Vectors aleatoris

PID_00253290

Ana Escudero
Alícia Miralles
Alícia Vila

Temps mínim de dedicació recomanat: 3 hores

Universitat
Oberta
de Catalunya

Índex

Introducció

Hem dedicat els mòduls "Variables aleatòries" i "Funcions de variables aleatòries" a l'estudi de variables aleatòries simples o unidimensionals.

Ara bé, de vegades ens trobem amb fenòmens que estan relacionats amb més d'una variable aleatòria alhora. Per exemple, en un circuit en què la resistència, inductància i capacitat estiguin modelitzades com a variables aleatòries, haurem de treballar amb tres variables aleatòries alhora. En els sistemes de transmissió sovint tenim un senyal d'entrada aleatori. Com que la variable d'entrada és aleatòria, el senyal de sortida també ho és. En aquest cas necessitarem treballar amb dues variables aleatòries per a poder trobar la relació entre aquestes i poder caracteritzar el sistema de transmissió. També, si en un circuit prenem 5 mesures d'un valor desconegut, com podria ser la intensitat del corrent, l'error en cada una d'aquestes mesures podria ser modelitzat per una variable aleatòria i llavors hauríem de treballar amb cinc variables aleatòries alhora.

El tractament de vectors de variables aleatòries ens introduirà la necessitat de definir la probabilitat, distribució de probabilitat i funció de densitat conjuntes. Imagineu que tenim un vector aleatori bidimensional, (X, Y), en què les variables X i Y són, respectivament, l'alçada i el pes d'un estudiant. Podem definir S_1 com l'espai mostral per a l'alçada i S_2 com l'espai mostral per al pes. Cadascuna d'aquestes variables tindrà la seva funció de probabilitat. Però si ara definim l'espai mostral $S = S_1 \times S_2$ el resultat del nostre experiment ens donarà una alçada i un pes i podrem definir una probabilitat associada a aquests dos fets.

En aquest mòdul utilitzarem els conceptes que hem vist per al cas unidimensional en els mòduls anteriors i els extrapolarem al cas dels vectors aleatoris bidimensionals. En l'apartat 1 veurem com s'aplica aquest concepte a les variables aleatòries discretes. L'apartat 2 serà semblant al primer, però hi considerarem vectors de variables aleatòries contínues.

Objectius

Els objectius per assolir en aquest mòdul són els següents:

1. Entendre el concepte i la utilitat de vector aleatori i saber-ne posar exemples.

2. Conèixer els vectors de variable aleatòria discreta i contínua.

3. Calcular les funcions de probabilitat conjunta i de probabilitat marginal.

4. Aplicar els conceptes de probabilitat condicionada i independència a vectors aleatoris.

5. Relacionar les variables aleatòries d'un vector mitjançant la covariància i el coeficient de correlació.

1. Vector aleatori (X, Y) amb X i Y variables aleatòries discretes

Comencem l'apartat definint què entenem per vector aleatori bidimensional, en aquest cas aplicat a variables aleatòries discretes.

Definició 1.1. Si X i Y són dues variables aleatòries discretes, s'anomena **vector aleatori discret bidimensional** el vector (X, Y).

En general, donades n variables aleatòries discretes, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, cal treballar amb el vector aleatori discret n-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Terminologia

De vegades (X, Y) s'anomena *variable aleatòria bidimensional*, i $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, *variable aleatòria n-dimensional*.

1.1 Probabilitat conjunta. Probabilitat marginal

En tractar amb vectors aleatoris apareixen dos conceptes nous que no havíem tractat anteriorment: la **probabilitat conjunta** i la **probabilitat marginal**. A continuació les definim.

Definició 1.2. Siguin X, Y dues variables aleatòries discretes en què X pren els valors $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i Y pren els valors $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Per a cada parella de valors a_i, b_j, tenim definida la **funció de probabilitat conjunta**

$$P(X = a_i, Y = b_j) = P(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}). \qquad (1)$$

També s'utilitza la notació $P_{XY}(a_i, b_j) = P(X = a_i, Y = b_j)$.

És a dir, la **probabilitat conjunta** és la probabilitat que la variable aleatòria X prengui el valor a_i, i la variable aleatòria Y prengui el valor b_j.

Per al cas particular en què X pren els valors $\{a_1, a_2\}$ i Y, $\{b_1, b_2\}$, obtenim la taula de probabilitats conjuntes següent.

$Y \setminus X$	a_1	a_2	$P(Y=b_j)$
b_1	$P(X=a_1, Y=b_1)$	$P(X=a_2, Y=b_1)$	$P(Y=b_1)$
b_2	$P(X=a_1, Y=b_2)$	$P(X=a_2, Y=b_2)$	$P(Y=b_2)$
$P(X=a_i)$	$P(X=a_1)$	$P(X=a_2)$	1

A continuació definim el concepte de **probabilitat marginal**.

Definició 1.3. Per cada valor a_i, definim la **funció de probabilitat marginal** de la variable X,

$$P(X=a_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X=a_i, Y=b_j), \tag{2}$$

és a dir, la suma de les probabilitats conjuntes fixat un valor de X i per a tots els valors de Y. De manera semblant, per a cada b_j, definim la **funció de probabilitat marginal** de Y,

$$P(Y=b_j) = \sum_{i=1}^{n} P(X=a_i, Y=b_j). \tag{3}$$

En l'última fila de la taula anterior obtenim les probabilitats marginals de X. La casella d'aquesta fila, on apareix $P(X = a_1)$, ens dona la probabilitat marginal de la variable X per al valor a_1, ja que ens diu quina és la probabilitat d'obtenir a_1 per a tots els valors de Y. És a dir, $P(X=a_1) = P(X = a_1, Y=b_1) + P(X= a_1, Y=b_2)$. Anàlogament, en l'última columna de la taula anterior, obtenim les probabilitats marginals de Y. Observeu la darrera casella de la taula. Té un valor igual a 1 perquè és la probabilitat de qualsevol valor de l'espai mostral.

Observació

Amb les probabilitats marginals treballem de la mateixa manera que amb les probabilitats definides per a una única variable. Podem, llavors, considerar els mateixos paràmetres que havíem definit en el tema de variables aleatòries. En particular, σ_X i σ_Y són les desviacions típiques de X i de Y respectivament.

Exemple 1.1

Un emissor envia un missatge binari (format amb elements de $\{0, 1\}$), de mida 2 i a l'atzar. Pel canal de transmissió es poden produir errors. Sabem que la probabilitat que un bit arribi al receptor amb error és $P(\text{error}) = 0,02$. Definim les variables aleatòries de la manera següent: la variable aleatòria X compta el nombre de 0 que envia l'emissor i la variable aleatòria Y compta el nombre de 0 que arriben al receptor. Calcularem les probabilitats conjuntes i marginals. A partir d'això, calcularem el valor mitjà o esperança i la desviació típica. D'aquesta manera podem caracteritzar les variables aleatòries X i Y i comparar-les.

Si el missatge per transmetre és de mida 2, tant la variable X com la Y, que compten el nombre de zeros en el missatge, poden prendre els valors $\{0, 1, 2\}$. Com que X i Y poden prendre 3 valors, les combinacions possibles de les variables X i Y per a poder calcular les probabilitats són $3 \cdot 3 = 9$. Així, doncs, podem definir les probabilitats conjuntes següents:

Observació

Fixeu-vos que el missatge rebut no és independent del missatge transmès. Per aquest motiu, $P(R\!=\!11)$ sabent que hem transmès 11 és $P(R\!=\!11 \,|\, T\!=\!11)$.

- S'emet 11 i arriba 11. $P(X\!=\!0, Y\!=\!0) = P(T\!=\!11)P(R\!=\!11 \,|\, T\!=\!11) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0{,}98^2 = 0{,}2401$. T és el missatge transmès i R representa el missatge rebut.
- S'emet 11 i arriba 01 o 10, és a dir, tenim error en un dels dos bits. $P(X = 0, Y = 1) = P(T\!=\!11)P(R\!=\!01 \,|\, T\!=\!11) + P(T\!=\!11)P(R\!=\!10 \,|\, T\!=\!11) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02 = 0{,}0098$.
- S'emet 11 i arriba 00. $P(X\!=\!0, Y\!=\!2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0{,}02^2 = 0{,}0001$.
- S'emet 10 i arriba 11 o s'emet 01 i arriba 11. $P(X\!=\!1, Y\!=\!0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 0{,}0098$.
- S'emet 01 i arriba 01 o s'emet 01 i arriba 10 o s'emet 10 i arriba 10 o s'emet 10 i arriba 01. $P(X\!=\!1, Y\!=\!1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0{,}98^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 0{,}02^2 = 0{,}4804$.
- S'emet 01 o 10 i arriba 00. $P(X\!=\!1, Y\!=\!2) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 0{,}0098$.
- S'emet 00 i arriba 11. $P(X\!=\!2, Y\!=\!0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0{,}02^2 = 0{,}0001$.
- S'emet 00 i arriba 01 o 10. $P(X\!=\!2, Y\!=\!1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02 = 0{,}0098$.
- S'emet 00 i arriba 00. $P(X\!=\!2, Y\!=\!2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0{,}98^2 = 0{,}2401$.

Calculem ara les probabilitats marginals. És a dir, fixem el valor d'una variable i sumem per a tots els valors de l'altra variable:

- $P(X\!=\!0) = 0{,}25$, $P(X\!=\!1) = 0{,}5$, $P(X\!=\!2) = 0{,}25$,
- $P(Y\!=\!0) = 0{,}25$, $P(Y\!=\!1) = 0{,}5$, $P(Y\!=\!2) = 0{,}25$.

La taula de probabilitats conjuntes es la següent.

$Y \setminus X$	0	1	2	$P(Y\!=\!b_j)$
0	0,2401	0,0098	0,0001	0,25
1	0,0098	0,4804	0,0098	0,5
2	0,0001	0,0098	0,2401	0,25
$P(X\!=\!a_i)$	0,25	0,5	0,25	1

Ara calculem alguns paràmetres que ens donen informació de cada una de les variables:

- L'esperança o valor mitjà de la variable X, que és la suma dels valors que pot prendre la variable aleatòria multiplicats per la probabilitat d'aparèixer, és a dir,

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot P(X\!=\!0) + 1 \cdot P(X\!=\!1) + 2 \cdot P(X\!=\!2) = 1.$$

Vegeu també

El valor mitjà s'estudia en el mòdul "Variables aleatòries" d'aquesta assignatura.

- La variància de la variable X, que es defineix com l'esperança del valor de la variable menys la seva esperança, i tot això al quadrat.

És a dir: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2)$. Utilitzant el teorema de l'esperança, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$. Ara ja podem calcular la variància:

$$\mathrm{E}(X^2) = 0^2 \cdot P(X=0) + 1^2 \cdot P(X=1) + 2^2 \cdot P(X=2) = 1,5.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 1,5 - 1^2 = 0{,}5.$$

- La desviació típica de la variable X, que ens dona informació de la dispersió dels valors que pren X, en les mateixes unitats: $\sigma_X = \sqrt{0{,}5} = 0{,}707$.

Podeu comprovar, fent els mateixos càlculs, que per a la variable Y obtenim $\mathrm{E}(Y) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 0{,}5$ i $\sigma_Y = 0{,}707$.

1.2 Funcions de probabilitat condicionades. Independència de variables aleatòries

Ja hem estudiat la noció de probabilitat condicionada. Vam veure com podem calcular la probabilitat d'un succés sabent que s'havia produït un altre succés. En aquell cas ens referíem a una única variable aleatòria, X. Si el resultat d'un experiment no ens donava cap pista sobre el resultat següent, parlàvem de successos independents.

Vegeu també

Recordeu la noció de probabilitat condicionada que vam veure en el subapartat 2.3 del mòdul "Introducció a la probabilitat".

La noció de probabilitat condicionada que veurem a continuació és bàsicament la mateixa, però en aquest cas calcularem la probabilitat que la variable X prengui un valor sabent quin és el valor de la variable Y. És a dir, calcularem la probabilitat de X condicionada a Y.

Definició 1.4. Funció de probabilitat de X condicionada a Y.

La probabilitat que la variable X prengui el valor a_i sabent que Y pren el valor b_j (probabilitat de $X = a_i$ condicionada a $Y = b_j$) és:

$$P(X=a_i \,|\, Y=b_j) = \frac{P(X=a_i,\ Y=b_j)}{P(Y=b_j)}. \tag{4}$$

En treballar amb variables aleatòries bidimensionals ens podríem fer la pregunta inversa: quina és la probabilitat d'obtenir un cert valor de Y sabent quin és el valor que s'ha obtingut per a la variable X. En aquest cas parlaríem de probabilitat de Y condicionada a X, i es defineix de manera anàloga a l'anterior.

Definició 1.5. Funció de probabilitat de Y condicionada a X.

La probabilitat que la variable Y prengui el valor b_j sabent que X pren el valor a_i (probabilitat de $Y = b_j$ condicionada a $X = a_i$) és:

$$P(Y = b_j \mid X = a_i) = \frac{P(X = a_i,\ Y = b_j)}{P(X = a_i)}. \qquad (5)$$

De vegades el resultat que coneixem (sia una realització de X o de Y) no ens dona cap pista sobre la probabilitat de l'altra variable, és dir, els resultats de les variables X i Y són independents. Ho expressem de la manera següent.

Definició 1.6. Les variables X i Y són **independents** si, i només si,

$$P(X = a_i,\ Y = b_j) = P(X = a_i)P(Y = b_j), \quad \forall i, j. \qquad (6)$$

Exemple 1.2

Amb el mateix enunciat que en l'exemple 1.1, ens fem les preguntes següents:

1) Sabent que el receptor ha rebut una paraula amb un zero ($Y = 1$), quina és la probabilitat que l'emissor hagi enviat la paraula 00?

$$P(X = 2 \mid Y = 1) = \frac{P(X = 2,\ Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{0{,}0098}{0{,}5} = 0{,}0196.$$

2) Les variables X i Y són independents?
Com que $P(X = 2, Y = 1) = 0{,}0098 \neq P(X = 2)P(Y = 1) = 0{,}125$, no són independents. De fet, hi ha una correlació alta entre el missatge transmès i el missatge rebut, ja que en el 96% dels casos ($(1 - 0{,}02)^2 = 0{,}96$) esperem rebre el mateix que hem transmès.

1.3 Relació entre variables aleatòries discretes: covariància i coeficient de correlació

Fins aquí hem definit què és un vector de variable aleatòria discreta i ens hem centrat a estudiar el cas dels vectors formats per dues variables aleatòries, és a dir, els vectors aleatoris bidimensionals.

Hem vist que paràmetres com l'esperança, la variància i la desviació estàndard es poden estendre fàcilment al cas bidimensional partint de la definició que hem vist per al cas unidimensional. Ara bé, en el cas del vector aleatori ens podem fer una nova pregunta que no ens havíem plantejat abans: podem mesurar quina és la relació entre les variables aleatòries que formen el vector? Aquesta pregunta és la que mirarem de respondre en aquest subapartat.

Començarem definint tres paràmetres que ens permeten caracteritzar la relació entre dues variables aleatòries, X i Y.

Definició 1.7. Definim l'**esperança del producte** com segueix:

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_i \sum_j a_i b_j P(X=a_i,\ Y=b_j). \tag{7}$$

Definició 1.8. La **covariància** entre dues variables aleatòries X i Y es defineix de la manera següent:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))] \tag{8}$$

$$= \sum_i \sum_j (a_i - \mathrm{E}(X))(b_j - \mathrm{E}(Y))P(X=a_i,\ Y=b_j).$$

Desenvolupant la suma anterior després de multiplicar els termes dels parèntesis, arribem a

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y). \tag{9}$$

Un altre paràmetre estadístic referent a parelles de variables aleatòries és el coeficient de correlació, que és una versió normalitzada de la covariància (o coeficient de correlació lineal de Pearson).

Covariància

Noteu que, després de simplificar, la covariància és l'esperança del producte menys el producte d'esperances de les dues variables aleatòries del vector.

Definició 1.9. El **coeficient de correlació** entre les variables X i Y es defineix com la covariància dividida entre les desviacions estàndards de les variables aleatòries:

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{10}$$

Observació

La covariància i el coeficient de correlació són paràmetres poblacionals que mesuren el nivell de relació lineal entre les variables.

La covariància ens dona informació sobre la possible existència de relació lineal entre X i Y, és a dir, ens ajuda a saber si aquestes variables creixen conjuntament o no. Per a donar una informació normalitzada, cal dividir el valor de la covariància pel producte de les desviacions típiques de les dues variables. Això és justament el que fa el coeficient de correlació de Pearson.

Propietats del coeficient de correlació

1) El coeficient de correlació sempre és en el marge següent:

$$-1 \leq \rho \leq 1. \tag{11}$$

2) Si ρ és a prop d'1 o -1 diem que hi ha una forta correlació lineal entre X i Y.

3) Si, de mitjana, Y augmenta quan X augmenta: $\rho > 0$.

4) Si, de mitjana, Y disminueix quan X augmenta: $\rho < 0$.

Si ρ és prop de 0, les variables presenten una correlació lineal dèbil o no hi ha correlació lineal.

Correlació propera a 0

El fet que el coeficient de correlació sigui proper a 0 és pot deure al fet que no hi ha correlació de cap tipus o bé al fet que la correlació que hi ha és no lineal (per exemple, quadràtica, cúbica, etc.).

Definició 1.10. Si $\rho = 0$, diem que les variables són **linealment incorrelacionades**.

Relació entre independència i incorrelació

Si X i Y són independents, llavors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ i $\rho = 0$. La implicació contrària, en general, no és certa.

En efecte, suposem que X i Y són independents. El resultat anterior s'obté tenint en compte (6) i calculant amb (7) i (9):

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_i \sum_j a_i b_j P(X = a_i,\ Y = b_j) = \sum_i \sum_j a_i b_j P(X = a_i) P(Y = b_j)$$

$$= \sum_i a_i P(X = a_i) \sum_j b_j P(Y = b_j) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$

Llavors, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0$.

Notem que, com que $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$, $\rho = 0 \Leftrightarrow C(X,Y) = 0$.

Vegem un exemple en què s'apliquen tots aquests conceptes.

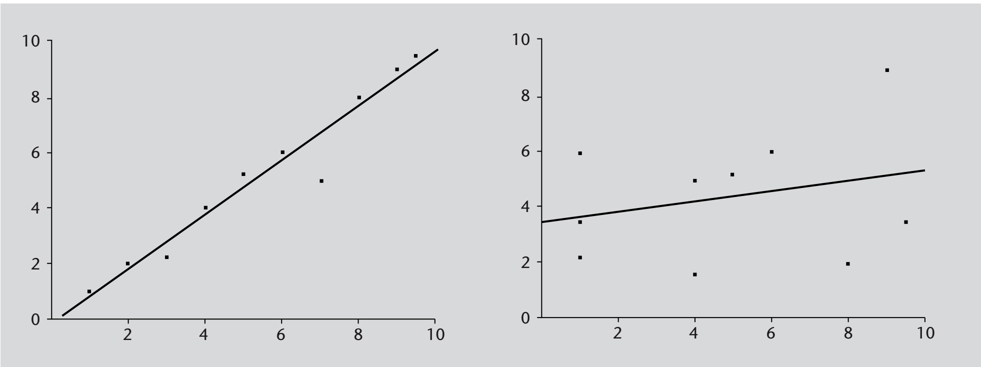
Exemple 1.3

Observeu la figura 1. En la part esquerra hem representat les 10 parelles de valors (x_i, y_i) que pren un vector (X,Y). En aquest cas s'obté un coeficient de correlació de 0,9. Com que és un valor proper a 1, les variables X i Y presenten una correlació lineal forta: a mesura que augmenta el valor d'una, també augmenta el valor de l'altra. El fet que tinguin una correlació lineal forta ens diu que els valors (x_i, y_i) són a prop d'una recta. La recta que hem representat l'hem obtinguda pel mètode dels mínims quadrats. Tot i que no és el nostre propòsit obtenir-la, l'hem representada per observar millor la correlació lineal. En la figura de la dreta hem donat un altre exemple en què el comportament és completament diferent. En aquest altre cas s'obté un coeficient de correlació de 0,25, és a dir, pràcticament no hi ha correlació.

Figura 1

En la figura de l'esquerra les parelles de punts estan més correlacionades que les de la figura de la dreta. Fixeu-vos que la correlació en el primer cas és 0,9 i en el segon 0,25.

Figura 1. El coeficient de correlació lineal del gràfic esquerre és $0{,}9$ i el del gràfic de la dreta $0{,}25$



Exemple 1.4

Continuem amb l'exemple 1.1, el de l'emissor binari, i calculem ara els paràmetres definits anteriorment. Calculem en primer lloc l'esperança del producte:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= 0\cdot 0\cdot P(X=0,\ Y=0) + 0\cdot 1\cdot P(X=0,\ Y=1) + 0\cdot 2\cdot P(X=0,\ Y=2) + \\
&+ 1\cdot 0\cdot P(X=1,\ Y=0) + 1\cdot 1\cdot P(X=1,\ Y=1) + 1\cdot 2\cdot P(X=1,\ Y=2) + \\
&+ 2\cdot 0\cdot P(X=2,\ Y=0) + 2\cdot 1\cdot P(X=2,\ Y=1) + 2\cdot 2\cdot P(X=2,\ Y=2) = \\
&= 0{,}4804 + 2\cdot 0{,}0098 + 2\cdot 0{,}0098 + 4\cdot 0{,}2401 = 1,4.
\end{aligned}$$

Vegeu també

En l'apartat 2 d'aquest mòdul veurem conceptes semblants als que hem vist fins ara però aplicats a vectors aleatoris, en què les variables aleatòries seran contínues.

A continuació, i a partir de l'esperança del producte i del producte d'esperances, com hem vist en la definició 1.8, podem calcular la covariància,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 1{,}4 - 1\cdot 1 = 0{,}4,$$

i el coeficient de correlació,

$$\rho = \frac{0{,}4}{\sqrt{0{,}5}\,\sqrt{0{,}5}} = 0{,}8.$$

2. Vector aleatori (X, Y) amb X i Y variables aleatòries contínues

L'estructura d'aquest apartat és similar al de l'anterior. En primer lloc definirem què entenem per vector aleatori de variables contínues. A continuació definirem les funcions de distribució i de densitat conjuntes. També definirem les funcions de densitat marginals. Fixeu-vos que en aquest cas parlem de funcions de densitat, ja que tractarem variables aleatòries contínues. Com en l'apartat anterior, veurem les probabilitats condicionades i quan les variables del vector són independents. Acabarem l'apartat avaluant si dues variables aleatòries varien de manera similar mitjançant la covariància i el coeficient de correlació.

Definició 2.1. Si X i Y són dues variables aleatòries contínues, s'anomena **vector aleatori continu bidimensional** el vector (X, Y).

En general, donades n variables aleatòries contínues, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, cal treballar amb el vector aleatori continu n-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. En aquest apartat ens centrarem en el cas $n = 2$.

Ja vam veure en el tema de variables aleatòries que el tractament amb variables contínues és molt diferent que amb variables discretes. Comencem definint les funcions de distribució conjunta i de densitat conjunta.

Vegeu també

En el mòdul "Variables aleatòries" vam veure les diferències en el tractament de les variables aleatòries discretes i contínues. Aquestes diferències són vàlides també per al tractament de vectors aleatoris discrets i continus.

2.1 Funció de distribució conjunta. Funció de densitat conjunta

Definició 2.2. La **funció de distribució conjunta**, F_{XY}, de les variables contínues X i Y és una aplicació de $\mathbb{R}^2$ a $[0, 1]$ definida per

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x,\ Y \leq y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{12}$$

Si F_{XY} és contínua i dues vegades derivable, diem que X i Y són **conjuntament contínues**. La **funció de densitat conjunta**, f_{XY}, és:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y). \tag{13}$$

Vegeu també

Recordeu els conceptes de funció de distribució i de densitat que vam veure en el subapartat 3.1 del mòdul "Variables aleatòries".

En la definició anterior, F_{XY} i f_{XY} són funcións de dues variables, és a dir, definides en $\mathbb{R}^2$. En aquest cas podem derivar amb respecte una de les variables mantenint l'altra constant i obtenim les operacions de *derivada parcial.* Donada una funció $f(x, y)$, podem derivar-la amb respecte x: $\frac{\partial f}{\partial x}$ o derivar-la amb respecte y: $\frac{\partial f}{\partial y}$. Per a obtenir la densitat conjunta f_{XY}, hem de fer una derivada seguida de l'altra en la funció de distribució conjunta: $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y)$.

Propietats de la funció de densitat conjunta

1) La densitat conjunta és una funció no-negativa:

$$f_{XY}(x, y) \geq 0. \tag{14}$$

2) Per a cada conjunt $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$P((X, Y) \in A) = \int \int_A f_{XY}(x, y)\, dx\, dy. \tag{15}$$

3) Càlcul de la funció de distribució a partir de la funció de densitat:

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u, v)\, du\, dv. \tag{16}$$

4) Normalització de la densitat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dx\, dy = 1. \tag{17}$$

La propietat (15) es podria considerar com la definició directa de la funció de densitat. En aquest cas, (16) es dedueix tenint en compte que $F_{XY}(x, y)$ és la probabilitat que $-\infty < X \leq x$ i $-\infty < Y \leq y$. De la mateixa manera, (17) diu que la probabilitat que X i Y prenguin qualsevol valor és 1. Notem que fer $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y)$ a partir de (16) dona efectivament $f_{XY}(x, y)$.

Generalitzant el que vam veure en una dimensió, la probabilitat $P(A)$, en què A és un subconjunt de $\mathbb{R}^2$, és determinada pel volum per sota de la funció de densitat conjunta $f_{XY}(x, y)$ i que determina A (fórmula (15)).

Probabilitat $P(A)$

En el cas de variables aleatòries unidimensionals obteníem la probabilitat mitjançant l'àrea per sota de la funció de densitat. Fixeu-vos que aquí estem tractant amb variables bidimensional i per això parlem de volum per sota de la funció de densitat conjunta $f_{XY}(x, y)$.

Exemple 2.1

Un vector aleatori (X, Y) té funció de densitat:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{K}{(1+x+y)^3} & \text{si } x > 0, y > 0, x+y < 1, \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

on K és una constant.

1) Quin valor té la constant K?
2) Quina és la probabilitat que $Y > X$?
3) Quina és la probabilitat que $X > 2Y$?
4) Quina és la probabilitat que $X + Y > \frac{1}{2}$?

Notem que la densitat és definida en un triangle amb vèrtex en els punts $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$. Les integrals que calculem s'han de restringir a aquesta regió. La podem descriure dient que x varia entre 0 i 1 i que, per a cada x, y varia entre 0 i $1 - x$.

1) K es determina imposant la condició de normalització (17):

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{K}{(1+x+y)^3}\,dy\right) dx$$

$$= K\int_0^1 \left[-\frac{1}{2(1+x+y)^2}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = K\int_0^1 \left(\frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1}{8}\right) dx$$

$$= K\left[-\frac{1}{2(1+x)} - \frac{x}{8}\right]_0^1 = \frac{K}{8},$$

d'on $K = 8$.

2) Apliquem (15). Hem d'integrar la densitat sobre la regió intersecció entre el triangle on és definit el vector (X, Y) i el semiplà $Y > X$. Resulta un triangle amb vèrtex $(0, 0)$, $(0, 1)$ i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (aquest últim és la intersecció entre $x + y = 1$ i $y = x$). Això restringeix y entre x i $1 - x$, sempre que x estigui entre 0 i $\frac{1}{2}$:

$$P(Y > X) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{1-x} \frac{8}{(1+x+y)^3}\,dy\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{4}{(1+x+y)^2}\right]_{y=x}^{y=1-x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{(1+2x)^2} - 1\right) dx = \left[-\frac{2}{1+2x} - x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

3) El succés $X > 2Y$ correspon al triangle de vèrtex $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ (aquest últim és la intersecció entre $x + y = 1$ i $2y = x$). Ara és més directe integrar primer x entre $2y$ i $1 - y$ i després y de 0 a $\frac{1}{3}$:

$$P(X > 2Y) = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\int_{2y}^{1-y} \frac{8}{(1+x+y)^3}\,dx\right) dy = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[-\frac{4}{(1+x+y)^2}\right]_{x=2y}^{x=1-y} dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{4}{(1+3y)^2} - 1\right) dy = \left[-\frac{4}{1+3y} - y\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

4) En aquest cas és més simple la regió complementària $X+Y<\frac{1}{2}$, que consisteix en el triangle de vèrtex $(0,0)$, $(\frac{1}{2},0)$ i $(0,\frac{1}{2})$. Així,

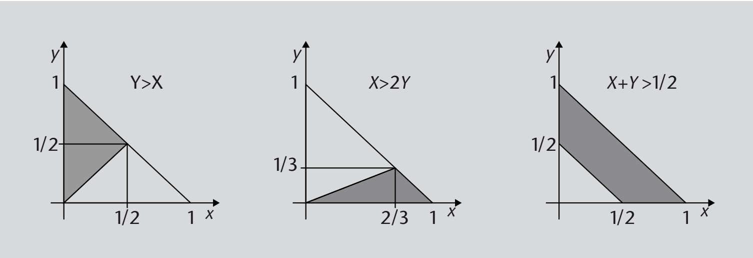
$$P\left(X+Y>\frac{1}{2}\right)=1-P\left(X+Y<\frac{1}{2}\right)=1-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}-x}\frac{8}{(1+x+y)^3}\,dy\right)dx$$

$$=1-\int_0^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{4}{(1+x+y)^2}\right]_{y=0}^{y=\frac{1}{2}-x}dx=1-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{(1+x)^2}-\frac{16}{9}\right)dx$$

$$=1-\left[-\frac{4}{1+x}-\frac{16}{9}x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{9}.$$

En la figura 2 es mostren els tres successos.

Figura 2. Successos de l'exemple 2.1



A continuació definirem un tipus particular de vector aleatori bidimensional.

Definició 2.3. Distribució uniforme. Diem que el vector aleatori $(X,\,Y)$ es distribueix **uniformement** en la regió $D\subset\mathbb{R}^2$ si la funció de densitat conjunta és:

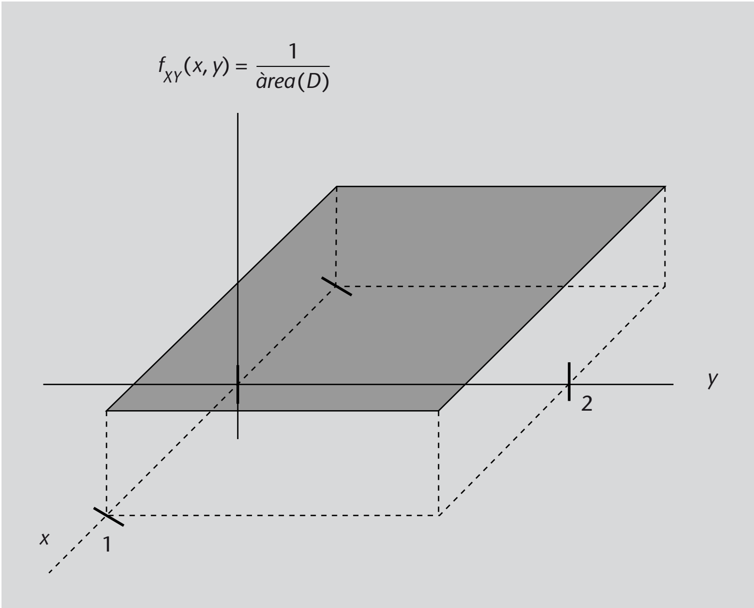
$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\text{àrea}(D)} & \text{si } (x,y)\in D\\[2ex] 0 & \text{altrament}\end{cases}\tag{18}$$

És a dir, per a tots els punts x i y que són dins del domini de definició de la variable aleatòria uniforme, el valor de $f_{XY}(x,y)$ és constant. En aquest cas, el càlcul de volums per sota de la funció de densitat pot no requerir la utilització de les integrals dobles, com veurem en l'exemple 2.4.

Intuïtivament, podem veure que si tenim dues regions dins de l'àrea D amb la mateixa àrea, les dues tenen la mateixa probabilitat.

En la figura 3 en podeu veure un exemple. En aquest cas la regió D és rectangular.

Figura 3. Representació gràfica de $f_{XY}(x, y)$ per al cas uniforme



2.2 Funcions de densitat marginals

En aquest subapartat veurem com es poden calcular les funcions de densitat marginals. Recordeu que per al cas de les variables discretes, tal com hem vist en el subapartat 1.1, les funcions de probabilitat marginals les obteníem per a un cert valor d'una de les variables del vector i fent el sumatori per a tots el casos de l'altra variable aleatòria. Aquí aplicarem la mateixa idea però substituint els sumatoris per integrals.

Definició 2.4. Funcions de densitat marginals

Densitat marginal de *X*: fixat un valor de x, integrem per a tots els valors possibles de y:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy. \tag{19}$$

Densitat marginal de *Y*: fixat un valor de y, integrem per a tots els valors possibles de x:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx. \tag{20}$$

A partir de les expressions anteriors podem trobar els paràmetres que caracteritzen cada una de les variables: l'esperança, el moment d'ordre 2 i la variància per a cadascuna de les variables del vector.

La definició d'aquests paràmetres és la mateixa que havíem fet per al cas unidimensional*. En aquest cas, però, utilitzem les funcions de densitat marginals:

* Vegeu el subapartat 3.3 del mòdul "Variables aleatòries".

- Esperança de X i esperança de Y:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx, \qquad \mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy.$$

- Moments d'ordre 2:

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x)\, dx, \qquad \mathrm{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, f_Y(y)\, dy.$$

- Variància de X i variància de Y:

$$\sigma_X^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2, \qquad \sigma_Y^2 = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2.$$

2.3 Funcions de densitat condicionades. Variables independents

En aquest subapartat veurem quan les dues variables aleatòries del nostre vector són **independents** o, al contrari, quan el resultat d'una ens dona alguna pista sobre l'altra. En aquest segon cas parlem de **densitat condicionada**.

Definició 2.5. Les variables contínues X i Y són **independents** si i només si

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \qquad \forall\, x,\, y. \tag{21}$$

És a dir, X i Y són independents si la funció de densitat conjunta és igual al producte de les funcions de densitat marginals i viceversa.

Definició 2.6. Funcions de densitat condicionades

Es defineix la **funció de densitat de X condicionada a $Y = y$** com

$$f(x \,|\, y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}. \tag{22}$$

Observació

Fixeu-vos que si les variables són independents, les densitats condicionades són $f(x \,|\, y) = \frac{f_X(x) f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$, $f(y \,|\, x) = f_Y(y)$.

Anàlogament, la **funció de densitat de Y condicionada a $X = x$** com

$$f(y\,|\,x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}. \tag{23}$$

Ara en veurem alguns exemples per aclarir tots aquests conceptes.

Exemple 2.2

Un senyal de comunicació comença en l'instant X i acaba en l'instant Y, donats pel vector aleatori (X,Y) amb funció de densitat:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } \; 0 < x < y \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

1) Calculem les probabilitats dels esdeveniments següents:
A = "La durada del senyal és inferior a 2."
B = "En t=2 el senyal és actiu."
C = "En t=2 el senyal ja ha començat i en $t = 1$ encara no ha acabat."
Notem que A equival a $Y-X < 2$, B equival a $X<2, Y>2$ i C equival a $X<2, Y>1$.
Per a A, la regió és $0 < x < \infty$ i $x < y < x+2$:

$$P(A) = \int_0^\infty \left(\int_x^{x+2} e^{-y} dy \right) dx = \int_0^\infty (e^{-x} - e^{-x-2}) dx = (1-e^{-2}) \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 - e^{-2}.$$

Per a B, la regió és $0 < x < 2$ i $2 < y < \infty$:

$$P(B) = \int_0^2 \left(\int_2^\infty e^{-y} dy \right) dx = \int_0^2 e^{-2} dx = 2e^{-2}.$$

Per a C, la regió té dues parts. Si $0 < x < 1$ llavors $1 < y < \infty$. Si $1 < x < 2$ llavors $x < y < \infty$:

$$P(C) = \int_0^1 \left(\int_1^\infty e^{-y} dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_x^\infty e^{-y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 e^{-1} dx + \int_1^2 e^{-x} dx = e^{-1} + (e^{-1} - e^{-2}) = 2e^{-1} - e^{-2}.$$

2) Calculem les funcions de densitat condicionades $f(x\,|\,y)$ i $f(x\,|\,y)$.
Primer necessitem les funcions de densitat marginals:
Si $x > 0$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x,y)\, dy = \int_x^\infty e^{-y}\, dy = [-e^{-y}]_x^\infty = e^{-x}.$$

Si $y > 0$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^y e^{-y}\,dx = e^{-y}[x]_0^y = ye^{-y}.$$

Així, $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$ $\qquad f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

Ara calculem: donat $y > 0$, si $0 < x < y$,

$$f(x\,|\,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} = \frac{1}{y}.$$

Donat $x > 0$, si $x < y < \infty$:

$$f(y\,|\,x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{-(y-x)}.$$

Així, $f(x\,|\,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{si } 0 < x < y \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$ $\qquad f(y\,|\,x) = \begin{cases} e^{-(y-x)} & \text{si } x < y < \infty \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

3) Si el senyal acaba en l'instant $t = 4$, quina és la probabilitat que en l'instant $t = 1$ encara no hagi començat?
Tenim com a condició $Y = 4$ i com a succés $X > 1$, així que utilitzarem la densitat de X condicionada a Y:

$$f(x\,|\,Y = 4) = \frac{1}{4}, \qquad 0 < x < 4.$$

La probabilitat demanada és:

$$P(X > 1\,|\,Y = 4) = \int_1^4 \frac{1}{4}\,dx = \frac{3}{4}.$$

Exemple 2.3

El senyal d'entrada, X (volts), en un canal de comunicacions és distribuït uniformement en l'interval $[-2, 2]$. El senyal de sortida, Y (volts), és la suma del senyal d'entrada més un soroll que és distribuït uniformement en l'interval $[-3, 3]$. Calculem les probabilitats condicionades $P(Y \leq 0\,|\,X = 1)$, $P(Y \leq y\,|\,X = 1)$ i $P(Y \leq y\,|\,X = x)$. És a dir, quina és la probabilitat que el senyal de sortida sigui més petit o igual que zero sabent que el senyal d'entrada és igual a 1 V? Quina és la probabilitat de qualsevol valor del senyal de sortida y sabent que el senyal d'entrada és 1 V? I finalment, de manera més genèrica, quina és aquesta probabilitat per a qualsevol valor x del senyal d'entrada?

Si el senyal d'entrada és x, donat un valor qualsevol de x, el senyal de sortida, y, podrà prendre un valor dins del marge $[-3, 3]$ centrat en el valor de x concret. És a dir, la variable Y es distribueix uniformement en $[x - 3, x + 3]$. Per exemple, si el senyal d'entrada és d'un volt, $X = 1$, llavors Y es distribueix uniformement en $[-2, 4]$.

Calculem ara la probabilitat condicionada: $P(Y \leq 0\,|\,X = 1) = \frac{2}{6}$. Com hem fet aquest càlcul? Fixeu-vos que $Y \leq 0$ per a l'interval $[-2, 0]$ respecte a l'interval total $[-2, 4]$.

Ara respondrem la segona qüestió: $P(Y \leq y\,|\,X = 1) = \frac{y+2}{6}$ per a $-2 < y < 4$. Fixeu-vos que en aquest cas hem pres tot l'interval de valors possibles per a la variable Y sabent que X pren un valor igual a 1.

El cas més general és $P(Y \leq y\,|\,X = x) = \frac{y-x+3}{6}$ per a $x - 3 < y < x + 3$. Fixeu-vos que aquí hem expressat la variable Y en funció dels valors possibles de X.

2.4 Relació entre variables aleatòries contínues: covariància i coeficient de correlació

Definim els mateixos paràmetres que hem vist per a vectors discrets com en el cas de les variables aleatòries unidimensionals. Ara els sumatoris esdevindran integrals.

Definició 2.7.

Esperança del producte:

$$\mathrm{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,\ y)\, dx\, dy. \tag{24}$$

Covariància:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))] \tag{25}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathrm{E}(X))(y-\mathrm{E}(Y)) f_{XY}(x,\ y)\, dx\, dy.$$

Igual que en el cas discret, s'obté la propietat:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y). \tag{26}$$

Coeficient de correlació:

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{27}$$

Com en el cas de variables aleatòries discretes, el paràmetre covariància dona informació sobre la relació lineal entre X i Y, és a dir, si les variables creixen conjuntament o no. Per a donar una informació més significativa, cal normalitzar la covariància, i per això definim el coeficient de correlació.

Observació

Fixeu-vos en les propietats de la covariància i del coeficient de correlació per als casos de les variables discretes i contínues i observeu que són idèntiques.

Propietats de la covariància i del coeficient de correlació

1) $-1 \leq \rho \leq 1$.

2) Si ρ és a prop d'1 o -1, diem que hi ha una forta correlació lineal entre X i Y.

3) Si X i Y augmenten o disminueixen conjuntament, $\rho > 0$.

4) Si una de les variables augmenta en disminuir l'altra (o a l'inrevés), $\rho < 0$.

5) Si ρ es troba a prop de 0, les variables presenten una correlació lineal dèbil o no hi ha correlació lineal. En el cas particular de $\rho = 0$, diem que les variables són linealment incorrelacionades (hi podria haver un altre tipus de correlació no lineal).

6) Si X i Y són independents, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ i $\rho = 0$. La implicació contrària, en general, no és certa.

Exemple 2.4

(X, Y) és un vector aleatori bidimensional uniforme en la regió limitada pel triangle, T, de costats sobre les rectes $y = 0$, $x = 3$ i $y = x$. Ho podeu veure en la figura 4.

Figura 4. Densitat uniforme en el domini T

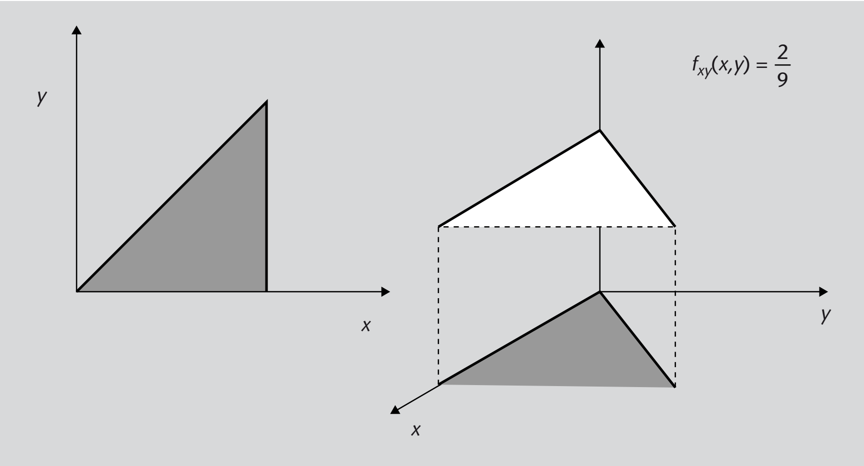


Figura 4

Observeu com definim el domini on són definides les variables x i y i la densitat uniforme dins d'aquest domini.

1) Trobem la funció de densitat conjunta, funcions de densitat marginals i el valor esperat de cada una de les variables. Les variables X i Y són independents?
Com que la distribució és uniforme,

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{àrea triangle}} = \frac{2}{9} & \text{si } (x,y) \in T \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Àrea del triangle

L'àrea del triangle és el producte de la base i l'alçada dividit entre dos. En aquest cas, $\frac{3 \cdot 3}{2}$.

Calculem la densitat marginal de X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy = \begin{cases} \int_0^x \frac{2}{9}\, dy = \frac{2}{9}x & \text{si } x \in [0,3] \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Fixeu-vos en els límits d'integració. Si prenem un valor qualsevol de x (ho podeu comprovar sobre la figura 4 fent una recta vertical sobre el triangle) la y és entre zero i la recta $x = y$.
Calculem ara la densitat marginal de Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_y^3 \frac{2}{9}\,dx = \frac{2}{9}(3-y) & \text{si } \; y \in [0,3], \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

En aquest cas fixem un valor qualsevol de y traçant una recta horitzontal sobre el triangle. Fixeu-vos que x és entre les rectes $x = y$ i $x = 3$, que són els valors que ens defineixen els límits d'integració.
Valor esperat de X:

Límits d'integració

Fixeu-vos que ara prenem com a límits d'integració tot l'interval de variació de les variables aleatòries $[0,3]$ a diferència de quan hem calculat les densitats marginals per a cadascuna de les variables.

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = \frac{2}{9}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{2}{9}\cdot\frac{3^3}{3} = 2.$$

Valor esperat de Y:

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \frac{2}{9}\int_0^3 (3-y)y\,dy = \frac{2}{9}\left(\frac{3^3}{2} - \frac{3^3}{3}\right) = 1.$$

Les variables no són independents perquè $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

2) Trobem el coeficient de correlació.
Moment d'ordre 2 de X:

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x)\,dx = \frac{2}{9}.\int_0^3 x^3\,dx = \frac{2}{9}\cdot\frac{3^4}{4} = \frac{9}{2}.$$

Moment d'ordre 2 de Y:

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, f_Y(y)\,dy = \frac{2}{9}\int_0^3 (3-y)y^2\,dy = \frac{2}{9}\cdot\left(3^3 - \frac{3^4}{4}\right) = \frac{3}{2}.$$

Variància de X i σ_X:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}, \qquad \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Variància de Y i σ_Y:

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}, \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Esperança del producte:

$$\mathrm{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{2}{9}\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{x} x\,y\,dy\,dx = \frac{2}{9}\int_{x=0}^{3} \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{2}{9}\cdot\frac{3^4}{8} = \frac{9}{4}.$$

Covariància i coeficient de correlació:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = \frac{9}{4} - 2 \cdot 1 = \frac{1}{4}, \qquad \rho = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}.$$

3) Trobem les probabilitats: $P(X < \frac{1}{2})$, $P(Y < \frac{1}{2})$ i $P(XY < \frac{1}{4})$:

$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{9}\, x\, dx = \frac{1}{36}.$$

Representem el volum que determina la zona del triangle on $x < \frac{1}{2}$ (figura 5):

$$P\left(Y < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{9}\,(3-y)\, dy = \frac{11}{36}.$$

Representem el volum que determina la zona del triangle on $y < \frac{1}{2}$ (figura 5):

$$P\left(XY < \frac{1}{4}\right) = \int_{x=0}^{\frac{1}{2}} \int_{y=0}^{x} \frac{2}{9}\, dy\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{3} \int_{y=0}^{\frac{1}{4x}} \frac{2}{9}\, dy\, dx$$

$$= \frac{2}{9} \int_0^{\frac{1}{2}} x\, dx + \frac{2}{9} \int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{1}{4x}\, dx = \frac{1}{36} + \frac{\ln 3 + \ln 2}{18} = 0{,}127.$$

En la figura 5 mostrem la zona del triangle on $xy < \frac{1}{4}$ i el volum que genera.

Figura 5. Funció de densitat uniforme en el triangle T

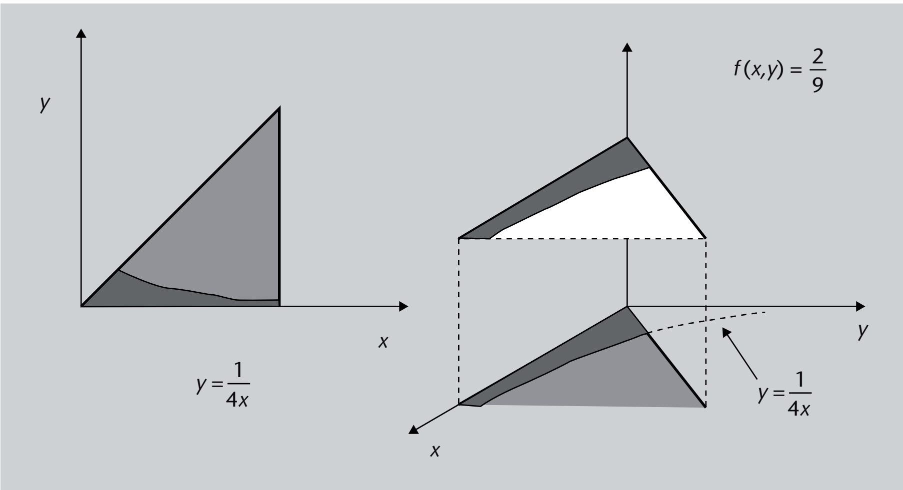


Figura 5

La zona del triangle on definim les variables aleatòries genera un volum determinat.

Resum

En aquest mòdul hem vist els vectors aleatoris. Aquests poden ser discrets (apartat 1 del mòdul) o continus (apartat 2 del mòdul).

Donades X i Y dues variables aleatòries discretes, podem definir un vector aleatori discret, (X, Y). D'aquest vector aleatori, hem definit la **probabilitat conjunta** i la **probabilitat marginal**:

- Probabilitats conjuntes: $P(X=a_i, Y=b_j) = P(\{X=a_i\} \cap \{Y=b_j\})$.
- Probabilitat marginal de X (de manera anàloga, podríem definir la de Y): $P(X=a_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X=a_i, Y=b_j)$.

També hem vist el concepte de **probabilitat condicionada**:

$$P(X=a_i \mid Y=b_j) = \frac{P(X=a_i,\ Y=b_j)}{P(Y=b_j)}.$$

I hem definit el concepte d'**independència**. Hem vist que X i Y són independents si i només si $P(X=a_i,\ Y=b_j) = P(X=a_i)P(Y=b_j)$ per a tot i, j.

Per finalitzar, hem après a mesurar el grau de similitud de les variables aleatòries que formen el vector mitjançant els conceptes següents:

- **Esperança del producte**: $\mathrm{E}(XY) = \sum_i \sum_j a_i b_j P(X=a_i,\ Y=b_j)$.
- **Covariància**: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))] = \mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.
- **Coeficient de correlació lineal de Pearson**: $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

L'apartat 2 d'aquest mòdul l'hem dedicat als vectors aleatoris bidimensionals continus. Concretament, si X i Y són variables aleatòries contínues, podem definir el vector aleatori continu (X, Y), i hem vist els conceptes associats següents:

- **Funció de distribució conjunta**: $F_{XY}(x,y) = P(X \leq x,\ Y \leq y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- **Funció de densitat conjunta**: Si F_{XY} és dues vegades derivable, la f_{XY} és $f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$.
- **Densitat marginal de X**: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$. (De manera anàloga podem definir la densitat marginal de Y.)
- **Densitat de X condicionada a $Y=y$**: $f(x \mid y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$. (De manera anàloga podem definir la densitat de Y condicionada a $X=x$.)

- **Esperança del producte**: $\mathrm{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$.
- **Covariància**: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))] = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.
- **Coeficient de correlació**: $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Activitats

1. Disposem d'un canal de comunicacions que caracteritzem amb les variables aleatòries X i Y, la velocitat de transmissió del canal i la proporció d'errors que introdueix el canal, respectivament. La funció de densitat conjunta del vector aleatori (X, Y) és expressada en funció d'una constant k:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(x+y) & \text{si } \ 0 < x < 2, \ 0 < y < 2 \\ \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

a) Busqueu el valor de k.
Pista: de manera anàloga a com succeïa en el cas de funcions de densitat d'una variable aleatòria, el volum total determinat per la funció de densitat conjunta en $\mathbb{R}^2$ ha de valer 1 (fórmula (17)).

b) Busqueu les funcions de densitat marginals de X i Y.

c) Determineu si X i Y són independents.

2. Per al vector aleatori (X, Y) del problema anterior:

a) Busqueu les funcions de densitat condicional $f(x \,|\, y)$ i $f(y \,|\, x)$.

b) Busqueu $P\left(0 < Y < \frac{1}{2} \,|\, X = 1\right)$.

3. Donat un senyal acústic que representem mitjançant la variable aleatòria X, l'introduïm en un amplificador que genera una nova variable aleatòria $Y = aX + b$ (a i b constants, a distinta de zero). Es demana:

a) Busqueu la covariància de X i Y i expresseu-la en termes de σ_X^2, la variància de X.
Pista: recordeu que l'esperança és un operador lineal.

b) Fent ús del fet que $\text{Var}(Y) = \text{Var}(aX + b) = a^2\,\text{Var}(X)$, trobeu* el coeficient de correlació de X i Y.

* Atenció: durant els càlculs recordeu que una desviació típica sempre és positiva, mentre que la constant a podria ser positiva o negativa.

4. La funció de densitat conjunta d'un vector aleatori (X, Y) és:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 6y & \text{si } \ 0 < y < x < 1 \\ \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

a) Busqueu la funció de densitat marginal $f_X(x)$.

b) Busqueu la funció de densitat condicional $f(y \,|\, x)$.

c) Calculeu el valor esperat condicional corresponent, és a dir, $\text{E}(Y \,|\, X = x)$.

5. La funció de probabilitat conjunta de dos senyals digitals que es representen mitjançant un vector aleatori (X, Y) és:

$$P_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0{,}45 & \text{si } \ x = 0, \ y = 0 \\ \\ 0{,}1 & \text{si } \ x = 1, \ y = 0 \\ \\ 0{,}05 & \text{si } \ x = 0, \ y = 1 \\ \\ 0{,}4 & \text{si } \ x = 1, \ y = 1 \\ \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

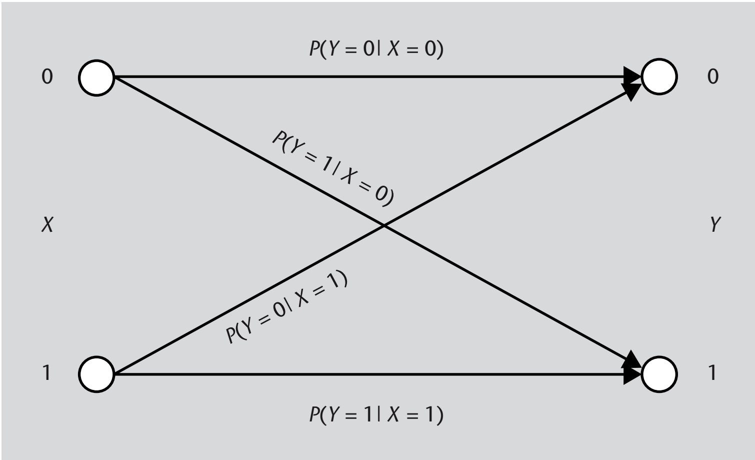
a) Calculeu les funcions de probabilitat marginal de X i de Y.

b) Busqueu el valor mitjà i la variància de X. El mateix per a Y.

c) Busqueu la covariància i el coeficient de correlació de X i Y.

6. Proveu que no hi poden haver dues variables aleatòries X i Y per a les quals $\mathrm{E}(X) = 3$, $\mathrm{E}(Y) = 2$, $\mathrm{E}(X^2) = 10$, $\mathrm{E}(Y^2) = 29$ i $\mathrm{E}(XY) = 0$.
Pista: feu la prova per reducció a l'absurd, és a dir, suposeu que és cert el que diu l'enunciat i tracteu de buscar-hi una contradicció.

7. Considereu el canal de comunicació que es mostra a sota. Sigui (X, Y) un vector aleatori, en què X és l'entrada del canal i Y és la sortida. Sabem que $P(X=0) = 0{,}5$, $P(Y=1 \mid X=0) = 0{,}1$ i que $P(Y=0 \mid X=1) = 0{,}2$. Es demana:



a) Busqueu la funció de probabilitat conjunta $P_{XY}(x, y)$.

b) Busqueu les funcions de probabilitat marginals $P_X(x)$ i $P_Y(y)$.

c) Són X i Y independents?

8. La funció de distribució conjunta d'un vector aleatori (X, Y) és determinada per

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{y+e^{-x(y+1)}}{y+1} - e^{-x} & \text{si } x,\, y > 0 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Busqueu la funció de densitat conjunta, $f_{XY}(x, y)$, i feu ús d'un programari (per exemple, el Wiris) per a representar-la gràficament.

9. La funció de densitat conjunta d'un vector aleatori (X, Y) és determinada per

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

a) Busqueu les funcions de densitat marginals de X i Y.

b) Busqueu les funcions de densitat condicional $f(x \mid y)$ i $f(y \mid x)$.

10. En un servidor que processa peticions de client definim dos temps d'espera: X_1, que és el temps d'espera de la petició a la cua del servidor, i X_2, que és el temps que el servidor empra a processar la petició.

Les variables aleatòries X_1 i X_2 tenen la funció de densitat conjunta següent:

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2)} & \text{si } 0 < x_1 < \infty,\ 0 < x_2 < \infty \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Calcula:

a) La probabilitat que la petició estigui més d'una hora en el sistema (temps en la cua més temps de processament).

b) Les densitats marginals de X_1 i X_2.

c) Són independents X_1 i X_2?

d) La probabilitat que la petició passi més d'una hora esperant a la cua.

Solucionari

1.

a)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = k\int_0^2\int_0^2 (x+y)dxdy$$

$$= k\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=0}^{x=2} dy = k\int_0^2 (2+2y)dy = 8k \Rightarrow k = \frac{1}{8}.$$

b) La funció de densitat marginal de X és:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \frac{1}{8}\int_0^2 (x+y)dy = \frac{1}{8}\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+1) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Anàlogament, la funció de densitat marginal de Y és:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \frac{1}{8}\int_0^2 (x+y)dy = \frac{1}{8}\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} = \begin{cases} \frac{1}{4}(y+1) & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

c) X i Y no són independents, ja que $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ ($\frac{1}{8}(x+y) \neq \frac{1}{4}(x+1)\cdot\frac{1}{4}(y+1)$).

2.

a)

$$f(y\,|\,x) = \frac{\frac{1}{8}(x+y)}{\frac{1}{4}(x+1)} = \frac{x+y}{2(x+1)}, \qquad 0 < y < 2,\ 0 < x < 2.$$

$$f(x\,|\,y) = \frac{\frac{1}{8}(x+y)}{\frac{1}{4}(y+1)} = \frac{x+y}{2(y+1)}, \qquad 0 < x < 2,\ 0 < y < 2.$$

b) La probabilitat demanada és:

$$P\left(0 < Y < \frac{1}{2}\,|\,X = 1\right) = \int_0^{1/2} f(y\,|\,x=1)dy = \int_0^{1/2} \frac{1+y}{4}dy = \frac{5}{32}.$$

3.

a) Noteu que

$$\mathrm{E}(XY) = E\left[X(aX+b)\right] = a\,\mathrm{E}(X^2) + b\,\mathrm{E}(X).$$

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(aX+b) = a\,\mathrm{E}(X) + b.$$

Per tant,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = a\,\mathrm{E}(X^2) + b\,\mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)(a\,\mathrm{E}(X) + b)$$

$$= a(\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2) = a\,\mathrm{Var}(X) = a\sigma_X^2.$$

b) Noteu que* $\quad \sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2 \;\Rightarrow\; \sigma_Y = |a|\,\sigma_X.$

* Vegeu l'exemple 3.2 del mòdul "Funcions de variables aleatòries".

El coeficient de correlació de X i Y és:

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{\sigma_X\cdot|a|\,\sigma_X} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & a>0 \\ -1 & a<0. \end{cases}$$

4.

a)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_0^x 6y dy = 3x^2.$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0<x<1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

b)

$$f(y\,|\,x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 2\frac{y}{x^2} & 0<y<x<1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

c) El valor demanat és:

$$\mathrm{E}(Y\,|\,X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y\,|\,x)dy = \frac{1}{x^2}\int_0^x 2y^2 dy = \frac{2}{3}x.$$

5.

a) Probabilitat marginal de X:

$$P(X=0) = P_{XY}(0,0) + P_{XY}(0,1) = 0{,}5, \qquad P(X=1) = P_{XY}(1,0) + P_{XY}(1,1) = 0{,}5.$$

Probabilitat marginal de Y:

$$P(Y=0) = P_{XY}(0,0) + P_{XY}(1,0) = 0{,}55, \qquad P(Y=1) = P_{XY}(0,1) + P_{XY}(1,1) = 0{,}45.$$

b)

$$\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5.$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_i x_i^2 P(X = x_i) = 0^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}5.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 0{,}5 - 0{,}5^2 = 0{,}25.$$

Anàlogament, s'obté:

$$\mathrm{E}(Y) = 0{,}45, \qquad \mathrm{Var}(Y) = 0{,}2475.$$

c)

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j P_{XY}(x_i, y_j) = 0 \cdot 0 \cdot 0{,}45 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4.$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0{,}4 - 0{,}5 \cdot 0{,}45 = 0{,}175.$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0{,}175}{\sqrt{0{,}25 \cdot 0{,}2475}} = 0{,}704.$$

6. Si suposem que se satisfan totes les condicions de l'enunciat,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0 - 3 \cdot 2 = -6.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 10 - 9 = 1 \implies \sigma_X = 1.$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2 = 29 - 4 = 25 \implies \sigma_Y = 5.$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-6}{1 \cdot 5} = -\frac{6}{5} < -1.$$

Això és una contradicció, ja que ha de ser $-1 \leq \rho \leq 1$.

Per tant, no es poden donar alhora totes les condicions de l'enunciat.

7.

a) Noteu que $P(X=1) = 0{,}5$, $P(Y=0 \,|\, X = 0) = 0{,}9$ i $P(Y=1 \,|\, X = 1) = 0{,}8$.

Per tant,

$P_{XY}(0, 0) = P(X=0, Y=0) = P(Y=0 \,|\, X = 0)P(X = 0) = 0{,}45.$

$P_{XY}(0, 1) = P(X=0, Y=1) = P(Y=1 \,|\, X=0)P(X=0) = 0{,}05.$

$P_{XY}(1,0) = P(X=1, Y=0) = P(Y=0 \mid X=1)P(X=1) = 0{,}10.$

$P_{XY}(1,1) = P(X=1, Y=1) = P(Y=1 \mid X=1)P(X=1) = 0{,}40.$

b) Les funcions de probabilitat marginals són:

Marginal de X:

$P_X(0) = P(X=0) = P_{XY}(0,0) + P_{XY}(0,1) = 0{,}5.$

$P_X(1) = P(X=1) = P_{XY}(1,0) + P_{XY}(1,1) = 0{,}5.$

Marginal de Y:

$P_Y(0) = P(Y=0) = P_{XY}(0,0) + P_{XY}(1,0) = 0{,}55.$

$P_Y(1) = P(Y=1) = P_{XY}(0,1) + P_{XY}(1,1) = 0{,}45.$

c) X i Y no són independents, ja que $P_{XY}(0,0) = 0{,}45 \neq P_X(0)P_Y(0) = 0{,}275$.

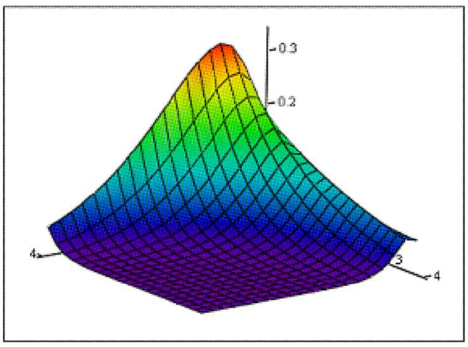
8. Per a x, $y > 0$, es té:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_{XY}}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{-x} - e^{-x(y+1)}) = xe^{-x(y+1)}.$$

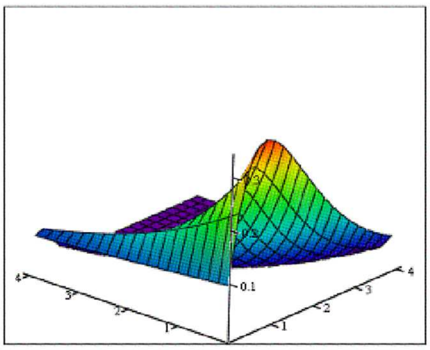
Llavors,

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & x,\ y > 0 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

A continuació es mostra la gràfica de la funció de densitat conjunta des de diferents perspectives:



S



S

9.

a) Si $0 < x < 1$ llavors $f_X(x) = \int_0^x 2dy = 2x$. Per tant,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Si $0 < y < 1$ llavors $f_Y(y) = \int_y^1 2dx = 2(1-y)$. Per tant, $f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

b) Si $0 < y < x < 1$ llavors $f(y\,|\,x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$. Per tant, $f(y\,|\,x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

Si $0 < y < x < 1$ llavors $f(x\,|\,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{1-y}$. Per tant, $f(x\,|\,y) = \begin{cases} \frac{1}{1-y} & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

10.

a) Calculem la probabilitat que el temps d'espera total no superi 1 hora, és a dir, $X_1+X_2 > 1$.

$$P(X_1 + X_2 > 1) = 1 - P(X_1 + X_2 < 1) = 1 - \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} e^{-(x_1+x_2)} dx_2 \right) dx_1$$

$$1 - \int_0^1 e^{-x_1}(1 - e^{-(1-x_1)}) dx_1 = 1 - \int_0^1 (e^{-x_1} - e^{-1}) dx_1$$

$$1 - [-e^{-x_1} - e^{-1}x_1]_0^1 = 2e^{-1}.$$

b) Les funcions de densitat marginals són les següents:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty e^{-(x_1+x_2)} dx_2 = e^{-x_1} \int_0^\infty e^{-x_2} dx_2 = e^{-x_1}, \quad x_1 > 0.$$

Anàlogament, per a x_2:

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^\infty e^{-(x_1+x_2)} dx_1 = e^{-x_2} \int_0^\infty e^{-x_1} dx_2 = e^{-x_2}, \quad x_2 > 0.$$

c) X_1 i X_2 són independents, ja que, per a $x_1 > 0, x_2 > 0$,

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = e^{-(x_1+x_2)} = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) = e^{-x_1} e^{-x_2}.$$

d) La probabilitat que el temps d'espera a la cua sigui més gran que una hora és:

$$P(X_1 > 1) = \int_1^\infty e^{-x_1} dx_1 = e^{-1}.$$