frac{\partial^2 \bar{J}_4}{\partial \bar{C}_e^2} \right] \\
&= 2 \left[2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}'_a}{\partial \bar{J}_4 \bar{J}_4} \cdot \frac{\partial \bar{J}_4}{\partial \bar{C}_e} \otimes \frac{\partial \bar{J}_4}{\partial \bar{C}_e} + \left(2 \frac{\partial \bar{\Psi}'_a}{\partial \bar{J}_4} \right) \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{J}_4}{\partial \bar{C}_e^2}}_{=0} \right] \\
&= 2 \cdot 2 P_0 \cdot \frac{\partial \bar{J}_4}{\partial \bar{C}_e} \otimes \frac{\partial \bar{J}_4}{\partial \bar{C}_e} \\
&= 4 P_0 \cdot (m_0 \otimes m_0) \otimes (m_0 \otimes m_0).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

5. Implementació computacional

En els capítols anteriors s'ha descrit quina és la millor manera de modelitzar el comportament de la paret abdominal amb l'objectiu d'obtenir unes malles efectives per a les reparacions de les hèrnies, i poder determinar quina és la millor zona on practicar un estoma. Aquesta modelització s'ha concretat amb dos models presents a la literatura actual. En aquest capítol es descriuen les eines per implementar els models matemàtics i poder, posteriorment, simular el comportament de la paret abdominal.

5.1 Programari emprat

Per tal de poder modelitzar els models estudiats es farà ús del mètode dels elements finits. Aquesta eina matemàtica permet resoldre numèricament un conjunt d'equacions fent ús de la computació. En aquest cas, les equacions provenen de les funcions d'energia descrites anteriorment. L'avantatge principal de l'anàlisi d'elements finits és que divideix el problema en una gran quantitat de dominis relacionats entre ells, amb un procés anomenat mallat.

En aquest cas, l'aplicació del mètode dels elements finits permet avaluar, de forma aproximada, l'estat de la tensió-deformació davant d'unes determinades condicions de contorn (càrregues). Per fer-ho és necessari:

- Una geometria adequada.
- Un model constitutiu que imiti, el millor possible, el comportament real, en aquest cas, de la paret abdominal.
- Unes propietats del material.
- Unes condicions de contorn.
- Unes càrregues aplicades al model.

Per tal d'aplicar aquest mètode, es necessiten programes específics que s'encarreguin del mallat, de la resolució de les equacions, de l'obtenció de resultats, de la representació d'aquests, etc. Existeixen nombroses eines al mercat cadascuna de les quals amb uns avantatges i uns inconvenients. En aquest treball s'ha optat per fer ús de programes de codi obert, concretament s'ha utilitzat el paquet d'eines **Salome-Meca**. Es creu que és millor utilitzar programari lliure que privatiu per la flexibilitat que permeten i perquè estan a l'abast de tothom.

Salome-Meca¹ és una aplicació que inclou dues plataformes: **Salome** i **Code_Aster**. La primera es tracta d'un programa de codi obert, sota llicència GNU LGPL, que permet el preprocessament (mallat del problema) i

¹Disponible a: <https://www.code-aster.org/spip.php?rubrique21>

el postprocessament (presentació de les solucions) per a simulacions numèriques i està disponible al seu lloc oficial per a distribucions basades en Linux. Per altra banda, `Code_Aster` és un *solver* (motor de processament) específic per a l'anàlisi d'elements finits i simulació numèrica. Fou desenvolupat l'any 1989 pel departament de recerca i desenvolupament de l'empresa Électricité de France (EDF), anys més tard, al 2011, va passar a ser un programa de codi obert.

ASTER significa *Analyses des Structures et Thermomécanique pour des Études et des Recherches* i es tracta d'un motor de processament basat en la teoria de la mecànica de medis continus que utilitza el mètode dels elements finits per a resoldre diferents tipus de problemes. Treballa amb models lineals, no lineals, estàtics, dinàmics, tèrmics, etc. Per aquest motiu, es considera que aquesta és l'eina més oportuna per resoldre problemes com els que es plantegen en aquest treball.

Per tal de poder introduir els models matemàtics al motor de processament es pot fer directament des del mòdul de `Code_Aster` o bé es pot fer ús de llenguatges computacionals que tinguin punts en comú amb el llenguatge matemàtic utilitzat. Aquest és el cas de `MFront` un generador de codi que proporciona un conjunt d'idiomes específics per tractar amb propietats dels materials, comportaments mecànics i models materials simples [11]. `MFront` és un llenguatge amb instruccions simples semblants a les equacions matemàtiques que tradueix a `C++` fent ús de la llibreria `TFEL`. A més, no cal preocupar-se dels mètodes de resolució ja que els proveeix el propi llenguatge. El codi que genera `MFront` connecta amb el *solver* `Code_Aster`, entre altres, de manera que la fa una eina excel·lent.

La idea de `MFront` és poder incloure nous comportaments mecànics dels materials que no estan presents a `Salome-Meca`. Cal destacar però, que en cada nova versió de `Salome-Meca` s'inclouen més comportaments entre els quals els hiperelàstics que són d'especial interès en aquest treball. L'escriptura amb `MFront` es pot fer amb un editor de text qualsevol sense format i només cal guardar el document amb l'extensió `.mfront`.

En aquest treball es faran dues implementacions diferents:

- Per una banda, s'escriurà el model de Pachera (hiperelàstic) amb `MFront` per tal de descriure quina és l'estructura general d'aquests arxius i mostrar els nombrosos punts que té en comú el llenguatge emprat per `MFront` amb el llenguatge matemàtic convencional. A més, s'evidenciarà la potència que té aquest generador de codi i la seva aplicabilitat en la modelització matemàtica.
- Per altra banda, amb `Salome-Meca` es farà una simulació del comportament mecànic de la paret abdominal amb la implementació d'un model elàstic i no lineal present a la biblioteca de comportaments de `Code_Aster` sobre la geometria i el mallat de la paret abdominal desenvolupat pel Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques de la URV.

5.2 Implementació del model de Pachera amb `MFront`

En general, la implementació de models matemàtics amb `MFront` consta de tres parts:

- Informació general i paràmetres.
- Computació de la tensió de Cauchy: tensor dret de deformació de Cauchy-Green, invariants i segon tensor de tensió de Piola-Kirchhoff.
- Computació del tensor d'elasticitat.

El model que s'escriu és el de Pachera (veure secció 4.1). Seguidament es van descrivint cada una de les línies del codi² (el codi sencer es pot veure a l'Annex I). La primera part consta de la definició del comportament, autoria i altres paràmetres informatius. Seguidament es defineixen els valors de les constants que apareixen al model. En aquest cas, aquestes constants s'han obtingut de forma experimental i apareixen a [23], taula 1. S'han considerat els valors corresponents a la línia alba. Cal notar que s'utilitza l'anàlitzador `DefaultFiniteStrain` ja que el model no requereix un algorisme d'integració. Per altra banda, és important destacar que es defineixen dues propietats materials de la llei tot i que aquestes no es faran servir al llarg del codi. El motiu és perquè `Code_Aster` necessita dues variables d'entrada per poder treballar amb comportaments generats amb `MFront`. Finalment, `@LocalVariable StiffnessTensor` defineix una variable local per tal de poder guardar el tensor d'elasticitat:

```
@Parser DefaultFiniteStrain;
@Behaviour pachera;
@author Lluís Tuset;
@Date 10/01/2018;

@MaterialProperty real m;
@MaterialProperty real m2;

/* parameters from Table 1 of the article */
@Parameter mu_f = 2.6e5;
@Parameter k_fv = 2e9;
@Parameter alfa_f1 = 4.5e5;
@Parameter alfa_f2 = 45.68;

/* local variable to store the consistent tangent operator */
@LocalVariable StiffnessTensor dS_dC;
```

La segona part comença amb l'obtenció del tensor identitat, Id , la deformació jacobiana, J , i el tensor dret de Cauchy-Green, C :

```
const Tensor id = Tensor::Id();
const real J = det(F1);
const Tensor C = computeRightCauchyGreenTensor(F1);
```

seguidament es calculen els tres invariants principals:

```
const real I1 = trace(C);
const Tensor aux_C2 = square(C);
const real I2 = (I1*I1 - trace(aux_C2))/2;
```

i finalment es calcula el tensor dret de Cauchy-Green modificat, \bar{C} , així com els tres invariants principals modificats i el pseudoinvariant \bar{I}_4 :

```
/* volume-preserving part (Cbar) */
const real aux_J23 = cbrt(J*J);
const Tensor Cbar = (1/aux_J23)*C;

/* invariants with bars */
const real I1bar = trace(Cbar);
const Tensor aux_C2bar = square(Cbar);
const real I2bar = (I1bar*I1bar - trace(aux_C2bar))/2;
tvector<3u, real> aux_n0;
aux_n0(0)=0;
```

²Aquelles expressions que comencen per `aux` corresponen a càlculs auxiliars que es fan per tal de no tenir línies de codi excessivament llargues i, per tant, sigui més fàcil la seva comprensió.

```

aux_n0(1)=0;
aux_n0(2)=1;
const Stensor aux_n0_n0 = Stensor::buildFromVectorDiadicProduct(aux_n0);
const real I4bar = Cbar|aux_n0_n0;

```

Cal notar que les darreres línies del codi anterior defineixen el vector unitari n_0 i es calcula el producte diàdic necessari per obtenir \bar{I}_4 . També és important especificar que no es defineixen tots els invariants sense modificar ja que no tots es fan servir en les expressions. Finalment, es calculen les derivades dels invariants modificats que seran necessàries per a les expressions del PK2 i del tensor d'elasticitat, vegeu (4.3), (4.4), (4.7) i (4.8):

```

/* derivative of the invariants with bars */
const Stensor dI1bar_dCbar = id;
const Stensor dI2bar_dCbar = I1bar*id-Cbar;
const Stensor dI3bar_dCbar = aux_C2bar-I1bar*Cbar-I2bar*id;
const Stensor dI4bar_dCbar = aux_n0_n0;

```

El següent pas és el càlcul del segon tensor de tensió de Piola-Kirchhoff. En la implementació amb **MFront** del model de Pachera, tal com s'ha fet de forma matemàtica a la secció 4.1, també es desacoblarà la funció en dues parts. Aleshores, la primera part del PK2, expressió (4.3), serà:

```

const real aux_J2 = J*J;
const StressStensor Sfm = mu_f*dI1bar_dCbar+k_fv*(1-(1/aux_J2))*dI3bar_dCbar;

```

i la segona part, expressió (4.4), relativa al reforçament de col·lagen:

```

const real aux_I4bar_1 = I4bar-1;
const StressStensor Sff = 2*alfa_f1*aux_I4bar_1*exp(alfa_f2*aux_I4bar_1*aux_I4bar_1)*dI4bar_dCbar;

```

Cal destacar que amb **MFront** no cal incloure la funció d'energia ja que només és necessari el PK2 i el tensor d'elasticitat. Per tal d'acabar amb el càlcul del PK2 cal incloure aquesta funció que converteix el segon tensor de tensió de Piola-Kirchhoff amb el tensor de tensió de Cauchy a través del gradient de deformació:

```

sig = convertSecondPiolaKirchhoffStressToCauchyStress(Sfm+Sff, F1);

```

La darrera part del codi consisteix en el càlcul del tensor d'elasticitat. En primer lloc és necessari calcular $\frac{\partial^2 \bar{I}_3}{\partial \bar{C}^2}$:

```

const Stensor4 d2I3bar_dCbar2=Stensor4::dsquare(Cbar)-(Cbar^id)-I1bar*Stensor4::Id()+ (id^dI2bar_dCbar);

```

cal remarcar que l'operació " \wedge " entre dos tensors s'utilitza pel producte diàdic (o tensorial). Tot seguit ja es pot calcular el tensor d'elasticitat pel component base (4.7):

```

const Stensor4 dSm_dCbar=k_fv*(1-(1/aux_J2))*d2I3bar_dCbar2;

```

i pel reforçament amb fibres col·làgenes (4.8):

```

const real aux_1=1+2*alfa_f2*aux_I4bar_1*aux_I4bar_1;
const Stensor4 aux_2=aux_n0_n0^aux_n0_n0;
const real aux_3=exp(alfa_f2*aux_I4bar_1*aux_I4bar_1);
const Stensor4 dSf_dCbar=2*alfa_f1*aux_3*aux_1*aux_2;

```

Tan sols falta expressar el tensor d'elasticitat com a suma de les dues parts (4.9):

```
dS_dC = dSm_dCbar+dSf_dCbar;
```

i calcular l'operador tangent:

```
@TangentOperator<DS_DC>{  
    Dt = dS_dC;  
}
```

el codi sencer es pot trobar a l'Annex I.

Cal fer uns quants comentaris generals sobre el codi descrit anteriorment basats en la nova versió 3.X de **TFEL**:

- Respecte les versions anteriors ha sigut necessari canviar el tipus d'analitzador de **@DSL** a **@Parser**.
- La potència, `"^"`, no està permesa ja que es restringeix a productes tensorials i cal canviar-la per multiplicacions explícites `"*"`.
- Es permet l'ús de `auto` per tal de no haver de definir el tipus de variable (real, tensor simètric, tensor de quart ordre, etc.). Ara bé, en aquest cas, cal especificar que es treballa amb l'estàndard **C++11** en el moment de la compilació. Per altra banda, cal destacar que el fet d'utilitzar el tipus `auto` millora l'eficiència de la implementació ja que no cal avaluar explícitament els resultats intermedis.
- Inicialment s'havia incorporat els invariants (sense modificar) al codi, però s'han tret ja que no s'utilitzen.

El següent pas per tal de poder exportar el model codificat amb **MFront** al *solver* és la compilació del fitxer `.mfront`. La compilació generarà dues carpetes `include` i `src`, en la segona es troba una llibreria dinàmica, `libAsterBehaviour.so`, que caldrà incloure al model generat amb `Code_Aster`. D'aquesta manera, el mallat del preprocessament es modelitzarà amb el comportament mecànic fet amb **MFront**, en aquest cas, el model de Pachera.

5.3 Simulació de models matemàtics

Per tal de processar els models matemàtics desenvolupats cal fer ús del programari `Code_Aster` que s'encarrega, estrictament, de la solució del problema matemàtic (*solver*). De totes maneres, abans de resoldre el problema és necessària una fase inicial de preprocessament que consta de dues parts: la definició de la geometria i el mallat.

Ambdues parts es poden fer amb el programa **Salome-Meca** a través de dos mòduls diferenciats. De la definició de la geometria se n'encarrega el mòdul *Geometry* i del mallat el mòdul *Mesh*. Havent fet aquests dos primers passos ja es pot començar a treballar amb el processament del problema. Per fer-ho s'utilitza el *solver* `Code_Aster` que està inclòs en la versió 2017 de **Salome-Meca** amb el nom *AsterStudy*. Aquesta és una de les parts més exigents del procés ja que cal definir adequadament cadascun dels passos que haurà de seguir el *solver* per tal de poder resoldre el problema.

Finalment, només resta fer el postprocessament que és l'obtenció de resultats. Aquests s'obtenen de forma gràfica amb el mòdul *Para ViS*. En aquest mòdul es representen els resultats sobre la geometria i el mallat definits prèviament i permet veure, de forma gràfica, el comportament de la geometria davant del model matemàtic implementat.

5.3.1 Preprocessament

El mòdul *geometry* permet la definició de qualsevol geometria ja sigui en 1D, 2D o 3D. Té diverses eines per transformar les geometries: rotacions, translacions, escalats, etc.; i també permet la fusió, intersecció, entre moltes altres. És un mòdul molt potent amb una estructura molt similar a la dels programes CAD (*computer-aided design*).

El segon mòdul del preprocessament és el *mesh* i s'encarrega del mallat de la geometria. Aquest és un dels aspectes més importants del mètode dels elements finits ja que permet simplificar una geometria complicada obtenint un determinat nombre (finit) d'elements geomètrics més simples com triangles, quadrats, hexàgons, piràmides, poliedres, etc. que, interconnectats uns amb els altres, permeten simular la geometria inicial. És a dir, es modelitza una geometria complexa a partir d'una combinació de figures geomètriques més simples l'estudi de les quals, és possible gràcies al mètode dels elements finits. Aquest mètode permet la resolució de problemes de mecànica dels medis continus.

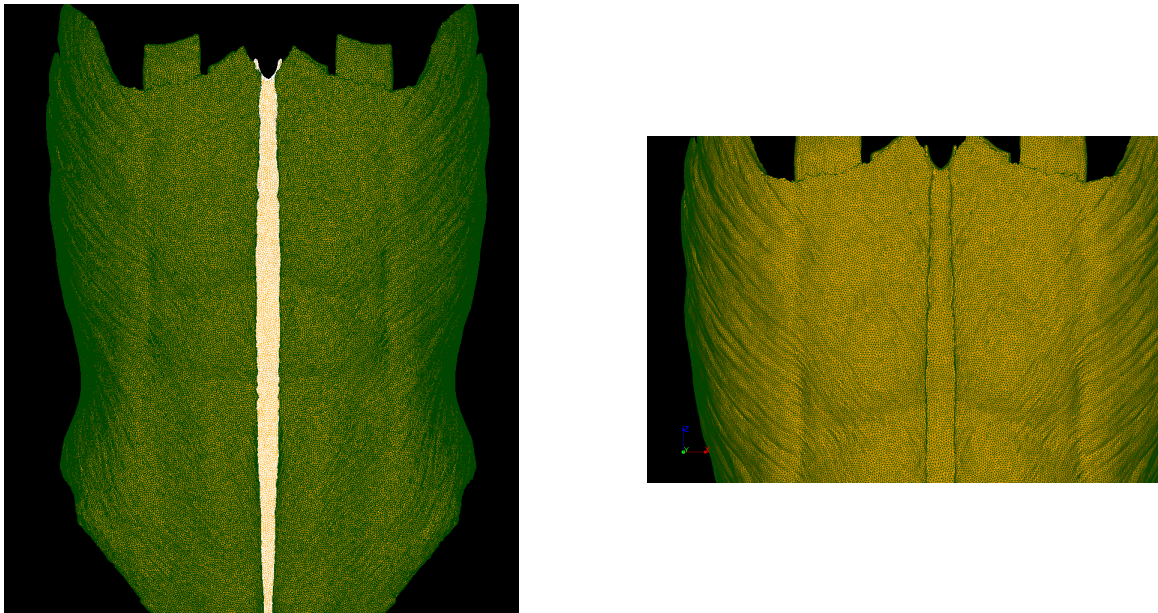


Figura 5.1: Mallat de la paret abdominal.

A la Figura 5.1 s'aprecia la modelització que s'ha fet de la paret abdominal. Aquesta modelització està formada per diversos grups de mallat: cadascun dels músculs separats entre el costat esquerre i el dret (recte, transvers, oblic intern i oblic extern) i la línia alba. Per tal que el problema físic tingui sentit, ha sigut necessari definir una zona anomenada «fixa» la qual es considera que té un esforç i un desplaçament nul (condicions de contorn) i una zona en la qual s'aplica l'esforç extern. Aquesta zona on es considera que s'aplica la càrrega s'ha modelitzat com una cara (2D) que se situa, aproximadament, a la zona del múscul transvers. La resta de grups de mallat no s'han considerat com a cares sinó com a volums (3D).

A la Figura 5.2 apareix un detall del mallat on s'aprecien els triangles que permeten simplificar la complexa geometria i, a més, permet aplicar el mètode dels elements finits de forma adequada. Cal destacar que aquesta modelització de la paret abdominal s'ha fet des del Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques de la URV i en aquest treball s'ha utilitzat per aplicar-li models matemàtics.

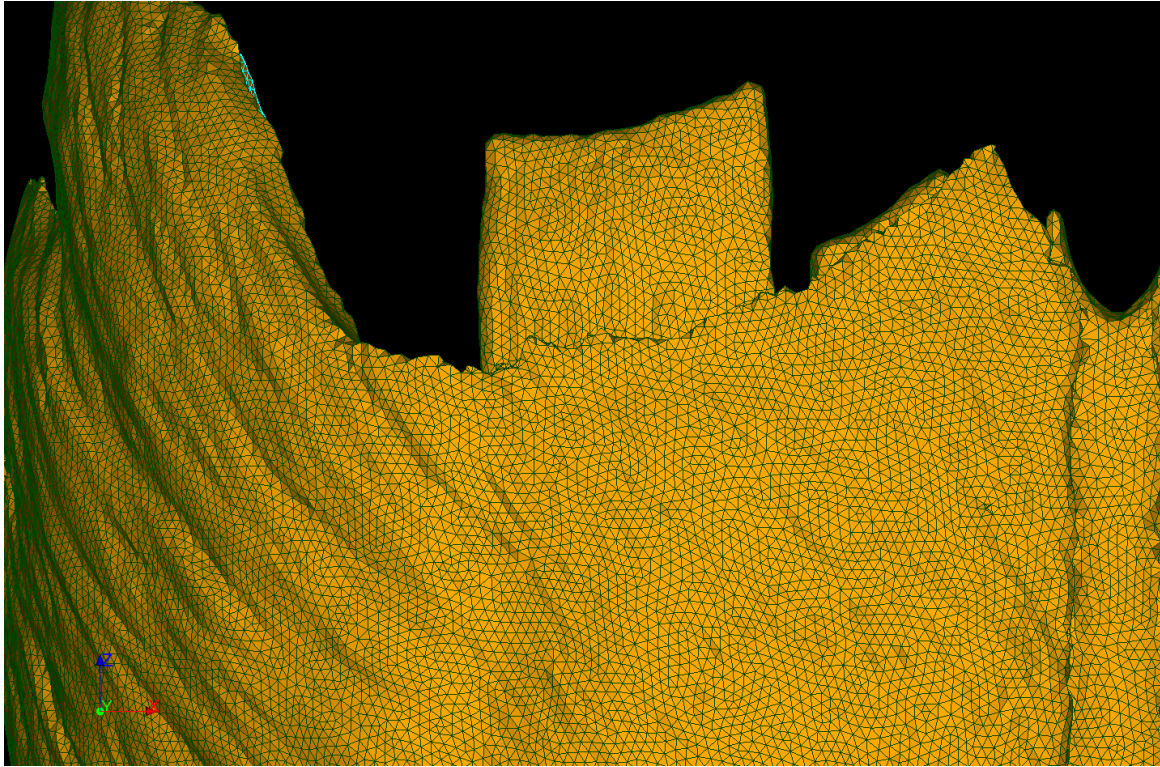


Figura 5.2: Detall del mallat de la paret abdominal.

5.3.2 *Solver*

Quan ja es té el preprocessament fet, cal seguir la simulació amb el processament del problema. Això implica escollir un determinat model matemàtic i aplicar-lo sobre una determinada geometria i el seu corresponent mallat. En aquest treball s'ha aplicat un comportament elàstic i no lineal sobre el mallat de la paret abdominal.

Alguns dels comportaments mecànics ja es troben disponibles al propi motor de resolució del problema, el `Code_Aster`, i d'altres cal escriure'ls amb `MFront` tal com s'ha fet amb el model de Pachera (vegeu apartat 5.2). En tots dos casos l'estructura és semblant.

Per fer aquest apartat cal anar al mòdul *AsterStudy* de `Salome-Meca`. En la nova versió de `Salome-Meca`, la 2017, cal crear l'estudi pas a pas definint cadascun dels apartats per a la resolució del problema. El funcionament és tan senzill com seleccionar d'un conjunt ampli d'opcions els passos que haurà de seguir el *solver*. Quan es tenen tots els passos de la resolució descrits, es pot obtenir un fitxer de text `.comm` el qual conté cadascuna de les ordres. Aquest fitxer de text és especialment útil si es vol resoldre el problema a distància a través d'un servidor com s'ha fet en aquest treball. En aquest cas, ja que no es pot treballar amb la interfície gràfica, cal generar el fitxer `.comm` per tal de poder-lo enviar via `ssh`³ per tal d'indicar al *solver* què ha de fer en queda moment.

Seguidament es detalla, pas a pas, l'esquema d'un fitxer `.comm` com els que s'han utilitzat en aquest treball. Cal remarcar que `Code_Aster` té una infinitat d'opcions i que en aquest treball tan sols es fa una pinzellada de les principals eines per tal de poder resoldre un problema concret.⁴

Un fitxer `.comm` comença amb una definició de les variables que es faran servir al llarg del problema. És

³`ssh` (*Secure Shell*) és un protocol que serveix per accedir a màquines remotes a través de la xarxa.

⁴En el següent enllaç es pot trobar nombrosa documentació de `Salome-Meca`, `Code_Aster` i `MFront`: <https://www.code-aster.org/spip.php?rubrique19>

especialment útil treballar amb variables a les quals es fa referència al llarg de l'estudi ja que es poden variar fàcilment els valors per fer-ne diverses proves. El següent pas és la lectura del mallat. Amb aquest codi es diu al *solver* quin fitxer de mallat ha de llegir, en aquest cas el fitxer allotjat a la unitat número 20 i en quin format està, en aquest cas en format *.med*.

```
mesh = LIRE_MALLAGE(FORMAT='MED' , UNITE=20)
```

Seguidament es modifica el mallat amb l'objectiu d'evitar errors sobretot en el cas d'estudis 3D. El grup de material (*GROUP_MA*) al qual s'aplica és el mallat corresponent a la pressió que s'exerceix sobre la geometria (*'Press'* en aquest cas). És important destacar que aquesta ordre i l'anterior han de portar el mateix nom, *mesh* en aquest cas.

```
mesh = MODL_MALLAGE(
  reuse=mesh , MALLAGE=mesh , ORIE_PEAU_3D=_F (GROUP_MA=('Press' , ))
)
```

Ara cal definir el tipus de model que s'estudiarà, en aquest cas un model 3D i s'estudiarà un fenomen mecànic (*PHENOMENE='MECANIQUE'*) en tot el material (*TOUT='OUI'*).

```
model = AFFE_MODELE(
  AFFE=_F (MODELISATION=('3D' , ) , PHENOMENE='MECANIQUE' , TOUT='OUI' ) ,
  MALLAGE=mesh
)
```

Se segueix amb la definició del material. Aquest punt és important ja que caldrà definir diferents paràmetres del material segons el model amb el qual es treballi. S'ha treballat amb un material elàstic, lineal i isòtrop, *ELAS*, en el qual la relació entre les deformacions i les tensions considerades és lineal [10]. En aquest exemple s'especifica el mòdul de Young i el coeficient de Poisson com a característiques del material. També és habitual incloure la densitat amb el paràmetre *rho*. En cas que es treballi amb un comportament que prové de *MFront* també caldrà incloure el paràmetre *MFRONT* i caldrà declarar, sempre, les propietats materials que apareixen al fitxer *.mfront* amb la instrucció *@MaterialProperty* i amb el mateix ordre. Es requereixen, com a mínim, dos coeficients.

Per tant, si el comportament *MFront* no té cap propietat material definida caldrà incloure'n dos si es vol utilitzar amb *Code Aster*. El més habitual en aquests casos és incloure dos variables al fitxer *.mfront* que no s'utilitzen al codi i, per altra banda, s'inclou al fitxer *.comm* el mòdul de Young i el coeficient de Poisson com en el següent exemple:

```
mater = DEFL_MATERIAU(ELAS=_F (young , poisson) , MFRONT=_F (LISTE_COEF=(young , poisson)))
```

Ara cal especificar a quin conjunt del material s'assignen les propietats anteriors. Per a problemes més complexos es podrien definir diferents tipus de materials per a cadascun dels mallats i en aquest apartat caldria especificar quin material correspon a cada mallat. En aquest cas es considera que tot el mallat té el mateix material i, per tant, se simplifica l'ordre. Cal notar que s'assigna el material anterior *mater* al conjunt (*TOUT='OUI'*) de tot el mallat *mesh*.

```
fieldmat = AFFE_MATERIAU(AFFE=_F (MATER=(mater , ) , TOUT='OUI' ) , MALLAGE=mesh)
```

Fins ara s'ha especificat el mallat i el tipus de material amb les propietats que li correspongui. Ara cal preparar el problema que caldrà resoldre. En primer lloc, la persona usuària pot definir l'interval de temps que s'estudiarà per exemple,

```
l i s t r = DEFL_LIST_REEL(DEBUT=0.0, INTERVALLE=_F(JUSQU_A=1.0, NOMBRE=1))
```

i tot seguit s'especifica el pas de càlcul que es vol, basant-se en la llista anterior,

```
t i m e s = DEFL_LIST_INST(
  DEFL_LIST=_F(LIST_INST=l i s t r , PAS_MAXI=0.0001, PAS_MINI=0.00001),
  ECHEC=_F(SUBD_NIVEAU=100, SUBD_PAS=100),
  METHODE='AUTO'
)
```

Cal remarcar que les dues ordres anteriors són molt importants pel que fa a la convergència del problema. El següent pas és la definició de les condicions de contorn que s'apliquen sobre el problema. Amb la comanda *DDL_IMPO* es poden bloquejar aquells nodes del mallat que es vulguin imposant, per tant, condicions de contorn nul·les. En aquest cas, *DX*, *DY* i *DZ* és el valor del desplaçament en cadascuna d'aquestes direccions en la referència global de la definició del mallat. Per altra banda, la càrrega aplicada s'escriu amb la comanda *PRES_REP* que representa la pressió exercida sobre una determinada superfície.

```
l o a d = AFFE_CHAR_MECA(
  DDL_IMPO=_F(DX=0.0, DY=0.0, DZ=0.0, GROUP_MA=('Fix', )),
  MODELE=model,
  PRES_REP=_F(GROUP_MA=('Press', )), PRES=forca
)
```

El següent pas consisteix en l'anàlisi, és a dir, la resolució del problema. El mètode que s'ha utilitzat en totes les simulacions que s'han fet ha sigut el *STAT_NON_LINE* aquest estudi computa l'evolució mecànica quasi-estàtica i amb una estructura no lineal. La no linealitat té relació amb el comportament del material (per exemple plàstic) o amb la seva geometria (grans desplaçaments) [1]. Dins d'aquest paràmetre se'n defineixen molts d'altres que bàsicament es poden resumir de la següent manera:

- *COMPORTEMENT*: es defineix el tipus de comportament que es vol simular. En aquest cas se suposa una deformació seguint el model per a grans deformacions de Simo i Miehe que és una formulació de deformació finita en la qual el principi de potència virtual s'expressa en la configuració actual. Seguidament es defineix el nombre màxim d'iteracions que es permeten (aquest és un paràmetre molt interessant ja que, si s'augmenta, pot ajudar a la convergència del model). Ja que en aquest exemple es treballa amb un comportament de *MFront* s'utilitzen les comandes *LIBRAIRIE* (ruta on es troba la llibreria dinàmica provinent de la compilació del comportament fet amb *MFront*), *NOM_ROUTINE* (nom del comportament fet amb *MFront*, aquest nom ha de coincidir amb el nom del paràmetre *@Behaviour* del fitxer *.mfront*) i *RELATION* (on s'indica que es treballa amb un comportament fet amb *MFront*).
- *CONVERGENCE*: amb aquesta comanda es defineixen els paràmetres de convergència del problema que es vol resoldre (també són paràmetres molt importants per facilitar la convergència de la solució del problema que es planteja).
- *EXCIT*: càrregues que s'apliquen al problema (descrites anteriorment amb *AFFE_CHAR_MECA*).
- *INCREMENT*: es defineixen els intervals de temps agafats en el mètode incremental (descrits anteriorment amb *DEFL_LIST_INST*).

- *NEWTON*: amb aquesta comanda s'especifiquen les característiques del mètode de resolució no lineal (mètode de Newton-Raphson). El paràmetre *MATRICE* pot ser '*TANGENTE*' que és el valor per defecte o bé '*ELASTIQUE*' si es preveu que la matriu pot esdevenir singular; i el paràmetre *PREDICTION* s'acostuma a prendre com a '*EXTRAPOLE*' considerant que l'estimació de l'increment de desplaçaments es calcula a partir de l'increment total.

```

RESM = STAT_NON.LINE(
  CHAMMATER=fieldmat ,
  COMPORTEMENT=_F (
    DEFORMATION='SIMO_MIEHE' ,
    ITER_INTE_MAXI=100 ,
    LIBRAIRIE='/home/luis/Documents/test_pachera_cil/src/libAsterBehaviour.so' ,
    NOM_ROUTINE='asterpa' ,
    RELATION='MFRONT' ,
    RESI_INTE_MAXI=1e-08 ,
    TOUT='OUI'
  ) ,
  CONVERGENCE=_F (
    ITER_GLOB_MAXI=15000 , RESI_GLOB_MAXI=1e-04 , RESI_GLOB_RELA=0.001
  ) ,
  EXCIT=_F (CHARGE=load) ,
  INCREMENT=_F (LIST_INST=times) ,
  MODELE=model ,
  NEWTON=_F (MATRICE='ELASTIQUE' , PREDICTION='EXTRAPOLE')
)

```

Finalment cal indicar els passos relatius al postprocessament. En aquest cas amb el paràmetre *CALC_CHAMP* es calculen els camps d'esforç o de desplaçament pels elements i pels nodes. Amb l'operador *CONTRAINTE* es detallen quins camps d'esforços es volen calcular. En aquest exemple, '*SIGM_ELNO*' és el camp d'esforços (tensió) als nodes per extrapolació de les quantitats dels elements i '*SIGM_NOEU*' el camp de tensió als nodes. Amb *CRITERES* es calculen els esforços (tensió) a partir dels camps d'esforços calculats anteriorment amb *CONTRAINTE*. Cal remarcar que aquest bloc de codi ha de portar el mateix nom que el bloc anterior corresponent a la resolució del problema, *RESM* en aquest exemple.

```

RESM = CALC.CHAMP(
  reuse=RESM ,
  CONTRAINTE=('SIGM_ELNO' , 'SIGM_NOEU') ,
  CRITERES=('SIEQ_ELNO' , 'SIEQ_NOEU') ,
  RESULTAT=RESM
)

```

Per acabar tan sols falta dir com es volen exportar els resultats. En aquest exemple es fa servir el format '*MED*' (*.rmed*) que s'allotja a la unitat número 80 i cal especificar amb el paràmetre *RESU* quins valors es volen guardar al fitxer de resultats. En aquest cas, tots els paràmetres de tensió calculats anteriorment i també els desplaçaments, '*DEPL*'.

```

IMPR.RESU(
  FORMAT='MED' ,
  RESU=_F (
    NOM_CHAM=('SIGM_NOEU' , 'SIEQ_NOEU' , 'DEPL' , 'SIGM_ELNO' , 'SIEQ_ELNO') ,
    RESULTAT=RESM
  ) ,
  UNITE=80
)

```

El codi sencer es pot trobar a l'Annex II.

Des d'un ordinador local es pot efectuar el càlcul directament a través de *Salome-Meca* però en cas que es

necessiti molta potència de càlcul, com passa quan es treballa, per exemple, amb tota la paret abdominal, s'envia el càlcul a un servidor extern a través de ssh. Ja que en aquest cas no es treballa amb la finestra gràfica, cal obtenir un fitxer *.export*⁵ el qual conté totes les indicacions per poder fer anar *Code_Aster*: a quin *path* es troba instal·lat *Salome-Meca*, la memòria màxima que es permet utilitzar, el temps màxim de càlcul que es deixa, versió de *Code_Aster* que s'utilitza, sistema operatiu amb el qual es treballa i la correspondència entre les unitats a les quals es fa referència al fitxer *.comm* (fitxer de mallat, fitxer de resultats, fitxer d'errors, etc.) i el seu corresponent *path*, entre moltes altres indicacions.

A l'Annex III es troba un exemple de fitxer *.export*.

5.3.3 Postprocessament

Quan el *solver* ja ha obtingut la solució del problema, ha convergit, cal seguir amb el postprocessament del problema. Tal com s'ha dit, cal activar el mòdul *ParaViS* de *Salome-Meca* i importar el fitxer *.rmed* que conté la solució al problema (en el punt anterior s'ha vist que aquest arxiu es troba, per exemple, a la unitat 80).

A la Figura 5.3 es poden veure els resultats en aplicar un comportament elàstic no lineal sobre el múscul recte (RA) considerant els següents paràmetres: mòdul de Young = $1 \cdot 10^7$ Pa, coeficient de Poisson = 0.4, densitat = 1 g/cm^3 i una força aplicada de 400 N.

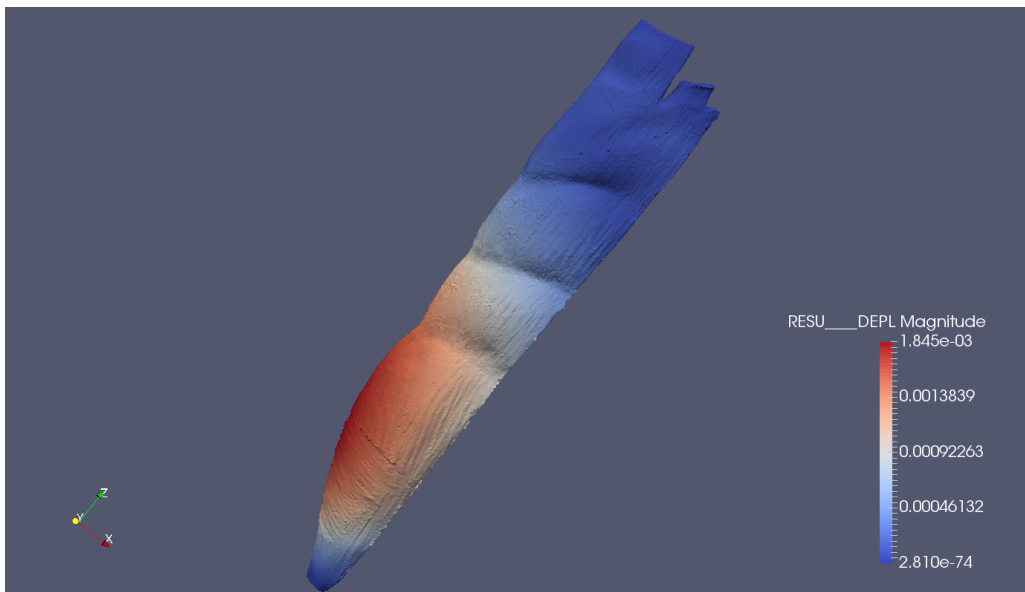


Figura 5.3: Camp de desplaçaments (en m) havent aplicat una força $F = 400$ N sobre el múscul recte (RA).

⁵El fitxer *.export* es pot escriure directament amb un editor de text bàsic o bé es pot obtenir a través del mòdul *ASTK* de *Salome-Meca*

El mòdul *ParaViS* permet veure els resultats obtinguts per *Code_Aster* de forma gràfica. Tal com mostra la figura anterior és especialment pràctica aquesta representació ja que es veuen, en aquest cas, els desplaçaments patits per un determinat model davant d'una determinada càrrega. Es distingeixen clarament les zones més afectades i quin valor tenen. En aquest exemple s'aprecia un desplaçament màxim de 1.845 mm havent-se aplicat una càrrega de 400 N.

ParaViS permet obtenir animacions amb les quals es pot apreciar com varia el camp de desplaçaments, o tensions, al llarg del temps. El temps màxim d'aquesta animació ve definit pel paràmetre *DEFLIST_INST* del fitxer *.comm*.

6. Resultats

En aquest darrer apartat es mostren els resultats obtinguts de la simulació del comportament mecànic sobre tota la geometria de la paret abdominal. S'ha fet un estudi quasi-estàtic no lineal amb un comportament per a grans deformacions de Simo i Miehe i s'ha resolt amb el mètode de Newton-Raphson. S'ha considerat un material elàstic, lineal i isòtrop amb les següents propietats: mòdul de Young, $E = 1 \cdot 10^7$ Pa, coeficient de poisson $\nu = 0.4$ i una densitat $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$. També s'ha suposat que el material té una corba lineal de treball per enduriment amb un pendent del diagrama de tracció, $E_T = 48000$ Pa i amb un límit elàstic, $S_y = 1.1 \cdot 10^{10}$ Pa.

Com a càrrega s'han considerat diverses forces per a fer les simulacions: $F = 400$ N, $F = 600$ N i $F = 1000$ N per tal de poder-ne comparar els resultats. El fitxer de comandes complet es pot trobar a l'Annex IV.

La modelització de la paret abdominal ha estat feta pel Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques de la URV i es mostra a la Figura 6.1.

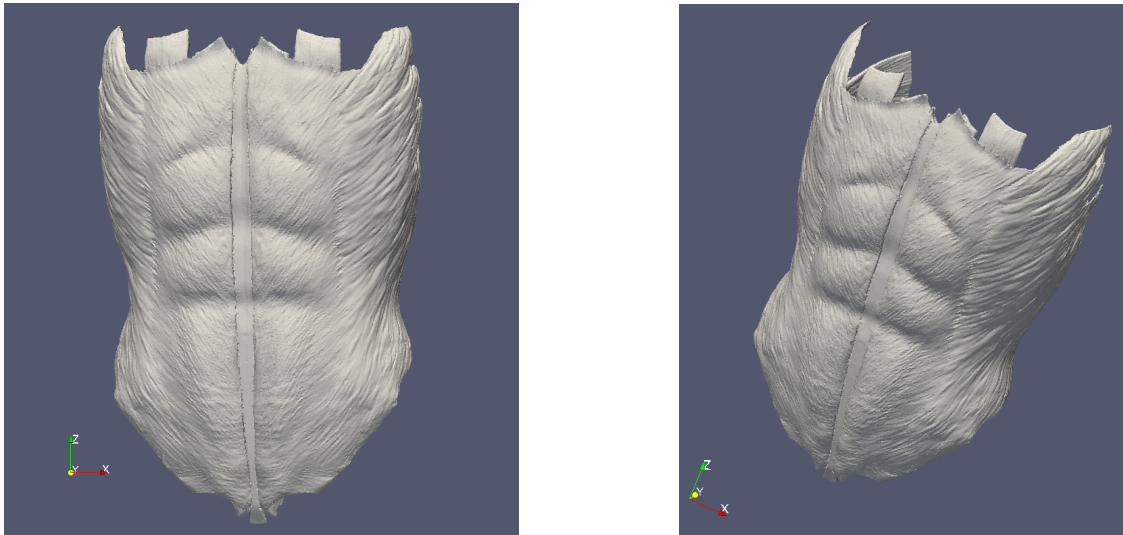
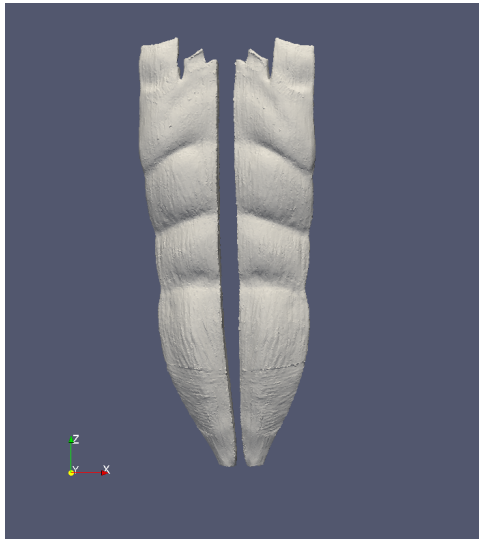


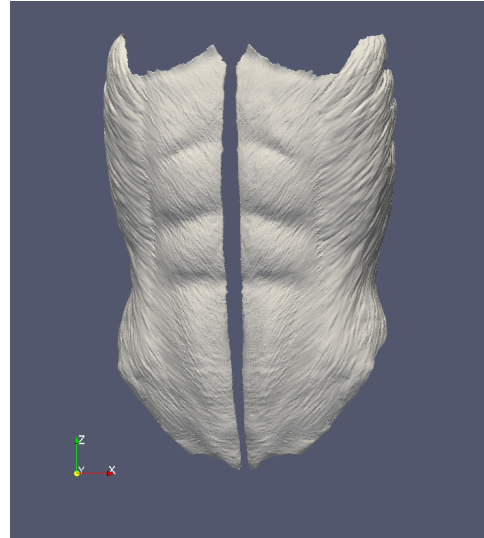
Figura 6.1: Modelització de la paret abdominal.

Aquest model de la paret abdominal s'ha dividit en diverses parts, una per a cada múscul: el múscul recte de l'abdomen (RA), el múscul oblic extern o major (EO), el múscul oblic intern o menor (IO), el múscul transvers (TA) i la línia alba, vegeu Figura 6.2.

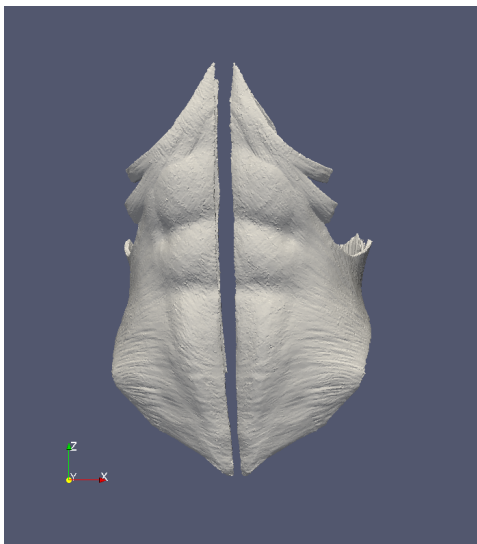
Com a condicions de contorn s'han suposat dues cares les quals efectuen pressió (*pres1* i *pres2*) i un volum que envolta el contorn de tota l'estructura amb una càrrega nul·la i que es considera la part «fixa», vegeu Figura 6.3.



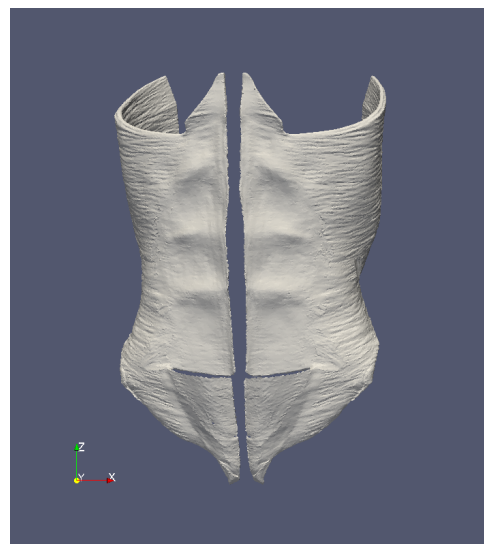
(a) RA



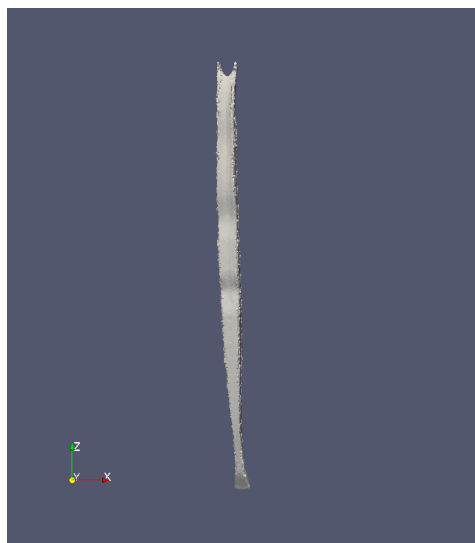
(b) EO



(c) IO



(d) TA



(e) Línia alba

Figura 6.2: Parts de la modelització de la paret abdominal.



Figura 6.3: Condicions de contorn aplicades en la simulació, de color verd les cares de pressió i de color blanc els volums que envolten la paret abdominal amb càrrega nul·la.

El temps de computació ha estat d'uns 15,000 segons, poc més de 4 hores, i la despesa de memòria ha estat de 41,800 MB = 41.8 GB. Cal destacar que *medsim* permet un màxim de memòria de 64,321 MB. Aleshores, per tal de fer aquestes simulacions s'ha utilitzat un 65% de la memòria total de *medsim*. Cal destacar que un ordinador convencional per a ús domèstic no podria haver efectuat aquest càlcul i, per aquest motiu, és important treballar amb servidors remots la qual cosa fa que sigui necessària l'entrada d'ordres a través de terminal.¹

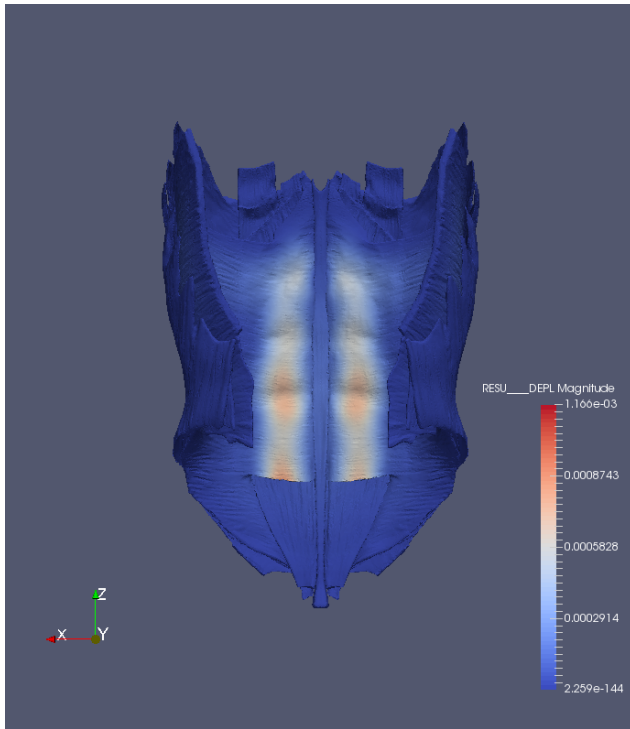
6.1 Estudi segons la càrrega aplicada

Tenint en compte aquesta modelització i els paràmetres de la simulació esmentats anteriorment s'han fet diverses simulacions amb cadascuna de les càrregues. S'han representat les solucions corresponents al camp de desplaçaments, *DEPL*, i al camp de tensions, *SIEQ_NOEU* per a $F = 400$ N (Figura 6.4), $F = 600$ N (Figura 6.5) i $F = 1000$ N (Figura 6.6).

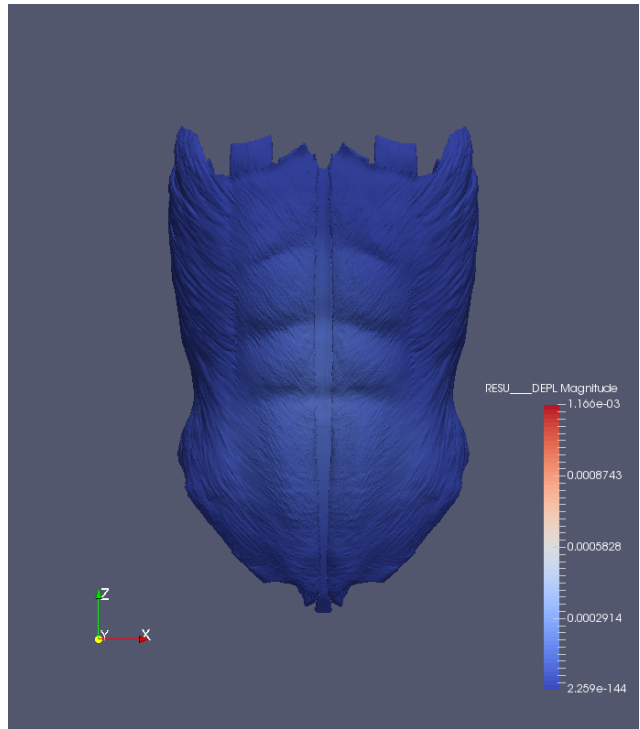
Si es comparen les Figures 6.4, 6.5 i 6.6, com és d'esperar, s'aprecia que un augment de la càrrega aplicada suposa un augment del desplaçament que pateix la paret abdominal i, també, un augment del camp de tensions. En qualsevol cas també s'observa que la zona més afectada és la corresponent al múscul transvers (TA) ja que és sobre el qual s'aplica la càrrega. Per altra banda també s'observa que la zona interior de la paret abdominal pateix més tensió-deformació que la part exterior. De nou, això és així ja que la càrrega s'aplica a l'interior de la paret abdominal.

Cal recordar que l'objectiu final és simular el comportament mecànic del teixit muscular de la paret abdominal davant d'una hèrnia. Ja que les hèrnies són una sortida d'una part del teixit intern del cos cap a l'exterior té sentit aplicar aquesta càrrega a la part interna del model i, per tant, serà aquesta zona de la paret abdominal la que patirà més tensió-deformació. Tal com s'observa, si es considera tota la paret abdominal en global els resultats obtinguts són molt generalistes i no permeten determinar amb precisió quines són les àrees amb una tensió més elevada. Per aquest motiu, en el proper apartat es farà un estudi específic per a cada múscul.

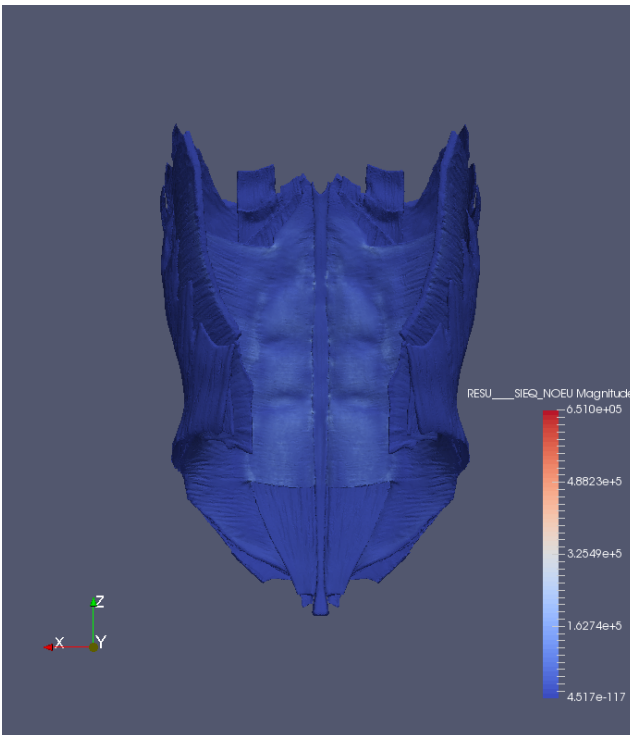
¹Es creu que és possible configurar *Salome-Meca* amb un servidor remot de manera que es pugui executar des de la mateixa finestra gràfica però no s'ha aconseguit fer-ho.



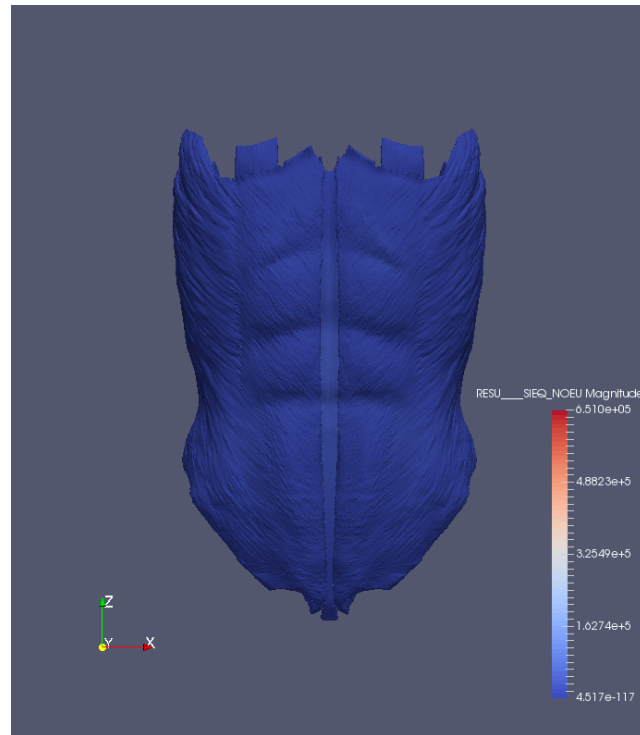
(a) Desplaçaments (en m)



(b) Desplaçaments (en m)

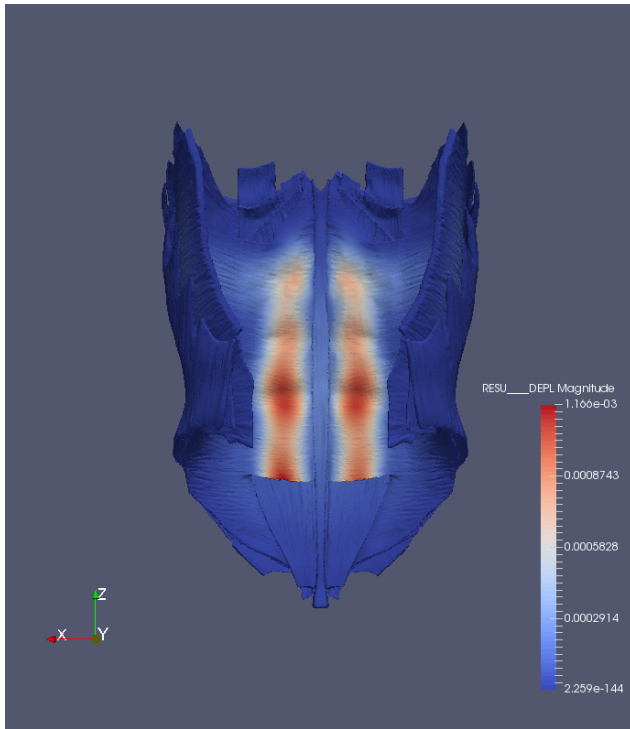


(c) Camp de tensions equivalent (en Pa)

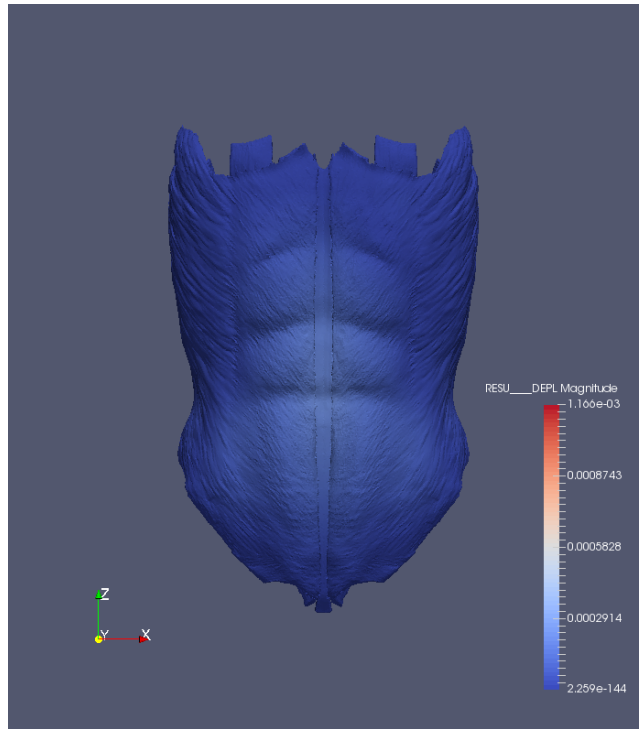


(d) Camp de tensions equivalent (en Pa)

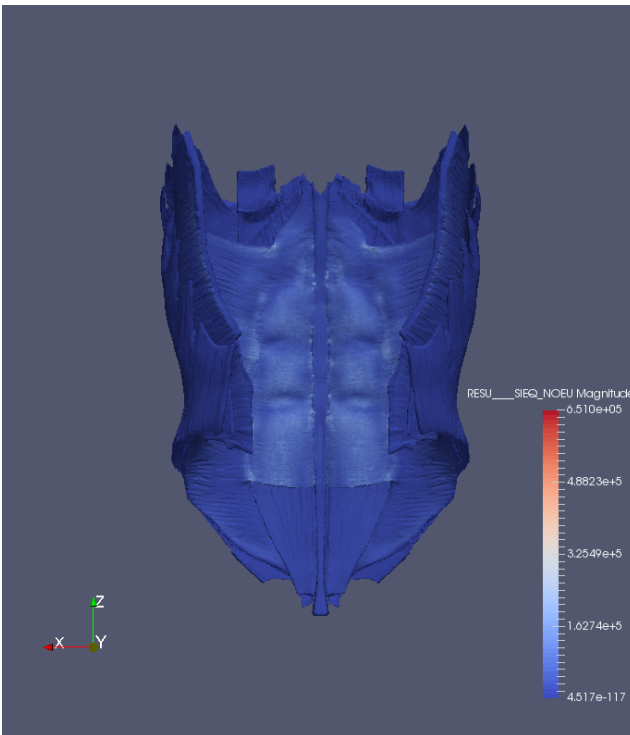
Figura 6.4: Resultats obtinguts per a $F = 400$ N.



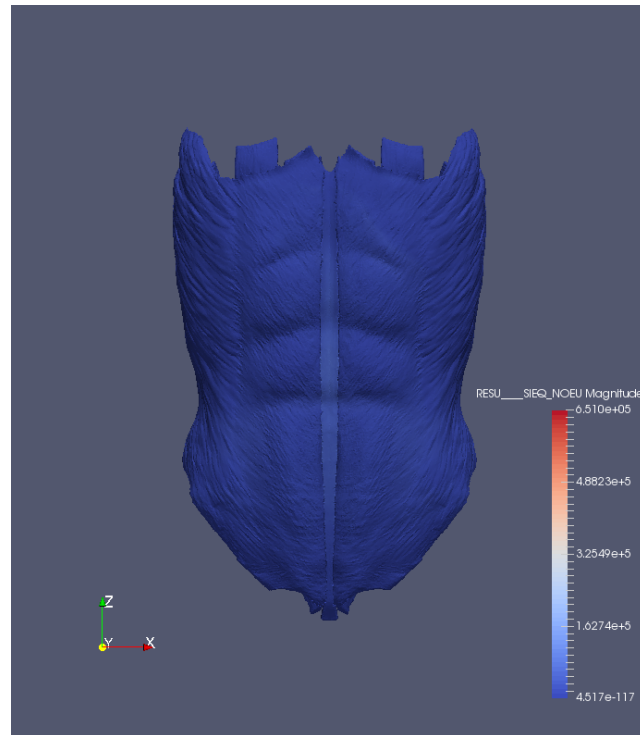
(a) Desplaçaments (en m)



(b) Desplaçaments (en m)

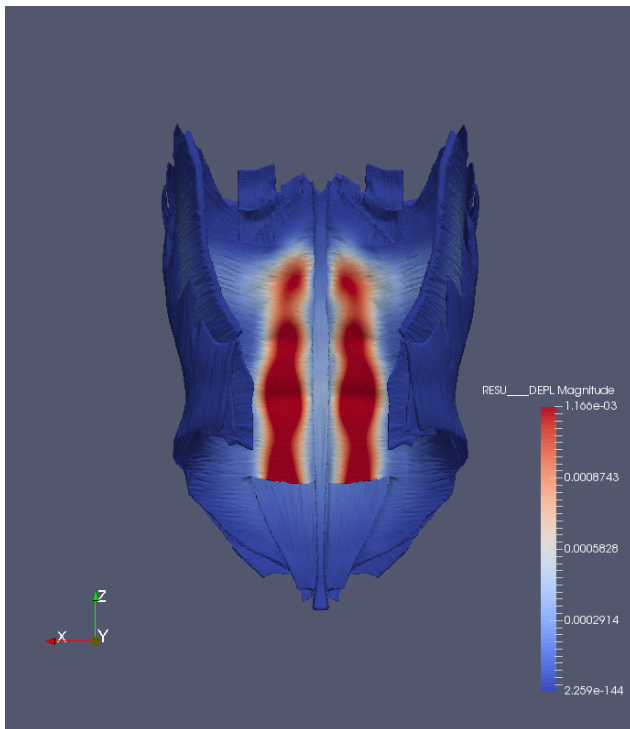


(c) Camp de tensions equivalent (en Pa)

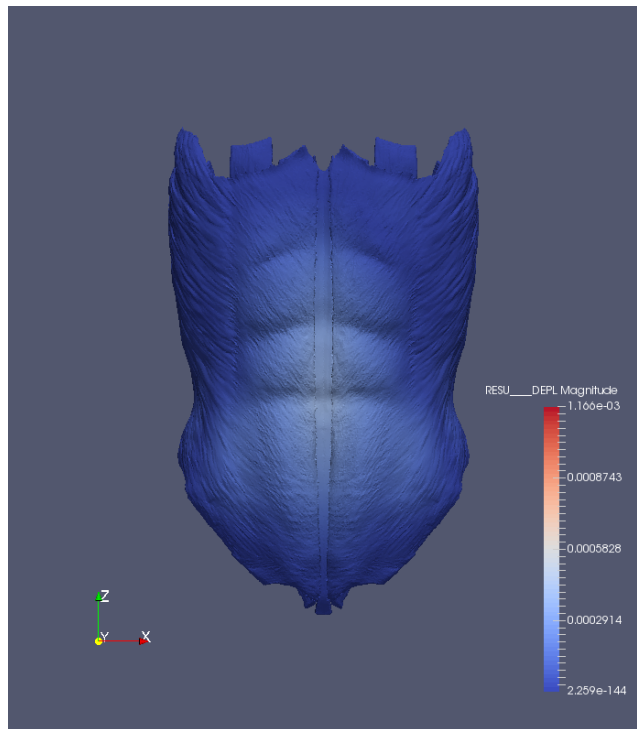


(d) Camp de tensions equivalent (en Pa)

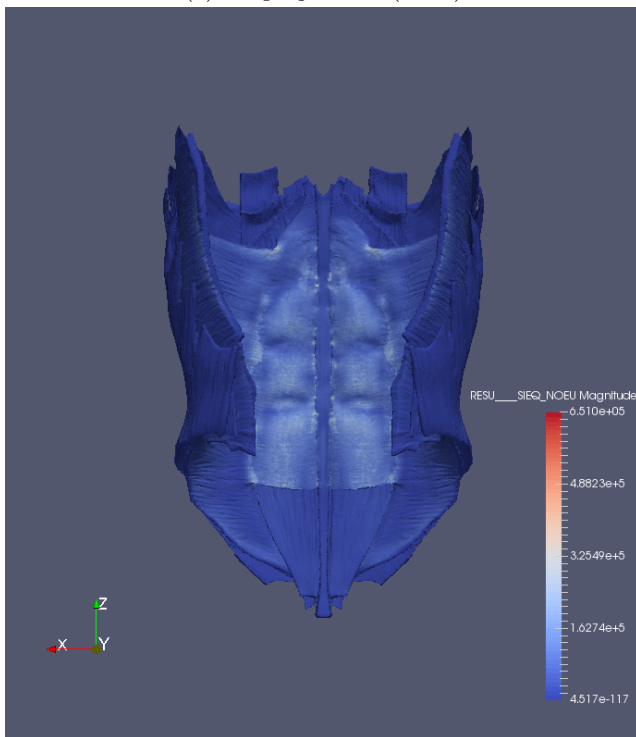
Figura 6.5: Resultats obtinguts per a $F = 600$ N.



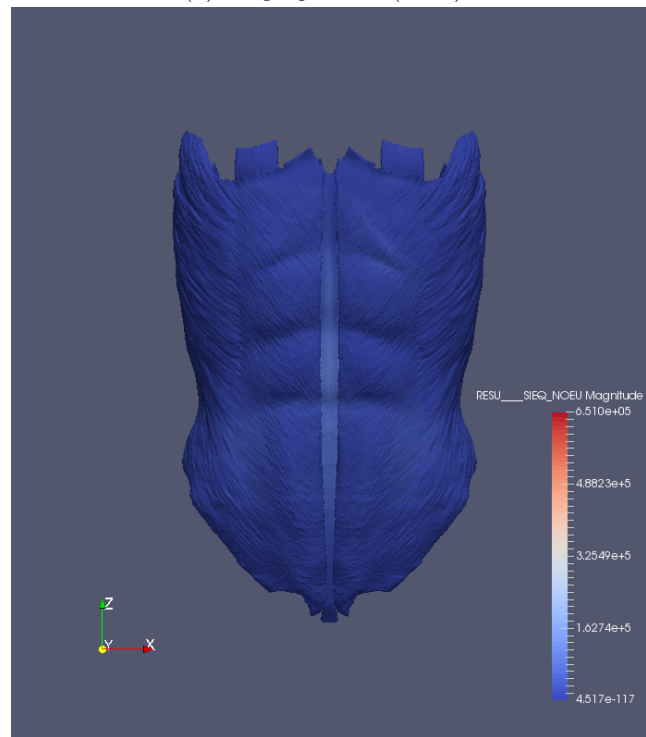
(a) Desplaçaments (en m)



(b) Desplaçaments (en m)



(c) Camp de tensions equivalent (en Pa)



(d) Camp de tensions equivalent (en Pa)

Figura 6.6: Resultats obtinguts per a $F = 1000$ N.

Les Taules 6.1 i 6.2 resumeixen els valors extrems obtinguts del desplaçament i la tensió per a cadascuna de les càrregues. S'observa que en tots els casos els valors mínims són aproximadament nuls i que l'augment del desplaçament màxim o de la tensió màxima no és proporcional a l'augment de la càrrega aplicada. Aquest fet constata que es tracta d'un comportament no lineal i, per tant, no manté aquesta proporció entre força aplicada i tensió-deformació obtinguda.

| Força aplicada (N) | Mínim (mm) | Màxim (mm) |
|--------------------|-------------|------------|
| 400 | ≈ 0 | 0.8154 |
| 600 | ≈ 0 | 1.1657 |
| 1000 | ≈ 0 | 1.7833 |

Taula 6.1: Comparació dels desplaçaments màxims i mínims obtinguts

| Força aplicada (N) | Mínim (Pa) | Màxim (Pa) |
|--------------------|-------------|---------------------|
| 400 | ≈ 0 | $2.6484 \cdot 10^5$ |
| 600 | ≈ 0 | $3.9627 \cdot 10^5$ |
| 1000 | ≈ 0 | $6.5097 \cdot 10^5$ |

Taula 6.2: Comparació dels valors de la tensió màxima i mínima

6.2 Estudi específic per a cada múscul

Per tal de fer una anàlisi més exhaustiva, enlloc d'extreure els resultats de tota la paret abdominal en global, per a $F = 600$ N, s'han extret els resultats de cada múscul per separat. L'objectiu és poder determinar quin és el desplaçament màxim i la tensió màxima en cadascun d'aquests, on es troba i poder establir quin és el múscul més afectat per la càrrega. La Taula 6.3 resumeix aquestes dades.

| Múscul | Desplaçament màxim (mm) | Tensió màxima (Pa) |
|-------------------|-------------------------|----------------------|
| Recte (RA) | 0.22171 | $8.0432 \cdot 10^4$ |
| Oblic extern (EO) | 0.22402 | $9.1004 \cdot 10^4$ |
| Oblic intern (IO) | 0.35453 | $39.6265 \cdot 10^4$ |
| Transvers (TA) | 1.07804 | $31.4824 \cdot 10^4$ |
| Línia alba | 0.25088 | $32.6337 \cdot 10^4$ |

Taula 6.3: Valors màxims per a cada múscul ($F = 600$ N)

S'observa que el múscul transvers (TA) és el que té un desplaçament més elevat ja que és el múscul que es troba en contacte directe amb la càrrega aplicada. Pel que fa a la tensió, en aquest cas, és l'oblic intern qui pateix un esforç més elevat. Cal destacar que aquest també és un múscul proper a la càrrega. En general, els músculs més externs com el recte (RA) i l'oblic extern (EO) pateixen desplaçaments menors i tensions màximes també menors.

Cal remarcar els resultats obtinguts per la línia alba que tot i tenir uns desplaçaments baixos, té una tensió màxima elevada. Es pensa que això pot ser degut a la geometria d'aquest múscul que és més allargada que la resta la qual cosa provoca una distribució diferent de l'estat de tensió al llarg de tot el múscul.

Finalment, es pensa que els resultats obtinguts són coherents amb la geometria i amb la força aplicada i, per tant, l'ordre de magnitud és correcte.

A la Figura 6.7 es representen gràficament els resultats pel que fa al camp de desplaçaments per a cadascun dels músculs analitzats. Cal destacar que, en aquest cas, l'escala utilitzada en cadascuna de les representacions no és la mateixa. En general, s'observa que la zona central dels músculs és la més afectada per la càrrega i el camp de desplaçaments es distribueix de forma uniforme en tot el model.

El múscul transvers (TA) té una distribució més àmplia de desplaçaments elevats al llarg de tota la seva superfície ja que és el múscul que es troba més proper a la càrrega. Per contra, l'oblic intern (IO) té una zona d'elevats desplaçaments més reduïda i concentrada a la zona central. Pel que fa al recte (RA) i l'oblic extern (EO) el camp de desplaçaments es distribueix de manera uniforme en tota la geometria partint de la zona central.

Tal com s'ha comentat anteriorment, s'observa que la línia alba té una distribució de desplaçaments més àmplia degut a les peculiaritats geomètriques d'aquest múscul que fan que els desplaçaments es distribueixen al llarg del múscul.

Seguidament, a la Figura 6.9, es representa la distribució de l'estat de tensions per a cadascun dels músculs. En aquest cas es veuen diferències evidents respecte el camp de desplaçaments ja que les tensions no es distribueixen de forma uniforme sinó que les zones de tensió màxima es concentren en punts concrets de la geometria.

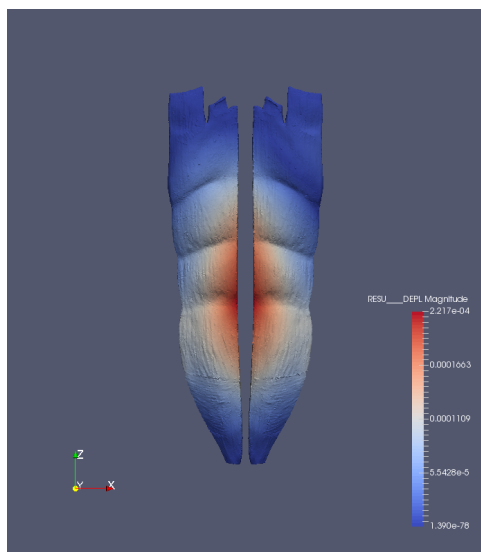
També cal subratllar que, pel que fa a les tensions, no s'aprecia una simetria en els resultats tal com sí passa pels desplaçaments. Es veuen lleugeres diferències entre el costat esquerra i el costat dret de cadascun d'aquests músculs.

Els valors més elevats es donen a l'oblic intern (IO), al transvers (TA) i a la línia alba ja que són els músculs més propers i els que tenen la càrrega aplicada directament. Cal notar que el TA té un estat de tensió distribuït uniformement envoltat de punts amb elevats valors de tensió (color vermell). En canvi, l'IO, que té la tensió màxima, no té una distribució tant uniforme de valors d'esforç elevats.

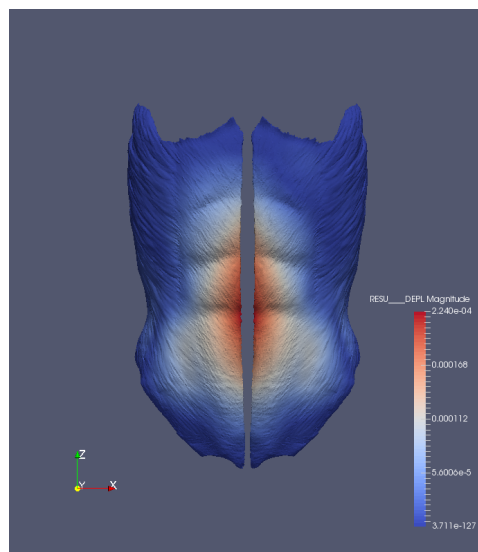
Finalment, a la Figura ?? s'ha representat de nou l'estat de tensió de cadascun dels músculs però en aquest cas s'ha destacat amb un punt verd el punt de la malla on s'obté la tensió més elevada. L'objectiu és demostrar que no hi ha una simetria clara entre ambdues bandes del múscul i que, en general, aquests punts màxims es donen en zones externes dels músculs, és a dir, del contorn. També és important destacar que aquests punts màxims s'acostumen a trobar a la zona central del múscul com passava amb els desplaçaments.

En el cas del transvers (TA) s'observa que el punt de tensió màxima d'una de les bandes del múscul es troba en una part més interna del múscul i no pas al contorn donant lloc a una alta asimetria entre les dues bandes. Pel que fa a l'oblic intern (IO) es respecte la simetria però el punt de tensió màxima es troba també en una zona interna del múscul.

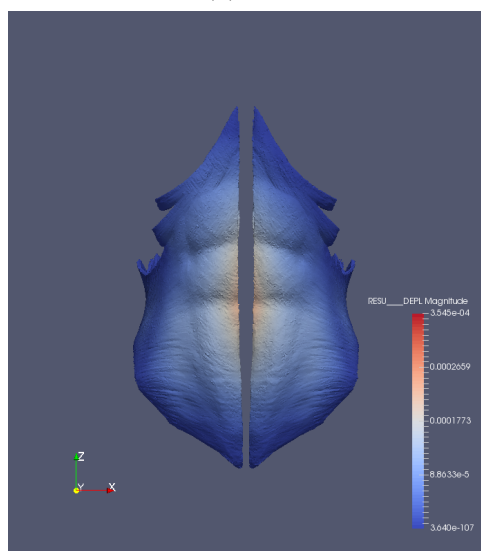
La determinació d'aquests extrems de l'estat de tensió pot ajudar a determinar el millor lloc on realitzar un estoma evitant aquells punts on la tensió és més elevada. De fet, **Salome-Meca** permet determinar aquells elements de les malles en els quals la tensió és superior o inferior a un determinat valor la qual cosa dóna lloc a un «mapa» de punts amb el qual treballar per tal d'establir les millors regions per efectuar un estoma (vegeu-ne un exemple a la Figura 6.10).



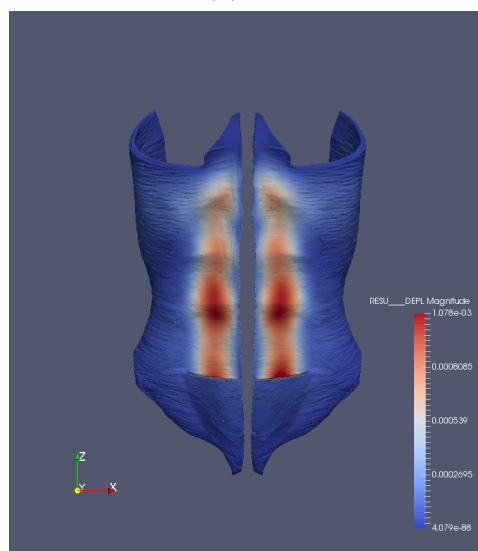
(a) RA



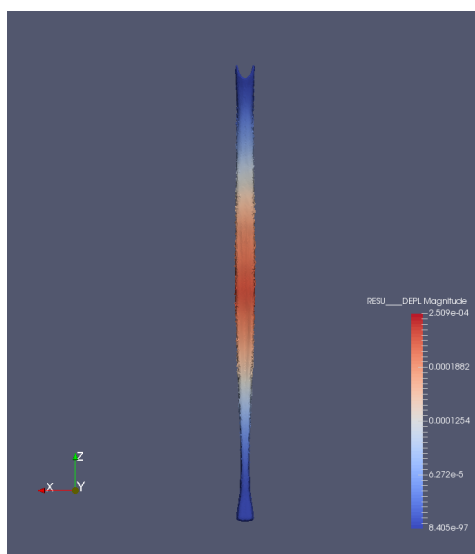
(b) EO



(c) IO

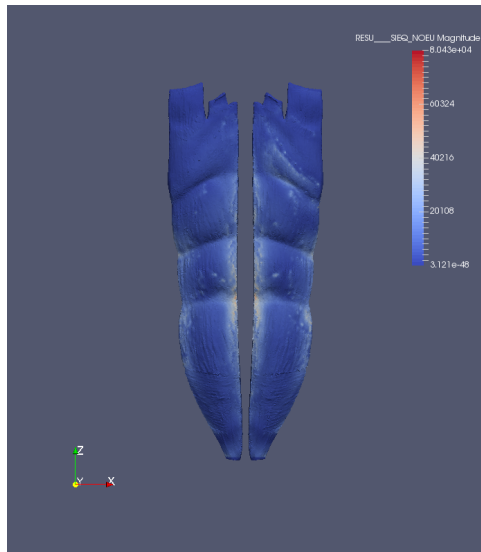


(d) TA

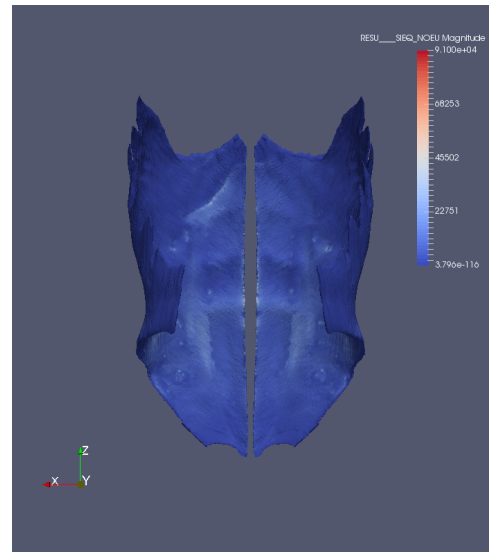


e) Línia alba

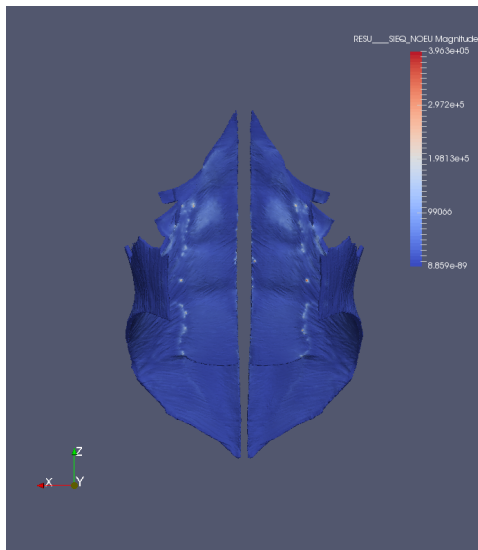
Figura 6.7: Camp de desplaçaments en cada múscul per $F = 600 \text{ N}$ (en m).



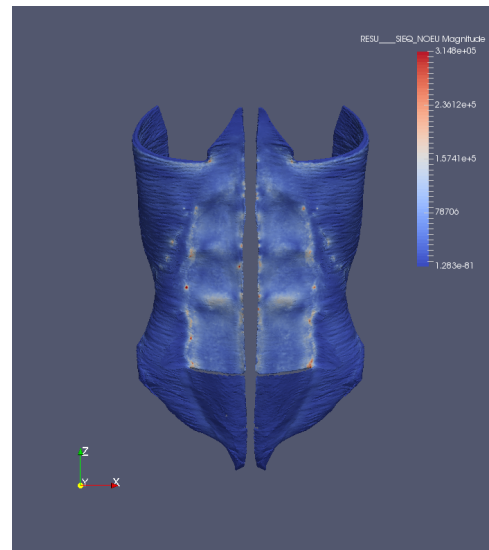
(a) RA



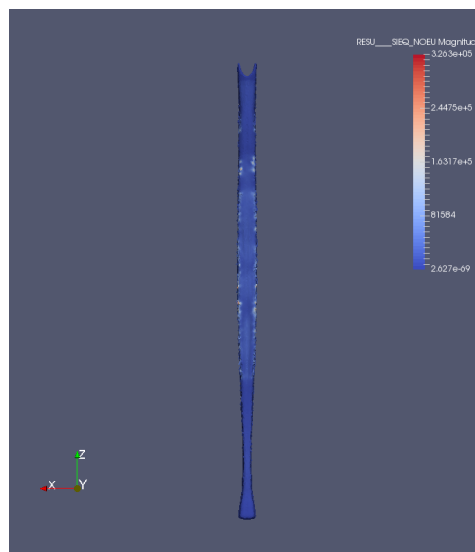
(b) EO



(c) IO

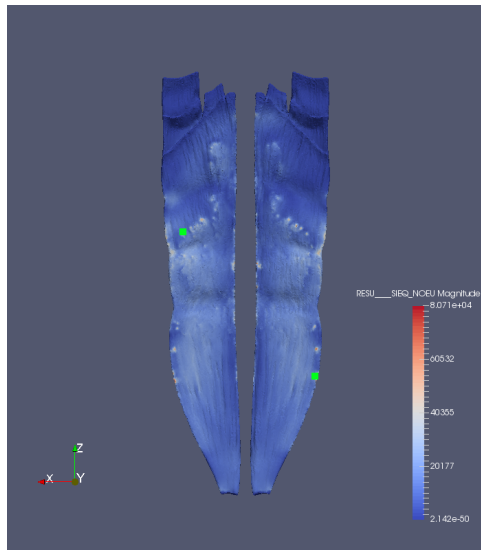


(d) TA

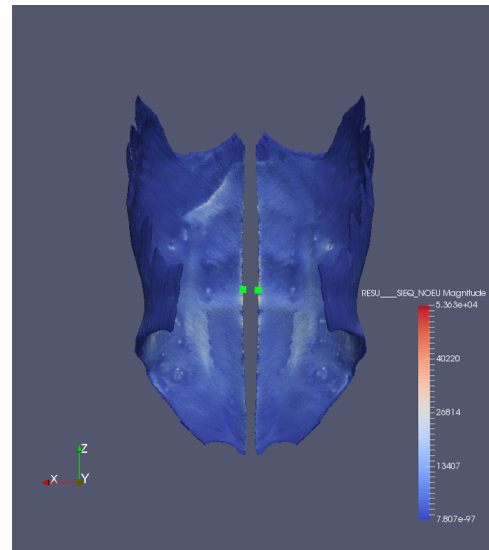


e) Línia alba

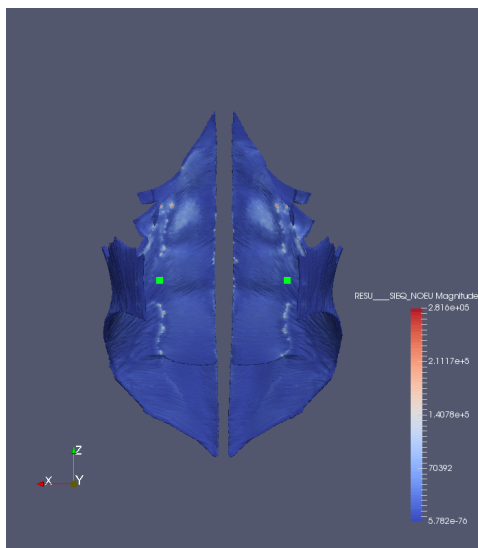
Figura 6.8: Camp de tensions en cada múscul per $F = 600$ N (en Pa).



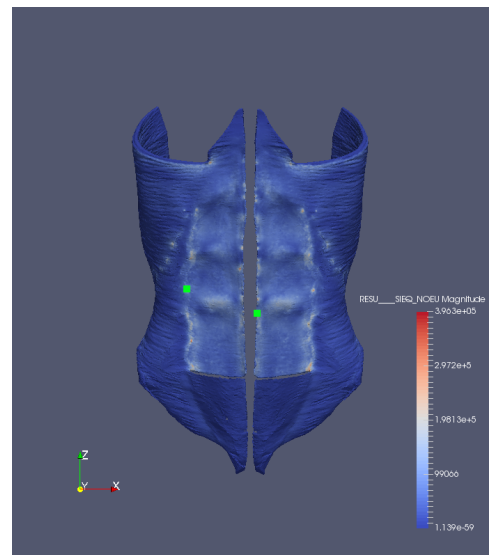
(a) RA



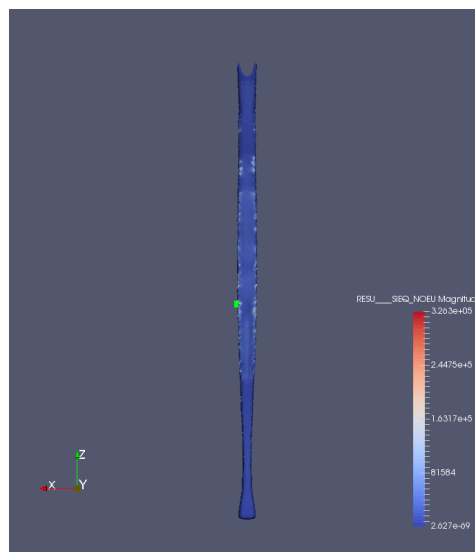
(b) EO



(c) IO



(d) TA



e) Línia alba

Figura 6.9: Camp de tensions en cada múscul per $F = 600$ N (en Pa), en verd els punts de tensió màxima.

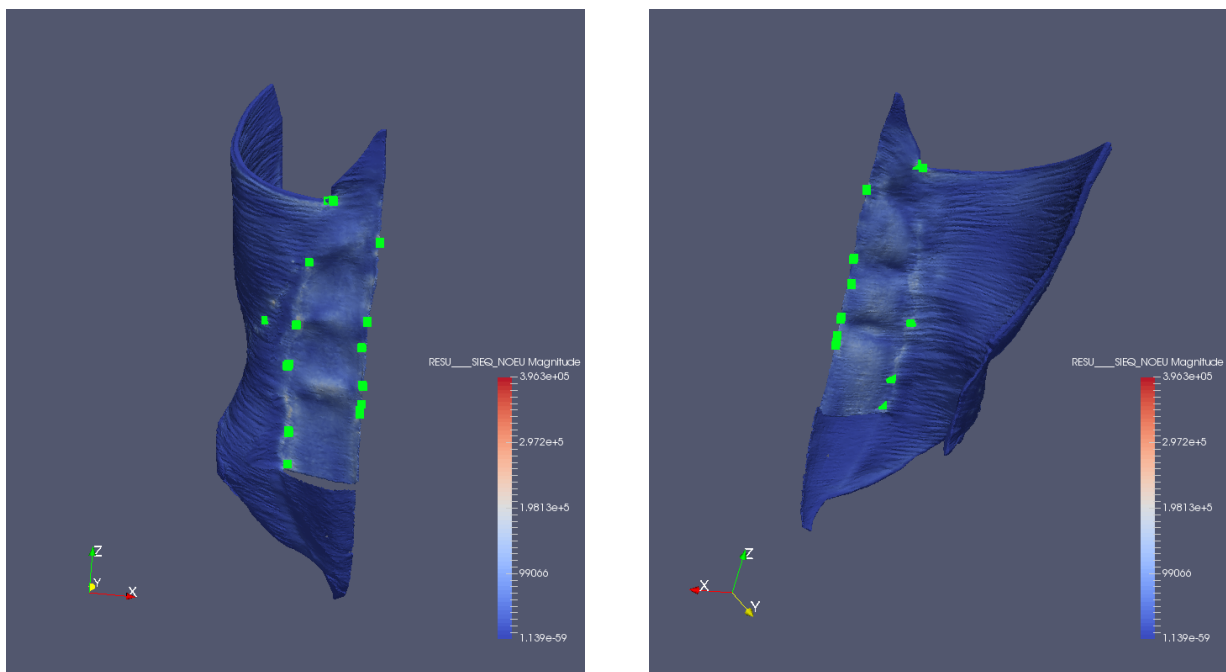


Figura 6.10: Exemple de «mapa» de punts en el múscul transvers (TA) en els quals se superen els $2.1 \cdot 10^5$ Pa de tensió considerant una càrrega aplicada de $F = 600$ N.

7. Conclusions

L'objectiu principal d'aquest treball és conèixer tots els passos de la simulació matemàtica a partir d'un cas pràctic. Es pensa que s'ha assolit aquest objectiu, ja que al llarg del treball s'han seguit tots els passos necessaris per poder fer una simulació en el cas de la paret abdominal per tal de detectar quina és la millor zona per situar un estoma amb l'objectiu de reduir les possibilitats d'aparició d'hèrnies, i per tal de dissenyar malles de reparació adequades. La idea és situar aquest estoma en una zona de la paret abdominal on les tensions siguin menors a fi de reduir la possible aparició d'hèrnies.

Al llarg del treball s'ha estudiat la fisiologia de la paret abdominal per tal de determinar quines característiques té, quines parts comprèn i acabar definint una tipologia de comportament i de material que explica el millor possible la realitat. Amb aquest primer pas s'han aconseguit els objectius específics 1 i 2. Havent determinat la fisiologia de la paret muscular s'ha procedit a la modelització matemàtica de la paret abdominal. Aquest ha estat un dels primers apartats difícils del treball ja que ha requerit un aprenentatge matemàtic profund del problema (objectiu específic 3).

Tenint la base matemàtica necessària per tal de modelitzar la biomecànica de la paret muscular, s'han pogut aplicar aquests coneixements sobre casos pràctics concrets. La idea ha sigut aplicar, en models concrets de la literatura, les funcions d'energia a fi de veure la potència d'aquesta eina i seguir amb l'objectiu general d'aplicabilitat del producte final obtingut (objectiu específic 4).

Amb aquests primers capítols del treball s'ha tancat una etapa més teòrica i s'han obert les portes de l'aplicació computacional dels resultats. L'objectiu ha estat aplicar tots els resultats anteriors sobre casos concrets utilitzant unes eines molt específiques i desconegudes abans de començar aquest treball. Aquesta etapa ha estat complicada ja que la corba d'aprenentatge del programari utilitzat no és especialment fàcil. De totes maneres, s'ha aconseguit dominar aquestes eines, si més no a nivell inicial, per tal de poder implementar els models matemàtics i poder extreure uns resultats que s'han avaluat amb profunditat (objectius específics 5, 6 i 7).

Finalment, el darrer objectiu específic, el 8, s'ha complert amb escreix ja que s'ha treballat colze amb colze amb el Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques de la URV compartint coneixements, treball i esforços.

L'aprenentatge en aquest treball ha estat molt important ja que s'han conegut les funcions d'energia com a eina bàsica per a la modelització biomecànica i s'ha conegut un paquet d'aplicacions de codi obert que ha permès aplicar aquestes funcions a casos concrets a través del mètode dels elements finits.

Es pensa que la planificació i la metodologia de treball ha estat adequada per tal d'aconseguir els objectius proposats. S'ha seguit el *timing* establert tot i que l'etapa pràctica d'implementació computacional s'ha allargat més del que es pensava degut a problemes tècnics i dificultats en l'aprenentatge.

Tot i això, cal remarcar que els objectius no s'han assolit en la seva totalitat ja que no s'han pogut aplicar els models desenvolupats (Pachera i Hernández-Grasa) sobre la geometria de la paret abdominal. Uns dels objectius previs era poder-los aplicar per tal de comparar-ne els resultats posteriorment. Això no ha estat possible degut als problemes d'integració de `MFront` amb `Code_Aster`. De totes maneres, s'han deixat aquests models desenvolupats com a exemples de funcions d'energia i s'ha fet la simulació amb altres models clàssics (a l'Annex V es detallen les dificultats tècniques que hi ha hagut al llarg del treball).

Per concloure, amb la realització d'aquest treball s'han après molts conceptes nous i, el més important, s'han aplicat a casos pràctics conceptes que ja se sabien. Aquest aspecte és el que més es valora ja que, en ocasions, l'aplicabilitat dels conceptes físico-matemàtics queda en un segon terme en l'aprenentatge de les ciències i, gràcies a aquest treball, s'ha vist una clara aplicació de la mecànica amb l'objectiu implícit de facilitar la vida a les persones que pateixen determinades malalties. A més, s'han posat en pràctica molts dels conceptes que s'han après al Màster combinant l'enginyeria computacional i la matemàtica.

7.1 Línies de treball futures

Es pensa que aquest treball té molta continuïtat ja que la biomecànica és un camp molt ampli i permet moltes aplicacions. En primer lloc, caldria fer un estudi més rigorós sobre les característiques materials del teixit muscular per tal de poder afinar els resultats finals. Seguidament, caldria implementar nous comportaments mecànics fets «a mida» pel problema que es té. Amb aquestes dues millores s'aconseguirien resultats millors que permetrien extreure conclusions aplicables a casos reals. Cal recordar que l'objectiu és determinar la millor zona on realitzar un estoma i definir quina és la millor malla quirúrgica.

Amb una millora del coneixement del material i del seu comportament mecànic es podria tancar aquesta línia d'investigació referent a la paret abdominal. En aquest punt es podrien plantejar nous estudis relacionats amb la biomecànica. És a dir, la modelització de determinades parts biològiques i la posterior simulació matemàtica. Això obre un ventall molt ampli amb multitud d'aplicacions i interessos. Es pensa que és millor tenir objectius molt clars i precisos com en aquest treball s'ha tingut, considerant en tot moment la problemàtica que suposa l'aparició d'hèrnies en persones que porten estomes.

De totes maneres, no només es pot aplicar la simulació en l'àmbit de la biomecànica sinó que també es poden aplicar aquestes tècniques de modelització i simulació en molts altres camps: en la construcció, en l'energia, en la indústria, en l'automobilisme, i en una infinitat de camps.

De ben segur que aquest treball obrirà les portes a noves investigacions i nous estudis que aprofundiran el que aquest treball ha introduït.

8. Glossari

Code_Aster

És un programari per a l'anàlisi d'elements finits i simulació numèrica en mecànica estructural i multifísica. *Code_Aster* és el *solver* o motor de processament, sense incloure el preprocessament i el postprocessament (mallat de l'objecte i presentació de la solució).

Col·lagen

Molècula proteica que forma fibres, les fibres col·làgenes, que estan presents en quantitats variables en quasi tots els tipus de teixit connectiu. Les fibres de col·lagen són unes estructures que proporcionen resistència a la tensió i flexibilitat.

Estoma

Obertura, establerta mitjançant mètodes quirúrgics, d'un òrgan balmat a l'exterior o a un altre òrgan.

Eventració

També coneguda com a hèrnia incisional, és una hèrnia que es produeix a nivell de la cicatriu d'una cirurgia abdominal prèvia.

FEA

Finite Element Analysis (Anàlisi per Elements Finites), és la simulació de qualsevol fenomen físic donat mitjançant la tècnica numèrica anomenada mètode dels elements finits. Aquest mètode de càlcul numèric s'empra en la resolució d'equacions diferencials, basat en la discretització del medi o de l'objecte en estudi en una malla d'elements connectats en nodes. És un mètode d'ús molt versàtil i vàlid per a una gran varietat de problemes i tipologies d'estructures. Dóna lloc a un sistema lineal d'equacions que permet trobar una solució aproximada al problema.

Gradient de deformació (F)

En mecànica dels medis continus, és el nom que rep la matriu jacobiana de la transformació que aplica la configuració inicial no deformada en la configuració deformada en un determinat instant posterior. El gradient de deformacions és útil perquè a partir d'ell i el seu invers es poden definir tots els tensors de deformació finits, i a partir d'ells es pot trobar el tensor tensió a través de l'equació constitutiva del material deformable.

Hèrnia

Sortida total o parcial d'un òrgan o d'una part tova del cos per una obertura, natural o accidental, en la paret del seu receptacle a través d'una àrea muscular dèbil.

Invariants

És una propietat sostinguda per un tipus d'objectes matemàtics que no canvien davant de transformacions de diverses classes. Els invariants són molt útils per classificar objectes matemàtics ja que acostumen a reflectir

les propietats intrínseques de l'objecte d'estudi.

Mecànica dels medis continus

Branca de la física que estudia els sistemes constituïts per un gran nombre de partícules des d'un punt de vista macroscòpic, considerant que tenen una natura contínua, a partir de generalitzacions aplicables tant als sòlids deformables com als fluids.

MFront

És un generador de codi per a lleis constitutives que tradueix un llenguatge específic a C++. Aquest llenguatge abasta tres tipus de coneixements dels materials: propietats materials, comportaments mecànics i models puntuals simples.

Mòdul de compressibilitat (k)

Mòdul característic d'un material igual al quocient entre la variació de la pressió que actua uniformement sobre una mostra del material considerat, i la variació unitària de volum que experimenta.

Ostomia

Obertura artificial creada quirúrgicament des del cos cap a fora per permetre el pas d'orina i femta. Es fa servir per tractar certes malalties dels sistemes digestius o urinaris. Pot ser permanent com quan s'extirpa un òrgan o temporal com quan un òrgan necessita curar-se. En general, es realitza a l'intestí prim, al còlon, al recte o a la bufeta.

PK2

The second Piola-Kirchhoff stress (Segon tensor de tensió de Piola-Kirchhoff, S). Mesura de la tensió utilitzada en mecànica dels medis continus, especialment en contextos computacionals.

SALOME

És una plataforma genèrica que permet el preprocessament i postprocessament per a simulacions numèriques.

Salome-Meca

És la integració de SALOME (preprocessament i postprocessament) i Code_Aster (*solver*) en un sol entorn.

Teixit tou

Són teixits que connecten, donen suport, o envolten altres estructures i òrgans del cos, no essent os. Els teixits tous inclouen els tendons, lligaments, fàscia, pell, teixit connectiu fibrós, greix, i membrana sinovial (els quals són teixit connectiu), i músculs, nervis i vasos sanguinis (els quals no són teixit connectiu).

Tensor

Objecte matemàtic que generalitza la noció de vector i consta de diverses components, caracteritzades per dos o més índexs, sotmeses a determinades condicions davant d'un canvi de base.

Tensor de deformació

És un tensor simètric usat en mecànica de medis continus per caracteritzar el canvi de forma i volum d'un cos. El tensor de deformació de Cauchy-Green (C) constitueix una aproximació per caracteritzar les deformacions en el cas de molt petites deformacions. En coordenades cartesianes aquest tensor s'expressa en termes de les components del camp de desplaçaments.

Tensor d'elasticitat (C)

També anomenat tensor de rigidesa (*stiffness tensor*) o *consistent tangent tensor*, és un tensor de quart ordre

simètric que relaciona els tensors tensions i deformacions. Mesura el canvi en la tensió que resulta d'un canvi en l'esforç.

Bibliografia

- [1] Abbas, M. (2015, 30 de juny). «Operator STAT_NON_LINE ». *Code_Aster* [pàgina web]. [Data de consulta: 22 de juny de 2018].<https://www.code-aster.org/V2/doc/v11/en/man_u/u4/u4.51.03.pdf>
- [2] Ahluwalia, H. S.; Burger, J. P.; Quinn, T. H. (2004). «Anatomy of the anterior abdominal wall». *Operative techniques in general surgery* (vol. 6, núm. 3, p. 147-155).
- [3] Calvo, B.; Sierra, M.; Grasa, J.; Munoz, M. J.; Pena, E. (2014). «Determination of passive viscoelastic response of the abdominal muscle and related constitutive modeling: Stress-relaxation behavior». *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* (vol. 36, p. 47-58).
- [4] Deeken, C. R.; Lake, S. P. (2017). «Mechanical properties of the abdominal wall and biomaterials utilized for hernia repair». *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* (vol. 74, p. 411-427).
- [5] Deeken, C. R.; Lake, S. P. (2017). «Mechanical properties of the abdominal wall and biomaterials utilized for hernia repair». *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* (vol. 74, p. 411-427).
- [6] Ehret, A. E.; Itskov, M. (2007). «A polyconvex hyperelastic model for fiber-reinforced materials in application to soft tissues». *Journal of Materials Science*, (vol. 42, núm. 21, p. 8853-8863).
- [7] Estevan, R. E. (2015) «Prevención de la hernia paraestomal». *Revista Hispanoamericana de Hernia*, (vol. 3, núm. 1, p. 1-3).
- [8] Grant, A. (2000). «Mesh compared with non-mesh methods of open groin hernia repair: systematic review of randomized controlled trials». *BJS* (vol. 87, núm. 7, p. 854-859).
- [9] Grasa, J.; Sierra, M.; Lauzeral, N.; Munoz, M. J.; Miana-Mena, F. J.; Calvo, B. (2016). «Active behavior of abdominal wall muscles: Experimental results and numerical model formulation». *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* (núm. 61, p. 444-454).
- [10] Habousa, D. (2018, 5 de gener). «Nonlinear behaviors». *Code_Aster* [pàgina web]. [Data de consulta: 26 de juny de 2018].<https://www.code-aster.org/V2/doc/v13/en/man_u/u4/u4.51.11.pdf>
- [11] Helfer, T.; Michel, B.; Proix, J. M.; Salvo, M.; Sercombe, J.; Casella, M. (2015). «Introducing the open-source mfront code generator: Application to mechanical behaviours and material knowledge management within the PLEIADES fuel element modelling platform». *Computers & Mathematics with Applications* (vol. 70, núm. 5, p. 994-1023).
- [12] Hernández, B.; Peña, E.; Pascual, G.; Rodriguez, M.; Calvo, B.; Doblare, M.; Bellón, J. M. (2011). «Mechanical and histological characterization of the abdominal muscle. A previous step to modelling hernia surgery». *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* (vol. 4, núm. 3, p. 392-404).

- [13] Hernández-Gascón, B.; Peña, E.; Melero, H.; Pascual, G.; Doblaré, M.; Ginebra, M. P.; Bellón, J. M.; Calvo, B. (2011). «Mechanical behaviour of synthetic surgical meshes: finite element simulation of the herniated abdominal wall». *Acta Biomaterialia* (vol. 7, núm. 11, p. 3905-3913).
- [14] Hernández-Gascón, B.; Peña, E.; Grasa, J.; Pascual, G.; Bellón, J. M.; Calvo, B. (2013a). «Mechanical response of the herniated human abdomen to the placement of different prostheses». *Journal of Biomechanical Engineering* (vol. 135, núm. 5, 051004).
- [15] Hernández-Gascón, B.; Grasa, J.; Calvo, B.; Rodríguez, J. F. (2013b). «A 3D electro-mechanical continuum model for simulating skeletal muscle contraction». *Journal of theoretical biology* (vol. 335, p. 108-118).
- [16] Holzapfel, G.A. (2000) *Nonlinear Solid Mechanics, A Continuum Approach for Engineering*. England: John Wiley and Sons Ltd.
- [17] Holzapfel, G.A. (2001). «Biomechanics of soft tissue». A: Lemaitre, J. (Ed.), *Handbook of Materials Behavior Models, vol. III*. Nova York: Academic Press, p. 1057–1073.
- [18] Kalaba, S.; Gerhard, E.; Winder, J. S.; Pauli, E. M.; Haluck, R. S.; Yang, J. (2016). «Design strategies and applications of biomaterials and devices for Hernia repair». *Bioactive materials* (vol. 1, núm. 1, p. 2-17).
- [19] Konerding, M. A.; Bohn, M.; Wolloscheck, T.; Batke, B.; Holste, J. L.; Wohlert, S.; Trzewik, J.; Förstemann, T.; Hartung, C. (2011). «Maximum forces acting on the abdominal wall: experimental validation of a theoretical modeling in a human cadaver study». *Medical Engineering and Physics* (vol. 33, núm. 6, p. 789-792).
- [20] Lefebvre, J. P. (2015, 22 de juliol) «Various syntaxes: files .export». *Code_Aster* [pàgina web]. [Data de consulta: 26 de juny de 2018].
<https://www.code-aster.org/V2/doc/v12/en/man_d/d1/d1.02.05.pdf>
- [21] Liefelth, D.; Kolling, S. (2007). «An anisotropic material model for finite rubber viscoelasticity». *LS-DYNA Adwenderforum, Frankenthal* (p. 25-54).
- [22] Ogden, R. W. (1972). «Large deformation isotropic elasticity—on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* (vol. 326, núm. 1567, p.565-584).
- [23] Pachera, P.; Pavan, P. G.; Todros, S.; Cavinato, C.; Fontanella, C. G.; Natali, A. N. (2016). «A numerical investigation of the healthy abdominal wall structures». *Journal of biomechanics* (vol. 49, núm. 9, p. 1818-1823).
- [24] Read, R. C. (2004). «Milestones in the history of hernia surgery: prosthetic repair». *Hernia* (vol. 8, núm. 1, p. 8-14).
- [25] Simo, J. C.; Miehe, C. (1992). «Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (vol. 98, núm. 1, p. 41-104).
- [26] Song, C.; Alijani, A.; Frank, T.; Hanna, G. B.; Cuschieri, A. (2006). «Mechanical properties of the human abdominal wall measured in vivo during insufflation for laparoscopic surgery». *Surgical Endoscopy And Other Interventional Techniques* (vol. 20, núm. 6, p. 987-990).

- [27] Spencer, A. J. M. (1971). «Part III. Theory of invariants». A: A. C. Eringen (Ed.), *Continuum physics*. Nova York & Londres: Academic Press, p. 239-353.
- [28] Stålhand, J.; Klarbring, A.; Holzapfel, G. A. (2011). «A mechanochemical 3D continuum model for smooth muscle contraction under finite strains». *Journal of theoretical biology* (vol. 268, núm. 1, p. 120-130).
- [29] Tuan, H. S.; Marvalova, B. (2007). «Constitutive material model of fiber-reinforced composites at finite strains in consol multiphysics». En les actes de *Konference Technical Computing*. Praga, 2007.
- [30] U.S. National Library of Medicine «Ostomy». *MedlinePlus* [pàgina web]. [Data de consulta: 14 de maig de 2018]. <<https://medlineplus.gov/ostomy.html>>
- [31] United Ostomy Associations of America, Inc. (UOAA) «What is an ostomy?» [pàgina web]. [Data de consulta: 14 de maig de 2018]. <<https://www.ostomy.org/what-is-an-ostomy/>>
- [32] Weiss, J. A.; Maker, B. N.; Govindjee, S. (1996). «Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity». *Computer methods in applied mechanics and engineering* (vol. 135, núm. 1-2, p. 107-128).

Bibliografia complementària

Abbas, M. (2013, 25 de setembre). «Law of behavior very-rubber band: almost incompressible material». *Code_Aster* [pàgina web]. [Data de consulta: 3 de març de 2018].
<https://www.code-aster.org/V2/doc/v13/en/man_r/r5/r5.03.19.pdf>

Alberich, J. «A spanish introduction to MFront and Salome-MECA». *TFEL* [pàgina web]. [Data de consulta: 21 d'octubre de 2017]. <<http://tfel.sourceforge.net/tutorial-spanish.html>>

Aubry, J. P. (2013). *Beginning with Code_Aster: A Practical Introduction to Finite Element Method Using Code_Aster Gmsh and Salome; Version 1.1.1*. Framabook.

Belytschko, T.; Liu, W. K.; Moran, B.; Elkhodary, K. (2013). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. England: John Wiley and Sons Ltd.

Böl, M.; Reese, S. (2008). «Micromechanical modelling of skeletal muscles based on the finite element method». *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering* (vol. 11, núm. 5, p. 489-504).

Calvo, B.; Pena, E.; Martins, P.; Mascarenhas, T.; Doblare, M.; Jorge, R. N.; Ferreira, A. (2009). «On modelling damage process in vaginal tissue». *Journal of biomechanics* (vol. 42, núm. 5, p. 642-651).

Chaves, E. W. V. (2012). *Mecánica del Medio Continuo. Conceptos básicos*. Barcelona: CIMNE.

Ehret, A. E.; Itskov, M. (2009). «Modeling of anisotropic softening phenomena: application to soft biological tissues». *International Journal of Plasticity* (vol. 25, núm. 5, p. 901-919).

Ehret, A. E.; Böl, M.; Itskov, M. (2011). «A continuum constitutive model for the active behaviour of skeletal muscle». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* (vol. 59, núm. 3, p. 625-636).

Gasser, T. C.; Holzapfel, G. A. (2007). «Finite element modeling of balloon angioplasty by considering overstretch of remnant non-diseased tissues in lesions». *Computational Mechanics* (vol. 40, núm. 1, p. 47-60).

Grasa, J.; Hernández-Gascón, B.; Ramírez, A.; Rodríguez, J. F.; Calvo, B. (2012). «Modelado numérico del comportamiento del tejido músculo-esquelético». *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, (vol. 28, núm. 3, p. 177-186).

Helfer. T; Ling C. (2014). «Écriture de lois de comportement mécanique en grandes transformations avec le générateur de code mfront». *TFEL* [pàgina web]. [Data de consulta: 29 de maig de 2018].
<<http://tfel.sourceforge.net/documents/mfront/finitestrain.pdf>>

Helfer. T.; Proix J. M. (2014, desembre). «Écriture de lois de comportement avec mfront: tutorial». *TFEL*

[pàgina web]. [Data de consulta: 17 d'abril de 2018].

<<http://tfel.sourceforge.net/documents/tutoriel/tutoriel.pdf>>

Jeevanjee, N. (2016). *An introduction to tensors and group theory for physicists*. New York: Birkhauser.

Lai, W. M.; Rubin, D. H.; Krempl, E.; Rubin, D. (2009). *Introduction to continuum mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann.

Li, S.; Qian, D. (Eds.). (2013). *Multiscale simulations and mechanics of biological materials*. England: John Wiley and Sons Ltd.

Mase, G. T.; Mase, G. E. (1999). *Continuum mechanics for engineers*. Boca Raton: CRC press.

Murtada, S. I.; Holzapfel, G. A. (2014). «Investigating the role of smooth muscle cells in large elastic arteries: a finite element analysis». *Journal of theoretical biology* (vol. 358, p. 1-10).

Olivella, X. O.; de Saracibar Bosch, C. A. (2003). *Mecànica de medis continus per a enginyers*. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya.

Pavan, P. G.; Pachera, P.; Stecco, C.; Natali, A. N. (2014). «Constitutive modeling of time-dependent response of human plantar aponeurosis». *Computational and mathematical methods in medicine* (vol. 2014).

Pawlikowski, M. (2012). «Cortical bone tissue viscoelastic properties and its constitutive equation-preliminary studies». *Archive of Mechanical Engineering* (vol. 59, núm. 1, p. 31-52).

Ruiz-Tolosa, J. R.; Castillo, E. (2006). *From vectors to tensors*. Berlin: Springer Science & Business Media.

Sellent, N. (2017, 5 de desembre). «Note of use of MFront with Code_Aster». *Code_Aster* [pàgina web]. [Data de consulta: 15 de febrer de 2018]. <https://www.code-aster.org/V2/doc/v12/en/man_u/u2/u2.10.02.pdf>

Tang, C. Y.; Zhang, G.; Tsui, C. P. (2009). «A 3D skeletal muscle model coupled with active contraction of muscle fibres and hyperelastic behaviour». *Journal of biomechanics* (vol. 42, núm. 7, p. 865-872).

Yosibash, Z.; Priel, E. (2012). «Artery active mechanical response: High order finite element implementation and investigation». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (vol. 237, p. 51-66).

Figures

Figura 2.1: <<https://www.drugs.com/mca/ostomy-adapting-to-life-after-colostomy-ileostomy-or-urostomy>>
[Data de consulta: 4 de juny de 2018].

Figura 2.2: <<http://www.cbirkedal.com/blog/hernia-repair-surgery-fixes-various-abdominal-deviations>>
[Data de consulta: 4 de juny de 2018].

Figura 2.3: Pearson Education, Inc.

Figura 4.1: Hernández-Gascón, B.; Grasa, J.; Calvo, B.; Rodríguez, J. F. (2013b). «A 3D electro-mechanical continuum model for simulating skeletal muscle contraction». *Journal of theoretical biology* (vol. 335, p. 108-118).

Figures 5.1, 5.2, 5.3, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.9, ?? i 6.10 elaboració pròpia amb Salome-Meca i en alguns casos retoc amb Gimp.

Annex I - pachera.mfront

```
@DSL DefaultFiniteStrain; // this behaviour does not require an integration algorithm
@Behaviour pachera;
@Author Lluís Tuset;
@Date 03/05/2018;

@MaterialProperty real m;
@MaterialProperty real m2;

/* parameters from Table 1 of the article */
@Parameter mu_f = 2.6e5;
@Parameter k_fv = 2e9;
@Parameter alfa_f1 = 4.5e5;
@Parameter alfa_f2 = 45.68;

/* local variable to store the consistent tangent operator */
@LocalVariable StiffnessTensor dS_dC;

/* equations to solve */

@Integrator{

if(det(F1)==0){
sig = Stensor::Id();
Dt = Stensor4::Id();
}

if(det(F1)!=0){
const Stensor id = Stensor::Id(); // Identity tensor
const real J = det(F1); // Jacobian deformation
const Stensor C = computeRightCauchyGreenTensor(F1); // Right Cauchy tensor

/* invariants */
const real I1 = trace(C); // First invariant is the trace of C
const Stensor aux_C2 = square(C); // Needed for second invariant, I2 [square(C)=C^2]
const real I2 = (I1*I1-trace(aux_C2))/2; // Second invariant
const real I3 = J*J; // Third invariant [I3=det(C)=det(F*F)=det(F)*det(F)=J*J]

/* volume-preserving part (Cbar) */
const real aux_J23 = cbrt(I3); // Cubic root of the square of J

/* Modified Right Cauchy tensor */
const Stensor Cbar =(1/aux_J23)*C;

/* invariants with bars */
const real I1bar = trace(Cbar); // First invariant of Cbar
const Stensor aux_C2bar = square(Cbar);
const real I2bar = (I1bar*I1bar-trace(aux_C2bar))/2; // Second invariant of Cbar
tvector<3u,real> aux_n0; // Initial orientation (unit vector)
aux_n0(0)=0;
aux_n0(1)=0;
aux_n0(2)=1;
const Stensor aux_n0_n0 = Stensor::buildFromVectorDiadicProduct(aux_n0);
const real I4bar = Cbar|aux_n0_n0;

/* derivative of the invariants with bars */
const Stensor dI1bar_dCbar = id; // Derivative of I1bar
```

```

const Stensor dI2bar_dCbar = I1bar*id-Cbar; // Derivative of I2bar
const Stensor dI3bar_dCbar = aux_C2bar-I1bar*Cbar-I2bar*id; // Derivative of I3bar
const Stensor dI4bar_dCbar = aux_n0_n0; // Derivative of I4bar

// Wf=Wfm+Wff (energy function)

//SECOND PIOLA-KIRCHHOFF STRES (PK2)

// GROUND MATRIX
// Wfm=(mu_f/2)*(I1bar-3)+(k_fv/2)*(J^2-1-2lnJ)
// dWfm_dCbar =dWfm_dI1bar*dI1bar_dCbar+dWfm_dI3bar*dI3bar_dCbar
// =dWfm_dI1bar*dI1bar_dCbar+(1/2J)*dWfm_dJ*dI3bar_dCbar [dI3bar=2J*dJ]
// Sfm = 2*dWfm_dCbar

const real aux_J2 = J*J;
const StressStensor Sfm = mu_f*dI1bar_dCbar+k_fv*(1-(1/aux_J2))*dI3bar_dCbar;

// COLLAGEN FIBERS
// Wff=[alfa_f1/(2*alfa_f2)]*[exp(alfa_f2*(I4bar-1)^2)-1]
// dWff_dCbar=dWff_dI4bar*dI4bar_dCbar
// Sff=2*dWff_dCbar

const real aux_I4bar_1 = I4bar-1;
const StressStensor Sff = 2*alfa_f1*aux_I4bar_1*exp(alfa_f2*aux_I4bar_1*aux_I4bar_1)*dI4bar_dCbar;

// CAUCHY STRESS
sig = convertSecondPiolaKirchhoffStressToCauchyStress(Sfm+Sff,F1);
// Converts the PK2 stress to the Cauchy Stress using the deformation gradient

// CONSISTENT TANGENT OPERATOR

if(computeTangentOperator_){

/* second derivative of the invariants with bars */
const Stensor4 d2I3bar_dCbar2=Stensor4::dsquare(Cbar)-(Cbar^id)-I1bar*Stensor4::Id()+ (id^dI2bar_dCbar);
//The computeDeterminantSecondDerivative is not available.
//It can be replaced by the following code: Stensor4::dsquare(C)-(C^id)-I1*Stensor4::Id()+ (id^dI2_dC)

// GROUND MATRIX
const Stensor4 dSm_dCbar=k_fv*(1-(1/aux_J2))*d2I3bar_dCbar2;

// COLLAGEN FIBERS
const real aux_1=1+2*alfa_f2*aux_I4bar_1*aux_I4bar_1;
const Stensor4 aux_2=aux_n0_n0^aux_n0_n0;
const real aux_3=exp(alfa_f2*aux_I4bar_1*aux_I4bar_1);
const Stensor4 dSf_dCbar=2*alfa_f1*aux_3*aux_1*aux_2;

dS_dC = dSm_dCbar+dSf_dCbar;
}
}

@TangentOperator<DS.DC>{
Dt = dS_dC;
}

```

Annex II - pachera.comm

```
DEBUT()

young=2e9

poisson=0.49

forca=100

mesh = LIRE_MALLAGE(FORMAT='MED', UNITE=20)

mesh = MODI_MALLAGE(
  reuse=mesh, MALLAGE=mesh, ORIE_PEAU_3D=_F(GROUP_MA=('Press', ))
)

model = AFFE_MODELE(
  AFFE=_F(MODELISATION=('3D', ), PHENOMENE='MECANIQUE', TOUT='OUI'),
  MALLAGE=mesh
)

mater = DEFI_MATERIAU(ELAS=_F(young, poisson), MFRONT=_F(LISTE_COEF=(young, poisson)))

fieldmat = AFFE_MATERIAU(AFFE=_F(MATER=(mater, ), TOUT='OUI'), MALLAGE=mesh)

listr = DEFI_LIST_REEL(DEBUT=0.0, INTERVALLE=_F(JUSQU_A=1.0, NOMBRE=1))

times = DEFI_LIST_INST(
  DEFI_LIST=_F(LIST_INST=listr, PAS_MAXI=0.0001, PAS_MINI=0.00001),
  ECHEC=_F(SUBD_NIVEAU=100, SUBD_PAS=100),
  METHODE='AUTO'
)

load = AFFE_CHAR_MECA(
  DDLIMPO=_F(DX=0.0, DY=0.0, DZ=0.0, GROUP_MA=('Fix', )),
  MODELE=model,
  PRES_REP=_F(GROUP_MA=('Press', ), PRES=forca)
)

RESM = STAT_NON_LINE(
  CHAMMATER=fieldmat,
  COMPORTEMENT=_F(
    DEFORMATION='SIMO_MIEHE',
    ITER_INTE_MAXI=100,
    LIBRAIRIE='/home/luis/Documents/test_pachera_cil/src/libAsterBehaviour.so',
    NOM_ROUTINE='asterpa',
    RELATION='MFRONT',
    RESLINTE_MAXI=1e-08,
    TOUT='OUI'
  ),
  CONVERGENCE=_F(
    ITER_GLOB_MAXI=15000, RESI_GLOB_MAXI=1e-04, RESI_GLOB_RELA=0.001
  ),
  EXCIT=_F(CHARGE=load),
  INCREMENT=_F(LIST_INST=times),
  MODELE=model,
  NEWTON=_F(MATRICE='ELASTIQUE', PREDICTION='EXTRAPOLE')
)
```

```
RESM = CALC.CHAMP(  
  reuse=RESM,  
  CONTRAINTE=('SIGM_ELNO', 'SIGM_NOEU'),  
  CRITERES=('SIEQ_ELNO', 'SIEQ_NOEU'),  
  RESULTAT=RESM  
)  
  
IMPR_RESU(  
  FORMAT='MED',  
  RESU=_F(  
    NOMCHAM=('SIGM_NOEU', 'SIEQ_NOEU', 'DEPL', 'SIGM_ELNO', 'SIEQ_ELNO'),  
    RESULTAT=RESM  
  ),  
  UNITE=80  
)  
  
FIN()
```


Annex III - exemple.export

```
P actions make_etude
P aster_root /medsim/programes/salome_2017/V2017.0.2/tools/Code_aster_frontend-20170
P consbtc oui
P corefilesize unlimited
P cpresok RESNOOK
P debug nodebug
P display llulistuset-N2x0WU:0
P facmtps 1
P lang en
P mclient llulistuset-N2x0WU
P memjob 65864704
P memory_limit 64321.0
P mode interactif
P mpi_nbcpu 1
P mpi_nbnoeud 1
P nbmaxnook 5
P noeud localhost
P nomjob New
P origine ASTK 2017.0
P platform Linux64
P profastk llulistuset@llulistuset-N2x0WU:New
P protocol_copyfrom asrun.plugins.server.SCPServer
P protocol_copyto asrun.plugins.server.SCPServer
P protocol_exec asrun.plugins.server.SSHServer
P proxy_dir /tmp
P rep_trav /home/lluis/local/tmp/lluis-medsim-Workstation-interactif.37403
P serveurur localhost
P soumbtc oui
P time_limit 9000000.0
P tpsjob 150001
P uclient llulistuset
P username llulistuset
P version 13.4
A args
A memjeveux 8040.125
A tpmx 9000000.0
F comm /home/lluis/Documents/test11_nolineal_paret/exemple.comm D 1
F mmed /home/lluis/Documents/test11_nolineal_paret/exemple.med D 20
F mess /home/lluis/Documents/test11_nolineal_paret/exemple.mess R 6
F resu /home/lluis/Documents/test11_nolineal_paret/exemple.resu R 8
F rmed /home/lluis/Documents/test11_nolineal_paret/exemple.rmed R 80
```

Seguidament es detalla el significat dels principals paràmetres del fitxer *.export* [20]:

- *memjob*: memòria total del treball (en KB). Aquest paràmetre és el que es regula des del mòdul *ASTK*.
- *memory_limit*: memòria màxima que es permet utilitzar per al càlcul amb *Aster* (en MB).
- *mpi_nbcpu*: nombre de processadors per executar el treball en paral·lel a través de MPI.
- *mpi_nbnoeud*: nodes per al paral·lelisme MPI.
- *time_limit*: temps màxim en segons que es permet.

- *tpsjob*: temps màxim del treball (en minuts).
- *tpmax*: temps màxim de l'execució (en segons).

i els fitxers, d'entrada i de sortida, per a la resolució del problema:

- el fitxer *.comm* correspon al fitxer de comandes per resoldre el problema,
- el *.med* és el mallat que s'exporta des del mòdul *mesh* de **Salome-Meca**,
- el *.mess* és un fitxer amb tots el desenvolupament del problema tal com es pot veure des del terminal mentre s'executa **Code_Aster** i conté un descripció exhaustiva dels errors,
- el *.resu* és un fitxer de resultats que resumeix el fitxer *.mess* i tan sols conté els principals aspectes del càlcul (errors durant l'execució, despesa de memòria, despesa de temps, quantitat d'elements finits amb els quals s'ha treballat, etc.)
- i el *.rmed* conté la solució del problema que es podrà importar a *ParaVis* per veure els resultats de forma gràfica.

Annex IV - paret.com

```
DEBUT()

young = 1e7

poisson = 0.4

density = 1.0

FORCE = 600

MAIL = LIRE.MAILLAGE(FORMAT='MED', UNITE=20)

MAIL = MODLMAILLAGE(
  reuse=MAIL, MAILLAGE=MAIL, ORIE_PEAU_3D=_F(GROUP_MA=('pres1', ))
)

MODE = AFFE.MODELE(
  AFFE=_F(MODELISATION='3D', PHENOMENE='MECANIQUE', TOUT='OUI'),
  MAILLAGE=MAIL
)

MA = DEFLMATERIAU(ELAS=_F(E=young, NU=poisson, RHO=density))

MAalba = DEFLMATERIAU(
  ECRO_LINE=_F(D_SIGM_EPSI=48000.0, SY=11000000000.0),
  ELAS=_F(E=young, NU=poisson, RHO=density)
)

MArecte = DEFLMATERIAU(
  ECRO_LINE=_F(D_SIGM_EPSI=48000.0, SY=11000000000.0),
  ELAS=_F(E=young, NU=poisson, RHO=density)
)

MAoint = DEFLMATERIAU(
  ECRO_LINE=_F(D_SIGM_EPSI=48000.0, SY=11000000000.0),
  ELAS=_F(E=young, NU=poisson, RHO=density)
)

MAoext = DEFLMATERIAU(
  ECRO_LINE=_F(D_SIGM_EPSI=48000.0, SY=11000000000.0),
  ELAS=_F(E=young, NU=poisson, RHO=density)
)

MAtr = DEFLMATERIAU(
  ECRO_LINE=_F(D_SIGM_EPSI=48000.0, SY=11000000000.0),
  ELAS=_F(E=young, NU=poisson, RHO=density)
)

MATE = AFFE.MATERIAU(
  AFFE=(
    _F(GROUP_MA=('Galba_Volumes', ), MATER=(MAalba, )), _F(
      GROUP_MA=('Grecte2_Volumes', 'Grecte1_Volumes'),
      MATER=(MArecte, )
    ),
    _F(GROUP_MA=('Groint1_Volumes', 'Groint2_Volumes'), MATER=(MAoint, )),
    _F(GROUP_MA=('Groext2_Volumes', 'Groext1_Volumes'), MATER=(MAoext, ))
  )
)
```

```

    ), _F(GROUP_MA=('Grtr2_Volumes', 'Grtr1_Volumes'), MATER=(MAtr, ))
),
MAILLAGE=MAIL
)

TPS = DEFI_LIST_REEL(DEBUT=0.0, INTERVALLE=_F(JUSQU_A=0.5, PAS=0.25))

formule0 = FORMULE(NOMPARA='INST', VALE='( 0.0 )')

form = FORMULE(NOMPARA='INST', VALE='(FORCE)')

l1ista = DEFI_LIST_INST(
    DEFI_LIST=_F(LIST_INST=TPS, PAS_MAXI=0.025, PAS_MINI=1e-06), METHODE='AUTO'
)

grav1 = AFFE_CHAR_MECA_F(
    DDLIMPO=_F(DX=formule0, DY=formule0, DZ=formule0, GROUP_MA=('fix', )),
    FORCE_FACE=_F(FY=form, GROUP_MA='pres1'),
    MODELE=MODE
)

grav2 = AFFE_CHAR_MECA_F(
    FORCE_FACE=_F(FY=form, GROUP_MA='pres2'), MODELE=MODE
)

CHAR = AFFE_CHAR_MECA(
    DDLIMPO=_F(DX=0.0, DY=0.0, DZ=0.0, GROUP_MA=('fix', )),
    MODELE=MODE,
    PRES_REP=_F(GROUP_MA='pres1', ), PRES=FORCE
)

CHAR2 = AFFE_CHAR_MECA(
    MODELE=MODE, PRES_REP=_F(GROUP_MA='pres2', ), PRES=FORCE
)

# RESU = MECA_STATIQUE(
#   CHAMMATER=MATE,
#   EXCIT=( _F(CHARGE=CHAR), _F(CHARGE=CHAR2) ),
#   MODELE=MODE,
#   SOLVEUR=_F()
# )
RESU = STAT_NON_LINE(
    ARCHIVAGE=_F(LIST_INST=TPS),
    CHAMMATER=MATE,
    COMPORTEMENT=_F(DEFORMATION='SIMO_MIEHE', RELATION='VMIS_ISOT_LINE'),
    CONVERGENCE=_F(ITER_GLOB_MAXI=25),
    EXCIT=( _F(CHARGE=grav1), _F(CHARGE=grav2) ),
    INCREMENT=_F(LIST_INST=l1ista),
    MODELE=MODE,
    NEWTON=_F(MATRICE='TANGENTE', PAS_MINI_LELAS=1e-05, PREDICTION='TANGENTE')
)

RESU = CALC_CHAMP(
    reuse=RESU,
    CONTRAINTE=('SIGM_ELNO', 'SIGM_NOEU'),
    CRITERES=('SIEQ_ELNO', 'SIEQ_NOEU'),
    FORCE=('FORC_NODA', 'REAC_NODA'),
    RESULTAT=RESU
)

IMPR_RESU(
    FORMAT='MED',
    RESU=_F(
        NOMCHAM=(
            'SIGM_NOEU', 'SIEQ_NOEU', 'DEPL', 'REAC_NODA', 'ECIN_ELEM',
            'SIGM_ELNO'
        ),
        RESULTAT=RESU,
        TOUT='OUI',
        TOUT_CMP='OUI'
    ),
)

```

```

    UNITE=80
)

IMPR_RESU(
    FORMAT='RESULTAT', RESU=.F(GROUP.MA=('pres1', ), RESULTAT=RESU), UNITE=10
)

IMPR_RESU(
    FORMAT='MED',
    RESU=.F(GROUP.MA=('Gralba_Volumes', ), RESULTAT=RESU, TOUT.CMP='OUI'),
    UNITE=2
)

IMPR_RESU(
    FORMAT='MED',
    RESU=.F(GROUP.MA=('Grrecte1_Volumes', ), RESULTAT=RESU, TOUT.CMP='OUI'),
    UNITE=3
)

IMPR_RESU(
    FORMAT='MED',
    RESU=.F(GROUP.MA=('Grrecte2_Volumes', ), RESULTAT=RESU, TOUT.CMP='OUI'),
    UNITE=4
)

IMPR_RESU(
    FORMAT='MED',
    RESU=.F(GROUP.MA=('Groint1_Volumes', ), RESULTAT=RESU, TOUT.CMP='OUI'),
    UNITE=5
)

IMPR_RESU(
    FORMAT='MED',
    RESU=.F(GROUP.MA=('Groint2_Volumes', ), RESULTAT=RESU, TOUT.CMP='OUI'),
    UNITE=14
)

IMPR_RESU(
    FORMAT='MED',
    RESU=.F(GROUP.MA=('Groext1_Volumes', ), RESULTAT=RESU, TOUT.CMP='OUI'),
    UNITE=18
)

IMPR_RESU(
    FORMAT='MED',
    RESU=.F(GROUP.MA=('Groext2_Volumes', ), RESULTAT=RESU, TOUT.CMP='OUI'),
    UNITE=19
)

IMPR_RESU(
    FORMAT='MED',
    RESU=.F(GROUP.MA=('Grtr1_Volumes', ), RESULTAT=RESU, TOUT.CMP='OUI'),
    UNITE=15
)

IMPR_RESU(
    FORMAT='MED',
    RESU=.F(GROUP.MA=('Grtr2_Volumes', ), RESULTAT=RESU, TOUT.CMP='OUI'),
    UNITE=16
)

FIN()

```

Annex V - Dificultats durant el TFM

El plantejament d'aquest treball ha anat variant al llarg del temps degut a diverses dificultats que s'han anat trobant. En primer lloc cal destacar que la corba d'aprenentatge tant de `MFront` com de `Salome-Meca` i `Code_Aster` no és fàcil ja que són programaris molt específics que requereixen un coneixement elevat de la matèria, en aquest cas de la mecànica dels medis continus, el mètode dels elements finits i de les funcions d'energia, i, a més, no existeixen una gran quantitat de recursos d'aprenentatge com manuals, guies, tutorials, etc. Això no vol dir que no es troba penjada a la xarxa cap documentació al respecte, però aquesta no és abundant i es troba molt dispersa i com que no són programes utilitzats àmpliament com, per exemple, l'equivalent privatiu `Ansys`, es fa difícil buscar ajuda, exemples, etc.

Seguidament es detallen les dificultats tècniques trobades:

- Un primer aspecte difícil és la instal·lació del programari. Aquest s'ha descarregat dels llocs web oficials seguint les indicacions que marquen i prèvia instal·lació de les llibreries necessàries que la pàgina web de `Code_Aster` indica. Es va començar aquest treball fent ús de la versió de `Salome-Meca` 2016 i, posteriorment, va aparèixer la nova, la 2017. Ja que aquesta nova versió incorporava millores respecte l'anterior, correccions d'errors i s'ha volgut fer un treball que tingui continuïtat, es va decidir passar a la nova versió. Tot i que els canvis són menors, la nova versió té unes particularitats que cal destacar:
 - En primer lloc desapareixen els *wizards* que eren uns comportaments predefinitos, l'elàstic no lineal per exemple, que permetien fer una simulació de forma ràpida i apareix l'*AsterStudy* en el qual cal definir cadascun dels passos de la simulació un per un. Aquest fet va requerir un aprenentatge afegit de les noves eines de la versió 2017.
 - A més, el canvi va coincidir amb una nova versió de `TFEL` (la llibreria que permet a `MFront` passar a `C++`), de la versió 2.X a la versió 3.X. Això va complicar lleugerament el treball per problemes d'incompatibilitat entre les dues versions.
- Cal destacar que, tot i que els comportaments escrits amb `MFront` són totalment compatibles amb `Salome-Meca`, s'han tingut grans dificultats per tal de poder «lligar» ambdós programes. El principal problema rau en el fet que la compilació dels fitxers `.mfront` generen una llibreria dinàmica `.so` i aquesta és la que cal incloure al *solver* `Code_Aster`. No s'ha aconseguit de cap manera que, de forma local, `Code_Aster` trobés aquesta llibreria i la utilitzés. Aquest aspecte va dificultar bastant el treball ja que no era possible seguir avançant. Per tal de poder seguir funcionant es va treballar a través del servidor remot `medsim`. D'aquesta manera s'han pogut fer les simulacions sense problemes tot i haver d'executar cadascuna de les simulacions a distància. Treballar amb `medsim` ha permès poder executar simulacions que requerien una gran potència de càlcul i, per tant, de memòria RAM.
- La idea inicial d'aquest treball era implementar els dos comportaments concrets estudiats: el de Pachera i el d'Hernández-Grasa i, en ambdós casos, escriure el comportament amb `MFront` i incloure'ls en una simulació de `Salome-Meca`. No ha estat possible en cap dels dos casos per problemes de convergència. En el cas de

Pachera, es va observar que el model no era el més adequat per a la geometria de la paret abdominal. Pel que fa al model d'Hernández-Grasa, el fet de tenir diverses direccions de les fibres dificultava notòriament la seva implementació en **MFront**. Per aquest motiu, es va decidir desenvolupar ambdós models des d'un punt de vista matemàtic per tal de donar valor a la teoria sobre funcions d'energia que descriu aquest treball; implementar el model de Pachera amb **MFront** per tal demostrar la potència d'aquest programari en la simulació de comportaments mecànics; i simular amb la paret abdominal un model clàssic i incorporat a **Salome-Meca** per tal de poder extreure resultats coherents. En aquest sentit, cal esmentar que, recentment, el cirurgià col·laborador ha afirmat que els models de Pachera i els d'Hernández-Grasa no representen de forma precisa el comportament de la paret abdominal a diferència del que es pensava inicialment sobretot degut a l'orientació de les fibres que no coincideixen amb l'orientació dels músculs.

- Finalment, un dels darrers problemes amb el qual s'ha trobat és que quan s'ha començat a treballar amb el mallat de tota la paret abdominal, degut al pes dels arxius, ha estat bastant difícil l'obtenció dels resultats. Tot i que els càlculs s'enviaven via túnel ssh a *medsim*, l'obtenció de resultats gràfics a través del mòdul **ParaViS** de **Salome-Meca** es feia en un ordinador local amb una memòria RAM molt inferior a la de *medsim*. Aquesta manca de potència de càlcul ha provocat que l'obtenció de resultats hagi sigut molt lenta.