Taxes de variació i filtres lineals

PID_00248286

Xavier López Andrés

Temps mínim de dedicació recomanat: 6 hores

Universitat Oberta de Catalunya

Cap part d'aquesta publicació, incloent-hi el disseny general i la coberta, no pot ser copiada, reproduïda, emmagatzemada o transmesa de cap manera ni per cap mitjà, tant si és elèctric com químic, mecànic, òptic, de gravació, de fotocòpia o per altres mètodes, sense l'autorització prèvia per escrit dels titulars del copyright.

Índex

Introducció

En conjuntura sovint importen més les oscil·lacions i els canvis dels nivells que els nivells mateixos. Això fa referència, naturalment, als nombres índexs, però també a les variables dotades d'unitats (vendes, pernoctacions, persones ocupades, etc.). La manera habitual de mesurar els canvis de nivell és per mitjà de les *taxes de variació*.

Sovint es pensa que el càlcul de taxes és molt senzill, un assumpte sense gaire interès, perquè implica sumar i dividir. La màxima complicació que presenten, que no ho és en absolut, potser apareix quan tant al numerador com al denominador de la taxa hi ha una mitjana de diversos valors.

Ara bé, les coses no són ben bé així. Primer, perquè de taxes de variació n'hi ha de molts tipus, uns millors que altres en el sentit que tenen propietats millors. A més, sovint les taxes s'interpreten malament. Hi ha molts exemples a la premsa i als mitjans de comunicació, i el resultat és naturalment la confusió a l'hora de descriure la marxa del veritable senyal d'interès per a la conjuntura, que és el cicle del fenomen que s'estudia. L'estacionalitat, les observacions atípiques i els fets anòmals i puntuals tenen un interès sobretot anecdòtic– i aquí *anecdòtic* no vol dir irrellevant, sinó deslligat de l'estructura bàsica del fenomen que s'estudia.

Si normalment ens interessa estudiar el cicle, volem que les taxes de variació siguin sobretot aproximacions ràpides i senzilles. Recalco *aproximació*. Estudiar el cicle com cal és tota una altra cosa, i no es pot fer simplement calculant taxes, que són un recurs d'aplicació mecànica, idèntic per a qualsevol sèrie. Ara bé, el mínim que es pot demanar a les taxes és que no distorsionin la percepció del cicle, i això obre un camp doble de consideracions: d'una banda, cal saber quins són els senyals que reforcen cadascuna de les taxes; de l'altra, cal pensar en quin moment del temps cal assignar-les. El primer punt s'anirà veient en llegir aquestes pàgines, però el segon punt es pot il·lustrar molt fàcilment: si el setembre d'un any la inflació interanual és del 5%, vol dir això per força que aquell setembre els preus creixen a un ritme del 5%? De fet, no.

Amb l'ús de les taxes de variació en conjuntura passa el mateix que amb les sumes en estadística: a la majoria ens costa una mica descobrir que sumar no és fàcil, que és un assumpte d'una simplicitat enganyosa. Això justifica examinar-les, ni que sigui de manera ràpida. A l'estudiant interessat li anirà molt bé llegir el capítol 5 d'Espasa (1993) i l'article de Melis (1991), així com també la resta de referències indicades a la bibliografia. Les pàgines que ara segueixen no pretenen cap originalitat, només volen introduir aquests textos. En alguns moments semblen, de fet, una lectura comentada. Si es vol orientar l'estudiant no familiaritzat, és normal que aquí es faci èmfasi en alguns punts especialment difícils continguts en els textos de la bibliografia. Confio que sigui útil.

1. Taxes de variació

Suposem que Y és una magnitud qualsevol de la qual tenim informació recollida a intervals regulars de temps. De forma preliminar, definirem la taxa de variació, T, de la magnitud Y en el moment t com la variació absoluta que experimenta Y entre dos moments qualsevol de temps, expressada en termes del valor de partida. Així:

$$T(t) = \frac{Y_t - Y_{t-s}}{Y_{t-s}} = \frac{\Delta Y_t}{Y_{t-s}} = \frac{Y_t}{Y_{t-s}} - 1$$

on t i $t - s$ són els moments final (més actual) i inicial (més antic) que es comparen. El nombre s denota la llunyania en el temps dels dos períodes. El símbol Δ denota l'increment absolut.

D'una definició tan senzilla es desprenen de seguida unes quantes coses:

1) Les taxes de variació poden ser positives (si $Y_t > Y_{t\text{-}s}$) o poden ser negatives (si $Y_t < Y_{t\text{-}s}$). Les primeres denoten augment del nivell de Y; les segones, disminució.

2) Una taxa de variació és una magnitud *relativa*, no absoluta. El problema dels increments absoluts és que no sabem si són gaire importants. Per exemple, si la magnitud d'estudi és el preu d'un cotxe, una rebaixa de 10 € (ΔY = 10) és irrellevant, atès que un cotxe pot costar perfectament 20.000 €. Ara bé, la mateixa reducció de 10 € en el preu d'un llibre valorat en 20 € és importantíssima, substancial. Aquesta és la raó per la qual ens interessa fer comparacions *relatives*, i no absolutes. Com a conseqüència, les taxes no depenen de la unitat o de l'escala de mesura de Y_t.

3) El concepte *moment del temps* no és trivial. El temps és una magnitud contínua, però en la pràctica les dades només es recullen de tant en tant: un cop al dia, cada setmana, cada mes, cada trimestre, cada any... Quan les magnituds són de tipus flux cal esperar un cert període de temps per tal de mesurar un valor *acumulat*, com passa amb la producció industrial de cada mes. Aleshores el temps no es presenta com una magnitud contínua, sinó discreta. Això arriba al punt que a vegades es reserva la lletra t per indicar que parlem de temps continu i la lletra n per a situacions en què el temps és discret –la majoria dels casos, en la pràctica. Aquí no ho farem, parlarem de *temps* sense més, però donarem per descomptat que estem davant d'una magnitud discreta. Per tant, en un abús de llenguatge, l'expressió «moment» no vol dir un instant brevíssim i infinitesimal de temps, sinó un període molt més llarg, posem un mes. D'altra banda, els moments de temps en què es fa la comparació poden ser qualsevol, en principi: dos mesos consecutius, dos mesos separats per dos, tres, quatre mesos, etc. Ara, hi ha un cert consens que algunes comparacions particulars interessen més que altres: instants consecutius, instants separats per un nombre d'unitats que completen fenòmens estacionals, etc. Per exemple, és molt popular fer comparacions *interanuals*, o sigui, entre mesos idèntics d'anys consecutius. Però també es poden fer comparacions en relació amb un període de referència fix (posem, el desembre de l'any anterior).

4) Encara que una sèrie temporal es dibuixi damunt d'un eix de temps, una taxa de variació no és un pendent definit *per unitat de temps*, sinó un increment definit *per unitat del nivell de partida*. Una taxa no és $\Delta Y/\Delta t$, sinó $\Delta Y/Y_t$. Són expressions diferents, que prenen valors distints. Ras i curt, una taxa no és un pendent en el temps, encara que sigui un creixement relatiu. Això és cert fins i tot quan es comparen períodes consecutius. Una taxa de variació quantifica l'increment observat en *s* períodes de temps, i no reflecteix el creixement *mitjà per unitat de temps*, sinó el creixement *acumulat* en aquells *s* períodes. De totes maneres, la relació entre pendent i taxa és molt estreta: el pendent és una taxa re-escalada en la magnitud mitjana del valor inicial (Y_{t-s}) al llarg del període de càlcul de la taxa (Δt):

$$\frac{\Delta Y}{\Delta t} = \frac{Y_{t-s}}{\Delta t}\frac{\Delta Y}{Y_{t-s}}$$

Observeu que el temps no intervé en cap cas en el càlcul aritmètic d'una taxa. El nombre de períodes que separa les observacions que es comparen, *s*, és una informació addicional que cal saber, i que influeix en el resultat del càlcul, però que no es dedueix del mateix càlcul. Que els períodes comparats estiguin separats un mes o sis mesos no altera l'àlgebra del càlcul, només la interpretació que se'n fa. Això sí, la condició mínima per a poder comparar *directament* dues taxes és que en el numerador respectiu l'increment absolut s'hagi calculat amb el mateix nombre de períodes de separació, Δt. Si no és així podem traduir una taxa a l'altra, però no les podem comparar directament.

5) Malgrat una taxa no és el mateix que un pendent (ni que una derivada, en el límit), tenen algunes similituds. Quan la taxa entre períodes consecutius pren el valor màxim no vol dir que la magnitud en nivell sobre la qual es calcula la taxa sigui màxima, sinó que augmenta el més ràpidament possible. La magnitud arriba a un extrem (posem, un màxim) quan la taxa pren un valor petit i canvia de signe. Això val, sobretot, per als creixements bàsics –mensuals, si les dades en nivell són mensuals; trimestrals, si el nivell es coneix trimestralment, etc. Ara bé, la taxa i el pendent poden presentar signes contraris. A més, quan Y pren un valor nul, la taxa es fa infinitament gran o petita, presenta una discontinuïtat, cosa que no passa amb el pendent. Tot això es veu molt clar si feu la prova damunt una funció contínua i suau, com ara el sinus.

6) Es diu que una taxa és *simètrica* quan en invertir els termes que es comparen s'obté la mateixa taxa, però canviada de signe. És obvi que les taxes definides tal com ho hem fet nosaltres no són simètriques:

$$\frac{Y_t - Y_{t-s}}{Y_{t-s}} \neq -\frac{Y_{t-s} - Y_t}{Y_t}$$

Explicat amb altres paraules, si un mes els preus pugen un 5% en comparació amb el mes anterior i després baixen un 5% no tornem a la situació inicial. Quan la taxa és petita, l'absència de simetria és un assumpte menor, perquè en aquest cas anar i tornar ens deixa en una situació semblant a la inicial. Semblant, certament, però no idèntica.

Ara be, hi ha una forma *aproximada* d'expressar les taxes de variació que sí gaudeix de simetria. Consisteix a restar els logaritmes de la variable Y. Així:

$$T(t) = \frac{Y_t - Y_{t-s}}{Y_{t-s}} \approx \ln(Y_t) - \ln(Y_{t-s}) = \ln\left(\frac{Y_t}{Y_{t-s}}\right)$$

Aquesta aproximació ve del fet que la taxa T i l'expressió $ln\ (1 + T)$ són infinitèsims equivalents quan T és petita o tendeix a zero. Per exemple, si la variable Y pren el valor 150 un mes qualsevol i el valor 151,5 el mes següent, la taxa de variació és de l'1%:

$$T(t) = \frac{151{,}5 - 150}{150} = \frac{151{,}5}{150} - 1 = 0{,}01$$

I prenent l'aproximació logarítmica es té:

$$T(t) \approx \ln(151{,}5) - \ln(150) = \ln\left(\frac{151{,}5}{150}\right) = \quad 0{,}00995033$$

Ja es veu que no són resultats idèntics, però que en la pràctica són perfectament similars. En canvi, si els valors en nivells que es comparen són molt distints l'aproximació logarítmica a la taxa no funciona gaire bé. Per exemple, si els valors que es comparen són 150 i 195 es comprova fàcilment que la taxa és 0,3 (o sigui, 30,00%), mentre que l'aproximació logarítmica és 0,26236426 (o sigui, 26,23%). La diferència és de gairebé quatre punts. No hi ha una regla clara per dir quan l'aproximació logarítmica es pot considerar suficient. Depèn del grau de precisió desitjat, però *en general* s'admet que l'aproximació logarítmica és bona sempre que la taxa estigui per sota del 5%, o potser del 7%. Per a moltes magnituds aquests tipus de taxes fan perfectament aplicable l'aproximació logarítmica, sobretot si no es comparen períodes de temps molt allunyats.

Dit això, queda clar que l'aproximació logarítmica sí que és simètrica, ja que:

$$T(t) \approx \ln(Y_t) - \ln(Y_{t-s}) = -[\ln(Y_{t-s}) - \ln(Y_t)]$$

7) Una precisió de llenguatge: a vegades, s'usa la paraula *taxa* com a sinònim de *percentatge* (taxa d'atur, taxa de cobertura) o de *quocient* (taxa de canvi entre divises, taxa d'interès). Són significats diferents dels que ens importen aquí. Altres vegades, s'aplica la fórmula de la taxa no entre dos moments del temps, sinó entre dos territoris, dues empreses, etc., en el *mateix* moment del temps. Aquest sentit tampoc ens interessa ara.

Una definició una mica més elaborada, més avançada de taxa de variació s'escriu així:

$$T_s^r(t) = \frac{\sum_{j=0}^{r-1} Y_{t-j}}{\sum_{j=0}^{r-1} Y_{t-s-j}} - 1$$

Aquesta notació, popularitzada pel Banc d'Espanya com a mínim des de 1973, té la mateixa estructura bàsica que l'expressió inicial: és un quocient de coses restat d'un *1*. La diferència és que en el numerador del quocient no hi ha un únic valor, sinó un sumatori que s'estén al llarg de r períodes; en el denominador hi ha el mateix sumatori, però referit a les observacions situades s períodes enrere. Aquests r i s són els que acompanyen la T de *taxa de variació*. Per tant, l'expressió $T_s^r(t)$ vol dir *taxa de variació assignada al període t que compara dues mitjanes aritmètiques de r termes, avaluades amb s termes de separació*. Per exemple, $T_k^1(t)$ és exactament la definició de taxa amb què hem començat: cada sumatori es redueix, a un sol terme ($r = 1$), que en el numerador i el denominador estan separats per k observacions ($s = k$). $T_k^1(t)$ compara períodes singulars, tots sols.

Aquesta nova forma de definir les taxes és bastant general, però en sentit estricte no aplega *totes* les possibles taxes de variació imaginables. Caldria modificar-la una mica per definir:

- Taxes des d'un mes fix concret. Per exemple, per a comparar qualsevol mes de 2017 amb el desembre de 2016.

- Taxes de períodes acumulats des d'un mes fix concret. Per exemple, per a comparar el període gener-juliol de 2017 amb gener-juliol de 2016.

- Taxes *anualitzades*. Un exemple de taxa anualitzada és quan s'estira la taxa intertrimestral del primer trimestre al conjunt de l'any, suposant que tots els trimestres que falten de l'any tindran un comportament idèntic al primer. Així s'obté una *predicció* expeditiva de la taxa anual.

- Taxes definides de manera que els dos períodes que es comparen estan caracteritzats pels mesos del seu entorn, tant endavant com enrere. Per exemple, per a definir el valor en nivell de març com la mitjana de febrer, març i abril.

- Taxes construïdes amb mitjanes geomètriques, no aritmètiques, de valors.

Després parlarem d'aquests casos. Mentrestant, però, observeu que la nova fórmula assigna el resultat del càlcul *a la darrera observació del sumatori*, a la dada més recent de les que hi ha al sumatori del numerador (perquè el subíndex j entra restant). D'això se'n diu *taxa no centrada*. Les taxes no centrades són les més usades, amb moltíssima diferència, però això no vol dir que siguin les més idònies.

Atès que tant r com s són més grans o iguals que 1 (la taxa d'un període comparat amb ell mateix sempre és nul·la, perquè per definició no hi ha cap canvi), podem considerar diversos casos:

Taula 1. Possibles taxes de variació (dades Y_t mensuals)

	$r = 1$	$r > 1$
$s = 1$	$\mathbf{T}_1^1$	$T_1^2, T_1^3, T_1^4,\ldots, T_1^{12},\ldots$
$s > 1$	$T_2^1, T_3^1, T_4^1,\ldots, \mathbf{T}_{12}^1,\ldots$	$s = r$: $T_2^2, \mathbf{T}_3^3,\ldots, T_6^6,\ldots, \mathbf{T}_{12}^{12},\ldots$
		$s < r$: T_3^6, T_4^{12}, etc.
		$s > r$: $T_6^3, T_{12}^4, \mathbf{T}_{12}^3$, etc.

Dins de cada cel·la s'ha destacat en negreta la taxa possiblement més popular d'aquella categoria. De forma implícita s'ha suposat que les dades disponibles són mensuals, però això no treu generalitat a la taula. Vegem breument cadascun dels casos:

1) $s = 1$, $r = 1$. Amb dades mensuals aquesta taxa és la ***taxa intermensual***, la variació entre dos mesos consecutius. De forma anàloga, amb dades trimestrals. A vegades es denomina *creixement bàsic*, perquè és el creixement més elemental possible, encara que normalment són taxes molt erràtiques i poc informatives.

Observeu que quan tenim una sèrie temporal finita, amb un inici determinat, el càlcul de la taxa intermensual només es pot fer a partir de la segona observació, no de la primera. La taxa de variació de la primera observació es perd, perquè no hi ha observació anterior amb la qual calcular la taxa.

2) $s > 1$, $r = 1$. Aquí la taxa estrella és T^1_{12}, la ***taxa interanual***. Consisteix a comparar un mes qualsevol d'un any amb el mateix mes de l'any anterior. Amb sèries trimestrals només hi ha quatre observacions per any, i la taxa interanual s'escriuria T^1_4. Consisteix a comparar primers trimestres amb primers trimestres, segons amb segons, etc.

Les taxes interanuals solen ser més interpretables que les mensuals, ja que per definició *tendeixen* a neutralitzar la tendència i els fenòmens estacionals, periòdics dins l'any (com ara la venda superior de cervesa i gelats els mesos més calorosos). Atenció, però: no es pot considerar seriosament que l'ús de la taxa interanual sigui un mecanisme de desestacionalització.

3) $s = 1$, $r > 1$. Aquestes taxes és poden calcular perfectament, però en general se'n desaconsella l'ús. Per això no n'hi ha cap de destacada en **negreta**. Observeu el problema que presenten: tant en el sumatori del numerador com del denominador hi ha 2, 3, 4... termes, segons sigui el cas, *però desplaçats una sola posició*. En altres paraules, com més gran és el nombre de termes en el sumatori, més gran és l'encavalcament de dades entre numerador i denominador, de manera que les dades es cancel·len entre si. El resultat sol ser una taxa anòmalament petita, que depèn sobretot dels valors extrems. Per concretar, considerem el cas T^3_1. Aplicant la fórmula es té que:

$$T^3_1 = \frac{(Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2}) - (Y_{t-1} + Y_{t-2} + Y_{t-3})}{Y_{t-1} + Y_{t-2} + Y_{t-3}} = \frac{Y_t - Y_{t-3}}{Y_{t-1} + Y_{t-2} + Y_{t-3}}$$

Ja es veu que si totes les dades Y_t són positives (com ara la producció industrial, o les vendes en grans superfícies) el numerador tendirà a ser petit en comparació amb el denominador.

4) $s > 1$, $s > 1$. En aquesta cel·la hi ha tres subcasos:

a) $s = r$. És la situació en què (per exemple) es pren la mitjana de dades mensuals de tres mesos i es compara amb la dels tres mesos immediatament anteriors. D'això se'n diu taxa intertrimestral, T^3_3. Si la mitjana s'estén a dotze mesos és la taxa mitjana anual, T^{12}_{12}. Observeu que no hi ha cap encavalcament de dades.

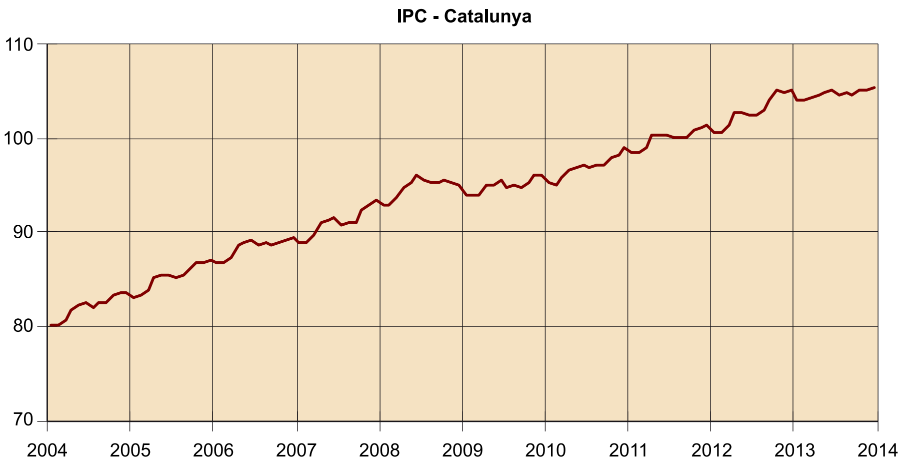
La taxa mitjana anual té molt predicament. El mes de desembre d'un any qualsevol compara la mitjana dels dotze mesos de l'any amb la mitjana dels dotze mesos de l'any anterior. En aquest sentit, resumeix la marxa del conjunt de l'any. En haver-hi tants termes a la mitjana com periodicitat tenen els fets estacionals sol ser una taxa molt estable. En sèries poc oscil·lants, la taxa anual de la sèrie original aproxima molt bé l'evolució del cicle. Quan les sèries són més oscil·lants convé obtenir-ne primer el component de cicle-tendència i aplicar-hi la T^{12}_{12}.

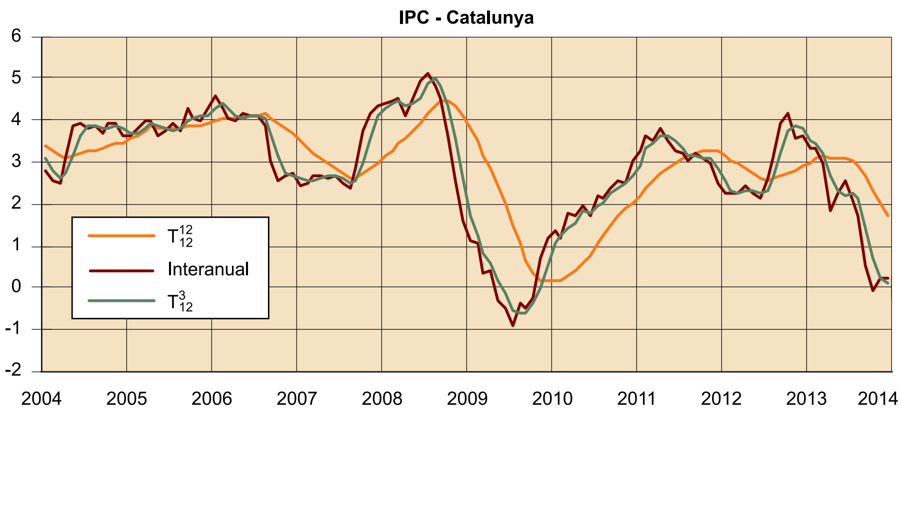
b) $s < r$. Torna a passar el mateix que en el cas 3): hi ha encavalcament de dades, raó per la qual no són taxes generalment gaire apreciades.

c) $s > r$. En aquest cas cal destacar la taxa interanual d'un trimestre, T_{12}^{3}. No hi ha cap mena d'encavalcament: es comparen coses com ara la mitjana de febrer-març-abril d'un any amb el període idèntic de l'any anterior (això és el que indica el desplaçament de 12 observacions). Quatre cops l'any aquest càlcul coincideix amb trimestres naturals, i això el fa molt popular.

Observeu també que atesa una sèrie temporal qualsevol és molt senzill aplicar la fórmula més avançada amb un full de càlcul qualsevol. Per exemple, descarregueu d'http://www.ine.es l'Índex de preus de consum (IPC) del territori que preferiu (Espanya sencera, una comunitat autònoma, una província, etc.). Si us ve de gust podeu descarregar l'índex general, o també podeu explorar l'índex d'alguns tipus especial de producte d'alimentació, de parament de la llar, sanitari, etc. L'IPC és una dada mensual.

A continuació trobareu l'Índex de preus de consum (IPC) general de Catalunya entre els mesos de gener de 2004 i desembre de 2014. Al segon gràfic hi ha representades la taxa mitjana anual, T_{12}^{12}, la taxa interanual, T_{12}^{1}, i la taxa interanual trimestral, T_{12}^{3}.





El segon gràfic mostra que T_{12}^{3} presenta menys arestes que T_{12}^{1}, un nivell d'allisament superior. També mostra un detall intrigant: la taxa mitjana anual, T_{12}^{12}, sembla desplaçada respecte de la resta de taxes. Els seus extrems es produeixen amb retard, amb posterioritat, com si la línia hagués de ser arrossegada cap a l'esquerra per tal que els màxims i els mínims de les tres taxes coincidissin en el temps. El gràfic suggereix una pregunta inquietant: és possible que el calendari amb què es produeixen els moments d'auge i de contracció depengui de la taxa triada?

2. Un exercici: centrat de taxes

En l'apartat anterior s’ha animat l'estudiant a proveir-se d'una sèrie qualsevol de l’IPC i practicar el càlcul de taxes amb un full de càlcul. Una forma alternativa de comprovar que les coses s’entenen és practicar amb un cas senzill, inventat i controlat, del qual es coneguin *a priori* els resultats. El capítol 5 d’Espasa (1993) proposa la sèrie artificial següent:

$$Y_t = \left[100 \cdot e^{0,01t}\right]\left[1 + 0,03 \cdot \sin(0,17t)\right]\left[1 + \varepsilon_t\right]$$

Observeu que la sèrie artificial s’obté per producte de tres components:

1) Una tendència exponencial, $\left[100 \cdot e^{0,01t}\right]$

2) Un cicle, $\left[1 + 0,03\sin(0,17t)\right]$, que oscil·la a l'entorn del nivell 1. Aquest cicle és una ona de període $\frac{2\pi}{0,17} = 36,9599$ mesos. Cada 36,9599 mesos el sinus pren el mateix valor. La lògica que justifica aquest quocient s'explica més endavant (vegeu el concepte freqüència, explicat a l'apartat 6).

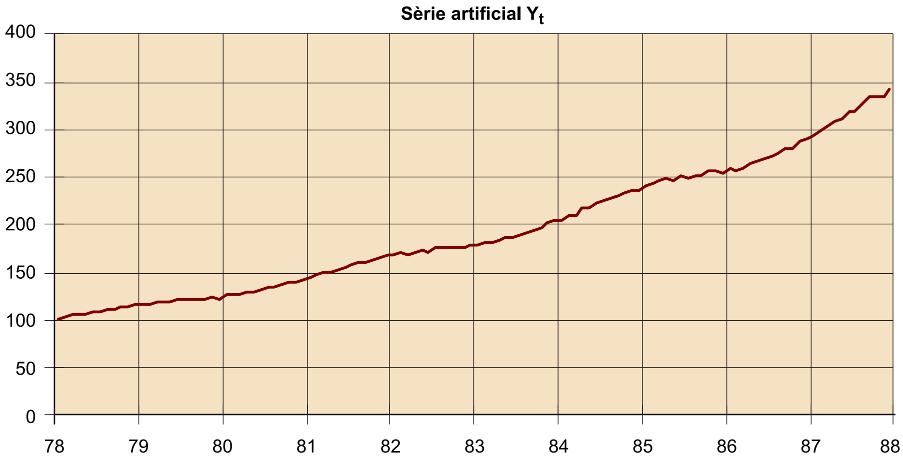
3) Un component irregular, $\left[1 + \varepsilon_t\right]$, sent $\varepsilon_t \sim N(0;0,05)$

Aquesta sèrie inventada conté els elements bàsics de qualsevol sèrie econòmica, tret de l’estacionalitat. Espasa la data (imaginàriament) entre gener de 1978 i desembre de 1987, és a dir, genera 120 observacions mensuals. Aquí podríem proposar qualsevol altra sèrie artificial, però si agafem la mateixa sèrie del capítol 5 d’Espasa (1993) la lectura resultarà paral·lela.

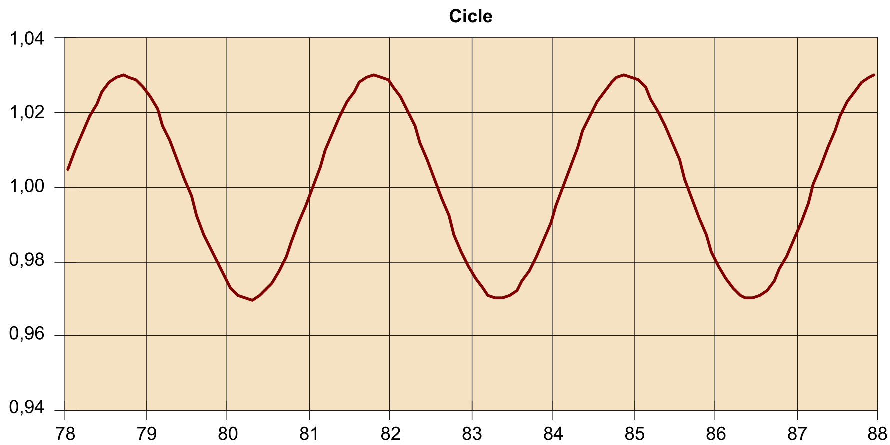
En la sèrie artificial, tendència i cicle són determinístics, cosa que en la realitat no passa. A més, el cicle està definit per un únic fenomen periòdic, i constant en el temps. Això tampoc passa en la realitat, però per a les nostres finalitats suposar que és així serà suficient. Inserir els tres components en un full de càlcul no presenta cap problema. Si l'estudiant utilitza Excel i situa en la columna A el temps, una seqüència de valors que comença en 1 i acaba en 120, les expressions que haurà d’escriure en el full de càlcul per tenir la sèrie són:

- per a la tendència: =100*EXP(0,01*A1)
- per al cicle: =1+0,03*SENO(0,17*A1)
- per al component irregular:
  =1+INV.NORM(ALEATORIO();0;0,000025^0,5)

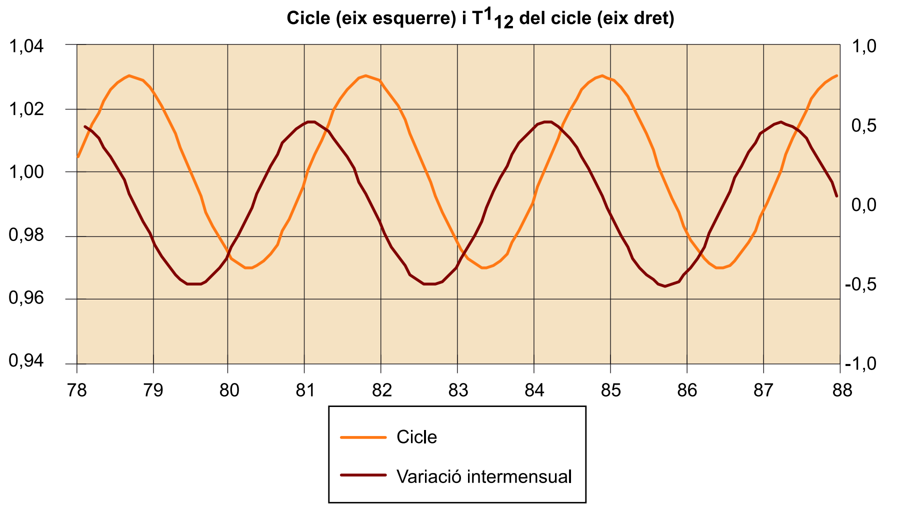
En un full de càlcul diferent a Excel la sintaxi serà molt similar, fins i tot idèntica. La sèrie Y_t s'obté per producte dels tres components. Basta multiplicar-los. Naturalment, el component irregular és una extracció aleatòria d'una distribució normal i variarà d'exercici en exercici, tret que es congeli. S'anima l'estudiant menys familiaritzat amb aquesta mena d'assumptes que reprodueixi tots els gràfics que apareixen en aquestes pàgines. En conjunt, Y_t presenta l'aspecte següent:



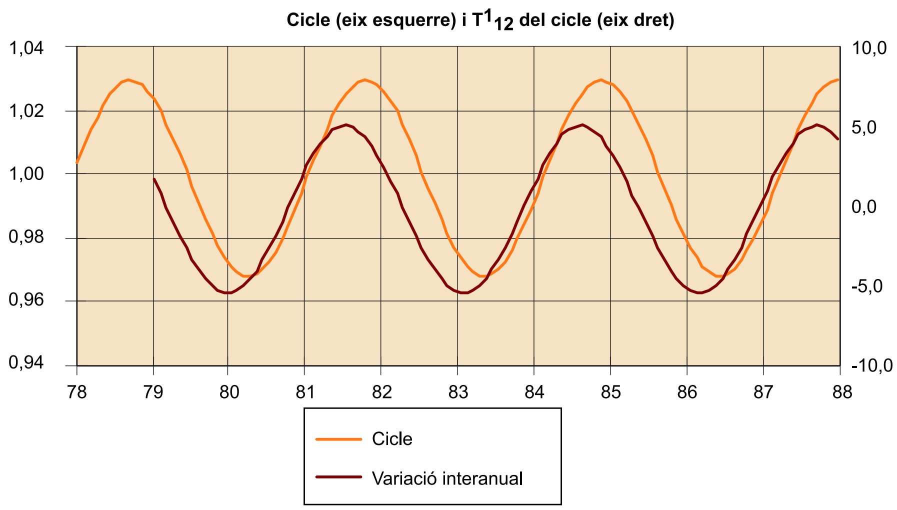
És una sèrie creixent en la qual predomina la tendència, amb unes ondulacions (cicles) suaus i un terme residual estocàstic (els petits pics i irregularitats del traç). També es poden representar per separat els components. Per exemple, el cicle:



Com a primer experiment, es pot dibuixar en un mateix gràfic el cicle i les seves taxes de variació intermensuals.



S'aprecia que el màxim de la taxa no es presenta quan el cicle (en nivell) assoleix el màxim, sinó quan el cicle (en nivell) creix més ràpidament. Quan el cicle assoleix un extrem, la taxa adopta un valor gairebé nul. Visualment, la taxa mensual *avança el cicle en uns 9 mesos* (estimeu a ull la distància en mesos entre els màxims respectius). A més, la taxa oscil·la entre 0,5 i –0,5: molt més que el cicle en nivell. A continuació es presenta el mateix gràfic, amb el mateix cicle, però acarat amb les variacions interanuals en comptes de les intermensuals:



De la comparació de tots dos gràfics es veu de seguida el següent:

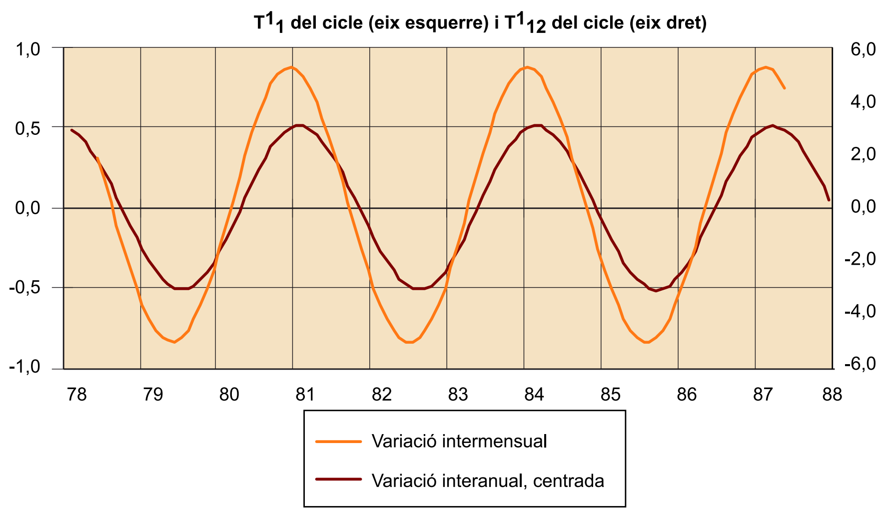
- Tant la taxa anual com la interanual perden observacions inicials: una en el primer cas, dotze en el segon.

- Les variacions interanuals presenten molta més amplitud que les intermensuals: oscil·len entre 5 i –5, no entre 0,5 i –0,5.

- Els màxims de la taxa interanual també estan desplaçats respecte al màxim del cicle, però força menys que els màxims de la intermensual. A tot estirar, l'avancen uns 2 o 3 mesos (mireu els gràfics a cop d'ull).

Aquest darrer punt confirma el que s'ha dit en acabar l'apartat anterior: cada taxa de variació presenta els seus punts extrems en un moment distint del temps. Això és molt enutjós. De les taxes hom espera una informació determinada, com ara establir en quin moment del temps es produeix el creixement més gran de la sèrie en nivells. Aquesta és una informació rellevant per a l'anàlisi de conjuntura. D'acord, però *si taxes diferents presenten els extrems en moments distints del temps, en quin moment es produeix el creixement més gran*? No és una pregunta menor.

Per a evitar aquesta paradoxa aparent convé *centrar les taxes*. El ritme de creixement de les sèries el dona el creixement bàsic (en sèries mensuals, el creixement intermensual). Amb l'expressió *centrar* (a vegades dita *posar en fase*) es vol dir quelcom tan senzill com assignar cada taxa al període situat al mig d'aquells que intervenen en el seu càlcul. Per exemple, la taxa interanual de desembre s'assignaria al mes de juny, perquè davant seu hi ha sis mesos, i darrera també sis. Centrar no és altra cosa que *desplaçar les taxes en el temps*. Naturalment, els creixements bàsics no es poden centrar, perquè entre dos mesos consecutius no hi ha cap altre mes. Convencionalment s'assignen al mes *t*, o al mes t –1. El resultat és el següent:



Ara els valors extrems de la taxa interanual són contemporanis als de la taxa intermensual, que al seu torn reflecteixen el comportament (màxim creixement, creixement nul) del cicle en nivells. Després estudiarem amb més detall aquest fenomen del centrat de taxes, però de moment queda clar que *el càlcul de taxes no és neutre, en absolut: canvia l'amplitud de les oscil·lacions de la sèrie en nivell i la desplaça en el temps*. Hi ha, doncs, un problema essencial de selecció i datació de les taxes. En quin moment del temps s'han d'assignar? Pel que sembla, si els extrems han de coincidir, les taxes *han de ser centrades*, i no assignades al període darrer, que és el que hem fet fins ara.

Però això presenta un altre problema: per definició el centrat de taxes *les desplaça cap enrera, cap al passat i introdueix un desfasament*, i això vol dir que els darrers períodes (que comprensiblement són els de més interès en conjuntura) no tenen assignat cap valor. El centrat de taxes obliga a fer prediccions, per tal que taxes inicialment situades al futur quedin situades al present després del centrat. Aquest assumpte de les prediccions no és immediat, ni senzill, encara que de vegades s'ha provat de resoldre de forma expeditiva amb les taxes anualitzades (una mala idea, com ja s'ha dit anteriorment).

Treballar amb taxes de variació vol dir preocupar-se per dos objectius contradictoris: robustesa (alta, baixa) i pèrdua d'informació (gran, petita).

- D'una banda, té interès definir taxes que comparin (en el numerador i el denominador) mitjanes mòbils formades per diversos períodes, no per períodes aïllats, perquè aleshores es guanya ***robustesa***. La suavitat que presenten les taxes calculades així tendeix a impedir l'aparició de senyals falsos que sovinteja en les taxes que comparen punts aïllats. És per això que, en general, T_{12}^{12} és interpretable amb més seguretat que T_1^1.

- Ara bé, com més llargs són els períodes concernits en el càlcul de les taxes (és a dir, com més robustesa es dona a la taxa, per la via d'involucrar més termes a la mitjana mòbil del numerador i del denominador), el centrat de les taxes produeix un ***cost informatiu*** superior, una pèrdua superior d'actualitat, en el sentit que el nombre d'observacions finals que queden sense taxa assignada és més gran. La taxa perd actualitat per allà on més mal fa a l'anàlisi de conjuntura: en les dades més recents, que són també les més interessants.

Hi ha un tercer objectiu, que en realitat és doble. S'enuncia ara però es comprendrà en llegir l'apartat 6:

- Convé que la banda freqüencial que extrau la taxa sigui rellevant per a l'anàlisi. En la pràctica això vol dir, per exemple, que convé usar preferentment taxes que recullin bé els cicles de (posem) dos anys, com ara la taxa interanual. Això és el que defensa Melis (1991). Espasa (1993) ho precisa dient que la taxa més rellevant per a l'anàlisi de conjuntura és T_{12}^1 centrada del cicle-tendència, encara que també poden ser útils la T_{12}^{12} centrada del cicle-tendència, si aquest és inestable, o la T_{12}^{12} centrada de la sèrie original, si aquesta és estable.

- A més, si s'usen agregats coneguts amb freqüències distintes (dades mensuals, trimestrals, anuals) convé que les taxes estiguin en fase, sincronitzades. Això és molt important si es comparen indicadors mensuals, com ara l'Índex de producció industrial (IPI), amb indicadors de naturalesa anual, com ara el Valor afegit brut (VAB) industrial. En altres paraules, totes les taxes usades han d'estar en fase amb alguna taxa de referència. Quina? Aquí hi ha discussió. Espasa (1993) defensa que han de ser els creixements bàsics del cicle-tendència; Melis (1991) defensa una cosa una mica diferent.

En tot cas, el centrat de taxes canvia lleugerament la seva definició general. En la definició més simple (per exemple, interanual) una taxa centrada s'escriu així:

$$T_{12}^{1}(t) = \frac{Y_{t+6} - Y_{t-6}}{Y_{t-6}} - 1$$

En la definició més formal, apareixen dos casos diferenciats:

1) Si $r + s$ és imparell les taxes són centrables:

$$T_s^r(t) = \frac{\sum_{j=0}^{r-1} Y_{t-j+\left(\frac{r+s-1}{2}\right)}}{\sum_{j=0}^{r-1} Y_{t+j-\left(\frac{r+s-1}{2}\right)}} - 1$$

2) Si $r + s$ és parell no hi ha un punt exacte d'assignació de la taxa. La fórmula següent assigna la taxa de forma convencional al primer període (el més antic) del numerador:

$$T_s^r(t) = \frac{\sum_{j=0}^{r-1} Y_{t-j+\left(\frac{r+s}{2}\right)-1}}{\sum_{j=0}^{r-1} Y_{t+j-\left(\frac{r+s}{2}\right)}} - 1$$

Mentre que en la definició més avançada de l'epígraf anterior el moment t d'assignació de la taxa era el darrer període que entrava en el càlcul, ara t és el moment central.

3. Alguns casos particulars

Fins aquí s'ha presentat una definició bastant general de la taxa de variació (centrada o no centrada), però no completament general. Sovint l'estudiant trobarà taxes de variació diferents de les explicades. Algunes poden ser les següents:

a) Taxes des de desembre de l'any anterior, o *des del començament d'any ençà*

Introduïm la notació següent: $Y_{\text{mes,any}}$. El mes es denotarà amb xifres romanes. Si es pren com a referència el desembre de l'any anterior, la taxa $(Y_{\text{IV,A}}/Y_{\text{XII,A-1}}) - 1$ recull el creixement observat entre desembre de l'any anterior (mes XII) i el mes d'abril (mes IV) de l'any actual.

Així, doncs, una estratègia possible a l'hora de calcular taxes de variació és *fixar* el denominador al desembre de l'any anterior i anar avançant el numerador a mesura que transcorre l'any en curs. El gener es podrà calcular la taxa $(Y_{\text{I,A}}/Y_{\text{XII,A-1}}) - 1$, el febrer es podrà calcular la taxa $(Y_{\text{II,A}}/Y_{\text{XII,A-1}}) - 1$, el març $(Y_{\text{III,A}}/Y_{\text{XII,A-1}}) - 1$, i així successivament. Quan l'any s'estigui acabant es podrà calcular $(Y_{\text{XI,A}}/Y_{\text{XII,A-1}}) - 1$, i finalment $(Y_{\text{XII,A}}/Y_{\text{XII,A-1}}) - 1$. La darrera taxa és la interanual de desembre.

El problema bàsic d'aquesta manera de fer és que la comparació de taxes és molt equívoca. Llegides una rere l'altre pot semblar que constitueixen una sèrie homogènia d'informació, i no és cert. En realitat es té la sèrie T_1^1, T_2^1, T_3^1, T_4^1,..., T_{12}^1, T_1^1, T_2^1, T_3^1, T_4^1... Posem totes juntes les taxes del cas $s > 1$, $r = 1$ de la taula 1. La separació dels períodes de comparació va creixent des de 1, 2,... fins a 12, i després torna en sec a 1, any rere any, en canviar el denominador cada mes de desembre. Aquesta característica, l'allargament del període de comparació, compromet la interpretació de la taxa, perquè la variància de cadascuna és diferent, i també la seva assignació temporal, com es veurà més endavant. Aquest és el problema més gran. A banda, és evident que el patró d'estacionalitat que presenten és canviant: la taxa de desembre tendeix a eliminar l'estacionalitat, però la resta de taxes no. De totes maneres, el problema de l'estacionalitat no és específic d'aquestes taxes. Al cap i a la fi, els creixements bàsics també recullen tota la estacionalitat.

b) Taxes de períodes acumulats des de l'inici de l'any

Una altra estratègia força comuna en les anàlisis de conjuntura és prendre el període *acumulat* més llarg possible de l'any en curs i comparar-lo amb el període idèntic de l'any anterior. Per exemple, si la darrera dada coneguda d'enguany és abril, l'analista pot sumar els valors de gener a abril i comparar-los amb els del període de gener a abril de l'any anterior. En símbols, l'analista construeix la sèrie de taxes següent: T_{12}^1, T_{12}^2, T_{12}^3, T_{12}^4,..., T_{12}^{12}, T_{12}^1, T_{12}^2, T_{12}^3...

Aquí no hi ha el problema d'estacionalitat del cas anterior, però sí un problema de variabilitat dels resultats: cada taxa té una variància distinta.

c) Taxes *anualitzades*

Suposem que tenim dades mensuals, que ens trobem al final del primer trimestre d'un any i que coneixem la taxa intertrimestral, *r*, d'aquell primer trimestre. Quin serà el creixement interanual del quart trimestre *suposant* que el creixement intertrimestral es mantingués idèntic els trimestres següents? Basta raonar per recurrència:

$$Y_{T1,A} = Y_{T4,A\text{-}1}\ (1 + r)^1$$
$$Y_{T2,A} = Y_{T1,A}\ (1 + r) = Y_{T4,A\text{-}1}\ (1 + r)^2$$
$$Y_{T3,A} = Y_{T2,A}\ (1 + r) = Y_{T4,A\text{-}1}\ (1 + r)^3$$
$$Y_{T4,A} = Y_{T3,A}\ (1 + r) = Y_{T4,A\text{-}1}\ (1 + r)^4$$

I d'aquesta darrera expressió es conclou que entre els quarts trimestres el creixement interanual serà:

$$(Y_{T4,A} / Y_{T4,A\text{-}1}) - 1 = (1 + r)^4 - 1$$

Cal que l'estudiant entengui què es diu: es pren la *r observada* el *primer* trimestre de l'any i se *suposa* que es mantindrà els tres trimestres següents, amb l'objectiu d'establir avui quin serà el valor *futur* de $V_{T4,A}$. No cal dir que usar les taxes *anualitzades* com una mena de predicció ingènua del resultat anual és molt compromès. És una predicció tremendament naïf.

En canvi, si $Y_{T4,A}$ i $Y_{T4,A\text{-}1}$ són observacions del passat, ja realitzades, es pot tenir una taxa de creixement intertrimestral, uniforme en tots els períodes i acumulativa:

$$r = (V_{T4,A} / V_{T4,A\text{-}1})^{1/4} - 1$$

L'expressió té utilitat sobretot si els períodes que es comparen estan molt allunyats en el temps. Si la sèrie en estudi és tendencialment creixent, tendirà a passar que la taxa entre dos moments molt allunyats prendrà un valor molt gran. Potser serà superior al 100% o al 200%. Si es calcula la *r* com s'acaba d’explicar (substituint l’exponent ¼ pel corresponent al nombre de períodes que es considerin) es té una mena de taxa intertrimestral *mitjana*, de dimensions similars a les habituals quan es comparen períodes successius.

Observeu la similitud entre aquest càlcul i els càlculs de capitalització financera.

Ara bé, el punt de vista de la taxa *anualitzada* no és aquest, sinó el primer, el *predictiu*. Una taxa *anualitzada* i una taxa *anual* són coses diferents. De fet, només coincideixen de casualitat. Per tant, en la pràctica convé indicar que es treballa amb taxes anualitzades. Per exemple, es pot advertir d'aquest fet afegint a la notació el superíndex A, *d'anualitzada*. Així, amb la $T_3^{A,3}$ es vol significar el següent:

$$T_3^{A,3}(t) = \left(\frac{Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2}}{Y_{t-3} + Y_{t-4} + Y_{t-5}}\right)^4 - 1$$

La «A» d’*anualitzada* adverteix l'estudiant que no està davant d’una T_3^3 com la que hem vist anteriorment. Tal com s’ha escrit l’expressió, la taxa està assignada al darrer període (si es coneixen les dades dels tres mesos del primer trimestre, març). Per tal de definir una taxa anualitzada *centrada* caldria escriure:

$$T_3^{A,3}(t) = \left(\frac{Y_t + Y_{t+1} + Y_{t+2}}{Y_{t-1} + Y_{t-2} + Y_{t-3}}\right)^4 - 1$$

La fórmula generalitzada d’això (centrada i per a dades mensuals) s’escriu com segueix:

$$T_h^{A,n}(t-h-r,\, t+r) = \left(\frac{\sum_{j=-r}^{r} Y_{t+j}}{\sum_{j=-r}^{r} Y_{t-h+j}}\right)^{\frac{12}{h}} - 1$$

Per entendre bé aquesta expressió cal destacar-ne alguns detalls:

- Primer, el període que hi ha al numerador està caracteritzat per una mitjana dels mesos a l'entorn de t, endavant i enrere. Passa el mateix amb el període que hi ha al denominador.

- La lletra n és el nombre de termes que contenen les mitjanes del numerador i del denominador. Per tant, $n = 2r + 1$. Observeu que hi ha superposició entre algunes observacions del numerador i del denominador quan $n > h$, i ja s’ha dit que l’encavalcament no és una bona idea. Aquest seria el cas, per exemple, de la $T_1^{A,3}$:

$$T_1^{A,3}(t) = \left(\frac{Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1}}{Y_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t}\right)^{12} - 1$$

- Tercer, la taxa està centrada quan s'imputa al punt mitjà de l'interval ($t - h - r$, $t + r$).

- Finalment, pel que fa a l'exponent, considerem que s és el període estacional. Per conveni es considera *estacional* qualsevol fenomen que es repeteix de forma cíclica dins d'un any natural. Si les dades són mensuals serà s = 12, si les dades són trimestrals serà s = 4, etc. Doncs bé, de la fórmula que acabem de veure ha de quedar clar que l'exponent 12/h és el nombre de salts que es produeixen fins arribar a l'horitzó de la taxa anualitzada. Si es parteix d'una taxa intertrimestral (o sigui, calculada a partir de dades mensuals amb tres períodes de retard) caldrà fer 12/3 = 4 d'aquests salts. Si es parteix d'una taxa interanual, l'exponent serà 1. En general, si la taxa de què es parteix ha comparat instants de temps separats h períodes, el nombre de salts que caldrà fer per completar un any sencer serà 12/h.

Si es volen comparar diverses taxes referides a un fenomen considerat (per exemple, intermensuals i intertrimestrals), les taxes anualitzades homogeneïtzen la magnitud de les diverses longituds que es comparen. Ara bé, quan h o n prenen el valor 1, la taxa anualitzada augmenta artificialment la variabilitat, de manera que és difícil d'interpretar: si es vol avaluar un objectiu determinat (per exemple una inflació interanual el desembre del 2%) i anualitzem la taxa observada fins a febrer, el resultat no pot merèixer gaire confiança. Tant si se supera l'objectiu com si no s'hi arriba el resultat es pot produir per pura variabilitat de la taxa anualitzada.

4. Relació entre taxes

Amb dades mensuals, els creixements bàsics són les taxes mensuals. És senzill obtenir una relació exacta entre taxes de variació diferents. Per exemple, la taxa interanual es pot expressar com un producte de les taxes mensuals:

$$\begin{aligned} T_{12}^{1} &= \frac{Y_t}{Y_{t-12}} - 1 = \left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}}\frac{Y_{t-1}}{Y_{t-2}}\cdots\frac{Y_{t-11}}{Y_{t-12}}\right) - 1 \\ &= \left(T_1^1(t)+1\right)\left(T_1^1(t-1)+1\right)\ldots\left(T_1^1(t-12)+1\right) - 1 \\ &= \left(\prod_{j=0}^{11} T_1^1(t-j)+1\right) - 1 \end{aligned}$$

Alternativament, també es pot usar un raonament per recurrència, com s'ha fet amb les taxes anualitzades. El resultat és el mateix.

La taxa interanual també es pot descompondre com una suma (suma, no producte) ponderada de les taxes mensuals. El resultat és el següent:

$$T_{12}^{1} = \sum_{j=0}^{11} T_1^1(t-j)\frac{Y_{t-j-1}}{Y_{t-12}}$$

Cada taxa intermensual entra amb una ponderació diferent. L'avantatge d'aquesta expressió en relació amb la descomposició via producte és la linealitat: és un sumatori, no un productori. Això simplifica l'anàlisi. En contrapartida, per a ser calculada necessita els nivells (per a obtenir la ponderació de cada taxa), i no només les taxes mensuals. Necessita informació més completa.

Justificar l'expressió anterior és senzill, sobretot amb paper i llapis. Com a il·lustració considerem, per brevetat, el cas de la T_3^1, no centrada. Basta sumar i restar els termes convenients, reordenar i convertir cada valor absolut en una taxa intertrimestral multiplicant i dividint simultàniament pel terme apropiat. En el nostre cas, sumem i restem $Y_{t\text{-}1}$ i $Y_{t\text{-}2}$.

$$\begin{aligned} T_3^1 &= \frac{Y_t - Y_{t-3}}{Y_{t-3}} = \frac{Y_t - Y_{t-3} \pm \left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)}{Y_{t-3}} \\ &= \frac{\left(Y_t - Y_{t-1}\right) + \left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) + \left(Y_{t-2} - Y_{t-3}\right)}{Y_{t-3}} \\ &= \frac{\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}}Y_{t-1}}{Y_{t-3}} + \frac{\frac{Y_{t-1} - Y_{t-2}}{Y_{t-2}}Y_{t-2}}{Y_{t-3}} + \frac{\frac{Y_{t-2} - Y_{t-3}}{Y_{t-3}}Y_{t-3}}{Y_{t-3}} = \sum_{j=0}^{2} T_1^1(t-j)\frac{Y_{t-j-1}}{Y_{t-12}} \end{aligned}$$

El cas de la T_{12}^1 esmentat abans és més llarg d'escriure, però la lògica és idèntica.

També es pot descompondre una taxa acumulada, per exemple la T_3^3 o T_{12}^{12}, com a mitjana ponderada de taxes elementals, intermensuals. Per al cas centrat de la T_{12}^{12}, l'expressió té l'aspecte següent:

$$T_{12}^{12} = \sum_{j=-11}^{11} [12 - |j|] \frac{Y_{t+j-1}}{\sum_{r=1}^{12} Y_{t-r}} T_1^1(t+j)$$

Abans de justificar l'expressió, observeu que les taxes acumulades segueixen un esquema de ponderacions molt simètric. No completament simètric, però sí en un grau molt gran. Si la sèrie en estudi té un comportament més o menys regular, el terme $\frac{Y_{t+j-1}}{\sum_{r=1}^{12} Y_{t-r}}$ valdrà si fa o no fa 1/12 en cada sumand, de manera que la ponderació dependrà sobretot del terme $[12 - |j|]$, que va de 1 a 12, tant en sentit ascendent com descendent. Sobre això, convé una puntualització: una cosa és que l'estructura de ponderacions sigui simètrica i una altra cosa diferent és que la taxa sigui simètrica. Canviant numerador i denominador a la taxa no s'obté el mateix resultat canviat de signe.

Per il·lustrar aquestes explicacions, considerem el cas de la T_3^3, centrada. Basta escriure la definició de la taxa i reordenar els termes. El cas de la T_{12}^{12} és idèntic. Més llarg d'escriure, però idèntic.

$$T_3^3(t) = \frac{(Y_t + Y_{t+1} + Y_{t+2}) - (Y_{t-3} + Y_{t-2} + Y_{t-1})}{Y_{t-3} + Y_{t-2} + Y_{t-1}}$$

$$T_3^3(t) = \frac{\frac{Y_t - Y_{t-3}}{Y_{t-3}} Y_{t-3}}{Y_{t-3} + Y_{t-2} + Y_{t-1}} + \frac{\frac{Y_{t+1} - Y_{t-2}}{Y_{t-2}} Y_{t-2}}{Y_{t-3} + Y_{t-2} + Y_{t-1}} + \frac{\frac{Y_{t+2} - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} Y_{t-1}}{Y_{t-3} + Y_{t-2} + Y_{t-1}}$$

Ara cal expressar cadascuna de les taxes de la T_3^1 que hem obtingut en termes de les taxes de la T_1^1:

$$\begin{aligned} T_3^1(t) &= \frac{Y_t - Y_{t-3}}{Y_{t-3}} = < \text{sumant} \pm Y_{t-1} \pm Y_{t-2} \ \ \text{i reordenant} > \\ &= \frac{\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} Y_{t-1}}{Y_{t-3}} + \frac{\frac{Y_{t-1} - Y_{t-2}}{Y_{t-2}} Y_{t-2}}{Y_{t-3}} + \frac{\frac{Y_{t-2} - Y_{t-3}}{Y_{t-3}} Y_{t-3}}{Y_{t-3}} \\ &= \frac{T_1^1(t) Y_{t-1}}{Y_{t-3}} + \frac{T_1^1(t-1) Y_{t-2}}{Y_{t-3}} + \frac{T_1^1(t-2) Y_{t-3}}{Y_{t-3}} \end{aligned}$$

$$T_3^1(t+1)=\frac{Y_{t+1}-Y_{t-2}}{Y_{t-2}} = <\text{sumant} \pm Y_t \pm Y_{t-1} \quad \text{i reordenant}>$$

$$= \frac{\frac{Y_{t+1}-Y_t}{Y_t}Y_t}{Y_{t-2}}\frac{\frac{Y_t-Y_{t-1}}{Y_{t-1}}Y_{t-1}}{Y_{t-2}}\frac{\frac{Y_{t-1}-Y_{t-2}}{Y_{t-2}}Y_{t-2}}{Y_{t-2}}$$

$$=\frac{T_1^1(t+1)Y_t}{Y_{t-2}}\frac{T_1^1(t-1)Y_{t-1}}{Y_{t-2}}\frac{T_1^1(t-2)Y_{t-2}}{Y_{t-2}}$$

$$T_3^1(t+2)=\frac{Y_{t+2}-Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = <\text{sumant} \pm Y_{t+1} \pm Y_t \quad \text{i reordenant}>$$

$$= \frac{\frac{Y_{t+1}-Y_{t+1}}{Y_{t+1}}Y_{t+1}}{Y_{t-1}}\frac{\frac{Y_t-Y_t}{Y_t}Y_t}{Y_{t-1}}\frac{\frac{Y_{t-1}-Y_{t-1}}{Y_{t-1}}Y_{t-1}}{Y_{t-1}} =$$

$$\frac{T_1^1(t+2)Y_{t+1}}{Y_{t-1}}\frac{T_1^1(t+1)Y_t}{Y_{t-1}}\frac{T_1^1(t)Y_{t-1}}{Y_{t-1}}$$

Substituint en la $T_3^3(t)$ i agrupant termes es conclou que:

$$T_3^3(t)=\mathbf{1}T_1^1(t+2)\frac{Y_{t+1}}{Y_{t-3}+Y_{t-2}+Y_{t-1}}+\mathbf{2}T_1^1(t+1)\frac{Y_t}{Y_{t-3}+Y_{t-2}+Y_{t-1}}$$

$$+\mathbf{3}T_1^1(t)\frac{Y_{t-1}}{Y_{t-3}+Y_{t-2}+Y_{t-1}}+\mathbf{2}T_1^1(t-1)\frac{Y_{t-2}}{Y_{t-3}+Y_{t-2}+Y_{t-1}}$$

$$+\mathbf{1}T_1^1(t-2)\frac{Y_{t-3}}{Y_{t-3}+Y_{t-2}+Y_{t-1}}=\sum_{j=-2}^{2}[\mathbf{3}-|j|]\frac{Y_{t+j-1}}{\sum_{r=1}^{3}Y_{t-r}}T_1^1(t+j)$$

S'han destacat en negreta els coeficients, que van de 1 a 3 (sentit ascendent) i de 3 a 1 (sentit descendent), fet que dona una estructura aproximadament simètrica als pesos. Aquesta expressió ens torna al problema del centrat. Atès que una taxa d'ordre superior es pot expressar com a combinació de taxes d'ordre inferior, en quin moment del temps cal situar les taxes d'ordre superior? Si hem de fer cas a les ponderacions, l'instant central té un pes superior als altres (en el nostre cas, 3), i sembla el candidat a assignar la taxa.

En conjunt, doncs, ja es veu que és possible descompondre taxes d'ordre superior en termes de taxes d'ordre inferior: T_{12}^1, T_{12}^{12} o T_3^3 com a combinació de taxes T_1^1, per exemple, o bé T_{12}^{12} en termes de T_{12}^1, per posar un altre exemple. A més, aquestes descomposicions poden ser tant de taxes centrades com no centrades.

5. Les taxes interpretades com a filtres. Transformació lineal de taxes

En aquest moment ja tenim raonablement ben definit el concepte de taxa de variació, i s'han presentat diversos casos particulars. Gairebé des del començament ha sorgit un problema: quina és la manera correcta de datar les taxes? Per a respondre-hi convé treballar amb les *transformacions lineals* de taxes. En la pràctica, això vol dir que el to de les explicacions canviarà una mica. Fins ara ha estat merament descriptiu —en el sentit d'estadística descriptiva, la pròpia del càlcul de mitjanes— que és el to habitual quan s'expliquen taxes de variació. En aquest epígraf i els següents s'introduiran eines noves.

La idea de la transformació lineal és senzilla: la teoria de nombres índex, i també les taxes de variació, es fonamenten en comparacions fetes a través de *quocients*, que són expressions no lineals. No hi ha una teoria de nombres índex fonamentada en diferències, malgrat els esforços de T. L. Bennet en la dècada de 1920. Bennet va proposar una descomposició de la diferència entre dos valors en termes de la suma d'una diferència de preus i d'una diferència de quantitats, però aquesta via ha estat molt poc explotada.

Lectura recomanada

Bennet, T. L. (1920) «The theory of Measurement of Changes in Cost of Living». *Journal of the Royal Statistical Society* (núm. 83, pàgs. 455-462).

Ara bé, sí que és perfectament normal una *aproximació lineal* a les taxes de variació. De fet, ja s'ha vist que quan la magnitud d'una taxa és petita aleshores

$$T(t) \approx \ln(Y_t) - \ln(Y_{t-s}) = \ln(Y_t / Y_{t-s})$$

Aquesta expressió es pot escriure més còmodament si s'usa l'*operador de retards*, sovint denotat amb les lletres L, o B. Normalment es diu que l'operador de retards desplaça *cap al passat* les observacions, però cal anar amb compte amb el sentit de les paraules: de seguida d'això se'n dirà *avançar*... depèn de la situació on es posi l'observador. L'operador de retards, B, funciona de la manera següent:

$$B(Y_t) = Y_{t-1}$$

I en general,

$$B^h(Y_t) = Y_{t-h}$$

L'operador de retards és un operador *lineal* que s'aplica com si fos un polinomi:

$$(1+B+B^2+\ \dots)Y_t = \quad 1Y_t + BY_t + B^2Y_t + \ \dots = Y_t + BY_{t-1} + Y_{t-2} + \ \dots$$

En particular,

$$Bk = \mathrm{k}$$
$$B[\mathrm{k}Y_t] = kBY_t$$
$$B[\mathrm{k}Y_t + lX_t] = kBY_t + lBX_t = kY_{t-1} + lX_{t-1}$$

Quan s'aplica a una funció cal avaluar la funció en el punt del retard:

$$B^7[\ln(Y_t)] = \ln(Y_{t-7})$$

Observeu l'expressió següent. Indica com *no* funciona l'operador de retards:

$$(1-4B^7)\ln(Y_t) \neq \ln(1-4Y_{t-7})$$

En canvi, s'escriu:

$$(1-4B^7)\ln(Y_t) = \ln(Y_t) - 4\ln(Y_{t-7})$$

Finalment, cal dir que l'operador de retards permet definir un *operador diferència*, denotat Δ:

$$1 - B = \Delta$$

L'operador diferència actua de la manera següent:

$$(1-B)Y_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$(1-B^s)Y_t = \Delta_s Y_t = Y_t - Y_{t-s}$$

$$\Delta^2 Y_t = \Delta(\Delta Y_t) = \Delta(Y_t - Y_{t-1}) = (1-B)(Y_t - Y_{t-1}) = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

Un cop sabut com funcionen l'operador de retards i l'operador de diferència podem tornar a la nostra aproximació lineal de taxa de variació, i escriure-la de la manera següent:

$$T_1^1 \approx \ln(Y_t) - \ln(Y_{t-1}) = \ln(Y_t) - B\ \ln(Y_t) = (1-B)\ln(Y_t)$$

En general, sempre que estiguem davant de magnituds *petites* podrem acceptar l'aproximació següent:

$$T_s^1 \approx \ln(Y_t) - \ln(Y_{t-s}) = \ln(Y_t) - B^s\ \ln(Y_t) = (1-B^s)\ln(Y_t)$$

Aquest tipus de raonament és el que s'aplica a la taula 1 de Melis (1991). Les expressions $(1-B)$ i $(1-B^s)$ s'anomenen *filtres lineals* de les taxes respectives, T_1^1 i T_s^1, perquè aplicades sobre les dades expressades en logaritmes generen una aproximació (generalment prou bona) de la taxa de variació corresponent.

Si en comptes de tenir taxes de variació definides entre instants de temps aïllats tenim taxes de variació definides sobre mitjanes de períodes, el cas és similar. Per justificar-ho, denotem

$$Z_t = \sum_{j=0}^{r-1} Y_{t-j}$$

sent r el nombre de termes inclosos en el sumatori, i indicat com a superíndex en la notació de taxa presentada a la pàgina 10. Aleshores, es pot escriure que:

$$T_1^3 = \frac{Z_t - Z_{t-1}}{Z_{t-1}} = \frac{(Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2}) - (Y_{t-1} + Y_{t-2} + Y_{t-3})}{Z_{t-1}} = \frac{Y_t - Y_{t-3}}{Z_{t-1}} = \frac{(1-B^3)Y_t}{Z_{t-1}}$$

I, en general

$$\begin{aligned} T_1^r &= \frac{Z_t - Z_{t-1}}{Z_{t-1}} \\ &= \frac{(Y_t + Y_{t-1} + \ldots + Y_{t-r-1}) - (Y_{t-1} + Y_{t-2} + \ldots + Y_{t-r})}{Z_{t-1}} \\ &= \frac{Y_t - Y_{t-r}}{Z_{t-1}} = \frac{(1-B^r)Y_t}{Z_{t-1}} \end{aligned}$$

De forma semblant es té que:

$$\begin{aligned} T_3^3 &= \frac{Z_t - Z_{t-3}}{Z_{t-3}} = \frac{(Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2}) - (Y_{t-3} + Y_{t-4} + Y_{t-5})}{Z_{t-3}} \\ &= \frac{(1+B+B^2)Y_t - B^3(1+B+B^2)Y_t}{Z_{t-3}} = \frac{(1-B^3)(1+B+B^2)Y_t}{Z_{t-3}} \end{aligned}$$

Ara bé, el numerador d'aquesta darrera expressió es pot escriure de la manera següent:

$$(1-B^3)(1+B+B^2)Y_t = [(1-B)(1+B+B^2)](1+B+B^2)Y_t = (1-B)(1+B+B^2)^2 Y_t$$

L'expressió entre claudàtors és important, s'usa sovint. En general es té que

$$(1-B^k) = (1-B)(1+B+\ldots+B^{k-1})$$

La comprovació és immediata: basta fer el producte de la dreta i veure com els termes es cancel·len.

En tot cas, i continuant amb l'exemple, al final es pot escriure que:

$$T_3^3 = \frac{Z_t - Z_{t-3}}{Z_{t-3}} = \frac{(1-B)(1+B+B^2)^2 Y_t}{Z_{t-1}}$$

I, en general

$$T_s^r = \frac{Z_t - Z_{t-s}}{Z_{t-r}} = \frac{(1-B)(1+B+\ldots+B^{r-1})^2 Y_t}{Z_{t-s}}$$

Per exemple,

$$T_{12}^{12} = \frac{Z_t - Z_{t-12}}{Z_{t-12}} = \frac{(1-B)(1+B+\ldots+B^{11})^2 Y_t}{Z_{t-12}}$$

En cadascun dels casos, les expressions entre parèntesis que hi ha als numeradors de les taxes són el *filtre lineal* corresponent, en el sentit que si s'apliquen sobre les dades en logaritmes s'obté una *aproximació lineal* de la taxa. La comprovació és senzilla. Per exemple, considerem el cas particular T_3^3. D'una banda es té que

$$\begin{aligned} T_3^3 &= \frac{Z_t - Z_{t-3}}{Z_{t-3}} \\ &= \frac{(Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2}) - (Y_{t-3} + Y_{t-4} + Y_{t-5})}{Z_{t-3}} \\ &= \frac{Y_{t-3}}{Z_{t-1}}\frac{Y_t - Y_{t-3}}{Y_{t-3}} + \frac{Y_{t-4}}{Z_{t-1}}\frac{Y_{t-1} - Y_{t-4}}{Y_{t-4}} + \frac{Y_{t-5}}{Z_{t-1}}\frac{Y_{t-2} - Y_{t-5}}{Y_{t-5}} \end{aligned}$$

És a dir,

$$T_3^3 = \frac{Y_{t-3}}{Z_{t-1}} T_3^1 + \frac{Y_{t-4}}{Z_{t-1}} B T_3^1 + \frac{Y_{t-5}}{Z_{t-1}} B^2 T_3^1 \approx \frac{(1+B+B^2) T_3^1}{3}$$

l'aproximació serà bona, o suficient, o acceptable, sempre que els pesos siguin aproximadament iguals entre ells, propers a 1/3.

D'altra banda, podem aplicar a $\ln(Y_t)$ el filtre lineal que hem obtingut per a T_3^3:

$$\begin{aligned} (1-B)(1+B+B^2)^2 \ln(Y_t) &= (1+B+B^2)^2 (1-B) \ln(Y_t) \\ &= (1+B+B^2)^2 [\ln(Y_t) - \ln(Y_{t-1})] \end{aligned}$$

Estirant el quadrat i reordenant, aquesta expressió queda

$$\ln\left(\frac{Y_t}{Y_{t-3}}\right) + \ln\left(\frac{Y_{t-1}}{Y_{t-4}}\right) + \ln\left(\frac{Y_{t-2}}{Y_{t-5}}\right) = (1+B+B^2) \ln\left(\frac{Y_t}{Y_{t-3}}\right)$$

I això darrer és molt semblant a T_3^3, si no fos per un factor d'escala:

$$(1-B)(1+B+B^2)^2 \ln(Y_t) = (1+B+B^2)\ln\left(\frac{Y_t}{Y_{t-3}}\right) \approx (1+B+B^2)T_3^1 = 3\frac{(1+B+B^2)T_3^1}{3} \approx 3T_3^3$$

De manera similar en altres casos, com ara T_{12}^{12}.

Ara ja ha de quedar clar que fent totes aquestes manipulacions simplement es transformen de manera aproximada les taxes de variació –que són operadors no lineals, perquè contenen un quocient– en una expressió *lineal*, que només té sumes i restes. La transformació és aproximada, però en general suficient. La gràcia d'això no és simplificar el càlcul de la taxa de variació (de fet, sembla que encara es complica), sinó aprofitar els avantatges de la linealitat per a posar de manifest quins són els efectes de calcular taxes: quin avançament o retard i quina amplificació o esmorteïment provoca sobre la sèrie original el càlcul d'una taxa determinada. Això és el que volem veure de forma sistemàtica, i a això van dedicades la resta de pàgines d'aquest material. Recordeu que aquests dos problemes ja els hem detectat a simple vista des del començament, i en els gràfics de la pàgina 16.

Així doncs, el càlcul d'una taxa de variació es pot interpretar com l'aplicació d'una funció: d'un determinat senyal d'entrada Y_t es té una certa $f(Y_t)$. Per exemple, si parlem de T_s^1, la funció $f(Y_t)$ queda definida com $f(Y_t) = (1-B^s)\ln(Y_t)$. D'aplicar aquesta funció se'n diu *filtrar* la sèrie Y_t, o *extraure un senyal* (en aquest cas, la taxa) *de la sèrie* Y_t.

La taula següent presenta el filtre lineal equivalent a algunes de les taxes de variació més usades.

Taula 2. Aproximació a les principals taxes de variació mitjançant filtres lineals

Taxa de variació, T_h^m	**Mitjana mòbil de la sèrie original**	**Filtre lineal equivalent, també anomenat *funció de transferència*, *H*(*B*)**
$T_1^1 = Y_t / Y_{t-1} - 1$		$1-B$
$T_6^1 = Y_t / Y_{t-6} - 1$		$1-B^6$
$T_{12}^1 = Y_t / Y_{t-12} - 1$		$1-B^{12}$
$T_1^3 = Z_t / Z_{t-1} - 1$	$Z_t = Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2}$	$(1-B)(1+B+B^2) = 1-B^3$
$T_3^3 = Z_t / Z_{t-3} - 1$	$Z_t = Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2}$	$(1-B^3)(1+B+B^2) =$ $= (1-B)(1+B+B^2)^2$
$T_1^6 = Z_t / Z_{t-1} - 1$	$Z_t = Y_t + Y_{t-1} + \ldots + Y_{t-5}$	$(1-B)(1+B+\ldots+B^5) = 1-B^6$

Font: Melis (1991), pàgina 15. Són taxes no centrades i no anualitzades. Y_t és la sèrie original; Z_t és la mitjana del període considerat. S'han omès els denominadors, atès que en inserir-los en la fórmula de la taxa es cancel·len.

Taxa de variació, T_h^m	**Mitjana mòbil de la sèrie original**	**Filtre lineal equivalent, també anomenat *funció de transferència, H(B)***
$T_1^{12} = Z_t / Z_{t-1} - 1$	$Z_t = Y_t + Y_{t-1} + \dots + Y_{t-11}$	$(1-B)(1+B+\dots+B^{11}) = 1-B^{12}$
$T_{12}^{12} = Z_t / Z_{t-12} - 1$	$Z_t = Y_t + Y_{t-1} + \dots + Y_{t-11}$	$(1-B^{12})(1+B+\dots+B^{11}) = \dfrac{(1-B^{12})^2}{(1-B)}$

Font: Melis (1991), pàgina 15. Són taxes no centrades i no anualitzades. Y_t és la sèrie original; Z_t és la mitjana del període considerat. S'han omès els denominadors, atès que en inserir-los en la fórmula de la taxa es cancel·len.

Observeu que, en la pràctica, la tercera columna de la taula 2 és fàcil d'obtenir, no requereix massa esforç de càlcul. *És el producte d'un operador de retards d'un cert ordre pel polinomi de mitjanes mòbils corresponent (en el cas que existeixi), i després arranjat*. Així:

$$
\begin{aligned}
T_h^m &= (1-B^h)(1+B+B^2+\dots+B^{m-1}) = (\text{s'introdueix l'arranjament}) \\
&= (1-B^h)\left(\tfrac{1-B}{1-B}\right)(1+B+B^2+\dots+B^{m-1}) = (\text{en el cas que } h=m) \\
&= \tfrac{(1-B^h)^2}{1-B}
\end{aligned}
$$

Tal com diu a l'encapçalament la taula 2, les expressions de la tercera columna reben el nom de *funcions de transferència* i se solen denotar per $H(B)$. Una funció de transferència $H(B)$ aplicada a un senyal d'entrada, X_t, produeix una sortida determinada, Y_t:

$$H(B)X_t = Y_t$$

Per exemple, considerem el senyal d'entrada anomenat *impuls unitari*, definit com

$$\delta_t = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

I apliquem-li la funció de transferència més senzilla, la primera diferència:

$$H(B) = 1 - B$$

La sortida Y_t serà la seqüència de valors $\{Y_t\}$ següent:... 0, 0, **1**, –1, 0,... (en negreta l'1 que és el valor a l'origen), ja que

$$
\begin{aligned}
H(B)\delta_0 &= (1-B)\delta_0 = \delta_0 - \delta_{-1} = 1 - 0 = 1 \\
H(B)\delta_1 &= (1-B)\delta_1 = \delta_1 - \delta_0 = 0 - 1 = -1 \\
H(B)\delta_2 &= (1-B)\delta_2 = \delta_2 - \delta_1 = 0 - 0 = 0
\end{aligned}
$$

i idènticament per a valors posteriors de *t*. Aplicar H(B) sobre el senyal d'entrada genera un resultat nul sempre que t>1.

Vegem un altre exemple. Si apliquem a δ_t la funció de transferència, $H(B) = 1 - B_4$, la sortida Y_t serà la seqüència de valors $\{Y_t\}$ següent:... 0, 0, **1**, 0, 0, 0, -1, 0..., ja que

$$\begin{aligned}
H(B)\delta_0 &= (1-B)\delta_0 = \delta_0 - \delta_{-4} = 1 - 0 = 1\\
H(B)\delta_1 &= (1-B)\delta_1 = \delta_1 - \delta_{-3} = 0 - 0 = 0\\
H(B)\delta_2 &= (1-B)\delta_2 = \delta_2 - \delta_{-2} = 0 - 0 = 0\\
H(B)\delta_3 &= (1-B)\delta_3 = \delta_3 - \delta_{-1} = 0 - 0 = 0\\
H(B)\delta_4 &= (1-B)\delta_4 = \delta_4 - \delta_0 = 0 - 1 = -1\\
H(B)\delta_5 &= (1-B)\delta_5 = \delta_5 - \delta_1 = 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

i idènticament per a valors posteriors de *t*. H(B) produeix un senyal que sempre és nul per t>4.

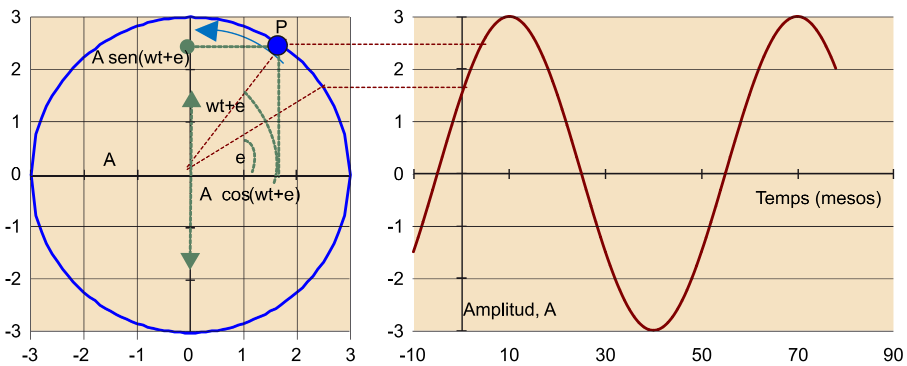
En cadascun dels dos exemples, la resposta de $H(B)$ a l'impuls unitari δ_t és precisament la seqüència de paràmetres del filtre respectiu.

Els dos exemples tenen per a nosaltres una utilitat addicional. Serveixen per a introduir el fet que en el cas de filtres lineals i invariants com els que ens ocupen la ***funció de resposta a l'impuls unitari***, $\{h_t\}$, és una informació molt important. Hi ha una operació, anomenada ***convolució*** (denotada pel signe "asterisc", *), que permet conèixer la sortida, $\{Y_t\}$ corresponent a qualsevol entrada, $\{X_t\}$ per mitjà de *convolucionar* l'entrada amb la funció de resposta a l'impuls unitari pròpia del filtre, $\{h_t\}$. ***És a dir, calcular*** $H(B)X_t$ ***és el mateix que calcular*** $\{X_t\}*\{h_t\}$. ***En tots dos casos el resultat és*** $\{Y_t\}$. El problema de convolucionar dues seqüències d'observacions sol ser que és una operació generalment tediosa. L'estudiant interessat trobarà més informació en la referència de Proakis i Manolakis, també (de forma dosificada) en l'apartat 7 d'aquest material.

6. Interpretació freqüencial d'una sèrie temporal

Suposem que tenim una sèrie temporal qualsevol. En economia això significa normalment que tenim una seqüència de valors finita ordenats en el temps, a intervals regulars. Amb dades mensuals, després del valor de maig ve el de juny, el de juliol, etc. Posem per exemple, per fixar idees, que el nombre ***total*** d'observacions disponibles és $T = 240$ mesos, vint anys. Naturalment, el fenomen que descriu la sèrie potser va començar en un passat remot (o potser no), i potser continuarà en el futur (o potser no). En el límit, el fenomen fins i tot pot ser de durada infinita en el temps, però nosaltres només coneixem $T = 240$ observacions. En altres paraules, podria passar que fora del rang d'observació el fenomen es comporti de manera diferent al que mostren les nostres $T = 240$ dades disponibles, però això no ho sabem: en la pràctica ens hem de concentrar en aquesta mostra de 240 dades.

En economia, és habitual suposar que els fenòmens tendeixen a repetir-se de forma cíclica, que es comporten d'acord amb una certa periodicitat. A continuació dels períodes d'auge es presenten etapes de desacceleració, altres de veritable contracció i crisi, i finalment altres de recuperació, i aquestes fases se succeeixen de manera no sempre idèntica, però sí perceptible. Suposem, per simplificar, que disposem de 240 observacions que presenten l'evolució cíclica mostrada al gràfic de la dreta.



L'eix horitzontal és el temps, mentre que l'eix vertical mostra la magnitud del fenomen, la seva amplitud o intensitat. És el tipus de gràfic que s'usa normalment en economia per a representar una sèrie temporal ***en el domini del temps***, és a dir, per a representar unes observacions que (se suposa) depenen només del temps, només del moment en què són mesurades. Això sí, en realitat les sèries econòmiques no són tan suaus, tan monòtones ni tan periòdiques. Tenen un aspecte força més irregular. Per brevetat, el gràfic només mostra les primeres 100 observacions, ja que vist un cicle complet és com haver-los vist tots. Es van repetint sistemàticament. Per a dibuixar-lo s'ha utilitzat una funció artificial, inventada. Aquesta:

$$Y_t = 3 \quad \sin\left(2\pi\frac{4}{240}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

La sèrie Y_t presenta una amplitud, un rang de variació, que va des de –3 fins a +3. Aquesta amplitud la dona el nombre 3 que hi ha multiplicant al davant. A més, en l'origen de la mostra la funció no val zero (que en general és el valor del sinus en $t = 0$), sinó que pren un valor positiu (exactament 1,5, tres vegades el sinus de $\frac{\pi}{6}$). Això és perquè la funció està desplaçada cap a l'esquerra, cap al passat, en $\frac{\pi}{6}$ radians, el terme que entra sumant dins del parèntesi. D'aquest desplaçament se'n diu *fase inicial*.

Finalment, en cada moment del temps, *t*, el valor de Y_t depèn de la magnitud $2\pi 4\frac{1}{240}t$. En aquesta expressió, el terme $\frac{1}{240}$ és la *freqüència fonamental*, que és la freqüència d'una ona que es presenta una sola vegada en l'horitzó temporal disponible (240 mesos). En el nostre cas, l'ona es presenta *quatre vegades* en aquest horitzó (per això hi ha el terme $4\frac{1}{240}$). Per tant, tenim un fenomen que es repeteix de manera completa amb una freqüència que és *quatre cops la fonamental*. Del terme $\frac{4}{240}$ se'n diu *freqüència rotacional*. Observeu, però, que la freqüència rotacional es multiplica per 2π. Aleshores es té simplement la freqüència rotacional expressada en termes d'una fracció de 2π. Aquesta forma de presentar la freqüència es diu *angular*. De tot plegat resulta que en cada moment del temps el valor de l'ona depèn de $\left(2\pi\frac{4}{240}t + \frac{\pi}{6}\right)$. Fins aquí tot és més o menys artificiós, però bastant familiar: una ona dibuixada damunt un eix de temps. Per a molts economistes no hi ha gairebé res que no depengui del temps, tenen aquesta variable tan encastada al cervell com els físics. D'altres es concentren en estudiar situacions d'equilibri estàtic, i aleshores aquestes pàgines els semblaran potser avorrides.

Observeu ara el punt *P* del gràfic de l'esquerra. Es desplaça damunt de la circumferència de radi o amplitud $A = 3$, en el sentit contrari a les agulles del rellotge i amb una freqüència angular, *w,* constant. Si resulta que en el moment de la primera observació disponible el punt *P* ja havia recorregut l'angle inicial (fase inicial) *e*, en cada moment del temps l'angle recorregut pel punt P serà $wt + e$. En el nostre exemple la fase inicial *e* pren el valor $\frac{\pi}{6}$, i la freqüència angular és $w = 2\pi\frac{4}{240}$.

Així, doncs, queda clar que la sèrie temporal dibuixada al gràfic de la dreta,

$$Y_t = 3 \quad \sin\left(2\pi\frac{4}{240}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

es representa al gràfic de l'esquerra com la projecció del punt P sobre l'eix vertical (el punt verd). A mesura que *P* va girant damunt la circumferència la seva projecció sobre l'eix vertical (punt verd) puja i baixa damunt aquell eix a una velocitat lineal que no és constant. Quan P es troba a les parts superior o inferior de la circumferència ha de recórrer molt tros de l'arc per pujar o baixar una mica (ja que la trajectòria de la circumferència és gairebé perpendicular a l'eix vertical), mentre que quan *P* és a prop de l'eix horitzontal la seva projecció sobre l'eix vertical avançarà més ràpidament, perquè la seva trajectòria és gairebé vertical, paral·lela a l'eix. El fet de desplaçar-se amunt i avall sobre l'eix vertical (gràfic esquerra, punt verd) es representa en el domini del temps tal i com mostra el gràfic dret.

Tot això es resumeix dient que el gràfic de l'esquerra és una representació ***en el domini de la freqüència***, mentre que el gràfic dret és una representació ***en el domini del temps***. Són dues representacions diferents del mateix fenomen. Per als economistes la visualització dreta és molt corrent; la visualització esquerra, menys. En canvi es veurà de seguida que el domini de la freqüència mostra aspectes del fenomen que són difícils d'observar en el domini del temps.

El moviment descrit pel punt verd al llarg de l'eix vertical mitjançant la fórmula general

$$Y_t = A\sin(wt + e), \text{ on } \quad w = \frac{2\pi}{T}$$

i que en el nostre exemple pren la forma concreta

$$Y_t = 3 \quad \sin(2\pi\frac{4}{240}t + \frac{\pi}{6})$$

rep el nom de ***moviment harmònic simple***, abreujat *mas* —per *movimiento armónico simple* i perquè *mhs* és impronunciable. En física, el *mas* és un moviment molt conegut. S'estudia a batxillerat. És el moviment que descriu una partícula sotmesa a una força de sentit contrari a la direcció del seu desplaçament, i proporcional al desplaçament —més gran als extrems de l'eix vertical, més petita cap al centre. Produeix un tipus especial de moviment periòdic, ja que no tots els moviments periòdics són *mas*, però que a nosaltres ens importa molt.

No cal dir que també es podria haver projectat el punt P sobre l'eix horitzontal. Aquesta projecció seria

$$Y_t = 3 \quad \cos\left(2\pi\frac{4}{240}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

S'ha preferit la projecció vertical simplement perquè mostra una correspondència més visual amb el gràfic de la dreta.

Abans de continuar, recapitulem una mica la notació per consolidar idees. Anomenem:

1) *P*, període. Es mesura en unitats de temps (mesos, dies, segons...). Indica la duració d'un cicle, el temps necessari per a passar dos cops per un mateix punt. En general es diu que una funció f és periòdica de període P si $f(t)=f(t+kP), \quad k \in R$.

Quan es té un total de T observacions el cicle més llarg avaluable dura T unitats de temps. D'això se'n diu ***període fonamental*** o ***de Nyquist***. De seguida postularem que altres cicles més curts, més breus, tindran un període $P = T/\text{k}$, proporcional al fonamental, és a dir, que es podran observar 1, 2, 3... k vegades senceres dins els T mesos.

2) w, freqüència. És la inversa del període, $1/P$. Es mesura en mesos^{-1}, dies^{-1}, segons^{-1}, etc. Aquesta darrera unitat rep el nom de *hertz* (Hz) en el sistema internacional d'unitats, que va bandejar l'antiga expressió (de significat equivalent) *cicles per segon*. Si un fenomen es produeix set vegades en un segon (s'observen set cicles complets en un segon) es diu que la seva freqüència és de 7 Hz.

Quan es tenen T observacions la freqüència fonamental és $1/T$ (1 cicle en T mesos). En correspondència al que s'acaba de dir pel que fa al període, de seguida postularem que els cicles de freqüència superior a la fonamental es produiran amb una freqüència $w = k/T$, proporcional a aquella.

La longitud de qualsevol circumferència té 2π radians (recordeu, si $L = 2\pi r$, és clar que la longitud de qualsevol circumferència conté 2π cops la del radi, $L/r = 2\pi$). Si s'interpreta una volta sencera a la circumferència com un cicle complet, cosa que succeeix cada P unitats de temps, es pot prendre la longitud de la circumferència com a unitat de còmput per al cicle. Per fer un cicle sencer (2π radians) el fenomen necessita P mesos, dies, segons, etc. Aleshores, $w = 2\pi/P$, i si s'assumeix que un fenomen es pot produir amb una periodicitat múltiple de la fonamental es té que $w = 2\pi/P = 2\pi\frac{k}{T}$. D'això se'n diu ***freqüència angular***. Noteu que la freqüència angular és un múltiple enter de la freqüència fonamental, però que ella mateixa no serà un nombre enter. La freqüència angular s'expressa en $\frac{\text{radians}}{\text{mes}}, \frac{\text{radians}}{\text{dia}}, \frac{\text{radians}}{\text{segon}}$ etc., mentre que la freqüència rotacional s'expressa en mesos^{-1}, dies^{-1}, segons^{-1}, etc.

Com passa amb el concepte corrent de velocitat (o sigui amb el quocient entre l'espai i el temps), el valor numèric de la freqüència depèn de les unitats de temps considerades. Així, denoten cicles anuals *totes* les freqüències següents:

$$\frac{2\pi \quad \text{radians}}{365 \quad \text{dies}} = 0{,}017, \frac{2\pi \quad \text{radians}}{12 \quad \text{mesos}} = 0{,}524, \frac{2\pi \quad \text{radians}}{4 \quad \text{trimestres}} = 1.571$$

3) ***W·t***. Es mesura en radians. És l'angle absolut recorregut en el moment *t*, comptant a partir de *e*.

4) ***e*****, fase inicial o angle absolut inicial**. Es mesura en radians. La seva existència depèn del moment en què es pren la primera observació. Visualment, *e* desplaça la sinusoide cap a l'esquerra.

5) ***w·t + e***. Mesurat en radians. Angle absolut total recorregut en el moment *t*.

6) $\frac{wt+e}{2\pi}=\frac{kt}{T}+\frac{e}{2\pi}$, **fase**. És adimensional. Proporció de la longitud de la circumferència (2π) recorreguda en el moment *t*.

Arribats a aquest punt, podem manipular una mica la nostra sèrie harmònica. Partim del fet que $Y_t = A \quad \sin(wt+e)$, però com que en general $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$, podem escriure que:

$$\begin{aligned} Y_t = A\sin(wt+e) &= A[\sin wt \cdot \cos e + \sin e \cdot \cos wt] \\ &= (A\cos e)\sin wt + (A\sin e) \cdot \cos wt \\ &= a \cdot \sin wt + b \cdot \cos wt \end{aligned}$$

A més, $a^2 + b^2 = A^2\cos^2 e + A^2\sin^2 e = A^2(\cos^2 e + \sin^2 e) = A^2$

Fins aquí hem definit un fenomen periòdic a partir d'un moviment harmònic sol, senzill, aïllat, elemental: un moviment harmònic *simple*. En realitat, però, les periodicitats no es presenten soles. Són generalment complicades, en el sentit que en la pràctica s'observa una superposició de diverses estructures periòdiques. Algunes d'elles es produeixen molt lentament en el temps, tenen caràcter *tendencial*; d'altres s'observen si fa o no fa (per exemple) cada cinc o deu anys, en cicles més o menys visibles quan es disposa d'un nombre suficient de dades; mentre que d'altres és van repetint si fa o no fa dins de cada any o de cada setmana. El problema, és clar, es troba en les paraules *si fa o no fa*: en general no tenim una idea molt exacta de quantes periodicitats hi ha superposades en una sèrie real observada, i tampoc sabem ben bé cada quan es produeixen. De fet, assumim que la periodicitat fins i tot pot ser variable. Això pot semblar estrany, perquè al cap i a la fi la naturalesa dels fenòmens periòdics és que es vagin repetint de manera regular, idèntica en el temps. En canvi, els cicles no són molt estables, potser són una mica complicats i erràtics. Per exemple, la concentració de les vacances (i la caiguda d'activitat corresponent) en els mesos d'estiu no és exactament la mateixa cada any. És semblant, el seu efecte sobre les dades és visible, es pot reconèixer, però no és sempre idèntic. Al final, la superposició d'aquestes diverses periodicitats variables pot ser tan complicada que el resultat (la sèrie observada) potser no semblarà ni tan sols periòdica, de tan enrevessada. De fet, pot arribar a semblar una sèrie molt atzarosa i irregular, encara que estigui formada per components periòdics. És sobre series així que calculem qualsevol de les taxes de variació que hem vist fins aquí.

Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) ens va ensenyar que podem interpretar qualsevol sèrie com la composició, la *suma* d'un cert nombre de funcions trigonomètriques simples. Va assumir que cadascuna d'aquestes sèries-components té una freqüència que és múltiple de la freqüència fonamental, que és aquella que caracteritza l'ona més lenta, més llarga possible: l'ona que succeeix un sol cop en les *T* observacions disponibles. Cadascuna d'aquestes ones es pot representar, en general, per un *moviment harmònic simple* i, per tant, reben el nom d'*harmònics*. La sèrie amb la qual hem il·lustrat fins ara el present apartat està formada per un sol harmònic. La sèrie artificial de l'apartat segon, presa del capítol 5 d'Espasa, era més complicada (incloïa una tendència i un component erràtic), però també presentava un sol harmònic, el corresponent al cicle. En els dos casos l'harmònic es va repetint sempre idèntic a ell mateix, no presenta cap mena de variació en el temps, ni tan sols d'aleatorietat. Des d'aquest punt de vista, són dues sèries artificials molt senzilles.

Nosaltres hem vist fa un moment que la forma d'escriure *un sol harmònic* és:

$$Y_t = A\sin(wt + e) = a \cdot \sin wt + b \cdot \cos wt$$

Doncs bé, Fourier va establir que, en la pràctica, les sèries observades estan constituïdes per *una suma d'harmònics*:

$$Y_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sin w_k t + b_k \cdot \cos w_k t$$

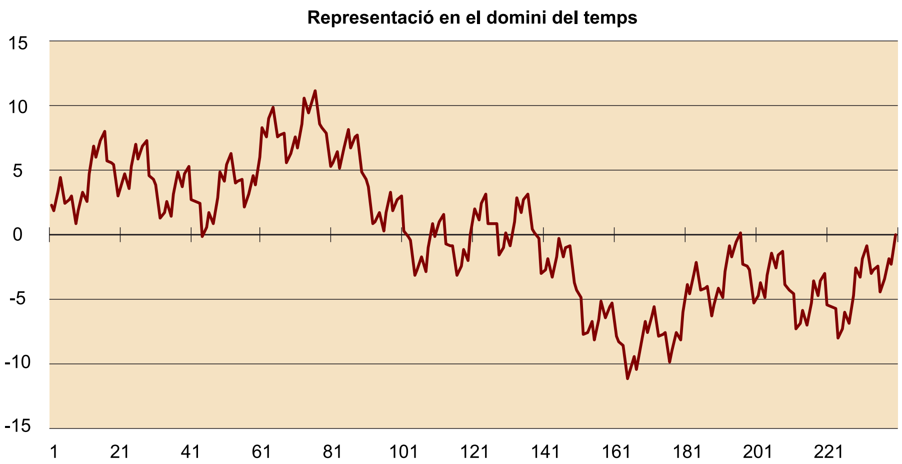
On *k* és un múltiple determinat de la freqüència fonamental.

Tot això constitueix la base del que s'anomena ***anàlisi harmònica o de Fourier***. Consisteix a expressar un fenomen periòdic com la suma de diversos moviments cíclics no observats i sobreposats. Naturalment, la hipòtesi de treball és que la funció observada es pot descompondre en harmònics, i també que amb pocs harmònics és possible aproximar-la acceptablement. Per tant, en la pràctica el nombre total d'harmònics que es pot considerar és finit (de fet, petit), de manera que la resta d'harmònics es consideren negligibles i s'apleguen en un únic terme d'error (que hauria de ser no massa gran, acceptable). Això sí, cada harmònic queda definit per una amplitud determinada, *A*, i també per uns a_k, b_k i freqüència angular w_k, que és *k* vegades la fonamental.

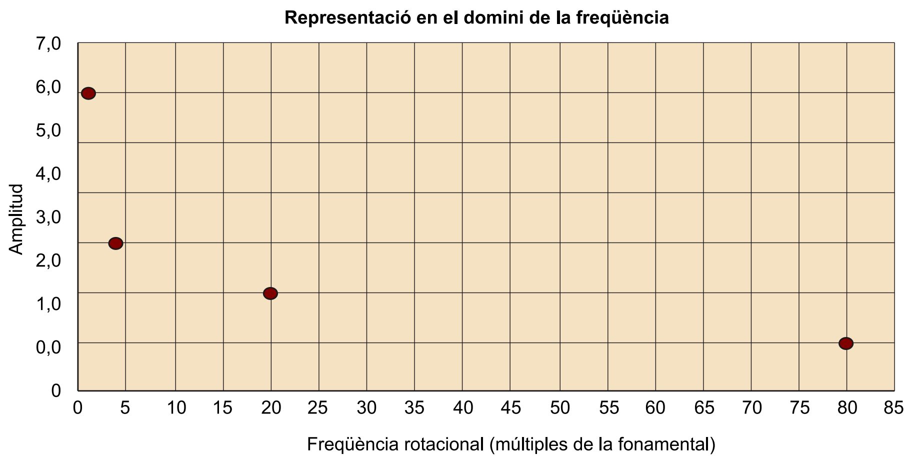
Per exemple, agafem el nostre harmònic, $Y_t = 3 \sin\left(2\pi\frac{4}{240}t + \frac{\pi}{6}\right)$ i afegim-n'hi tres més, també inventats. En conjunt tindrem el mecanisme següent, format per quatre harmònics. El segon harmònic és el que hem usat fins ara:

k, múltiples de freqüència fonamental, 1/240	Amplituds
1	6
4	3
20	2
80	1

Per simplicitat eliminem qualsevol mena de fase inicial i no afegim cap terme de pertorbació aleatòria enlloc, ni cap tendència: simplement considerem la *suma* d'aquests quatre harmònics, definits sobre 240 observacions. En col·locar aquest valors en un full de càlcul s'obté la sèrie següent (us encoratgem a provar-ho vosaltres mateixos):



Aquesta sèrie és un pur invent, però segons com podria semblar l'evolució del PIB de l'economia espanyola... hi té una retirada: primer una etapa d'expansió, una crisi (l'observació 161) i els famosos *brotes verdes* (cap a l'observació 195) seguits de més contracció. La mateixa sèrie presentada en el domini de la freqüència té l'aspecte següent:



El primer gràfic és la representació típica de l'anàlisi de conjuntura, una representació en el temps; el gràfic segon és la representació corresponent en el domini de la freqüència. El primer mostra directament allò que es veu; el segon explica que allò que es veu està causat per quatre harmònics (els quatre punts), i diu quina és la freqüència i l'amplitud de cadascun d'ells.

Aquí hem partit dels harmònics i (per agregació) hem definit una sèrie *observada* artificial. En realitat, però, la situació funciona a la inversa: tenim les observacions d'una sèrie real i, atesa aquesta longitud de mostra, es tracta de determinar quants harmònics cal per a descriure la sèrie, i quins són els valors dels diversos a_k, b_k i w_k. Com s'ha vist abans, si es coneixen els paràmetres a i b de cada harmònic també en coneixem l'amplitud, ja que $a^2 + b^2 = A^2$. És a dir, coneixem la importància que té l'harmònic en la determinació del senyal observat o, en altres paraules, quina és la seva contribució a la variància de la sèrie.

Aquest resultat, que sembla intuïtiu, no ho és tant. Per a provar-lo caldria recórrer al *teorema de Parseval*, que expressa la variància total de la sèrie observada com a ***suma*** de les amplituds dels k harmònics rellevants i d'un terme residual negligible. El pes de cadascun d'aquests sumands sobre la variància total s'anomena ***periodograma o espectre empíric de la sèrie***. En altres paraules, si en un periodograma passa que un harmònic en particular presenta un valor molt elevat és que aquell harmònic, el corresponent a aquella freqüència, explica una part molt rellevant de la variància total de la sèrie. És un harmònic important.

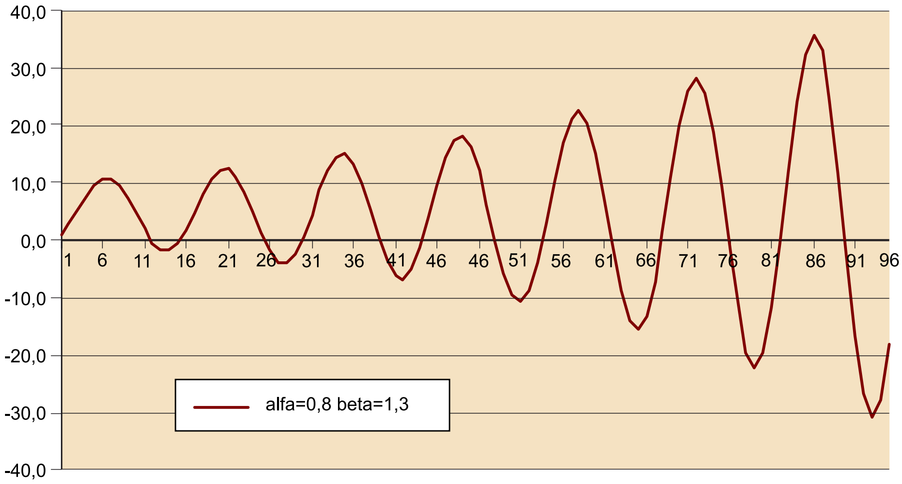
Pel que fa a la pretensió d'aquestes pàgines, no cal desenvolupar el teorema de Parseval, però queda dit el seu nom per a l'estudiant que hi estigui interessat.

6.1. Periodicitat i nombres complexos

Dels exemples mostrats fins aquí podria semblar que la forma *natural* de recollir fenòmens periòdics és mitjançant funcions trigonomètriques. No és del tot exacte. D'una banda, com és sabut, els *nombres complexos* també són essencialment periòdics. D'altra banda, les *equacions en diferències* (o sigui, les equacions que presenten *retards en la incògnita*) no contenen en general cap funció trigonomètrica, i en canvi també poden descriure oscil·lacions periòdiques. Per exemple, considereu l'equació $Y_t = G + \alpha(1 + \beta)Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2}$. Fixeu els valors $G = 1$, $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 1{,}3$, i partiu dels valors inicials $Y_{t-1} = Y_{t-2} = 0$. A continuació construïu un centenar de resultats amb Excel i representeu-los. Obtindrem una sèrie d'aspecte molt periòdic, la següent:

Nota

Els estudiants familiaritzats amb els nombres complexos poden saltar aquest subapartat sense pèrdua de continuïtat.



Si no ho heu fet mai, és molt recomanable que reproduïu l'experiment, i que jugueu a canviar una mica els valors indicats per veure com es modifica la forma de la gràfica. Basten petits canvis en els paràmetres per introduir modificacions espectaculars.

Aquestes tres vies per a recollir fenòmens oscil·latoris (funcions trigonomètriques, nombres complexos i equacions en diferències) no són independents, en realitat, sinó que estan relacionades. D'una banda, les equacions en diferències es poden escriure com a filtres lineals que presenten retards, autorregressius, i a través de les funcions de guany i de fase és poden traduir a nombres complexos. Estic força segur que aquesta frase difícilment s'entén ara, però convé deixar-la escrita per a més endavant. En tot cas, retingueu que hi ha una relació entre les equacions en diferències i els nombres complexos. D'altra banda, les funcions trigonomètriques també es poden traduir en nombres complexos mitjançant l'anomenada *fórmula d'Euler*, que com qualsevol fórmula sorprèn la primera vegada que es veu. Després potser sorprèn menys, però és igualment fascinadora. La fórmula d'Euler afirma que

$$e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$$

La lletra i denota la unitat imaginària, i la lletra α denota un angle, expressat en *radians*. Recordeu: si la longitud de la circumferència és $L = 2\pi r$, aleshores L/r sempre és constant, val 2π. Doncs bé, un radian és un arc de circumferència de longitud igual al radi. Es presenta 2π vegades en 360 graus i, per tant, equival a una mica més de 57 graus.

Devem la fórmula d'Euler al matemàtic suïs Leonhard Euler (1707-1783). Com es pot veure, lliga l'exponencial complexa $e^{i\alpha}$ amb les funcions trigonomètriques, i escriure-la va ser un avenç sensacional. És un vincle directe entre l'anàlisi i la trigonometria, ja que mostra les funcions sinus i cosinus com a variants de la funció exponencial complexa. Fixeu-vos-hi: si se sumen les dues expressions d'Euler (una amb signe positiu i l'altra amb signe negatiu) es té que $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$, i d'aquí que

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Mentre que si es resten es té que $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2\mathrm{i}\,\sin\alpha$, i d'aquí que

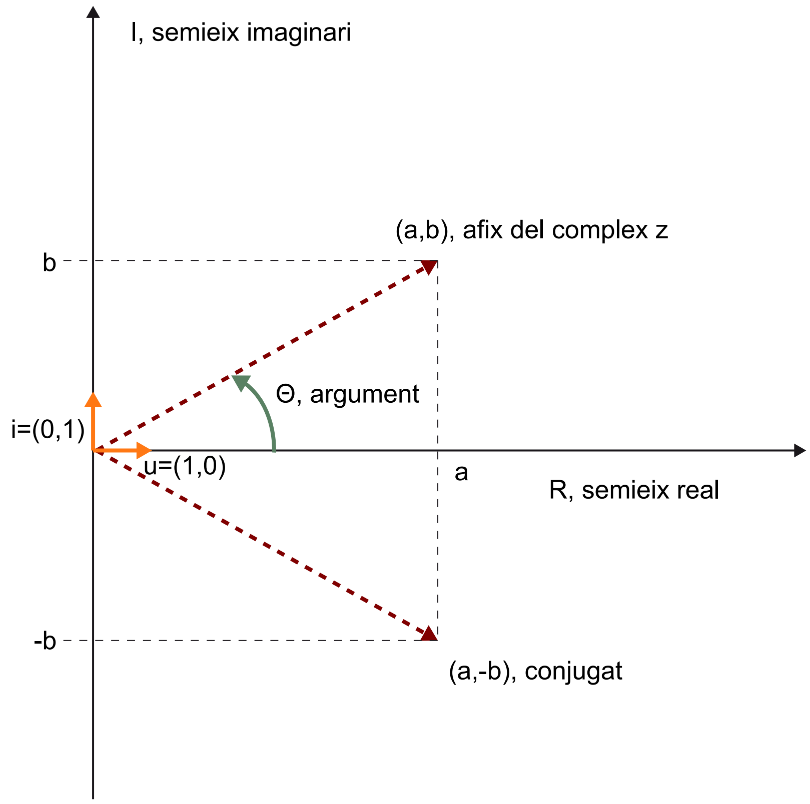
$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Per tant, és possible saltar de les funcions trigonomètriques a l'exponencial complexa, i al revés. Així, doncs, no és estrany que la fórmula d'Euler sigui útil per a resoldre equacions en diferències quan la seva solució és una funció trigonomètrica. A més, en general és més senzill operar amb l'exponencial complexa que amb funcions trigonomètriques, i per tant tenir l'equació d'Euler és una sort. Ara bé, per a aprofitar-la cal sentir-se còmode amb els nombres complexos. Això justifica revisar-los breument en quatre o cinc cares de paper. No cal dir que els estudiants familiaritzats amb aquest tipus de nombres poden ometre sense pèrdua de continuïtat el subapartat, com s'ha indicat en començar.

Hi ha moltes classes diferents de nombres: naturals, enters, racionals, irracionals, reals... però no sempre ha estat clar quina mena de nombres pot resoldre equacions del tipus $X^2 = -k$, si k un nombre real. Per descomptat, cap nombre real verifica aquesta equació. Doncs bé, els nombres complexos es defineixen com aquell conjunt de nombres per als quals aquesta equació es pot resoldre.

Des del punt de vista pràctic, els nombres complexos són fàcils de visualitzar –ep! són fàcils de visualitzar *avui*, perquè no hi va haver manera fins que se li va acudir a Gauss com fer-ho, a començaments de la dècada de 1830. Per a tenir una interpretació geomètrica dels nombres complexos basta pensar que són una de les estructures que conviuen a R^2. Aquest espai es pot interpretar format per *parelles ordenades*, si no es pensa en cap estructura concreta, o per *vectors* (si es considera que R^2 és un espai vectorial) o per *punts* (si es considera l'estructura afí)... i també per *nombres complexos*.

Gràficament es dibuixen dos eixos, el semieix *real* i el semieix *imaginari*. Entre tots dos defineixen el pla complex. El semieix real està definit pel vector $u = (1,0)$, i l'imaginari pel vector $i = (0,1)$, ambdós de mòdul unitari. El vector i rep el nom d'*unitat imaginària*. Un nombre complex queda representat per un punt $z(a,b)$ d'aquest espai, que rep el nom d'*afix* del nombre complex z. La lletra a és la component real i b la component imaginària. Un nombre complex també es pot interpretar com el vector que uneix l'afix amb l'origen. Aleshores, l'angle amb l'eix real (o sigui, un angle mesurat en el sentit contrari a les agulles del rellotge) rep el nom d'*argument*.



Cada afix té un *conjugat*, que és la imatge reflexa de z respecte a l'eix real. Un nombre complex és real quan coincideix amb el seu conjugat —és a dir, el punt $z(a,0)$ és real.

Atès el conjunt de punts z, es defineixen les operacions següents:

- Suma: $(a,b) + (c,d) = (a + c,b + d)$
- Producte per a escalar, δ: $\delta(a,b) = (\delta a, \delta b)$
- Producte de nombres complexos: $(a,b)(c,d) = (ac - bd,ad + bc)$

Observeu que es pot definir la igualtat de dos nombres complexos (dos nombres complexos són iguals si els dos components respectius ho són entre si), però que els complexos no es poden ordenar. Entre nombres complexos no hi ha una relació del tipus *més gran que*, o *més petit que*.

La unitat imaginària, i, és un nombre complex molt singular. El seu quadrat és un nombre real, ja que no té component imaginària. Pren el valor –1:

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

I és per això que podem escriure coses com ara $i = \sqrt{-1}$, $i^4 = 1$, etc., o també $^1\!/_i = -i$.

Un nombre complex admet pel cap baix cinc representacions diferents:

1) Cartesiana: $z = (a, b)$, on a i b són reals.

2) Binòmica: $z = a + bi$

3) Polar: $z = m_\theta$, on m és el mòdul i θ l'argument principal.

El *mòdul* es defineix com $m = +\sqrt{a^2 + b^2}$. Quant a l'*argument principal*, o angle θ, verifica $0 \leq \theta \leq 2\pi$, i també que $\mathrm{tg}\theta = {}^b\!/_a$. L'argument principal no és l'únic argument del nombre complex z: a més de θ també val $\theta + 2\pi k$. Per tant, l'argument no és un angle concret, sinó una família d'angles, cadascun separat de l'anterior per 2π radians. Per això queda clar que els nombres complexos són essencialment periòdics: hi ha un nombre complex idèntic a l'anterior per a cada valor de k.

4) Trigonomètrica: aquesta representació es produeix per extensió de la binòmica:

$$z = a + bi = (m\cos\theta) + (m\sin\theta)i = m(\cos\theta + i\sin\theta)$$

I en general

$$z = m[\cos(\theta + 2\pi k) + i\sin(\theta + 2\pi k)]$$

5) Exponencial o d'Euler: tenint en compte la fórmula d'Euler, l'expressió trigonomètrica admet l'escriptura següent:

$$z = m(\cos\theta + i\sin\theta) = m(e^{i\theta})$$

La representació d'Euler de nombres complexos és molt agraïda per a operar, ja que les regles per a fer-ho segueixen de forma natural les dels nombres reals. Per exemple (retingueu aquest resultat, de seguida serà molt important), per a multiplicar nombres complexos basta multiplicar els mòduls i sumar els arguments:

$$zz' = (me^{i\theta})(ne^{i\alpha}) = (mn)e^{\theta+\alpha}$$

D'aquest exemple queda clar que amb els nombres complexos es poden fer les operacions que fem habitualment amb nombres reals —sumar, restar, multiplicar, dividir, potències i arrels de qualsevol ordre, logaritmes, etc.— encara que amb algunes particularitats. Per exemple, les arrels de nombres complexos no es comporten com les dels nombres reals. Fixeu-vos què passa si calculeu de forma imprudent:

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}\ \ \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \cdot -1} = \sqrt{1} = 1$$

O sigui, $-1 = 1$

El problema s'origina en interpretar «–1» com el nombre real –1, i aplicar-li una propietat típica de l'arrel quadrada dels nombres reals: $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$. Això és il·legal, perquè $i^2 = -1$ és la unitat complexa, un nombre complex al qual cal aplicar les propietats de l'operació «arrel quadrada dels complexos», un context en el qual *no és cert* que $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$. Les propietats de l'arrel dels nombres reals només són aplicables a la part real dels nombres complexos, no a tot el nombre complex sencer.

En termes més generals, res no impedeix definir funcions sobre el conjunt de nombres complexos i estudiar els problemes de continuïtat, límits funcionals, derivabilitat, etc. Ara bé, a nosaltres ens interessa especialment l'*exponencial d'un nombre complex*, e^z. Es defineix de manera que per a qualsevol nombre real coincideixi amb la funció exponencial real. A més, també importa que la seva derivada sigui com la del cas real i que es compleixi la llei dels exponents típica de l'exponencial real, o sigui, que el producte de dues exponencials reals s'obtingui sumant els exponents.

Per tal que aquesta llei dels exponents es verifiqui haurà de passar que $e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$, i pel que fa a e^{ib}, serà molt convenient definir-la de la manera següent:

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b$$

ja que aleshores

$$e^{ib} e^{id} = (\cos b + i \sin b)(\cos d + i \sin d) = \cos(bd) + i \sin(bd) = e^{i(b+d)}$$

i la llei dels exponents es verificarà.

Per tant, atès el nombre complex $z = a + bi$, es defineix

$$\exp(z) = e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

I aleshores es comprova fàcilment que $e^z e^w = e^{z+w}$.

Altres propietats útils de l'exponencial complexa, derivades de la seva definició, són les següents:

- $e^z \neq 0$
- $e^{nz} = (e^z)^n$
- $e^{-z} = 1/e^z$
- $e^z/e^w = e^{z-w}$
- $e^{z+2\pi ki} = e^z$, novament la periodicitat: e^z és una funció periòdica de periodicitat 2πi.
- Si s'avalua la igualtat d'Euler en $b = \pi$ es té $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi$, o sigui, $e^{\pi i} + 1 = 0$. Vet aquí una igualtat molt singular, que relaciona quatre nombres importantíssims en matemàtiques.

Una darrera observació. Unes pàgines enrere, en presentar les sèries de Fourier s'ha dit que tenen l'aspecte següent:

$$Y_t = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \sin w_k t + b_k \cdot \cos w_k t$$

Ara bé, un cop refrescats els nombres complexos queda clar que podem usar la identitat d'Euler per a substituir el sinus i el cosinus per exponencials complexes, ja que:

$$\sin w_k t = \frac{e^{iw_k t} - e^{-iw_k t}}{2i}$$

$$\cos w_k t = \frac{e^{iw_k t} + e^{-iw_k t}}{2}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} Y_t &= \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \sin w_k t + b_k \cdot \cos w_k t \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \frac{e^{iw_k t} - e^{-iw_k t}}{2i} + b_k \cdot \frac{e^{iw_k t} + e^{-iw_k t}}{2} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{a_k}{2i} + \frac{b_k}{2}\right) \cdot e^{iw_k t} + \left(-\frac{a_k}{2i} + \frac{b_k}{2}\right) \cdot e^{-iw_k t} \\ &= \sum_{k=-N}^{N} c_n \cdot e^{iw_k t} \end{aligned}$$

Aquesta expressió final rep el nom de ***polinomi trigonomètric***, que és la forma normal de treballar amb les sèries de Fourier. El polinomi es defineix en termes d'una exponencial complexa, no de funcions trigonomètriques, però és tan periòdica com el sinus i el cosinus.

7. Característiques de les principals taxes de variació

Un cop superats els apartats 5 i 6 ens trobem en condicions de tornar al món de les taxes de variació, i als nostres dos problemes fonamentals: quin avançament o retard del fenòmen observat produeix cada tipus de taxa, i quina amplificació o esmorteïment?

En els apartats 1 a 4 les taxes s'han definit, interpretat i classificat des d'un punt de vista merament descriptiu, i s'ha presentat una notació compacta per a referir-s'hi. S'ha vist que de taxes de variació n'hi ha moltíssimes, i de quina manera es relacionen les unes amb les altres. Ara bé, també s'ha posat de manifest que cadascuna de les múltiples taxes de variació disponibles emet un senyal distint, tant pel que fa al *calendari* (és a dir, a la datació del moment en què es produeixen les coses), com pel que fa a la *intensitat* amb què recullen els fenòmens. Atès que una de les finalitats de l'anàlisi de conjuntura és datar fenòmens i mesurar la seva intensitat, genera certa perplexitat que taxes diferents generin interpretacions diferents de les coses. En els casos més simples, quan es comparen punts aïllats, això no presenta un gran inconvenient. Ningú no se sorprèn que en un mes concret coexisteixin una taxa interanual positiva (creixement) i una intermensual negativa (disminució), però en altres casos la intuïció no és tan directa.

Per tant, és oportú trobar un procediment general que permeti conèixer quins efectes produeix sobre les dades observades el càlcul de les diferents taxes de variació. Aquest procediment ja existeix, però per a entrar-hi cal pagar un peatge, cal una certa familiaritat amb la transformació lineal de les taxes (apartat 5) i amb la interpretació freqüencial de les sèries temporals (apartat 6), amb un èmfasi especial en la interpretació dels nombres complexos com a entitats periòdiques, que poden ser usades amb avantatges enfront de les funcions trigonomètriques.

Ja hem pagat aquest preu. Per tant, quines són les característiques de les principals taxes de variació? S'hi dedica la resta de pàgines.

Per començar a veure l'efecte que té sobre un moviment ondulatori prendre una taxa o una altra, podem estudiar l'exemple disponible a la pàgina 19 de Melis (1991), explicant els passos del raonament. Així, doncs, examinem què succeeix amb l'oscil·lació d'entrada $X_t = \cos wt$, on $w = \frac{2\pi}{P}$, quan se li aplica una primera diferència.

Atesa la fórmula d'Euler, no sorprendrà que l'estratègia per a estudiar l'efecte d'una primera diferència sobre el cosinus consisteixi a traslladar el problema cap a l'efecte de la primera diferència sobre les exponencials complexes e^{iwt} i e^{-iwt}. Al cap i a la fi, el cosinus es pot expressar com una combinació d'aquests dos elements.

Així, doncs, cal establir un **primer resultat preliminar** consistent a saber què passa amb e^{iwt} quan se li aplica una primera diferència —és a dir, la funció de transferència $(1-B)$:

$$\begin{aligned} H(B)e^{iwt} &= (1-B)e^{iwt} \\ &= e^{iwt} - e^{iw(t-1)} = e^{iwt} - e^{iwt}e^{-iw} = \left(1-e^{-iw}\right)e^{iwt} \\ &= \left[e^{-iw/2}\left(e^{iw/2} - e^{-iw/2}\right)\right]e^{iwt} = \left[e^{-iw/2}\left(2i\sin\left(\tfrac{w}{2}\right)\right)\right]e^{iwt} \\ &= \left[e^{-iw/2}\left(2e^{i\pi/2}\sin\left(\tfrac{w}{2}\right)\right)\right]e^{iwt} = \left[2\sin\left(\tfrac{w}{2}\right)e^{i(\pi/2-w/2)}\right]e^{iwt} \end{aligned}$$

Pel que fa a l'àlgebra usada en aquest raonament, l'única cosa remarcable és que en els passos sisè i setè hem usat la *fórmula d'Euler*, que lliga l'exponencial complexa $e^{i\alpha}$ amb les funcions trigonomètriques. És per això que apareix el sinus (pas sisè) i que canviem la unitat imaginària i per una exponencial complexa (pas setè). Observeu que l'expressió entre claudàtors no es altra cosa que un nombre complex expressat a la manera d'Euler, $me^{i\theta}$, on $m = 2\sin\frac{w}{2}$ i $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{w}{2}$. El claudàtor rep el nom de **funció de resposta de freqüència** i es denota per $H(w)$. En síntesi, doncs,

$$H(B)e^{iwt} = (1-B)e^{iwt} = \ldots = \left[2\sin\left(\frac{w}{2}\right)e^{i(\pi/2-w/2)}\right]e^{iwt} = H(w)e^{iwt}$$

En altres paraules, en filtrar e^{iwt} amb $H(B) = (1-B)$, o sigui, en prendre primeres diferències de l'exponencial complexa, s'obté un senyal que és *ell mateix* (o sigui, l'exponencial complexa original) multiplicat per un nombre complex (l'expressió dins del claudàtor).

Aquest nombre complex té un ***mòdul*** o ***funció de guany***, $G(w) = 2\sin\left(\frac{w}{2}\right)$, i un determinat ***angle***, ***argument*** o ***funció de fase***, $\varnothing(w) = (\pi/2 - w/2)$. La funció de fase, $\varnothing(w)$, dividida per la freqüència angular, w, s'anomena ***funció de desfasament***:

$$d(P) = \frac{\varnothing(w)}{w} = \frac{\pi/2 - w/2}{2\pi/p} = \frac{p-2}{4}$$

La *funció de guany* informa de quina amplificació o atenuació pateix el senyal d'entrada de freqüència w (en el nostre cas, e^{iwt}); la *funció de desfasament* indica el retard (signe –) o l'avançament (signe +) que experimenta la sortida respecte a l'entrada. Noteu que aquí *avançar* vol dir *produir-se amb anterioritat*, anar enrere en el temps, cap al passat, mentre que *retardar* vol dir anar cap a endavant, cap al futur.

El **segon resultat** preliminar és molt semblant: avaluem la primera diferència de e^{-iwt}, o sigui, de la mateixa exponencial complexa del resultat preliminar primer, però amb el signe canviat: el ***conjugat*** de e^{iwt}. La lògica és idèntica, i també la interpretació de l'expressió resultant:

$$\begin{aligned} H(B)e^{-iwt} &= (1-B)e^{-iwt} = e^{-iwt} - e^{-iw(t-1)} = e^{-iwt} - e^{-iwt}e^{iw} = (1-e^{iw})e^{-iwt} \\ &= \left[e^{iw/2}\left(e^{i(-w/2)} - e^{-i(-w/2)}\right)\right]e^{-iwt} = \left[e^{iw/2}\left(2i\sin\left(-\tfrac{w}{2}\right)\right)\right]e^{-iwt} \\ &= \left[e^{iw/2}\left(2e^{-i\pi/2}\left(-\sin\left(\tfrac{w}{2}\right)\right)\right)\right]e^{-iwt} = \left[2\sin\left(\tfrac{w}{2}\right)e^{i(w/2-\pi/2)}\right]e^{-iwt} \end{aligned}$$

Per analogia amb el cas anterior, en filtrar e^{-iwt} amb $H(B)=(1-B)$, o sigui, en prendre primeres diferències de l'exponencial complexa negativa, s'obté un senyal que és *ell mateix* (o sigui, l'exponencial complexa original) ajustat per un *mòdul* o *funció de guany*, $G(w)=2\sin\left(\frac{w}{2}\right)$ i pel seu *angle*, *argument* o *funció de fase*, $\varnothing(w)=(w/2-\pi/2)$. La *funció de desfasament* és:

$$d(P)=\frac{\varnothing(w)}{w} = \frac{w/2-\pi/2}{2\pi/p} = \frac{2-p}{4}$$

Tot és igual que a e^{iwt}, tret que les funcions de fase i desfasament estan canviades de signe.

Amb aquests dos resultats preliminars resulta senzill veure quina és la sortida, Y_t, que s'obté en prendre primeres diferències sobre l'entrada, $X_t=\cos wt$, perquè gràcies a l'equació (de fet, identitat) d'Euler sabem traduir nombres complexos en funcions trigonomètriques:

$$\begin{aligned} H(B)\cos wt &= (1-B)\frac{e^{iwt}+e^{-iwt}}{2} = (1-B)\frac{e^{iwt}}{2} + (1-B)\frac{e^{-iwt}}{2} \\ &= \sin\left(\tfrac{w}{2}\right)e^{i(wt+\pi/2-w/2)} + sen\left(\tfrac{w}{2}\right)e^{i(-wt-\pi/2+w/2)} \\ &= \sin\left(\tfrac{w}{2}\right)\left[e^{i(wt+\pi/2-w/2)} + e^{-i(wt+\pi/2-w/2)}\right] = 2\sin\left(\tfrac{w}{2}\right)\left[\cos(wt+\pi/2-w/2)\right] \\ &= 2\sin\left(\tfrac{\pi}{p}\right)\left[\cos(wt+\pi/2-w/2)\right] \end{aligned}$$

Ara només cal arreglar una mica el cosinus del claudàtor:

$$\begin{aligned} &\cos(wt+\pi/2-w/2)=\cos(2\pi t/p+\pi/2-\pi/p) \\ &=\cos((2\pi/p)(t+p/4-2/4))=\cos((2\pi/p)(t+\frac{p-2}{4})) \\ &=\cos((2\pi/p)(t+d(p))) \end{aligned}$$

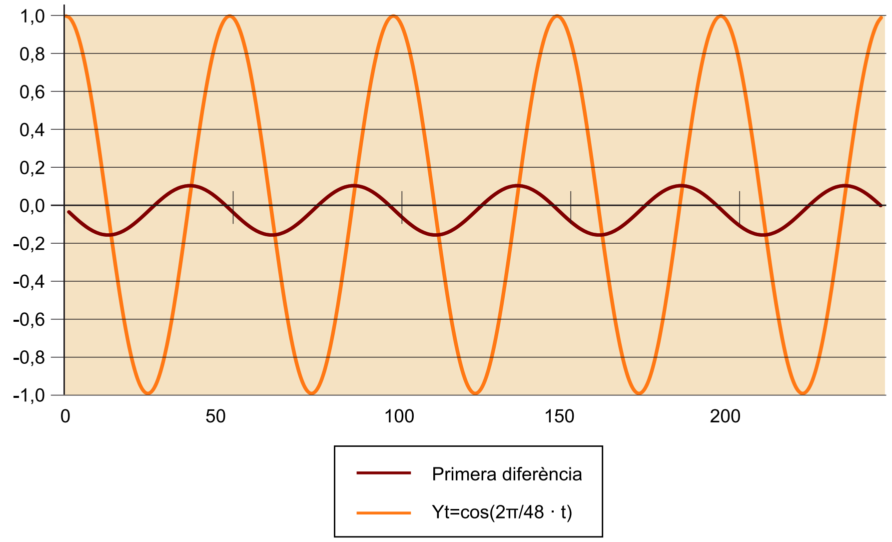
Per tant, tenim

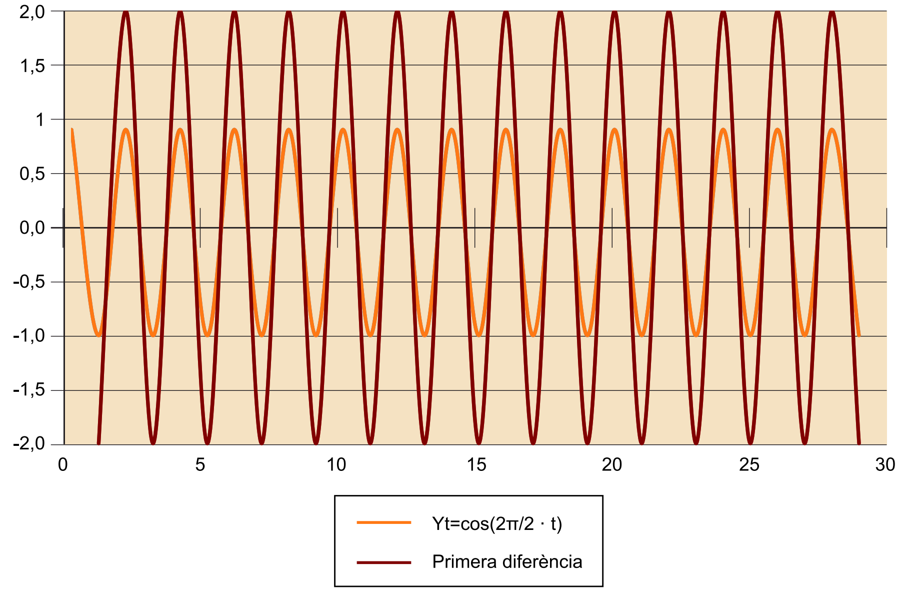
$$H(B) \quad \cos wt = 2\sin\left(\frac{\pi}{P}\right)\cos((2\pi / p)(t + d(p)))$$

És el resultat que presenta Melis (1991) a la pàgina 19. S'interpreta de la manera següent: si tenim un moviment ondulatori definit per un cosinus d'intensitat 1 i una periodicitat determinada (per exemple) p = 48 mesos, la sortida tindrà una intensitat de $2\sin\left(\frac{\pi}{48}\right) = 0,1308$ (el 13% de la intensitat d'entrada) i un avançament de $d(p) = \frac{48-2}{4} = 11{,}5$ mesos. Anàlogament, si la periodicitat del moviment ondulatori és de 2 mesos (o sigui, p = 2) la sortida tindrà intensitat 2 (serà el doble d'intensa que l'entrada), ja que $2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, i cap desfasament, $d(p) = \frac{2-2}{4} = 0$. No cal dir que les ones llargues (per exemple, P = 240) són fenòmens tendencials, les ones de periodicitat mitjana (posem per cas, P = 60, o P = 48) són fenòmens cíclics, i les ones curtes (com ara P = 2) són fenòmens molt conjunturals, molt de curt termini.

És a dir, si estem davant d'un cosinus d'ona llarga (p gran o freqüència petita) l'efecte de prendre una primera diferència és esmorteir el senyal $X_t = \cos wt$, encongir-lo i fer-lo irrellevant, alhora que el desplaça cap al passat, mentre que si l'ona és curta (p petit o freqüència gran) la primera diferència amplifica el senyal, el destaca i el fa més notori, i no el desplaça. *Sembla, doncs, que la informació que surt de la primera diferència no és sempre la mateixa. Depèn de la periodicitat de la sèrie sobre la qual s'aplica*. Si la primera diferència és una bona aproximació de la taxa de variació, el mateix que s'acaba de dir es podrà predicar de la taxa.

La comprovació és immediata: basta agafar les dues sèries, $Y_t = \cos\left(\frac{2\pi}{48}t\right)$ i $Y_t = \cos\left(\frac{2\pi}{2}t\right)$, aplicar *directament* sobre elles la primera diferència i dibuixar en un gràfic els valors originals i la primera diferència. El resultat reflecteix exactament les conclusions que s'acaben d'explicar:





Per això es diu que la primera diferència, $H(B)=(1-B)$, és un filtre que deixa passar (i amplifica) les freqüències altes, i elimina les baixes: un filtre ***passaalt***.

Fins aquí el raonament s'ha fet en termes de diferències, és a dir, en termes de funcions de transferència en les quals l'operador B entra restant. Les diferències són suficients per a aproximar les taxes de variació més elementals, les que comparen dos punts aïllats (mireu la taula 2). Ara bé, la taula 2 mostra que quan es comparen mitjanes mòbils de períodes (o sumes mòbils, només els diferencia un factor d'escala), cal introduir en la funció de transferència termes com ara $H(B)=(1+B)$. Cal introduir ***filtres sumadors***.

En aquest cas el raonament no canvia de forma substantiva respecte als filtres de diferències, però les conseqüències sí. Els filtres sumadors no es comporten com filtres *passaalt*, sinó que són filtres ***passabaix***: deixen passar (i amplifiquen) les freqüències baixes, i eliminen les freqüències altes. El resultat és normal i intuïtiu: tothom sap que calcular valors mitjans (i un filtre sumador no és altra cosa que el numerador d'una mitjana) *suavitza* les sèries, elimina els components més conjunturals, de freqüència alta, i emfasitza l'evolució més tendencial, de freqüència baixa.

Per analogia al cas dels filtres diferència, podem estudiar la funció de transferència del filtre sumador més senzilla possible, $H(B)=(1+B)$, quan s'aplica a l'exponencial complexa e^{iwt}:

$$\begin{aligned} H(B)e^{iwt} &= (1+B)e^{iwt} = e^{iwt} + e^{iw(t-1)} = e^{iwt} + e^{iwt}e^{-iw} = (1+e^{-iw})e^{iwt} \\ &= \left[e^{-iw/2}\left(e^{-iw/2} + e^{iw/2}\right)\right]e^{iwt} = \left[e^{-iw/2}\left(2\cos\left(\tfrac{w}{2}\right)\right)\right]e^{iwt} \end{aligned}$$

En filtrar e^{iwt} amb $H(B)=(1+B)$, o sigui, en sumar dos valors consecutius de l'exponencial complexa, s'obté un senyal que és *ell mateix* (o sigui, l'exponencial complexa original) ajustat per la *funció de guany* $G(w)=2\cos\left(\frac{w}{2}\right)$ i pel seu *argument* o *funció de fase*, $\varnothing(w) = -w/2$. Per tant, la funció de *desfasament,* o retard, és constant:

$$d(P) = \frac{\varnothing(w)}{w} = \frac{-w/2}{w} = \frac{-1}{2}$$

En el cas que el polinomi sumador sigui d'ordre superior, $H(B)=(1+B+\ldots+B^{m-1})$, la funció de guany és

$$G(w) = \frac{\sin\left(\frac{mw}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}$$

I la de desfasament

$$d(P) = \frac{\varnothing(w)}{w} = \frac{-(m-1)}{2}$$

En general, les mitjanes mòbils simètriques (o sigui, aquells per a les quals els coeficients del filtre verifiquen $a_j = a_{m-1-j}$) són filtres passabaix: només deixen passar (i amplifiquen) les freqüències baixes, i neutralitzen la resta. La ***banda de pas*** es defineix com aquella per a la qual

$$[G(w)]^2 > \frac{1}{2}$$

També és comú anomenar ***freqüència de potència meitat*** aquella per a la qual

$$[G(w)]^2 = \frac{1}{2}$$

És típic de les mitjanes mòbils simètriques de qualsevol ordre que presentin uns lòbuls (més grans o més petits segons l'ordre de la mitjana mòbil) en la zona de freqüències altes, que contaminen la sortida. També es caracteritzen pel fet que el guany decreix molt ràpidament dins de la banda de pas, cosa que les separa molt d'un filtre ideal, que hauria de tenir un guany constant i igual a 1 dins la banda de pas i un guany nul en la resta de freqüències.

Conegut el comportament de e^{iwt} tant quan se sotmet a un filtre (funció de transferència) diferenciador senzill $(1 - B)$ com a un sumador senzill $(1 + B)$, podem avançar un pas més i demanar-nos quins són el mòdul $G(w)$, la fase $\varnothing(w)$ i el desfasament temporal $d(P)$ d'altres filtres lineals més complicats, tant diferenciadors com sumadors, quan s'apliquen a la mateixa partícula elemental e^{iwt}.

1) Podem començar pels filtres més senzills, que són les diferències de diversos ordres: $1-B$ (ja vista), o $1-B^3$, o $1-B^6$, o $1-B^{12}$. Com sabem, aquests filtres lineals aplicats al logaritme de les dades aproximaran les taxes T_1^1, T_3^1, T_6^1 i T_{12}^1, respectivament. En les pàgines que segueixen són els casos numerats des de [1] fins a [4].

2) A continuació podem examinar un parell de filtres sumadors. Com que ja hem vist $(1 + B)$, podem anar directament a $(1 + B + B^2)$ i a $(1 + B + B^2 + ... + B^{12})$, les mitjanes mòbils trimestral i anual. No són els únics filtres sumadors imaginables, és clar, però amb aquests exemples bastarà. Són els casos designats amb els nombres [8] i [9]. La numeració manté l'ordre de presentació original de Melis (1991), per facilitar-ne la localització a l'estudiant que consulti aquell text.

3) També podem calcular el mòdul $G(w)$, la fase $\varnothing(w)$ i el desfasament temporal $d(P)$ de filtres lineals més complicats, que aproximin les taxes T_3^3 i T_{12}^{12}. Els denotem amb els nombres [5] i [6]. Són combinacions dels dos casos anteriors. En símbols, $(1-B^3)(1+B+B^2)$ i $(1-B^{12})(1+B+\ldots+B^{11})$, respectivament. Són filtres lineals que combinen una diferència amb una mitjana, aplicades primer una i després l'altra, en cascada. La mitjana mòbil del filtre sumador produeix un senyal suavitzat que després és recollit pel filtre diferenciador. Observeu que

$$(1-B^3)(1+B+B^2)=(1-B)(1+B+B^2)(1+B+B^2)=(1-B)(1+B+B^2)^2$$

Per tant, encadenar aquests filtres és com aplicar una primera diferència sobre una sèrie suavitzada dos cops.

Tots dos filtres, diferenciador i sumador, ja han estat estudiats per separat, i ara els volem aplicar de forma successiva. Fer-ho en el domini del temps obligaria a una operació de convolució, que en el domini de la freqüència és molt senzilla. En tot cas, la combinació d'un filtre passaalt amb un de passabaix té per resultat un filtre ***passabanda***, que deixa passar i accentua selectivament només un marge de freqüències determinat (bandes de pas) i elimina les freqüències que estan per sobre o per sota d'aquest marge.

4) Finalment, hi ha una alternativa a la combinació sumador-diferenciador del punt anterior. Les dades es poden suavitzar amb un filtre autoregressiu passabaix. Melis va proposar un filtre autoregressiu AR2(20) (cas [10]), combinat amb una taxa interanual T_{12}^{1}. D'això darrer, Melis en diu la *taxa interanual suavitzada,* TAS (cas [7]). Trobareu la TAS a la pàgina 36 de Melis (1991). La va proposar com a filtre alternatiu a T_{12}^{12}, i en el seu moment va tenir força ressò, perquè la TAS té propietats superiors a les de T_{12}^{12}. De tots dos filtres, AR2(20) i TAS, també és possible descriure el mòdul $G(w)$, la fase $\varnothing(w)$ i el desfasament temporal $d(P)$.

Trobareu un resum de les característiques de cada filtre a la pàgina 24 de Melis (1991), que adaptem aquí a la taula 3. De fet, l'estudi d'aquests quatre tipus de casos estructura el treball de Melis. Convé que entengueu la taula; és el nucli, el pinyol del seu treball. En el cas que no estigueu familiaritzats amb aquesta mena d'eines, convé que us entretingueu a reproduir en un full de càlcul les representacions gràfiques del mòdul, la fase i el desfasament temporal corresponents. Aquí les trobareu en les pàgines que segueixen a la taula 3. La ***lectura merament visual d'aquells gràfics*** explica de forma sistemàtica moltíssimes afirmacions que es fan sobre les característiques del filtre corresponent, i que si s'enuncien de forma aïllada presenten l'aparença d'una selva embullada de propietats, difícil d'entendre i impossible de retenir. Convé estudiar els gràfics, per tant, la seva forma, els seus punts de gir, els seus valors extrems, etc.

En aquest punt cal fer tres observacions importants:

- Primera, un filtre en cascada, format per l'aplicació successiva de diversos filtres de mitjanes mòbils més elementals, pot semblar una cosa força embolicada. En el domini del temps sí que ho pot ser, perquè ja s'ha dit abans que representar-lo obliga a una operació de convolució. Ara bé, en el domini de la freqüència la teoria de senyals ens ensenya que ***el filtre compost tindrà un mòdul format pel producte dels mòduls dels filtres-components. La fase del filtre compost és la suma de les fases dels filtres-components***. En el domini de la freqüència l'equivalent a la convolució és un simple producte de mòduls i una simple suma d'arguments de dos nombres complexos. Aquest és un resultat importat que hauria de presentar-se decentment, però per a les nostres finalitats n'hi ha prou a enunciar-lo. L'estudiant interessat a ampliar aquest punt pot llegir el text de Proakis i Manolakis citat a la bibliografia.

- Segona, hi ha dos tipus diferents de funcions de transferència:

– Aquelles que són simplement ***polinomis*** en B. Es denominen filtres de *mitjanes mòbils* (MA), *no recursius* o de *resposta finita*. Totes les funcions de transferència de la taula 2 són d'aquest tipus.

– Aquelles que són ***funcions racionals*** en B. Es denominen filtres *autoregressius* (AR, o ARMA si involucren també els del tipus primer), *recursius* o de *resposta infinita*. Quan Melis introdueix la TAS està usant un d'aquests filtres. La raó bàsica que té per a fer-ho és que el cost informatiu de les funcions racionals és menor que el dels menor filtres de mitjanes mòbils: exigeixen predir menys observacions.

- Tercera, la història de l'estudi de les propietats de les taxes és il·lustrativa de la manera com avancen a vegades les coses en ciència i tecnologia, i també en l'anàlisi de conjuntura. En començar la dècada de 1980 a *l'Instituto Nacional d'Estadística* (INE) no hi havia encara una comptabilitat trimestral ben establerta. De fet, el Banc d'Espanya s'havia avançat en aquest terreny; l'INE seguia més aviat una estratègia d'aplegar una multitud d'indicadors aïllats els uns dels altres al seu *Boletín trimestral de coyuntura*, i presentar-los de la millor manera possible. La millor manera possible era una estratègia ***tot de cop***, consistent a calcular per a la sèrie temporal de cada indicador un filtre dotat de bones propietats, que aproximés de forma senzilla les característiques cícliques de les sèries, i que fos prou general per tal de poder-lo aplicar a moltes, moltes sèries de forma sistemàtica. Es buscava la manera d'obtenir mecànicament el senyal cíclic de cada indicador per la via dels filtres, que són una mena de generalització de les taxes, sense usar models. Aquest era l'esperit del sistema d'indicadors cíclics que va tenir l'INE des de 1980 fins a (penso) 2005, moment en què es va deixar de publicar.

Aquesta observació tercera mereix algun comentari addicional. Posats a obtenir el component cíclic d'una sèrie qualsevol, l'analista de conjuntura té dues grans alternatives: filtrar per mitjà de taxes més o menys convencionals *algun dels components de la sèrie*, prèviament extret (idealment, el cicle), o usar filtres una mica més sofisticats (encara que d'aplicació molt senzilla) per atacar *directament la sèrie original*. La primera alternativa demana poder extraure els components de la sèrie original, Y_t, i després calcular alguna taxa de variació de cadascun d'ells. La segona alternativa, que correspon al ***tot de cop*** dels indicadors de l'INE, demana buscar algun filtre que, dotat d'unes propietats especials i aplicat a la sèrie original informi sobre la marxa del seu cicle. Si aquest filtre existeix podrem obtenir de manera senzilla una primera aproximació a la marxa del cicle. És un càlcul barroer? Per descomptat, aquest hipotètic filtre serà el mateix per a qualsevol sèrie que es vulgui estudiar, un artifici més o menys encertat però que s'aplica de manera idèntica a qualsevol sèrie. Això és tan exacte per a la T_1^1 com per a la *TAS*. A més, serà menys fi que extraure el cicle de la sèrie original i estudiar-lo. Ara, l'avantatge és que no cal preocupar-se d'extraure el cicle. D'altra banda, cal saber què necessita més prediccions: aplicar directament la taxa sobre la sèrie original o extraure el component i després aplicar la taxa.

En tot cas, l'estudi de les propietats de les taxes va ser molt fructífer. Va ser la via d'entrada d'un conjunt de tècnics capaços (Abad, Cristobal, Frutos, Melis, Quilis i d'altres) a l'estudi de la teoria de tractament de senyals, tan corrent en enginyeria però aleshores tan innovador en l'anàlisi de conjuntura. Si avui un estudiant se sent descoratjat en veure les complicacions dels treballs que es fan en conjuntura a partir de la teoria dels senyals, i el volum de la teoria mateixa, hi ha una bona notícia. Hom es va introduir en aquestes complicacions per mitjà de l'estudi de les taxes de variació, que com ja es pot anar sospitant, només fa un ús lleuger de la teoria d'extracció de senyals. Permeten familiaritzar-s'hi sense haver de suportar-ne de cop el pes. Les taxes són una introducció magnífica a la teoria de senyals. La cronologia dels treballs sembla, en això, força clara. L'estudi de les taxes de variació i dels filtres va animar alguns economistes a submergir-se en les complicacions (tan relacionades) de l'extracció de senyals.

Un cop descobert el camí de l'extracció de senyals, i instrumentalitzat el seu ús en programes d'ordinador (de forma destacada al Banc d'Espanya, amb *Tramo-Seats*, de Maravall i Gómez), es podia aplicar a a la desagregació temporal de sèries que proporciona la comptabilitat trimestral.

Una comptabilitat trimestral combinada amb una tècnica d'extracció de senyals és una eina d'utilitat molt superior a aplegar sense més un munt d'indicadors cíclics, té dos avantatges enormes. D'una banda, l'obtenció del cicle-tendència, o només el cicle, o només la tendència no depèn de cap taxa en particular, i es pot fer de manera més o menys automàtica però sèrie a sèrie. L'antiga pretensió del ***tot de cop*** es va dividir en dues etapes: primer, extraure el senyal d'interès; segon, aplicar-li la millor taxa possible.

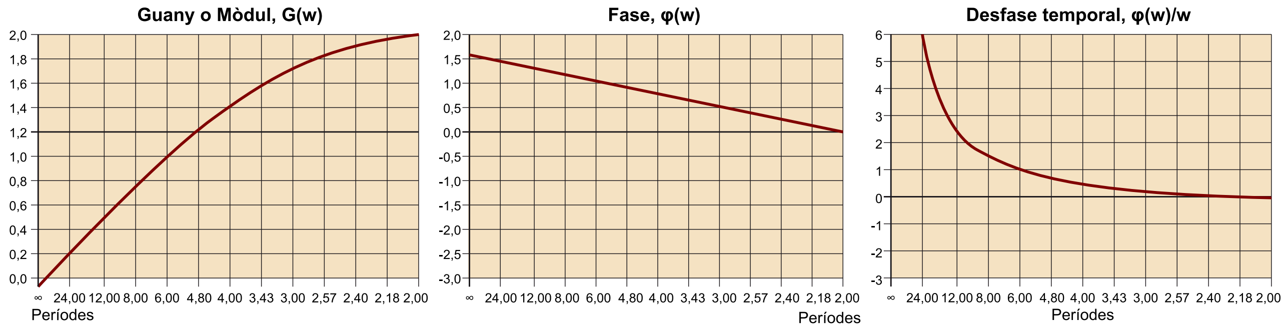
D'altra banda, la comptabilitat trimestral supera el mer amuntegament d'indicadors, en el sentit que dona un resum agregat, sintetitzat, de la marxa de l'economia i comparable amb el d'altres economies. Així, doncs, no és estrany que el sistema d'indicadors cíclics, que competia amb la comptabilitat trimestral, perdés rellevància i desaparegués com a producte estadístic. Va quedar com un instrument.

Taula 3. Mòdul, fase i desfasament temporal d'alguns filtres destacats

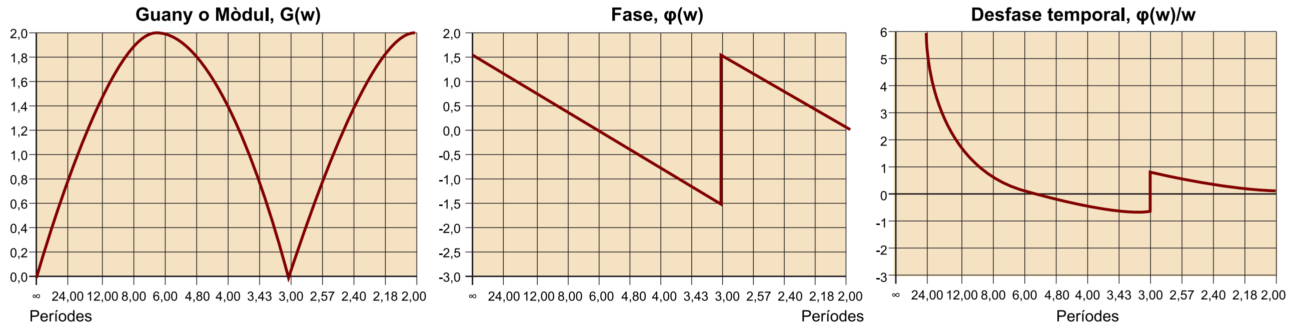
Filtre	Mòdul, G(w)	Períodes (T/k) de màxim guany	Fase, φ(w)	Desfasament, d(p)=φ(w)/w	Avançament [d(p)>0] o retard [d(p)<0] si l'oscil·lació té el període indicat (altres períodes són possibles)		
					P=48	P=24	P=12
[1] 1—B	$\left\|2sin\left(\frac{w}{2}\right)\right\|$	2	$\frac{\pi}{2}-\frac{w}{2}$	$\frac{P-2}{4}$	11.5	5.5	2.5
[2] $1—B^3$	$\left\|2sin\left(\frac{3w}{2}\right)\right\|$	6,2	$\frac{\pi}{2}-\frac{3w}{2}$	$\frac{P-6}{4}$	10.5	4.5	1.5
[3] $1—B^6$	$\left\|2sin\left(\frac{6w}{2}\right)\right\|$	12, 4, 2.4	$\frac{\pi}{2}-\frac{6w}{2}$	$\frac{P-12}{4}$	9	3	0
[4] $1—B^{12}$	$\left\|2sin\left(\frac{12w}{2}\right)\right\|$	24, 8, 4.8, 3.43, 2.67, 2.18	$\frac{\pi}{2}-\frac{12w}{2}$	$\frac{P-24}{4}$	6	0	-3
Cas general, $1—B^d$	$\left\|2sin\left(\frac{dw}{2}\right)\right\|$		$\frac{\pi}{2}-\frac{dw}{2}$	$\frac{P-2d}{4}$			
[8] $1+B+B^2 \equiv MM_3(B)$	$\left\|\frac{2sin\left(\frac{3w}{2}\right)}{3sin\left(\frac{w}{2}\right)}\right\|$	→∞	$\frac{-(3-1)w}{2}$	$\frac{-(3-1)}{2}$			
[9] $1+B+B^2+...+B^{12} \equiv P\ MM_{12}(B)$	$\left\|\frac{2sin\left(\frac{12w}{2}\right)}{12sin\left(\frac{w}{2}\right)}\right\|$	→∞	$\frac{-(12-1)w}{2}$	$\frac{-(3-12)}{2}$			
[5] $(1-B^3)(1+B+B^2) \equiv (1-B^3)\ MM_3(B)$	$\left\|\frac{2sin^2\left(\frac{3w}{2}\right)}{3sin\left(\frac{w}{2}\right)}\right\|$	8	$\frac{\pi}{2}-\frac{5w}{2}$	$\frac{P-10}{4}$	9.5	3.5	0.5
[6] $1-B^{12}$ $(1+B+...+B^{11}) \equiv$ $(1-B^{12})\ MM_{12}(B)$	$\left\|\frac{2sin^2\left(\frac{12w}{2}\right)}{12sin\left(\frac{w}{2}\right)}\right\|$	32	$\frac{\pi}{2}-\frac{23w}{2}$	$\frac{P-46}{4}$	0.5	-5.5	-8.5
[10] $AR2(20)$	$\sqrt{\frac{0.004791}{3.004791-4cosP+cos2P}}$	→∞,2	$atan2\left[\frac{-1.562957sinP+0.641306sin2P}{-1.562957cosP+0.641306cos2P}\right]$	φ(w)/w	Sempre retard, excepte en P=2 (en fase)		
[7] TAS: $T_{12}^{1}\ AR2(20)$	Per producte de les G(w) respectives	→∞,2	Per suma de les φ(w) respectives	φ(w)/w			

Font: Melis (1991), pàgina 24 i altres. Nota: l'avançament o retard suposen series mensuals; les xifres són mesos.

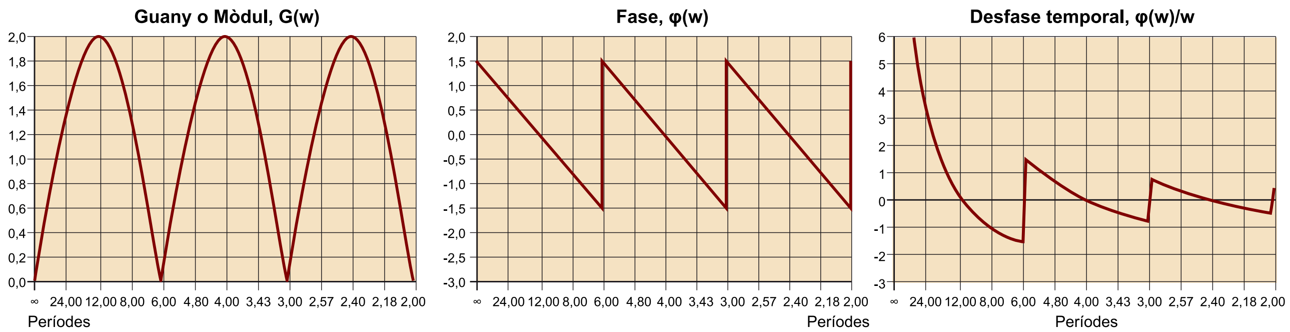
[1] $1 - B$, per aproximació a T_1^1



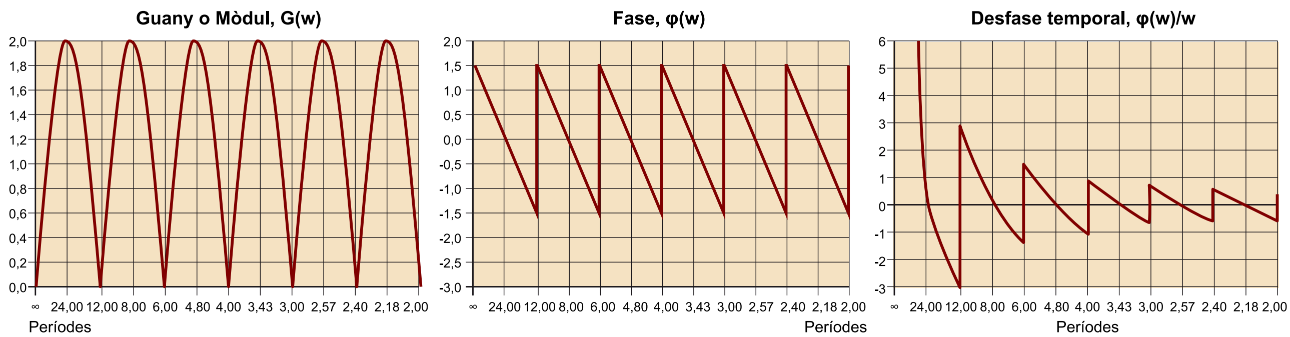
[2] $1 - B^3$, per aproximació a T_3^1



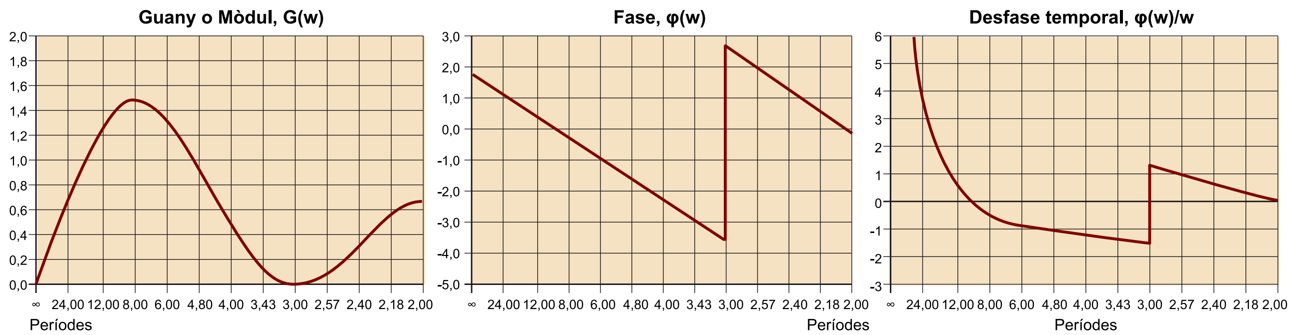
[3] $1 - B^6$, per aproximació a T_6^1



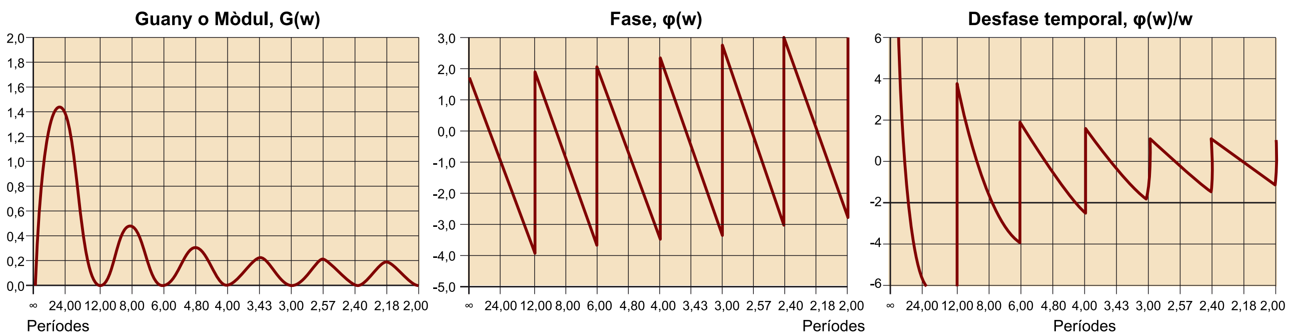
[4] $1 - B^{12}$, per aproximació a T_{12}^1



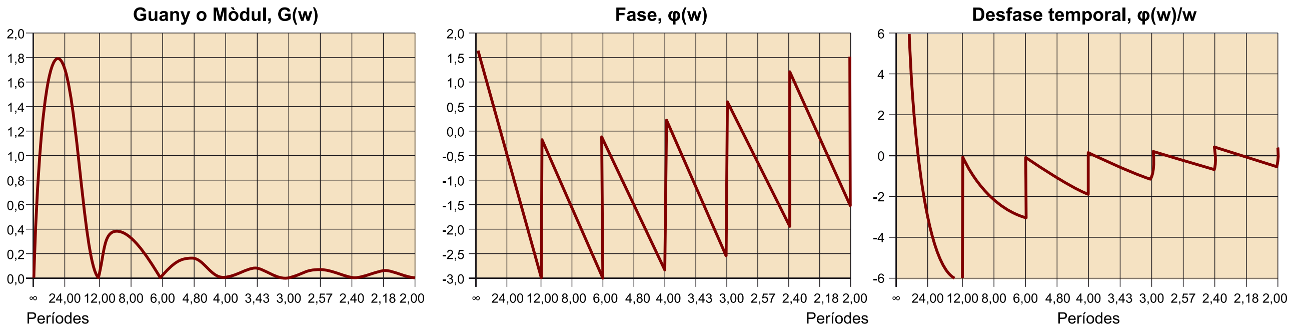
[5] $(1 - B^3)(1 + B + B^2)$, per aproximació a T_3^3



[6] $(1 - \mathrm{B}^{12})(1 + B +\ldots + B^{11})$, per aproximació a T_{12}^{12}

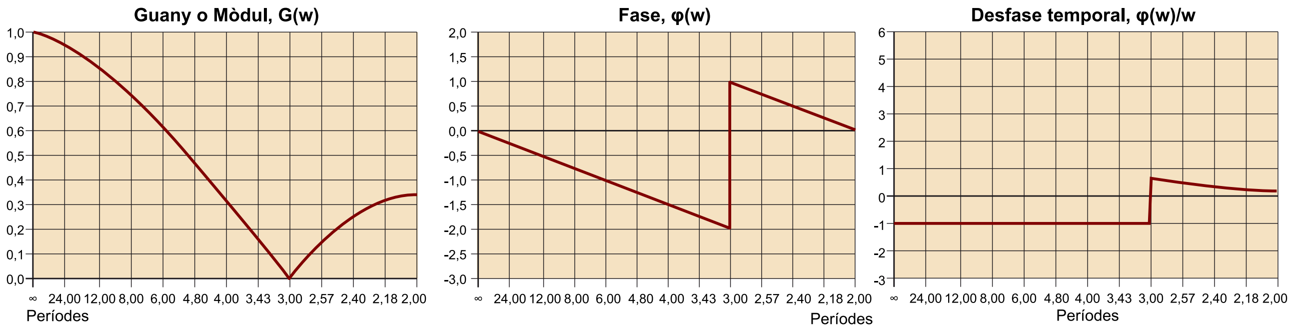


[7] $(1 - B^{12})\cdot$AR2(20), per aproximació a $T_{12}^{1}\cdot$AR2(20). Taxa interanual suavitzada (*TAS*)



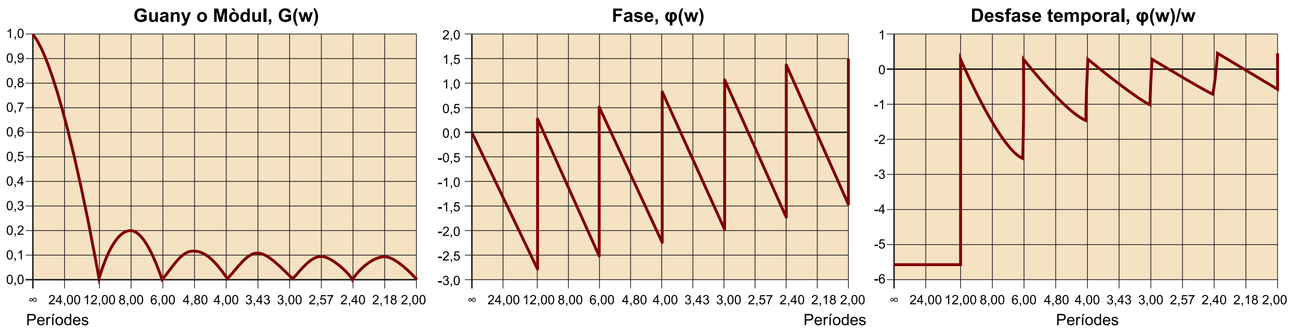
Nota: *20* indica que el filtre té potència meitat en 20 mesos; *2* indica el grau del polinomi del denominador.

[8] $1 + B + B^2$, o $MM_3(6,4)$



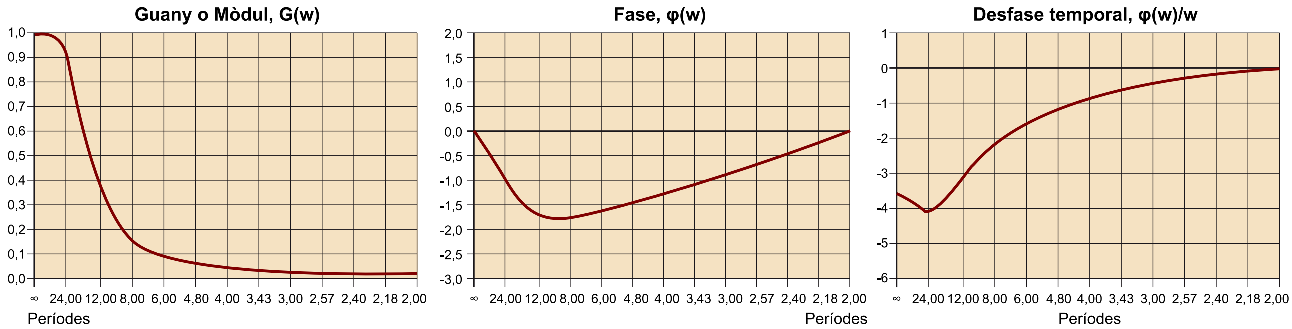
Nota: 6,4 indica la banda de pas.

[9] $1 + B + \ldots + B^{12}$, o $MM_{12}(27)$



Nota: 27 indica la banda de pas.

[10] AR2(20)



Nota: *20* indica que el filtre té potència meitat en 20 mesos; *2* indica el grau del polinomi del denominador.

7.1. Comentaris suggerits per la taula 3 i els gràfics corresponents

La taula 3 resumeix les característiques de cadascun dels deu filtres estudiats a Melis (1991). Els gràfics simplement dibuixen les expressions corresponents. La mera observació visual de cada gràfic proporciona un resum de les propietats de cada filtre (i, en conseqüència, de la taxa associada).

Observeu l'eix horitzontal dels gràfics: presenta una escala invertida, els valors més alts estan a tocar de l'origen. En principi, l'eix horitzontal pot estar expressat indistintament en freqüències (k/T) o en períodes (T/k) de l'oscil·lació d'entrada, i en el primer cas poden ser freqüències rotacionals (k/T) o angulars ($2\pi k/T$). En el nostre cas hi ha representats períodes, T/k, que potser són més intuïtius (es llegeixen en unitats de temps).

L'eix d'abscisses acaba en 2 perquè quan es treballa amb taxes les oscil·lacions de període menor a 2 unitats de temps no són observables. Amb dades mensuals serien no observables els cicles intrasetmanals, dits de *trading day*: cicles molt ràpids, d'altíssima freqüència. En tot cas, les oscil·lacions de període baix (les que passen cada poques unitats de temps) se situen *cap a la dreta del gràfic*. Recíprocament, l'eix d'abscisses comença a ∞, cosa que indica que les oscil·lacions de període molt llarg, molt lentes, que recullen efectes tendencials, estan a l'esquerra del gràfic. Per concretar, si se suposen sèries mensuals, les freqüències estacionals són múltiples de $2\pi k/_{12}$, amb $k = 1,2,\ldots6$, i per tant els harmònics estacionals estan en els períodes $12/_{k}$, $k = 1,2\ldots6$. Es a dir: ***són estacionals els harmònics 12, 6, 4, 3, 2.4 i 2***. Tots ells estan representats en els gràfics. Naturalment, en el cas de sèries quinzenals, bimestrals, trimestrals... els períodes serien uns altres, però amb una sèrie mensual es comprova que el període estacional és 12 en tots els casos: 1·12 = 12, 2·6 = 12, 3·4 = 12, 4·3 = 12, 5·2,4 = 12, 6·2 = 12. Una altra manera de veure els períodes estacionals és comprovar que no hi ha cap altre valor, fora dels indicats, per al qual $k{\cdot}T_k$ = 12. Naturalment 24·0,5 = 12, però els fenòmens que es produeixen amb periodicitat menor a 2 unitats de temps (en particular, cada 0,5 unitat de temps) no són observables. Són oscil·lacions massa ràpides en un mostreig fet cada 1 unitat de temps.

L'assumpte de les oscil·lacions ràpides presenta un segon problema, a més del fet que no són observables: el seu efecte es confon amb les freqüències dites *àlies*, que sí que són observables. La coincidència en una mateixa freqüència visible de dos fenòmens de freqüència distinta contamina la freqüència visible, l'*àlies*.

Per exemple, suposem el mostreig *mensual* d'un fenomen que presenta cicles *setmanals*. Sabem que un mes estàndard té 4,3482 setmanes:

$$\frac{365{,}25 \text{ dies}}{1 \text{ any}} \cdot \frac{1 \text{ any}}{12 \text{ mesos}} \cdot \frac{1 \text{ setmana}}{7 \text{ dies}} = 4{,}3482 \frac{\text{setmanes}}{\text{mes}}$$

Per tant, segons s'explica a la pàgina 316 de Melis (1992):

$$\frac{2}{P} = \frac{2}{1/4{,}3482} = 8{,}696429$$

Per això, amb dades mensuals el període contaminat per l'efecte de l'*aliasing* és el següent:

$$P_a = \frac{2}{8{,}696429 - 8} = 2{,}871795 \text{ mesos}$$

L'*aliasing* es produeix per un problema de mostreig. La solució per a evitar-lo és (en teoria) senzilla: basta mostrejar el fenomen amb una freqüència superior a dos cops la freqüència màxima que presenta el fenomen (*teorema del mostreig*). Aleshores es pot recuperar exactament el senyal a partir dels valors de la mostra. Ara bé, aquesta solució pot ser més o menys realitzable quan el fenomen involucra dispositius mecànics o electrònics propis de l'enginyeria, però pot ser molt enutjosa en economia. No sé quin seria el cost d'estimar un índex de producció industrial diari.

Finalment, estem en condicions de llegir la taula 3 de filtres destacats i els gràfics associats. Ho farem cas per cas, seguint Melis (1991).

[1] 1 – *B*, per aproximació a T_1^1

a) El gràfic de la funció de guany mostra que totes les oscil·lacions de periodicitat inferior a 6 unitats de temps (freqüències altes, per tant) queden amplificades per la primera diferència. Observeu al gràfic que $G(w) > 1$ a partir de $P = 6$. Les oscil·lacions de periodicitat superior a 6 queden esmorteïdes, o anul·lades si presenten periodicitats realment grans. Per això, un truc típic per a convertir una sèrie en estacionària (eliminar la tendència) és prendre una primera diferència.

b) La característica anterior explica per quina raó la primera diferència de la majoria de les sèries (tret que siguin molt, molt suaus) presenta un aspecte erràtic. Per tant, la primera diferència se sol aplicar només a sèries prèviament suavitzades amb mitjanes mòbils d'una longitud o altra.

c) La primera diferència presenta una funció de fase lineal, decreixent i positiva per a qualsevol període superior a 2, i nul·la per a $P = 2$. Per tant, la primera diferència *avança* qualsevol oscil·lació de la sèrie original, excepte la de $P = 2$, que no es veu traslladada en el temps. *Avança* vol dir que en el filtre succeeix abans que en la sèrie original, que es produeix primer en el temps. En un gràfic temporal, els punts extrems de la primera diferència *estan a l'esquerra* dels punts extrems de la sèrie original. Quant a l'esquerra? Això ho diu la funció de desfasament, que no és lineal. El desfasament és variable, depèn de la periodicitat: *hi ha més avançament com més gran és la periodicitat*, ja que com diu la taula 3, el desfasament és $\frac{P-2}{4}$. Si l'oscil·lació té un període de 60 mesos, l'avançament serà de $\frac{60-2}{4} = 14{,}5$ mesos (tan gran que queda fora de l'escala del gràfic); si el té de 12 mesos l'avançament serà de $\frac{12-2}{4} = 2{,}5$ mesos, etc. Les tres darreres columnes de la taula 3 mostren exemples d'avançaments per a diverses periodicitats típiques.

[2] 1 – B^3, per aproximació a T_3^1

a) Aquesta diferència s'obté per producte d'una primera diferència multiplicada per un suavitzador que és una mitjana mòbil de tres termes: $(1-B^3) = (1-B)(1+B+B^2)$. El resultat és un filtre passabanda que accentua les oscil·lacions situades entre 3,6 i 18 mesos: $G(w) > 1$ entre aquests límits, que estan determinats a ull, a la vista del gràfic, ja que si algun interès tenen els gràfics és precisament el seu valor orientatiu. Les oscil·lacions de periodicitat $P = 6$ i $P = 2$ mesos s'amplifiquen de la mateixa manera ($G(w) = 2$). Observeu (ja és casualitat!) que totes dues són freqüències estacionals. Per tant, només té sentit aplicar aquest filtre sobre sèries desestacionalitzades.

b) La funció de fase és tan lineal i decreixent com en el cas anterior. Ara bé, presenta una discontinuïtat, un trencament en els períodes on la funció de guany s'anul·la (o sigui, en el zero de la funció de guany). Això és així a causa de la definició de la fase:

$$\varnothing(w) = \text{Arg}[H(w)] = \text{atan2}\left[\frac{H_{\text{Imaginària}}(w)}{H_{\text{Real}}(w)}\right]$$

$H_{\text{Imaginària}}(w)$ i $H_{Real}(w)$ són la part real i imaginària de $H(w)$, i *atan2* denota l'arctangent, definit de forma que conservi els signes. *Atan2* és la notació que usa Excel, per exemple, per calcular d'aquesta manera l'arctangent.

[3] 1 – B^6, per aproximació a T_6^1

a) És un cas similar a l'anterior. El filtre s'obté per producte d'una primera diferència multiplicada per un suavitzador, una mitjana mòbil de sis termes: $(1-B^6)=(1-B)(1+B+\ldots+B^5)$. El resultat és un filtre passabanda que accentua al màxim ($G(w) = 2$) les oscil·lacions de 2,40, 4 i 12 mesos, que (ja és casualitat!) tornen a ser freqüències estacionals. Per tant, només té sentit aplicar aquest filtre sobre sèries desestacionalitzades. S'observa que el nombre de lòbuls de $G(w)$ va creixent: mig lòbul en el primer cas, un i mig en el segon cas, tres lòbuls en aquest que ens ocupa ara.

b) Pel que fa a les funcions de fase i desfasament temporal s'aplica el mateix que s'ha dit en els casos anteriors: són lineals, amb discontinuïtats en els zeros de $G(w)$. Observeu que un filtre diferenciador d'ordre d deixa en fase les oscil·lacions de periodicitat $2d$ (en aquest exemple, P = 12).

[4] 1 – B^{12}, per aproximació a T_{12}^1

a) Novament és un cas del producte habitual, encara més llarg: $(1-B^{12})=(1-B)(1+B+\ldots+B^{11})$. La diferència interanual és estacional i, en conseqüència el seu gràfic de guany s'anul·la precisament en tots els períodes estacionals. Aquest resultat lliga amb la intuïció: comparar observacions de períodes idèntics d'anys consecutius té un efecte desestacionalitzador. Si s'aplica el filtre a una sèrie no desestacionalitzada elimina l'efecte dels períodes estacionals –que ningú no es confongui: suposant que el senyal d'entrada sigui determinístic, del tipus e^{iwt}, i no presenti cap altre component. La diferència estacional no és cap mecanisme de desestacionalització.

b) La funció de guany mostra de seguida dos problemes d'aquest filtre:

- Accentua el cicle setmanal, quan és present (té un màxim en 2,67, molt a prop de 2,87).

- És veritat que accentua les bandes cícliques (la funció de guany és més gran que 1 entre els períodes 72 i 14,4, que són períodes cíclics, superiors a l'any i inferiors als sis anys), i això resulta molt convenient. Ara bé, en contrapartida també accentua moltes bandes de curt termini (8, 4,8, 3,43, 2,67, 2,18), que tendeixen a contaminar l'anàlisi.

c) Pel que fa a les funcions de fase i desfasament temporal torna a ser d'aplicació el que ja s'ha dit en els casos anteriors. Així, doncs, amb dades mensuals la diferència estacional es produeix amb retard en el cas de periodicitats situades entre P = 12 i P = 24 mesos. També s'observa que a partir de P = 12 la diferència estacional està menys avançada que la primera diferència en 5,5 mesos (resteu les funcions de desfasament temporal per a comprovar-ho). Ras i curt, si es posen en un mateix gràfic taxes interanuals, T_{12}^1, i intermensuals, T_1^1, hi ha un determinat risc de confusió només pel desfasament entre les dues taxes. Caldrà posar-les en sincronia, ja sigui avançant la interanual 5,5 mesos o retardant la intermensual 5,5 mesos. Una de les dues s'ha de prendre com a referència. En opinió de Melis (1991), la interanual; en opinió d'Espasa (1993), la intermensual.

Cal notar que els quatre primers filtres diferenciadors vistos fins aquí tenen una estructura idèntica: una primera diferència multiplicada per un polinomi sumador més o menys curt (un sol terme en el primer cas) o llarg (dotze termes en el quart cas). De fet, res no impedeix aplicar a tots en bloc una generalització del raonament vist unes pàgines enrere:

$$\begin{aligned} H(B)e^{iwt} &= (1-B^d)e^{iwt} = e^{iwt} - e^{iw(t-d)} = e^{iwt} - e^{iwt}e^{-idw} = (1-e^{-idw})e^{iwt} \\ &= \left[e^{-idw/2}\left(e^{idw/2} - e^{-idw/2}\right)\right]e^{iwt} = \left[e^{-idw/2}\left(2i\sin\left(\tfrac{dw}{2}\right)\right)\right]e^{iwt} \\ &= \left[e^{-idw/2}\left(2e^{i\pi/2}\sin\left(\tfrac{dw}{2}\right)\right)\right]e^{iwt} = \left[2\sin\left(\tfrac{dw}{2}\right)e^{i(\pi/2-dw/2)}\right]e^{iwt} \end{aligned}$$

Aquest complex té un ***mòdul*** o ***funció de guany***, $G(w) = 2\sin\left(\frac{dw}{2}\right)$, i un determinat ***angle***, o ***argument***, o ***funció de fase***, $\varnothing(w) = (\pi/2 - dw/2)$. La $\varnothing(w)$ ***funció de desfasament*** és:

$$d(P) = \frac{\varnothing(w)}{w} = \frac{\pi/2 - \quad dw/2}{2\pi/p} = \frac{p-2d}{4}$$

Poseu en comptes de d el valor que preferiu i tindreu la particularització desitjada: els quatre casos vistos o uns altres qualssevol.

[8] 1 + *B* + *B*^{2}, o MM$_3$(6,4)

Nota

6,4 indica la banda de pas.

a) Ja s'ha dit que les mitjanes mòbils simètriques preserven les baixes freqüències (són filtres passabaix), i que presenten uns lòbuls (més grans o més petits segons l'ordre de la mitjana mòbil) en la zona de freqüències altes, que contaminen la sortida. El gràfic de $G(w)$ mostra clarament això segon: mig lòbul en aquesta mitjana mòbil; cinc lòbuls sencers en la mitjana mòbil següent, $MM_{12}(27)$.

b) La seva ***banda de pas*** (aquella periodicitat per a la qual $[G(w)]^2 > \frac{1}{2} \rightarrow G(w) > \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}70711$) se situa en 6,44 mesos, tal com es pot comprovar visualment en el gràfic de la funció de guany.

c) Les mitjanes mòbils tenen una funció de fase lineal i d'ordenada nul·la en l'origen, que presenta discontinuïtats en els períodes que són zeros de la funció de guany. El desfasament temporal és constant i negatiu dins del rang del primer lòbul. En general el seu valor és $d(p) = \frac{-(m-1)}{2}$, on m és la mida del filtre.

[9] $1 + B + B^2 + \ldots + B^{12}$, o $MM_{12}(27)$

Nota

27 indica la banda de pas.

a) És el filtre més elemental per a obtenir el senyal de cicle-tendència, atès que elimina totes les periodicitats estacionals. Seguint el raonament del filtre anterior la seva banda de pas se situa en 27 unitats de temps. Presenta cinc lòbuls laterals que contaminen el senyal emès.

b) Quant a les funcions de fase i desfasament, val el mateix que s'ha dit en el cas anterior.

[5] $(1\text{-}B^3)(1 + B + B^2)$, per aproximació a$T_3^3$

a) És un filtre passabanda. La seva funció de guany s'obté per producte de les funcions de guany dels filtres-components. Mostra que només accentua ($G(W) > 1$) els períodes situats a l'entorn de 8 mesos (posem, a ull, entre 5 i 17 mesos), cosa que deixa fora gairebé totes les freqüències cícliques. Pot produir un cicle espuri, un senyal fals, en oscil·lacions de període 2, com passava amb el filtre $1 - B^3$.

b) Com totes les funcions de fase vistes fins aquí, la d'aquest filtre és lineal i decreixent, amb una discontinuïtat en els zeros de $G(w)$.

[6] $(1\text{-}B^{12})(1 + B + \ldots + B^{11})$, per aproximació a$T_{12}^{12}$

a) També és un filtre passabanda. Està construït aplicant a la diferència estacional (que accentua la banda cíclica i alhora desestacionalitza) un filtre de mitjana mòbil que elimina els cinc lòbuls no desitjats. De tota manera, l'eliminació no és gaire completa, raó per la qual en general s'aconsella aplicar aquest filtre sobre sèries desestacionalitzades (Espasa, 1993, cap. 5).

b) La funció de guany del filtre s'obté per producte de les funcions de guany dels filtres-components. Només accentua ($G(W) > 1$) els períodes cíclics, en aquest cas qualsevol oscil·lació entre 20,4 mesos i 68 mesos (uns cinc anys i mig). Pràcticament elimina la resta de períodes, especialment els estacionals. Presenta un guany màxim d'1,45, corresponent a oscil·lacions de període de 32 mesos.

[10] AR2(20)

> **Nota**
>
> *20* indica que el filtre té potència meitat en 20 mesos; *2* indica el grau del polinomi del denominador.

a) Aquest filtre va ser presentat per Melis l'any 1983 (vegeu les referències) i més tard va ser incorporat com a part constituent de la TAS. És un filtre ***autoregressiu***, una paraula amb la qual es vol indicar que la variable *Y* depèn dels valors que ha pres ella mateixa (*auto-*) en el passat (*-regressiu*). En aquest sentit és força diferent dels filtres vistos fins ara. Es presenta de la manera següent:

$$Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} = b_0 X_{t+d}$$

on d és el desfasament en la banda de pas (d = 3 o d = 4). Melis proposa prendre els valors inicials

$$Y_1 = Y_2 = \sum_{i=1}^{24} \frac{X_t}{24}$$

Expressat en termes de la funció de transferència, *H(B)*, el filtre s'escriu:

$$Y_t = \left[\frac{b_0}{1 + a_1 B + a_2 B^2}\right] X_{t+d} = H(B) X_{t+d}$$

b) Melis no explicita el mòdul ni l'argument d'aquest AR2(20), però serien així:

$$H(w) = \frac{b_0}{1 + a_1 e^{-iw} + a_2 e^{-i2w}}$$

I atès que

$$\begin{aligned} 1 + a_1 e^{-iw} + a_2 e^{-i2w} &= [1 + a_1 \cos w + a_2 \cos 2w] - i[1 + a_1 \sin w + a_2 \sin 2w] \\ &= H_{\text{Real}}(w) - iH_{\text{Imaginària}}(w) \end{aligned}$$

es té que

$$|H(w)| = \frac{|b_0|}{|1 + a_1 e^{-iw} + a_2 e^{-i2w}|}$$

$$= \frac{b_0}{\sqrt{[1 + a_1 \cos w + a_2 \cos 2w]^2 + [1 + a_1 \sin w + a_2 \sin 2w]^2}}$$

$$\arg H(w) = -\tan^{-1}\left[\frac{H_{\text{Imaginària}}(w)}{H_{\text{Real}}(w)}\right]$$

c) A la pàgina 35 de Melis (1991) s'especifiquen els valors següents per als paràmetres: b_0 = 0,07839, a_1 = −1,56291, a_2 = 0,641306, però no s'explica com s'obtenen. A més, Melis (1991) tampoc explicita enlloc quins han de ser els valors dels paràmetres de $|H(w)|$, necessaris per a la gràfica de la funció de guany.

Aquest segon punt no és complicat des del punt de vista material del càlcul. El resultat són els paràmetres de *G(w)* que es poden veure a la penúltima fila de la taula 3. Amb aquests valors és com s'ha representat la *G(w)* corresponent a l'*AR(2)20*. En síntesi, cal obtenir els paràmetres que caracteritzen el mòdul d'un filtre Butterworth passabaix (en honor d'Stephen Butterworth, 1885-1958) de freqüència de tall $w_c = \frac{2\pi}{20}$. La periodicitat 20 la fixa Melis de forma convencional; en triar-la descarta les freqüències estacionals i deixa les pròpies del cicle i de la tendència. L'estudiant interessat ha de consultar la primera expressió de la pàgina 63 de Melis (1983). Allà trobarà que

$$|H_1(w)|^2 = \frac{8A^4}{C_0 + C_1\cos w + C_2\cos 2w}$$

en què $A = \sin w_c$ i $C_0 = 8A^4 + 3, \;\; C_1 = -4, \;\; C_2 = 1$

Substituint i calculant es té $G(w)$.

Quant als paràmetres del filtre, en la mateixa pàgina 63 de Melis (1983) trobarà que s'obtenen a partir de resoldre el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 = (a_0 + a_1 + a_2)^2 = 8A^4 \\ C_0 - C_1 + C_2 = (a_0 - a_1 + a_2)^2 = 8(A^4 - 1) \\ a_0 a_2 = 1/2 \end{cases}$$

És a dir,

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = \sqrt{8}\,A^2 \\ a_0 - a_1 + a_2 = \sqrt{8}\sqrt{A^4 + 1} \\ a_0 = 1/2a_2 \end{cases}$$

Per tant,

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \sqrt{8}\,A^2 - 1/2a_2 \\ -a_1 + a_2 = \sqrt{8}\sqrt{A^4 + 1} - 1/2a_2 \end{cases}$$

Sumant les equacions,

$$2a_2 = \sqrt{8}A^2 - 2\big/ 2a_2 + \sqrt{8}\sqrt{A^4+1}$$

Reordenant,

$$2a_2^2 - \left[\sqrt{8}A^2 + \sqrt{8}\sqrt{A^4+1}\right]a_2 + 1 = 0$$

$$2a_2^2 - 2{,}898490461a_2 + 1 = 0$$

Aquesta equació té dues solucions reals en a_2, una de les quals és:

$$a_2 = \frac{-2{,}898490461 - \sqrt{2{,}898490461^2 - 4\cdot 2\cdot 1}}{4}$$

De la solució a l'equació de segon grau, Melis usa la corresponent al terme negatiu. Amb el terme positiu surt un altre joc de coeficients; en els dos jocs, el coeficient a_1 és el mateix (abans de normalitzar, s'entén).

En tot cas, $a_2 = 0{,}566262473$

I per això $a_1 = \sqrt{8}A^2 - 1\big/2a_2 - a_2 = -1{,}38002869$, i

$$a_0 = \frac{1}{2\cdot 0{,}566262473} = 0{,}8829827572$$

En normalitzar pel paràmetre a_0 es tenen els valors que dóna Melis a la seva pàgina 35:

$$a_0 = 1,\quad a_1 = -1{,}56291692,\quad a_2 = 0{,}6413063774$$

El valor de b_0 es fixa de manera que $|H_1(0)|^2 = 1$, és a dir:

$$b_0 = 1 - 1{,}56291692 + 0{,}6413063774 = 0{,}078389457$$

d) El filtre [9], $MM_{12}(27)$ desestacionalitza millor que $AR2(20)$, però la banda de pas d'aquest té una forma més propera a la ideal, no té lòbuls laterals i (sobretot) usa moltíssims menys paràmetres.

[7] (1 – B^{12})·AR2(20), per aproximació aT^1_{12}· AR2(20). Taxa interanual suavitzada (TAS)

a) Aquest filtre és el més sofisticat que es detalla a Melis (1991). El va dissenyar ell mateix uns anys abans, el 1984. Consisteix a aplicar una diferència estacional a l'*AR2*(20). Es va utilitzar durant anys al *Boletín trimestral de coyuntura* de l'INE. Està pensat per a ser aplicat sobre la sèrie original.

Nota

20 indica que el filtre té potència meitat en 20 mesos; *2* indica el grau del polinomi del denominador.

b) Les seves propietats són millors que les de [6], amb qui competeix directament. En comparar les funcions de guany dels dos filtres es veu que la TAS presenta un guany superior (1,74), situat en les oscil·lacions de període de 29 mesos (més ajustats als dos anys que els 32 de [6]), una banda de guany més ampla [$(G(w) > 1$ entre 72 i 17,4 mesos], redueix els lòbuls i presenta un menor cost informatiu (menor desfasament).

Ara bé, al final les propietats de la TAS no van poder amb la popularitat i la força que donen la simplicitat intuïtiva de T_{12}^{12}. Per a la TAS l'artificiositat va ser un llast notable, malgrat que el *Boletín trimestral de coyuntura* de l'INE la va usar durant molts anys.

c) Hi ha altres filtres competidors de la TAS i de T_{12}^{12}, en el sentit que tenen un cost d'informació més baix que T_{12}^{12} i un guany superior. El mateix Melis proposa l'alternativa $(1 - B^{12})\cdot AR4(12)$, per exemple.

* * *

Una observació sobre quines són les freqüències cícliques

Al llarg d'aquestes pàgines s'ha parlat de *fenòmens cíclics* i de *freqüències cícliques* amb una imprecisió notable sobre quina és la seva durada. El lector ha d'entendre que aquesta vaguetat és disculpable. Mentre que tothom entén que els fenòmens estacionals es produeixen dins d'un any, ningú no té una idea teòrica molt concreta sobre quant de temps dura un cicle, ni de quan un cicle deixa de ser un cicle i passa a ser tendència. Decidir-ho és un assumpte sobretot empíric, que depèn de les dades disponibles, del nivell d'agregació sectorial considerat i de la percepció subjectiva de quin és el període temporal que interessa estudiar per a l'anàlisi (o que, per altres raons, és el període que cal considerar, perquè no volem anar més enllà). Hi ha tres problemes per a determinar què és el *mitjà termini* que representen els cicles:

- Les sèries són curtes (100 oscil·lacions de 4 anys necessiten 400 anys), i si fossin prou llargues potser no tindrien sentit.

- El cicle econòmic no està associat amb una banda de freqüències única, sinó força àmplia.

- Es confon fàcilment amb la tendència (encara que el cicle és un fenomen estacionari i la freqüència no), perquè tant cicle com tendència estan associats amb les baixes freqüències.

En termes generals, Melis (1991) diu que són fenòmens cíclics aquells que se situen entre els períodes de 20 a 80 mesos, en sèries mensuals (o sigui, des de passat l'any i mig fins a gairebé 7 anys). En canvi, Cristobal i Quilis (1994) més aviat pensen en una cosa com aquesta:

Component	**Períodes (anys, trimestres, mesos,...)**	**Freqüència angular (radians, dades trimestrals)**
Tendència	>5 anys	<2Π/20
Cicle	5 a 2 anys, aproximadament	2Π/20 a 2Π/8
Estacionalitat	1 any, exactament	= 2Π/4
Irregularitat	< 1 any	>2Π/4

Més que respondre teòricament quan dura un cicle, el que es fa és mesurar-lo empíricament, localitzant els punts de gir que presenta la sèrie en estudi. El problema bàsic d'una taxa de variació sofisticada (tipus TAS) com a eina per a extraure el cicle és que tracta totes les sèries de la mateixa manera, n'extrau el mateix rang de freqüències, i no és segur que aquest rang sigui igualment adequat per a totes elles. Per això Melis defineix els cicles dins d'un rang una mica més ampli que Quilis, o es limita a filtres passabaix (amb una lògica de *freqüències més grans que*).

Una altra cosa és que en les baixes freqüències hi ha *innovacions* i sorpreses no anticipades, mentre que en les molt baixes freqüències (2 mesos o 2Π/s radians) hi ha *soroll*. Innovacions i soroll són dos conceptes diferents, que no s'han de confondre. De soroll n'hi ha sempre; d'innovacions (sorpreses) només de tant en tant: vagues, augments d'impostos, canvis de legislatura o altres canvis institucionals severs, etc. Observeu els dos fets separats següents:

- D'una banda, sabem que $Y_t = \varphi(B) \quad a_t$, sent $a_t = Niid(0, \sigma_a)$: una sèrie temporal es pot obtenir per suma d'infinits sorolls blancs no correlacionats.
- D'altra banda, $Y_t = T_t + C_t + S_t + I_t$, per hipòtesis de components subjacents.

Per tant, $\varphi(B) \quad a_t = T_t + C_t + S_t + I_t$, i només en condicions molt restrictives i improbables passarà $a_t = I_t$. En general una innovació es distribuirà entre tots els components, no es concentrarà només en el component irregular.

8. Conclusions

Les taxes de variació són una de les eines més corrents per al seguiment de la conjuntura, potser fins i tot la més corrent. S'apliquen gairebé sobre qualsevol sèrie temporal, be sigui un agregat macroeconòmic o un indicador específic. Hi ha pocs casos en què no té sentit aplicar-les. A aquesta extraordinària popularitat hi ajuda que el seu càlcul és molt senzill, fet que fa pensar que la seva interpretació i el seu ús també són molt senzills. Mentre que la primera afirmació és certa, la segona ho és menys.

La idea bàsica, clarament expressada a Cristobal i Quilis (1994), és que les taxes no són mers *comparadors de creixements* al llarg del temps, sinó que són *selectors de senyals*. Taxes diferents aplicades sobre una mateixa sèrie temporal poden donar idees distintes de la marxa del fenomen estudiat. En el límit, moltes taxes diferents presentades juntes seran molts missatges diferents presentats junts. En conseqüència, és normal que la interpretació sigui difícil o contradictòria, i que l'analista de conjuntura acabi confús.

Hi ha alguns punts d'acord sobre l´ús de les taxes. Qualsevol material una mica ambiciós sobre taxes de variació les presenta com un procés de filtrat de la sèrie observada, amb la pretensió de donar una idea (millor o pitjor) de l'evolució del component cíclic de la sèrie. Per tant, una taxa enraonada hauria d'eliminar la tendència, l'estacionalitat i els components de molt curt termini i irregulars, per tal de proporcionar un senyal rellevant. Això significa, en la pràctica, que la banda de freqüència que ha de reforçar la taxa (el filtre) no pot ser qualsevol. El normal és concentrar-se a destacar els fenòmens propis de la banda cíclica, posem, per exemple, els de periodicitat d'entre 20 i 80 mesos, en series mensuals. Aquest no és un llindar que defineixi els cicles de forma exacta, però és una idea operativa.

Tot això fa notar que les taxes de variació són una mena particular de filtres. Ara bé, el recíproc no és ben bé cert. De fet, hi ha filtres que ningú anomenaria taxes, o no de forma natural. Això passa sobretot quan se suavitzen taxes mitjançant filtres AR, com passa amb la TAS, encara que la idea és la mateixa: disposar d'un càlcul sistemàtic i aplicable a qualsevol sèrie, que emeti un senyal determinat. Els filtres MA, en canvi, són més semblants a la idea convencional de taxa (en el sentit que recorden fàcilment taxes calculades sobre períodes acumulats).

Determinar quina és la banda que emfasitza una taxa concreta obliga a conèixer la funció de guany del filtre usat, especialment per detectar el risc d'introducció de cicles espuris. Això posa en dubte, per exemple, l'ús de les mitjanes mòbils, tan habitual, en el sentit que presenten molts lòbuls laterals. De forma semblant, usar una T_3^3, amb l'argument que és una taxa més suau que

T_1^1 i alhora actualitzada no sembla bona idea: s'estan recollint fenòmens lligats a freqüències poc interessants, allunyades de les que succeeixen amb una freqüència superior a l'any i (posem, per exemple) inferior als set. Així, doncs, els filtres han de ser tals que la banda de rebuig presenti guanys nuls, o molt propers a zero, i cap lòbul contaminador apreciable. L'existència d'aquests lòbuls és un problema de la T_{12}^{12} (que no deixa de ser una T_1^1 suavitzada amb una MM_{12}).

Aquesta discussió presenta una variant, consistent a argumentar si convé o no utilitzar de manera simultània taxes de diferent periodicitat. Com ja s'ha dit, taxes diferents posen de manifest fenòmens diferents. L'esforç d'encaixar-los pot aclaparar l'analista, senzillament perquè responen a lògiques distintes que no tenen cap encaix. Per tant, no és gens segur que combinar una multiplicitat de taxes diferents aporti claredat o, dit del revés, cal decidir-se per una taxa privilegiada. Tampoc en això hi ha un acord especial. Mentre que Melis defensa l'ús de la TAS aplicada sobre la sèrie original, Espasa opta per T_1^1 del cicle-tendència —amb dues variants: T_{12}^{12} del cicle-tendència quan aquest és inestable o bé, al revés, T_{12}^{12} de la sèrie original si és estable.

Tots aquests elements es poden recollir en un objectiu bàsic de ***fiabilitat i robustesa*** de les taxes usades. Ara bé, en estimar la variació d'una magnitud econòmica entra en joc un altre objectiu, normalment contraposat a la fiabilitat: el manteniment de l'***actualitat***, l'ús de taxes que indueixin un ***cost informatiu baix***. La visualització d'aquest objectiu es fa amb les funcions de fase i desfasament.

Quan coexisteixen indicadors de periodicitat diversa (anual, trimestral, mensual) tant Espasa (1993) com Melis (1991) defensen sense embuts la conveniència de posar les taxes *en fase* amb alguna que es prengui com a referència —*centrar* les taxes. En la pràctica, aquest no és un costum gens corrent. El normal és proporcionar taxes de variació sense centrar i descriure la marxa de la conjuntura a partir d'elles. D'altra banda, l'acord sobre la conveniència de centrar les taxes no comporta de forma automàtica l'acord sobre quina és la taxa que cal prendre com a referència. Espasa, per exemple, proposa que les taxes s'han de posar en fase amb T_1^1 de cicle-tendència, una idea que no és exactament compartida per Melis, per a qui el problema de centrat de taxes es presenta sobretot quan es comparen indicadors (indicadors, no taxes) de periodicitats distintes. Un possible criteri es posar en fase les taxes de manera que les de l'indicador de més freqüència expliquin coherentment el creixement de l'indicador de menys freqüència. Aquesta és la situació, per exemple, si cal parlar del VAB industrial o del deflactor del consum de la comptabilitat nacional anual i posar-los en relació amb els creixements mensuals de la producció industrial i de l'IPC, respectivament. Melis defensa que cal assignar el creixement (el creixement, no pas el nivell) de les dades de la comptabilitat a la meitat de l'any; Espasa l'assigna a l'inici de l'any (a la meitat de l'any cal assignar el nivell, diu, no el creixement). Melis voldria posar la TAS en fase amb les taxes T_1^1 anuals, datades a mitjan d'any, i privilegiar les bandes de pas a l'entorn dels 24 mesos o dels 8 trimestres: bandes de pas a l'entorn de dos anys, que és la freqüència màxima observable amb dades anuals.

Una discussió diferent, però relacionada, és que el centrat comporta la pèrdua d'un cert nombre de dades al final de la sèrie que, comprensiblement, han de ser substituïdes per prediccions. Com que T_1^1 s'avança molt més que T_{12}^1 (s'avança en 5,5 mesos addicionals), prendre T_1^1 com a referència obliga a dipositar molta confiança en les prediccions, cosa que és defensable quan l'economia transita per una fase qualsevol del cicle, però menys quan canvia de fase. No és bona idea estalviar-nos quantes més prediccions millor? L'alternativa és assumir una magnitud de correcció alta en el moment de revisar les dades.

De manera similar, l'estratègia d'extraure un senyal-component (en nivell, no una taxa) a partir de la sèrie original i calcular allà la primera diferència (damunt un senyal desestacionalitzat, exempt d'irregularitat i de cicles setmanals o d'alta freqüència) tampoc no està lliure de costos, perquè l'extracció del nivell introdueix un desfasament temporal determinat, que ha de ser substituït per prediccions. Davant la proposta d'Espasa d'aplicar T_{12}^{12} sobre el component cicle-tendència, Melis argumenta que «equival a extraure el cicle-tendència, aplicar-li dues mitjanes mòbils de període estacional i calcular la primera diferència de la sèrie resultant». Per tant, al cost informatiu de l'extracció del senyal caldrà afegir el del filtrat, i no és clar que sigui petit.

Deixeu-me acabar amb dues remarques pràctiques, referides a les taxes entre períodes consecutius, ${T_1}^1$, i a les taxes interanuals, ${T_{12}}^1$. Estan especialment tractades a Cristobal i Quilis (1994):

- La taxa entre dos períodes consecutius, ${T_1}^1$, és una taxa molt demanada, sovint receptora de moltíssima atenció. Això passa, per exemple, amb les dades de la comptabilitat trimestral. En canvi, de tot el que s'ha dit fins aquí es dedueix que no és una taxa adequada per a l'anàlisi de conjuntura. Que sigui una taxa popular (per raons òbvies: l'interès pel molt curt termini) no vol dir que sigui una taxa idònia, encara que es calculi sobre sèries desestacionalitzades. Una sèrie desestacionalitzada conserva tot el component irregular i, en canvi, les característiques intrínseques com a filtre de ${T_1}^1$ fan que extregui, que mostri sobretot les freqüències altes, les lligades al component més irregular, i no al cicle ni a la tendència. Això ho mostra la seva funció G(w). Naturalment, si ${T_1}^1$ es calcula sobre sèries estacionals, l'estacionalitat es manté, però aquest no és el problema essencial: tant si la sèrie és estacional com si no ho és, extrau un senyal inconvenient.

- D'altra banda, la taxa interanual (T_4^1 en sèries trimestrals) tendeix a eliminar l'estacionalitat, la tendència pura i la irregularitat extrema, però sobretot accentua les oscil·lacions cícliques. La seva interpretació és més clara que en el cas anterior, i això és independent que s'apliqui sobre una sèrie desestacionalitzada o no. A més, es pot combinar amb un suavitzador, un filtre passabaix, i això millora molt la seva eficàcia o, de forma alternativa, es pot aplicar sobre el component de cicle-tendència.

Atès el que hi ha en litigi, sembla normal poder usar amb alguna agilitat eines que posin de manifest les característiques de les taxes. Obtenir alguna familiaritat amb aquestes eines és l'objectiu d'aquest material.

Bibliografia

Cristobal, A; Quilis, E. (1994). «Tasas de variación, filtros y análisis de la coyuntura». *INE, Boletín trimestral de coyuntura* (núm. 52).

Espasa, A; Cancelo, J. R. (eds.) (1993). *Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica*. Alianza Editorial. Vegeu especialment el capítol 5.

Maravall, A. (1989). «La extracción de señales y el análisis de coyuntura». *Revista española de economía* (2a època, vol. 6, núm. 1 i 2, pàgs. 109 a 130).

Melis Maynar, F. (1982). «Indicadores cíclicos y tasas de variación interanual». *Estadística Española* (núm. 95, pàgs. 7 a 28).

Melis Maynar F. (1983). «Construcción de indicadores cíclicos mediante ecuaciones en diferencias». *Estadística española* (núm. 98, pàgs. 45 a 89). Instituto Nacional de Estadística.

Melis Maynar F. (1984). *Series temporales, coyuntura económica y el BTC del INE: la utilidad y las limitaciones de la tasa interanual*. INE, Boletín trimestral de coyuntura, núm. 12.

Melis Maynar F. (1989). «Sobre la hipótesis de componentes y la extracción de la señal de coyuntura sin previa desestacionalización». *Revista Española de Economía,* (2a època, vol. 6, núm. 1 i 2, pàgs. 131 a 163).

Melis Maynar F. (1991). «La estimación del ritmo de variación en series económicas». *Estadística Española* (núm. 126, pàgs. 7 a 56).

Melis Maynar F. (1992). «Agregación temporal y solapamiento o *aliasing*». *Estadística Española* (núm. 130, pàgs. 309 a 346).

Poveda, V.; Martínez, P. (1973). «El empleo de tasas de variación como indicadores cíclicos». *Estudios económicos* (sèrie A, núm. 2). Banco de España. Servicio de Estudios.

Proakis, J. G.; Manolakis, D. G. (2007). *Tratamiento digital de señales*. Pearson-Prentice Hall.