Funcions de variables aleatòries

PID_00253288

Ana Escudero
Alícia Miralles
Alícia Vila

Temps mínim de dedicació recomanat: 2 hores

Universitat
Oberta
de Catalunya

Índex

Introducció

En els mòduls "Introducció a la probabilitat" i "Variables aleatòries" hem vist les bases de la teoria de la probabilitat i hem estudiat les distribucions de variables aleatòries discretes i contínues més importants. A partir d'això ens podem plantejar la pregunta següent: què succeeix si modifiquem una variable aleatòria X? Imagineu que tenim un circuit electrònic i que introduïm la variable X com a senyal d'entrada. Quin resultat obtindrem a la sortida? Serà també una variable aleatòria? I amb quines característiques? Això dependrà en cada cas de les modificacions que apliquem sobre X. Per exemple, si fem passar un senyal, X, a través d'un rectificador d'ona, com veurem més endavant, podem obtenir a la sortida un senyal, Y, amb una distribució diferent de X.

En aquest mòdul parlarem d'una variable aleatòria Y que és funció d'una altra, X, i escriurem $Y = g(X)$. Aquest aspecte ja es tracta de passada en el mòdul "Variables aleatòries". En els subapartats 2.2 i 3.3 d'aquell mòdul es veu que per a calcular la variància d'una variable aleatòria cal calcular l'esperança de la variable aleatòria $(X - \mathrm{E}(X))^2$. En aquest cas diríem que $Y = g(X) = (X - \mathrm{E}(X))^2$.

En aquest mòdul tractarem alguns casos senzills. Començarem veient, en l'apartat 1, com podem aplicar una funció sobre una variable aleatòria discreta. En l'apartat 2 aplicarem funcions sobre variables aleatòries contínues. Veurem alguns exemples molt concrets de funcions. En l'apartat 3 enunciarem el teorema de l'esperança i veurem com el podem aplicar.

Objectius

Els objectius que ha d'assolir l'estudiant un cop treballats els materials didàctics d'aquest mòdul són:

1. Entendre el concepte de funció d'una variable aleatòria discreta i posar-ne exemples.
2. Calcular la funció de probabilitat d'una variable aleatòria discreta transformada mitjançant una funció a partir de la funció de probabilitat de la variable aleatòria original.
3. Entendre el concepte de funció d'una variable aleatòria contínua i posar-ne exemples.
4. Calcular la funció de distribució i la funció de densitat d'una variable aleatòria contínua transformada mitjançant una funció, a partir de les funcions de distribució i densitat de la variable aleatòria original.
5. Estudiar tres casos particulars de funció sobre una variable aleatòria contínua i saber en quins casos es pot aplicar.
6. Comprendre el sentit del teorema de l'esperança i les seves aplicacions.

1. Funció d'una variable aleatòria discreta

Suposem que X és una variable aleatòria discreta amb valors dins el conjunt $\Omega_X = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. El conjunt Ω_X pot tenir un nombre finit d'elements o una quantitat infinita numerable d'elements. Sigui Y una nova variable aleatòria discreta definida per una funció $Y = g(X)$. Ens interessa trobar la distribució de probabilitats de Y. Suposem que Y pren valors dins el conjunt $\Omega_Y = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m\}$. Per a trobar la probabilitat de cada un d'aquests valors, b_j, hem de trobar la probabilitat del subconjunt de valors de Ω_X, que tenen per imatge b_j. És a dir, $P(Y=b_j) = P(g(X)=b_j)$ i el succés $g(X)=b_j$ éstarà format pels elements a_i tals que $g(a_i) = b_j$. Ho escrivim de la manera següent.

Observació

En el cas de variables aleatòries discretes podem treballar directament amb la funció de probabilitat.

Transformació de la funció de probabilitat

$$P(Y=b_j) = \sum_{\substack{a_i \\ (g(a_i)=b_j)}} P(X=a_i). \tag{1}$$

Vegem-ne un exemple.

Exemple 1.1

Sigui X la variable aleatòria discreta que compta el nombre de zeros en un missatge de mida 3 format pels bits 0 i 1 (elements del conjunt $\{0,1\}$). X pot prendre els valors $\{0,1,2,3\}$, ja que aquest és el nombre de zeros que podem comptabilitzar en el missatge. Si la probabilitat que hi hagi un zero en una posició determinada és $\frac{1}{2}$, $X \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{2})$. Ara definim una funció g sobre la variable X, $Y = g(X)$ com

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0, \\ 3 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Segons hem definit $g(x)$, Y pot prendre els valors $\{2,3\}$. Calcular la distribució de probabilitat de la variable Y és donar-ne totes les probabilitats. Així,

$$P(Y=2) = P(X=0) = \binom{3}{0}\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

$$P(Y=3) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = \binom{3}{1}\frac{1}{2^3}+\binom{3}{2}\frac{1}{2^3}+\binom{3}{3}\frac{1}{2^3} = \frac{3+3+1}{8} = \frac{7}{8}.$$

La suma de les probabilitats $P(Y=2) + P(Y=3)$ és igual a 1, ja que $g(X)$ inclou tots els valors possibles de X i sabem que la suma de $\sum_i P(X=a_i)$ és igual a 1.

Distribució binomial

Recordeu que la distribució binomial, $\text{Bin}(n,p)$, que s'estudia en el subapartat 2.1.2 del mòdul "Variables aleatòries" es caracteritza pel nombre d'experiments que es fan; en aquest cas generem un missatge de 3 bits, i per la probabilitat d'èxit, que aquí consisteix en el fet que surti un zero i és $\frac{1}{2}$.

Probabilitats en una distribució binomial

Recordeu, del subapartat 2.1.2 del mòdul "Variables aleatòries", que $P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ amb $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$.

2. Funció d'una variable aleatòria contínua

Suposem que X és una variable aleatòria contínua amb funció de densitat coneguda $f_X(x)$. Definim una nova variable aleatòria $Y = g(X)$, i el que voldríem és trobar la funció de distribució de Y.

Funcions de distribució i de densitat

En el subapartat 3.1 del mòdul "Variables aleatòries" vam veure que per a les variables aleatòries contínues podíem definir la funció de distribució, $F_X(x)$, i la funció de densitat, $f_X(x)$. La relació entre aquestes és: $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Segons la definició de funció de distribució de Y,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y). \tag{2}$$

L'equació anterior ens diu que per a cada valor de y hem de trobar la probabilitat de tots els valors de X que satisfan $g(X) \leq y$. Per tant, prèviament, cal determinar quins són els valors de X que satisfan $g(X) \leq y$. Vegem-ne un exemple.

Observació

En el cas de variables aleatòries contínues treballem amb la funció de distribució.

Exemple 2.1

Si X segueix una distribució uniforme en l'interval $(8, 10)$, vam veure que les seves funcions de densitat i de distribució són:

Vegeu també

En el subapartat 3.2.1 del mòdul "Variables aleatòries" podeu trobar la definició de distribució uniforme, $X \sim \mathrm{U}(a, b)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10-8} = \frac{1}{2} & \text{si } \ x \in (8, 10) \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 8 \\ \frac{1}{2}(x-8) & \text{si } \ 8 \leq x < 10 \\ 1 & \text{si } \ x \geq 10. \end{cases}$$

Definim la nova variable $Y = g(X) = 8/X$ i volem trobar quina funció de distribució segueix, és a dir, volem trobar $F_Y(y)$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{8}{X} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{8}{y}\right),$$

ja que X i Y són positives.

La funció de distribució d'una variable aleatòria es defineix com $F_X(x) = P(X \leq x)$. Per tant, per a poder escriure $F_Y(y)$ en funció de $F_X(x)$ farem el canvi següent:

$$P\left(X \geq \frac{8}{y}\right) = 1 - P\left(X < \frac{8}{y}\right).$$

Recordeu que si la probabilitat d'un succés és p, la del seu complementari és $1-p$. Continuem, doncs, amb els càlculs:

$$F_Y(y) = 1 - P\left(X < \frac{8}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{8}{y}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{8}{y} - 8\right) = 5 - \frac{4}{y}.$$

Observació

En el cas de variables aleatòries contínues $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X < x)$, ja que $\forall x,\ P(X = x) = 0$.

Les igualtats anteriors són vàlides quan X é entre 8 i 10. Com que $y = \frac{8}{x}$, els càlculs són vàlids en l'interval $\frac{8}{10} < y < \frac{8}{8}$, és a dir, $0{,}8 < y < 1$.

Figura 1. Funció $y = g(x) = \frac{8}{x}$

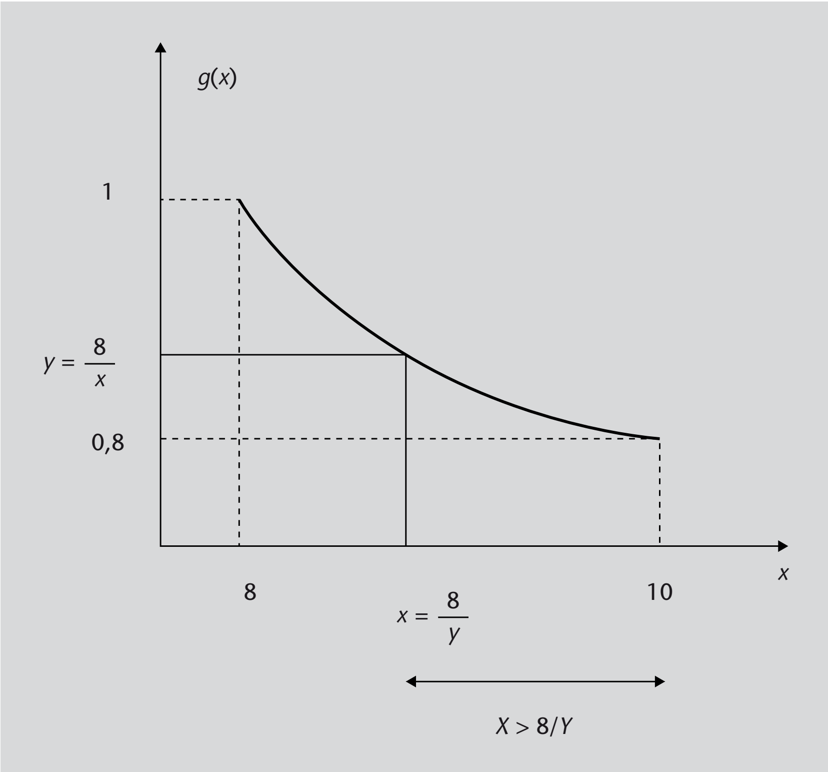


Figura 1

En aquesta figura podeu veure quina és la transformació que hem aplicat a la variable aleatòria X.

La funció de distribució és:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0{,}8 \\ 5 - \frac{4}{y} & \text{si } 0{,}8 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$$

La funció de densitat de Y la trobem derivant la funció de distribució. Tenim:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{y^2} & \text{si } 0{,}8 < y < 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Observem que Y no segueix una distribució uniforme, ja que tot i que partíem d'una distribució uniforme, X, li hem aplicat una transformació no lineal.

En l'exemple anterior, per a poder obtenir la funció de densitat de Y, $f_Y(y)$, hem hagut de calcular prèviament la funció de distribució $F_Y(y)$. Quan la funció $g(x)$ és derivable i estrictament creixent o estrictament decreixent, podem trobar la funció de densitat de Y directament a partir de la funció de densitat de X, $f_X(x)$, tal com s'explica a continuació.

Funcions derivables

De manera informal, diem que una funció és derivable quan és contínua i no té pics.

2.1 Funció de densitat de $Y = g(X)$ quan $g(x)$ és estrictament creixent

Comencem, doncs, assumint una funció contínua, creixent i amb una correspondència d'un a un entre la variable X i els valors que pren, $Y = g(X)$. Per definició, sabem que la funció de distribució de la variable Y es defineix com $F_Y(y) = P(Y \leq y)$. També sabem que $Y = g(X)$; per tant,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y).$$

En les condicions que acabem d'enumerar en el paràgraf anterior per a $Y = g(X)$, hi ha una funció inversa, $g^{-1}(x)$, que està ben definida en tots el punts i que ens permet obtenir els valors de X a partir de Y. Si g és creixent, g^{-1} també ho serà i podem aplicar-la als dos costats d'una desigualtat, de manera que es mantingui la desigualtat. Si apliquem la funció inversa als dos costats de l'expressió $g(X) \leq y$ obtenim el següent:

Funció inversa

La funció inversa $g^{-1}(x)$ desfà els canvis que havia fet la funció $g(x)$.

$$g^{-1}(g(X)) \leq g^{-1}(y) \;\Rightarrow\; X \leq g^{-1}(y).$$

Si seguim amb el càlcul que havíem començat de $F_Y(y)$, podem escriure el següent:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)).$$

Ara, en el darrer terme d'aquesta igualtat apareix la probabilitat que X sigui més petita que un cert valor, és a dir, apareix la definició de la funció de distribució de X, ja que $P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$. Per tant, podem dir que:

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)). \tag{3}$$

Un cop obtinguda la funció de distribució en farem la derivada per a obtenir la funció de densitat. Abans de fer aquest pas cal apuntar que el fet que $g(x)$ sigui estrictament creixent i derivable ens permet escriure:

Derivada de funcions inverses

Si $f(x)$ i $g(x)$ són funcions inverses, és a dir, $g \circ f = f \circ g = I$, llavors $g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

$$(g^{-1}(y))' = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{1}{g'(x)} \quad \text{amb} \quad x = g^{-1}(y),$$

és a dir, la derivada d'aquesta funció inversa, $g^{-1}(x)$, és 1 dividit entre la derivada de la funció $g(x)$. Ara ja podem obtenir la densitat de Y derivant la distribució de Y donada per (3), utilitzant la regla de la cadena:

Vegeu també

La funció de densitat s'estudia en el subapartat 3.1 del mòdul "Variables aleatòries".

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))' = f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{g'(g^{-1}(y))},$$

i arribem al resultat següent.

Si la transformació $Y = g(X)$ és estrictament creixent,

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} \quad \text{amb} \quad x = g^{-1}(y). \tag{4}$$

Exemple 2.2

Considerem les variables aleatòries X i $Y = X^3$. En aquest cas tenim $g(x) = x^3$, que és estrictament creixent i derivable. De $y = x^3$ obtenim $x = g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$. Utilitzant el resultat que acabem d'obtenir que relaciona les funcions de densitat $f_Y(y)$ i $f_X(x)$, arribem al resultat següent:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{f_X(x)}{3x^2} = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}f_X(y^{\frac{1}{3}}).$$

Exemple 2.3

Suposeu que tenim una variable aleatòria gaussiana amb valor mitjà m i variància σ^2, $X \sim \mathrm{N}(m, \sigma)$. Definim una nova variable aleatòria segons la transformació següent: $Y = aX + b$. Si fem $a > 0$, llavors aquesta funció $g(X) = aX + b$ és estrictament creixent.

Ara calculem la funció de densitat de la nova variable Y:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{1}{a}f_X(x) = \frac{1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Per a arribar a aquest resultat, recordeu que $dy/dx = a$ i que $x = \frac{y-b}{a}$. Ara substituïm la funció de densitat $f_X(x)$ d'aquesta darrera igualtat per la funció de densitat de la distribució normal o de Gauss i arribem a l'equació següent:

Vegeu també

La distribució de Gauss s'estudia en el subapartat 3.2.3 del mòdul "Variables aleatòries".

$$f_Y(y) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma}e^{-\frac{(y-(am+b))^2}{2(a\sigma)^2}}.$$

Fixeu-vos que la funció de densitat de la variable Y és també gaussiana; això és perquè hem aplicat una transformació lineal i, per tant, la forma de la variable Y s'ha mantingut. Únicament han canviat el valor mitjà i la desviació: $Y \sim \mathrm{N}(am + b, a\sigma)$.

2.2 Funció de densitat de $Y = g(X)$ quan $g(x)$ és estrictament decreixent

Si la funció $g(x)$ és estrictament decreixent i derivable, obtenim una expressió semblant a la del subapartat anterior:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)).$$

Fixeu-vos, però, en la tercera igualtat d'aquesta equació. Com que la funció que apliquem ara és decreixent, el succés $Y \leq y$ és equivalent al succés $X \geq g^{-1}(y)$. En la quarta igualtat apliquem el fet que si un succés té una probabilitat p el seu complementari té una probabilitat $1 - p$.

Com hem fet en el subapartat 2.1, si derivem aquesta expressió arribem al resultat següent.

Si la transformació $Y = g(X)$ és estrictament decreixent,

$$f_Y(y) = -\frac{f_X(x)}{g'(x)} \quad \text{amb} \quad x = g^{-1}(y). \tag{5}$$

Exemple 2.4

Considerem les variables aleatòries X i $Y = -X^3$. En aquest cas tenim $g(x) = -x^3$, que és estrictament decreixent i derivable, i $x = g^{-1}(y) = -y^{\frac{1}{3}}$. La relació entre les funcions de densitat és:

$$f_Y(y) = -\frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{f_X(x)}{3x^2} = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}} f_X(-y^{\frac{1}{3}}).$$

2.3 Funció de densitat de $Y = g(X)$ quan $g(x)$ no és monòtona

En els casos vistos anteriorment $g(x)$ era una funció monòtona (sempre creixent o sempre decreixent). Si $g(x)$ té intervals de creixement i decreixement, calcular la funció de distribució de Y és més complicat. En aquest cas s'arriba a un mètode per a calcular la densitat de Y directament a partir de la densitat de X.

Transformacions amb trossos constants

Si $Y = g(X)$ i $g(x)$ és constant en algun interval on la densitat de X és no nul·la, la variable Y no és contínua sino mixta. Aquests casos s'han de tractar amb més cura.

Considerem el cas, bastant general, en què la funció $y = g(x)$ és derivable a trossos i no hi ha cap interval on sigui constant. Resolem $y = g(x)$ amb solucions $x_1(y), \ldots, x_n(y)$.

Llavors, la funció de densitat de Y s'obté a partir de l'expressió següent:

Si la transformació $Y = g(X)$ no és constant en cap interval,

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \cdots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}, \tag{6}$$

on $x_i(y)$ són les diferents solucions de l'equació $g(x) = y$.

($f_Y(y) = 0$ per als valors de y tals que l'equació no té solucions.)

Notem que el resultat anterior inclou els casos estudiats en els apartats 2.1 i 2.2. En aquests casos $g(x) = y$ té com a molt una solució.

Exemple 2.5

Considerem una variable normal $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ i una nova variable Y definida per la transformació $Y = X^2$.

X pren valors a tot $\mathbb{R}$. La seva densitat és $f_X(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. La transformació no és monòtona ($y = x^2$ és decreixent per a $x < 0$ i creixent per a $x > 0$). Resolent l'equació $x^2 = y$ trobem que no hi ha cap solució per a $y < 0$, mentre que per a $y > 0$ hi ha dues solucions: $x_1(y) = -\sqrt{y}$ i $x_2(y) = \sqrt{y}$. La derivada de la transformació és $g'(x) = 2x$.

Llavors, $f_Y(y) = 0$ per a $y < 0$. Per a $y > 0$:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|2x_1|} + \frac{f_X(x_2)}{|2x_2|} = \frac{e^{-x_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{|2x_1|} + \frac{e^{-x_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{|2x_2|}$$

$$= \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}} + \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}} = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} e^{-y/2}.$$

Exemple 2.6

Apliquem ara la transformació $Y = X^2$ a una variable uniforme $X \sim \mathrm{U}(2,3)$. X només pren valors en l'interval $(2,3)$. La seva densitat és $f_X(x) = \frac{1}{3-2} = 1$ per a $2 < x < 3$. La transformació no és monòtona ($y = x^2$ és decreixent per a $x < 0$ i creixent per a $x > 0$). Resolent l'equació $x^2 = y$ per a y positiva obtenim dues solucions $\pm\sqrt{y}$, però $f_X(x)$ val 0 en la solució negativa, així que en la fórmula (6) només considerem $x = \sqrt{y}$. A més, com que $2 < x < 3$, hem de prendre $4 < y < 9$.

Llavors, per a $4 < y < 9$:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|2x|} = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

mentre que $f_Y(y) = 0$ fora d'aquest interval.

2.4 Exemples aplicats a les comunicacions: el rectificador de mitja ona i el convertidor d'analògic a digital

En els exemples següents les transformacions són constants en alguns intervals, de manera que la variable resultant no és contínua. En el primer exemple resulta un variable mixta mentre que en el segon exemple s'obté una variable discreta.

Exemple 2.7

Un rectificador de mitja ona és un dispositiu electrònic que elimina la part positiva o negativa d'un senyal. En la figura 2 en podeu veure el funcionament.

Figura 2. Rectificador de mitja ona

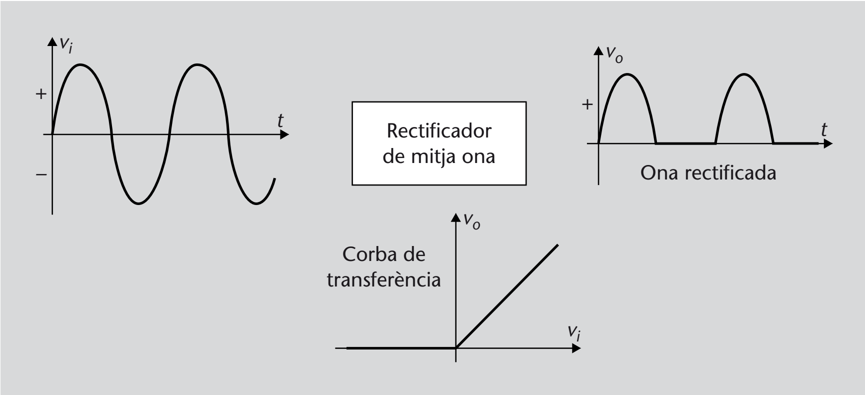


Figura 2

El rectificador de mitja ona d'aquest exemple elimina la part negativa del senyal d'entrada.

La funció $g(x)$ definida per aquest dispositiu és:

$$y = g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ara suposeu que fem passar per aquest rectificador un senyal gaussià de mitjana zero i variància σ^2. Calcularem la funció de densitat de la variable aleatòria generada a la sortida del rectificador.

Observació

Fixeu-vos que la variable y és mixta, ja que per a valors negatius de x pren un únic valor (discret), igual a zero, i per a valors positius pren el valor de x.

Com que la transformació té un tros constant (el semieix $x < 0$), podem preveure que la variable resultant sigui mixta. Per tant, calcularem la funció de distribució de Y i la derivarem utilitzant la delta de Dirac, tal com es va veure en l'apartat 3.6 del mòdul "Variables aleatòries".

Per a $y < 0$, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = 0$, ja que $g(x)$ mai no es negativa.

En $y = 0$, $F_Y(0) = P(Y \leq 0) = P(g(X) \leq 0) = P(g(X) = 0) = P(X \leq 0) = F_X(0) = \frac{1}{2}$ (hem definit el senyal d'entrada al rectificador com una variable de Gauss amb valor mitjà zero; per tant, $P(X < 0) = \frac{1}{2}$).

Per a $y > 0$, $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq y) = F_X(y)$.

Així, podem expressar el resultat

$$F_Y(y) = u(y)F_X(y).$$

Si derivem, s'obté:

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = u'(y)F_X(y) + u(y)F'_X(y) = \delta(y)F_X(0) + u(y)f_X(y).$$

Així, doncs, la funció de densitat del senyal de sortida del rectificador és la següent:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} u(y) + \frac{1}{2}\delta(y).$$

Fixeu-vos que aquesta funció de densitat té dues parts: una part contínua, que és dona per a valors de y més grans que zero (per això el primer terme és multiplicat per la funció esglaó $u(y)$), i una part discreta per a $y = 0$, que representem utilitzant la funció delta ($\delta(y)$).

Exemple 2.8

Suposem que ara la transformació $g(x)$ que apliquem a un senyal d'entrada és $g(x) = y_0$ en comptes de $g(x) = x$ per a $x_1 \leq x \leq x_2$. Com hem vist en l'exemple anterior, la funció de densitat $f_Y(y)$ inclourà un component discret (acompanyat de la funció delta, $\delta(y)$) de valor igual a $P(Y = y_0) = P(x_1 \leq x \leq x_2)$ en el punt $y = y_0$. Podem definir diferents valors de $g(x)$ per a diferents intervals. Així és com funciona un convertidor d'analògic a digital. Donat un senyal d'entrada analògic (continu), aquest circuit el discretitza segons una sèrie d'intervals definits i amb una resolució concreta. En la figura 3 podeu veure com és la corba de transferència o transformació $g(x)$ d'aquest dispositiu.

Figura 3. Corba de transferència d'un quantificador

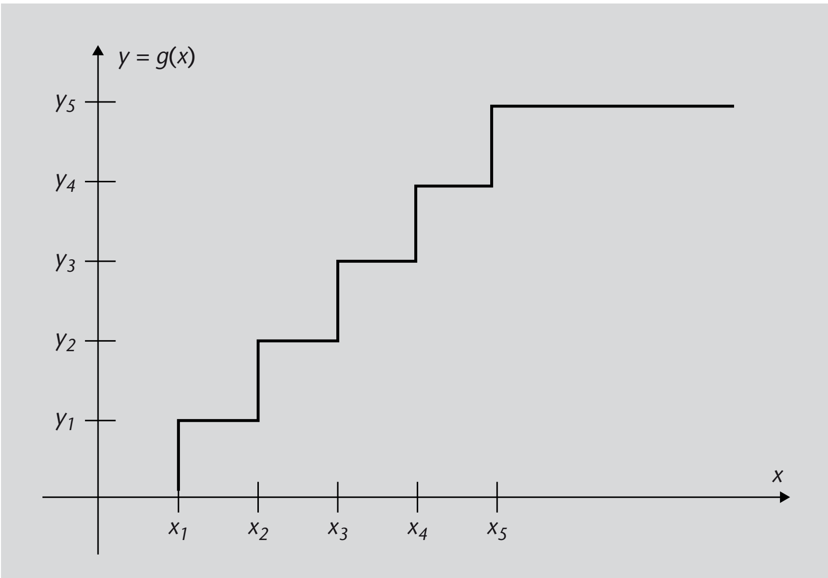


Figura 3

Un quantificador transforma un senyal analògic i continu en un senyal discret o digital.

En termes de variables aleatòries, aquest convertidor pren una variable aleatòria contínua, X, i la transforma en una variable aleatòria discreta. Si definim la funció $g(x)$ de la manera següent,

$$y = g(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } x < x_1 \\ & \dots \\ y_i & \text{si } x_i \leq x < x_{i+1} \\ & \dots \\ y_N & \text{si } x \geq x_N, \end{cases}$$

llavors Y resulta ser una variable aleatòria discreta i podem treballar directament amb les probabilitats, tal com hem vist en l'apartat 1 d'aquest mòdul. La funció de probabilitat per a aquest exemple queda, doncs, definida com segueix:

$$P(Y = y_i) = \begin{cases} P(X < x_1) & \text{si } \ i = 0 \\ P(x_i \leq X < x_{i+1}) & \text{si } \ i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ P(X \geq x_N) & \text{si } \ i = N. \end{cases}$$

3. Teorema de l'esperança

En els apartats anteriors d'aquest mòdul hem vist com es poden aplicar funcions sobre una variable aleatòria, sia discreta o contínua, per a obtenir una nova variable aleatòria. En el cas de les variables discretes, hem vist que podem definir directament les probabilitats (funció de probabilitat) de la nova variable aleatòria. En el cas de les variables aleatòries contínues, hem vist com podem obtenir les funcions de distribució i de densitat. També hem obtingut una fórmula que ens simplifica els càlculs i que podem aplicar quan la funció de transformació, $g(x)$, és estrictament creixent, decreixent, o podem fer aquesta separació per trams.

Moltes vegades només ens interessa calcular el valor mitjà o esperança de la variable transformada $Y = g(X)$ i no ens cal calcular prèviament la funció de densitat $f_Y(y)$. El teorema de l'esperança ens permet calcular l'esperança, $\mathrm{E}(Y)$, de la variable aleatòria Y definida per $Y = g(X)$, encara que $f_Y(y)$ no sigui coneguda.

Teorema de l'esperança per a variables aleatòries contínues

Si X és una variable aleatòria contínua i definim una nova variable aleatòria, $Y = g(X)$, llavors

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx. \tag{7}$$

Encara que hem enunciat aquest teorema per a variables aleatòries contínues, també és vàlid per a variables aleatòries discretes i només cal tenir en compte que en lloc d'integrals tindrem sumatoris.

Teorema de l'esperança per a variables aleatòries discretes. Si X és una variable aleatòria discreta que pren valors en el conjunt $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i definim una nova variable aleatòria discreta $Y = g(X)$, llavors

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} g(a_i) P(X = a_i). \tag{8}$$

Exemple 3.1

Amb el mateix enunciat que en l'exemple 2.1, calcularem l'esperança de la variable Y de dues maneres diferents:

1) A partir de la definició de $\mathrm{E}(Y)$ i a partir de $f_Y(y)$. Havíem calculat

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{y^2} & \text{si } 0{,}8 < y < 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Tenim:

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_{0{,}8}^{1} y\, \frac{4}{y^2}\, dy = [4 \ln y]_{0{,}8}^{1} = -4\ln(0{,}8).$$

2) Utilitzant el teorema de l'esperança, en què només cal recordar la funció de densitat de la variable original, X:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 8 < x < 10 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx = \int_{8}^{10} \frac{8}{x} \cdot \frac{1}{2}\, dx = 4(\ln 10 - \ln 8) = -4\ln(0,8).$$

Observació

El teorema de l'esperança ens permet calcular directament l'esperança de $Y = g(X)$ a partir de la funció de densitat (o de probabilitat) de la variable aleatòria X.

Linealitat de l'esperança

Sigui X una variable aleatòria contínua o discreta. Se satisfà:

$$\mathrm{E}(ag(X) + bh(X)) = a\,\mathrm{E}(g(X)) + b\,\mathrm{E}(h(X)), \tag{9}$$

en què a, $b \in \mathbb{R}$ i g, h són funcions de X.

Amb aquesta propietat, ara podem demostrar una propietat que ja havíem fet servir:

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) = \mathrm{E}(X^2 - 2X\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2) = \mathrm{E}(X^2) - 2\,\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.

Observació

L'esperança és un operador lineal. A més, cal notar que en el cas d'una constant c se satisfà $\mathrm{E}(c) = c$. Cal notar, però, que la variància no presenta aquesta propietat.

Exemple 3.2

Variable aleatòria constant. Esperança i variància d'una variable transformada linealment

Donada la variable aleatòria X, definim la nova variable $Y = aX + b$, on a i b són constants.

Notem que en el cas $a = 0$ resulta que la variable Y és constant, $Y = b$. Aquest és un cas especial: una variable que sempre pren el mateix valor. És una variable discreta que pren un únic valor ($\Omega_Y = \{b\}$) amb probabilitat 1 ($P(Y = b) = 1$). D'aquí es dedueix immediatament que la seva esperança és b ($\mathrm{E}(Y) = b \cdot 1 = b$) i la seva variància és zero ($\mathrm{Var}(Y) = (b-b)^2 \cdot 1 = 0$):

$$\mathrm{E}(b) = b, \qquad \mathrm{Var}(b) = 0. \tag{10}$$

Tornant a la transformació $Y = aX + b$,

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(b) = a\,\mathrm{E}(X) + b.$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}[(Y - \mathrm{E}(Y))^2] = \mathrm{E}[((aX + b) - (a\,\mathrm{E}(X) + b))^2] =$$

$$= \mathrm{E}[a^2(X - \mathrm{E}(X))^2] = a^2\,\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^2] = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

És a dir:

$$\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b, \qquad \mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X). \tag{11}$$

Exemple 3.3

El temps en anys, X, que triga a espatllar-se un component electrònic, segueix una distribució exponencial, Exp(1). El cost, Y, de reparació del component durant el primer any, és funció de $2X$, mentre que després és de $3X + 2$. Calculem el valor mitjà del cost.

Podem expressar el cost Y com

$$Y = g(X) = \begin{cases} 2X & \text{si } 0 < X < 1 \\ 3X + 2 & \text{si } X \geq 1. \end{cases}$$

A continuació, calculem l'esperança de la variable Y. Aplicant el teorema de l'esperança (X té densitat $f_X(x) = e^{-x}$ per $x > 0$),

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx = \int_0^{\infty} g(x)e^{-x}dx = \int_0^1 2xe^{-x}dx + \int_1^{\infty} (3x + 2)e^{-x}dx$$

$$= 2[-(x + 1)e^{-x}]_0^1 + [-(3x + 5)e^{-x}]_1^{\infty} = 2(-2e^{-1} + 1) + 8e^{-1} = 2 + 4e^{-1}.$$

Resum

En aquest mòdul hem vist que podem prendre una variable aleatòria (sia discreta o contínua) i aplicar-hi una funció $g(X)$ tal que obtenim una nova variable aleatòria $Y = g(X)$.

Per al cas de les variables aleatòries discretes (apartat 1 d'aquest mòdul), hem vist que podem calcular la distribució de probabilitats (és a dir, definir totes les probabilitats $P(Y = b_j)$) a partir de les probabilitats de X:

$$P(Y=b_j) = \sum_{\substack{a_i \\ (g(a_i)=b_j)}} P(X=a_i).$$

Per al cas de les variables aleatòries contínues (apartat 2 d'aquest mòdul), hem vist que a partir de la funció de distribució i de densitat de X, $F_X(x)$ i $f(x)$, respectivament, podem calcular la funció de distribució i de densitat de la nova variable aleatòria Y:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y).$$

Hem vist també tres casos especials que ens permeten calcular ràpidament la funció de densitat de la nova variable Y a partir de la funció de densitat de la variable X. Aquests casos són els següents:

- Quan la funció $g(x)$ és estrictament creixent, llavors

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} \quad \text{amb} \quad x = g^{-1}(y).$$

- Quan la funció $g(x)$ és estrictament decreixent, llavors

$$f_Y(y) = -\frac{f_X(x)}{g'(x)} \quad \text{amb} \quad x = g^{-1}(y).$$

- Quan la funció $g(x)$ no té trossos constants, llavors

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \cdots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}.$$

Finalment, hem vist el teorema de l'esperança, que permet calcular l'esperança de la nova variable sense haver-ne calculat la densitat.

Activitats

1. Disposem d'un generador de nombres aleatoris, X, dins de l'interval $(0, 1)$. Volem estudiar què succeeix amb el nostre generador si apliquem sobre X una funció exponencial de tipus $Y = e^X$. Es demana el següent:

a) Trobeu la funció de distribució de la variable aleatòria Y.

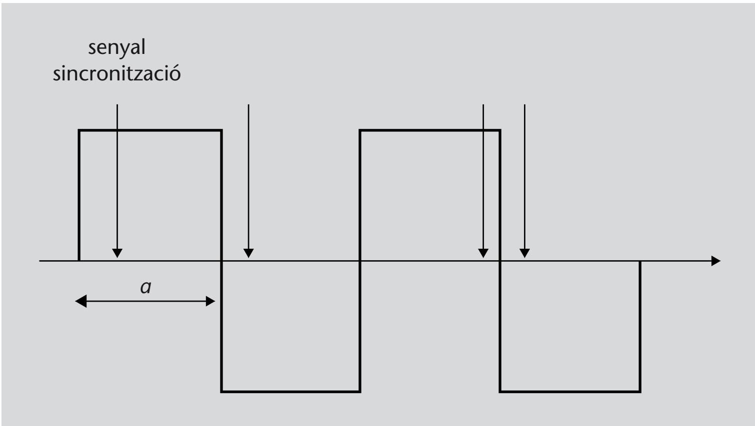
b) Trobeu la funció de densitat de la variable aleatòria Y a partir del resultat de l'apartat anterior.

c) Torneu a calcular la densitat de Y, a partir de la densitat de X.

d) Trobeu $\mathrm{E}(Y)$ a partir de la funció de densitat de X.
Pista: utilitzeu el teorema de l'Esperança.

2. Disposem d'un generador d'ona quadrada en què l'amplada de cada pols depèn de la freqüència de treball. Anomenem aquesta amplada a. Dins de cada pols, necessitem rebre un senyal de sincronització. Anomenem X aquest senyal, que es comporta com una variable aleatòria uniforme en l'interval $(0, a)$, en què $a > 0$. En la figura 4 en podeu veure un exemple.

Figura 4. Sincronització d'una ona quadrada



Es demana:

a) Trobeu el valor esperat de la variable aleatòria X, és a dir, $\mathrm{E}(X)$.

b) Trobeu el moment d'ordre 2 de la variable aleatòria X, és a dir, $\mathrm{E}(X^2)$.

c) Trobeu l'expressió genèrica del moment d'ordre n de la variable aleatòria X, és a dir, $\mathrm{E}(X^n)$, $n = 1, 2, \ldots$

3. L'atenuació en els senyals transmesos que introdueix un canal de comunicacions es pot modelitzar amb una variable aleatòria X que segueix una distribució $\mathrm{N}(m, \sigma)$. Per tal de compensar les pèrdues introduïdes, fem passar el senyal de sortida per un filtre amb forma $Y = e^X$. Es demana el següent:

a) Representeu la funció $y = g(x) = e^x$ i comproveu que és una funció derivable i estrictament creixent.

b) Trobeu la funció de densitat de Y, expressada en funció dels paràmetres m i σ.

c) Quan $X = \ln Y$ és una normal i la distribució de Y s'anomena *log-normal*. Busqueu per Internet algun àmbit d'aplicació d'aquesta distribució log-normal (per exemple, l'àmbit de la fiabilitat) i comenteu-lo breument.

4. L'amplitud d'una ona electromagnètica es representa per una variable aleatòria X uniforme en l'interval $[0, 2]$. Per tal de calcular la potència que transporta l'ona, necessitem calcular el quadrat del mòdul del camp. Per tant, definim $Y = X^2$. Es demana el següent:

a) Trobeu la funció de distribució de la variable aleatòria Y.

b) Trobeu la funció de densitat de la variable aleatòria Y.

c) Trobeu $\mathrm{E}(Y)$ a partir de la funció de densitat de X.

5. Sigui X una variable aleatòria contínua amb funció de distribució $F_X(x)$. Es defineix $Y = g(X) = F_X(X)$. Demostreu que Y és una variable aleatòria uniforme en $(0, 1)$, és a dir, que la seva funció de densitat coincideix amb la d'una uniforme en $(0, 1)$.

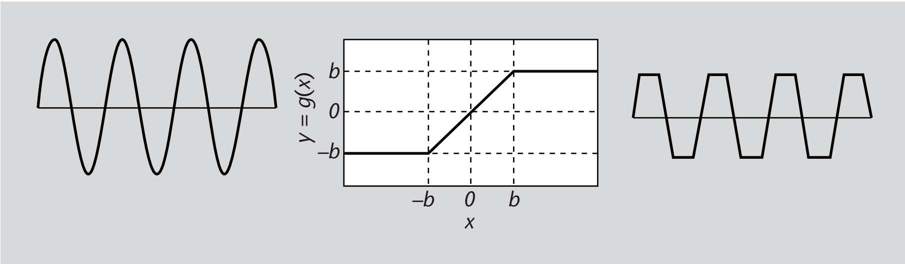
Pista: utilitzeu el fet que $F_X(x)$ és una funció creixent i derivable.

6. Fem passar un senyal acústic X per un amplificador que té la funció característica següent: $y = g(x) = ax + b$, en què a és un valor positiu. La intensitat del senyal acústic d'entrada és una variable aleatòria exponencial de paràmetre λ. Trobeu la funció de distribució i la funció de densitat de la variable aleatòria Y que dona la intensitat de sortida.

7. Un saturador és un circuit que retalla l'amplitud dels senyals a partir d'un cert llindar. En la figura 5 en podeu veure un exemple.

Trobeu la funció de distribució i de densitat de Y en funció del paràmetre b i de $F_X(x)$, $f_X(x)$.

Figura 5. Circuit saturador



Solucionari

1.

a) Ja que $X \sim \mathrm{U}(0,1)$, X té funció de densitat de $f_X(x) = 1$, i funció de distribució $F_X(x) = x$, per a $0 < x < 1$.

Noteu que $0 < x < 1 \Leftrightarrow 1 < y < e$. Per tant, la funció de distribució de Y serà $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(e^X \leq y\right) = P(X \leq \ln y) = F_X(\ln y) = \ln y$, $1 < y < e$.

És a dir: $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ y < 1 \\ \ln y & \text{si } \ 1 \geq y < e \\ 1 & \text{si } \ y \geq e. \end{cases}$

b) La funció de densitat de Y serà: $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \ln y = \frac{1}{y}$, $1 < y < e$.

És a dir: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{si } \ 1 < y < e \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

c) $y = g(x) = e^x$, $g'(x) = e^x$. Si x varia entre 0 i 1, y varia entre 1 i e.

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

d) Pel teorema de l'esperança: $\mathrm{E}(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^x f_X(x) dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1$.

2.

a) $X \sim \mathrm{U}(0,a)$ té densitat $f_X(x) = \frac{1}{a}$ per a $0 < x < a$.

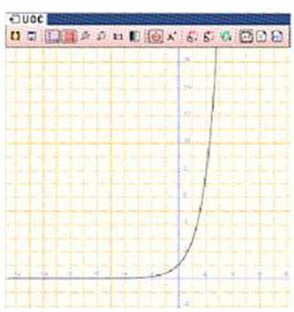
$\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_0^a \frac{x}{a}\, dx = \left[\frac{x^2}{2a}\right]_0^a = \frac{a}{2}.$

b) $\mathrm{E}(X^2) = \displaystyle\int_0^a \frac{x^2}{a}\, dx = \left[\frac{x^3}{3a}\right]_0^a = \frac{a^2}{3}.$

c) $\mathrm{E}(X^n) = \displaystyle\int_0^a \frac{x^n}{a}\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)a}\right]_0^a = \frac{a^n}{n+1}.$

3.

a) La gràfica de la funció és:



b) La funció de densitat de X és $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right]$, $-\infty < x < \infty$.

$y = g(x) = e^x$ és estrictament creixent i derivable. Els valors que pren y són tots els de 0 a ∞. També tenim $g'(x) = e^x = y$.

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{1}{y} f_X(\ln y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln y - m)^2\right], \quad 0 < y < \infty.$$

c) Un dels àmbits en què s'aplica la distribució log-normal és el de la fiabilitat. Aquesta distribució se sol utilitzar per a modelitzar temps de fallida o de reparació de dispositius electrònics que formen part de sistemes o xarxes de telecomunicacions. En aquests casos, se sol fer ús de la log-normal (o d'altres distribucions com la de Weibull) per a modelitzar els temps esmentats, ja que si utilitzéssim una distribució normal es podrien obtenir valors negatius per als temps de fallida o reparació, la qual cosa mancaria de sentit.

4.

a) Ja que $X \sim \mathrm{U}(0,2)$, la funció de densitat de X és $f_X(x) = \frac{1}{2}$ per a $0 \le x \le 2$.

Noteu que $0 \le x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le y \le 4$.

Per tant, la funció de distribució de Y serà:

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(X^2 \le y\right) = P(0 \le X \le \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{y}} dx = \frac{\sqrt{y}}{2}$, per a $0 \le y \le 4$.

És a dir: $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{\sqrt{y}}{2} & \text{si } 0 \le y < 4 \\ 1 & \text{si } y \ge 4. \end{cases}$

b) La funció de densitat de Y serà: $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\frac{\sqrt{y}}{2} = \frac{1}{4\sqrt{y}}$ per a $0 < y < 4$.

És a dir: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & \text{si } 0 < y < 4 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

(Alternativament, es pot calcular així: $f_Y(y) = \dfrac{f_X(x)}{g'(x)} = \dfrac{1/2}{2x} = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.)

c) Segons el teorema de l'esperança: $\mathrm{E}(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{4}{3}$.

Podem verificar que coincideix amb el valor esperat:

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = \int_0^4 \frac{y}{4\sqrt{y}}dy = \frac{1}{4}\int_0^4 \sqrt{y}dy = \frac{4}{3}.$$

5. Per les propietats de les funcions de distribució, $F_X(x)$ és creixent en $\mathbb{R}$ amb valors dins de $[0,1]$. A més a més, fent ús del resultat sobre funcions de densitat de $Y = g(X)$, tenim que:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{f_X(x)}{\frac{dF_X(x)}{dx}} = \frac{f_X(x)}{f_X(x)} = 1, \quad 0 < x < 1.$$

És a dir: $f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

Per tant, $Y \sim \mathrm{U}(0,1)$.

El resultat és clar quan F_X és estrictament creixent. Si en algun interval és constant, en aquest interval $f_X(x) = F'_X(x) = 0$ i no hi ha contribució a la densitat de Y.

6. Sabem que $y = g(x) = ax + b$. Per tant, aïllant la x d'aquesta expressió arribem a

$$x = g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}.$$

D'aquesta relació, podem obtenir:

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Si $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Llavors, si $y < b$, l'argument de F_X és negatiu i el seu valor és 0. Si $y > b$ l'argument de F_X és positiu i arribem a

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \frac{y-b}{a}} & \text{si } y \geq b \\ 0 & \text{si } y < b. \end{cases}$$

Per a calcular la funció de densitat, podem derivar la funció anterior o utilitzar la densitat de X: $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$ i la regla de transformació

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} = \frac{f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{a},$$

ja que $g'(x) = a > 0$. Per tant,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{a} e^{-\lambda \frac{y-b}{a}} & \text{si } y > b \\ 0 & \text{si } y < b. \end{cases}$$

7. Segons la figura 5, la variable Y pren els valors següents:

$$Y = g(X) = \begin{cases} -b & \text{si } X < -b \\ X & \text{si } -b \leq X < b \\ b & \text{si } X \geq b. \end{cases}$$

Tenint en compte això i en funció de $F_X(x)$, és a dir, per a una funció de distribució de X genèrica, $F_Y(y)$ és:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -b \\ F_X(y) & \text{si } -b \leq y < b \\ 1 & \text{si } y \geq b. \end{cases}$$

Per a calcular la funció de distribució, hem de tenir en compte que, la funció de distribució de Y té discontinuïtats de salt en els punts $y = -b$ i $y = b$. Aquests punts tenen caràcter discret amb probabilitats $P(Y = -b) = P(X < -b) = F_X(-b)$ i $P(Y = b) = P(X > b) = 1 - F_X(b)$. Aquests punts donen contribucions del tipus funció delta a la densitat. Per la resta de l'interval $(-b, b)$, podem derivar $F_X(y)$ i obtenim $f_X(y)$.

Utilitzant funcions esglaó, podem expressar:

$$F_Y(y) = (u(y+b) - u(y-b))F_X(y) + u(y-b).$$

Per tant, i tal com havíem vist en l'exemple 2.7 d'aquest mòdul, podem derivar la funció anterior i expressar la funció de densitat com segueix:

$$f_Y(y) = F_X(-b)\,\delta(y+b) + (1 - F_X(b))\,\delta(y-b) + f_X(y) \cdot 1_{(-b,b)}(y),$$

on $1_{(-b,b)}(y) = u(y+b) - u(y-b)$ val 1 si $-b < y < b$ i 0 en cas contrari.