Variables aleatòries

PID_00253293

Ana Escudero
Alícia Miralles
Alícia Vila

Temps mínim de dedicació recomanat: 4 hores

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

Molt sovint és necessari relacionar el resultat d'una experiència amb un nombre. Imagineu, per exemple, que volem avaluar el senyal de sortida d'un circuit electrònic o saber quin és el temps de servei en què es processen peticions d'usuari que arriben a un servidor. Una primera aproximació a aquests problemes seria considerar que els valors que estem buscant són deterministes i que, per tant, es poden definir perfectament amb uns paràmetres que ens permeten obtenir valors exactes al llarg del temps. En la pràctica, però, sabem que hi ha molts factors que fan que la resposta dels sistemes de telecomunicació tingui una certa variabilitat. Així, per exemple, en el cas del circuit electrònic que acabem d'esmentar hauríem de tenir en compte la presència de soroll i altres interferències que fan que el senyal de sortida no sigui exactament l'esperat. També hem de tenir en compte que els dispositius electrònics no són ideals i que poden introduir errors. Les variables aleatòries ens permeten tenir en compte aquesta variabilitat i modelitzar els diferents resultats que obtenim en cada experiència, de manera que podem preveure quin serà el comportament del nostre sistema amb una certa probabilitat.

En l'apartat 1 d'aquest mòdul introduïm formalment el concepte de variable aleatòria. Veurem que hi ha dos tipus bàsics de variable aleatòria: la variable aleatòria discreta (apartat 2), que ens dona un conjunt numerable de resultats possibles, i la variable aleatòria contínua (apartat 3), que ens dona com a resultat qualsevol nombre d'un interval definit dins dels nombres reals. Veurem com les podem estudiar i mostrarem els casos de variables aleatòries que apareixen més habitualment. Treballarem, en particular, amb les distribucions més importants que estan relacionades amb les telecomunicacions. Definirem els conceptes de valor mitjà, $\mathrm{E}(X)$, i variància, $\mathrm{Var}(X)$, d'una variable aleatòria X. En l'apartat 4 veurem el teorema central del límit, de gran importància en el camp de l'estadística i que ens permet relacionar variables aleatòries contínues i discretes.

Objectius

Els objectius d'aquest mòdul són el següents:

1. Entendre què és una variable aleatòria, diferenciar-ne dos tipus i, posar-ne exemples: les discretes i les contínues.

2. Conèixer quatre tipus de variables aleatòries discretes i saber-ne posar exemples: la distribució de Bernoulli, la distribució binomial, la distribució geomètrica i la distribució de Poisson.

3. Entendre els conceptes de funció de distribució i funció de densitat i caracteritzar les distribucions aleatòries amb aquestes funcions.

4. Conèixer tres tipus de variables aleatòries contínues i saber-ne posar exemples: la distribució uniforme, la distribució exponencial i la distribució normal o de Gauss.

5. Entendre els conceptes de valor mitjà i variància i caracteritzar les distribucions aleatòries amb aquests dos paràmetres.

6. Triar el tipus de distribució aleatòria més adequat per a modelitzar un fenomen determinat.

7. Comprendre el sentit del teorema central del límit i les seves aplicacions.

1. Concepte de variable aleatòria

A partir d'una experiència aleatòria es pot definir l'espai mostral, Ω, (omega), com el conjunt de tots els resultats possibles associats a aquesta experiència. Una variable aleatòria, X, assigna un nombre a cada un d'aquests resultats. Vegem-ne alguns exemples.

Vegeu també

L'espai mostral es defineix al mòdul "Introducció a la probabilitat".

Exemple 1.1

Considerem l'experiència de llençar una moneda. L'espai mostral és $\Omega = \{\text{cara}, \text{creu}\}$. Observeu que l'espai mostral Ω inclou tots els resultats possibles d'aquest experiment. Podem assignar a cada un d'aquests resultats els valors 0 o 1, segons que el resultat de l'experiència sigui cara o creu. Escrivim, doncs, que $X(\text{cara}) = 0$ i $X(\text{creu}) = 1$. La variable X pot prendre els valors $\{0, 1\}$.

Observació

La variable X de l'exemple 1.1 pren els valors $\{0, 1\}$. És una variable aleatòria discreta.
La variable X de l'exemple 1.2 pren els valors a $[0, 2]$. És una variable aleatòria contínua.

Exemple 1.2

Suposem que un aparell elèctric emet un senyal aleatori cada segon. Aquest senyal aleatori s'expressa en mil·livolts (mV) i pren valors dins de l'interval $[0, 2]$. En aquest cas l'espai mostral està format per valors numèrics. Podem definir la variable aleatòria com l'aplicació identitat. A cada resultat de l'experiència li assigna el mateix valor. La variable X pot prendre un valor qualsevol de l'interval $[0, 2]$.

Definició 1.1. Una **variable aleatòria**, X, és una funció que assigna un nombre real a cada element de l'espai mostral.

En els exemples 1.1 i 1.2 veiem la diferència entre una variable aleatòria discreta i una de contínua. En el primer cas, tenim un nombre determinat de resultats possibles, podem obtenir o bé cara o bé creu. En el segon cas, el nostre aparell elèctric pot emetre un valor qualsevol dins de l'interval $[0, 2]$.

Conjunt discret

Un conjunt discret és el que està format per un nombre finit d'elements o bé per un nombre infinit d'elements que són numerables (és a dir, que es poden enumerar de manera que hi ha un primer element, un segon element, etc.). Per exemple, els conjunts de nombres naturals i enters ($\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$) són discrets. El conjunt dels nombres reals ($\mathbb{R}$) no és un conjunt discret.

Definició 1.2. Una **variable aleatòria discreta** pren valors d'un conjunt finit $\{a_1, a_1, \ldots, a_n\}$ o bé numerable infinit $\{a_1, a_2, \ldots\}$.

Definició 1.3. Una **variable aleatòria contínua** pot prendre valors en conjunts no numerables, com per exemple en un interval de $\mathbb{R}$ o en tot $\mathbb{R}$.

Això fa que el tractament matemàtic de les variables aleatòries discretes i contínues sigui molt diferent.

2. Variable aleatòria discreta

En aquest apartat definirem les variables aleatòries discretes, veurem les distribucions més importants i calcularem per a cadascuna dos paràmetres: el valor mitjà i la variància.

En l'apartat 1 hem vist que una variable aleatòria, X, ens dona un valor numèric per al resultat d'una experiència. Per a cada element de l'espai mostral Ω tenim definit un valor numèric real, que és el que pren la variable X quan el resultat de l'experiment és aquest element. Al conjunt de valors que pot prendre X l'anomenem Ω_X, que és, per tant, un subconjunt de $\mathbb{R}$. La variable aleatòria X és discreta quan el conjunt Ω_X és discret, és a dir, finit o infinit numerable.

De manera natural, la probabilitat que tenim definida en l'espai Ω es trasllada als valors que pren X.

En l'exemple 1.1, en què l'experiment és llençar una moneda a l'aire, escrivim $P(X=0) = P(\text{cara}) = \frac{1}{2}$ i $P(X=1) = P(\text{creu}) = \frac{1}{2}$.

Com que el resultat de la variable aleatòria X varia amb cada repetició de l'experiment, no podem definir el valor de X, però sí que podem descriure la probabilitat per a cadascun dels resultats possibles de X, és a dir, la probabilitat que X prengui un valor determinat. Això es descriu com $P(X = a_i)$, en què a_i és un valor possible de X.

Observació

Escrivim $X = 0$ quan volem indicar que X pren el valor 0 i $X = 1$ quan X pren el valor 1. En l'exemple 1.1 associem el valor 0 a treure cara i el valor 1 a treure creu:

$$P(X=0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2}$$

Definició 2.1. S'anomena **funció de probabilitat** el conjunt de valors $P(X=a_i)$. Aquesta funció assigna una probabilitat a cada valor possible de X. També s'escriu com $P_X(a_i)$.

Per exemple, en el cas de l'experiència de llançar una moneda a l'aire, hem definit $\Omega = \{\text{cara}, \text{creu}\}$ i hem assignat els valors de 0 i 1 a aquest espai mostral. En aquest cas, $\Omega_X = \{0, 1\}$ i la funció de probabilitat ens diuen que la probabilitat que surti cara, $P(X = 0)$, és igual a $\frac{1}{2}$, i la probabilitat que surti creu, $P(X = 1)$, és igual a $\frac{1}{2}$.

Propietats de la funció de probabilitat d'una variable aleatòria discreta:

1) La probabilitat $P(X=a_i)$ és un valor que està sempre entre 0 i 1, és a dir, $0 \leq P(X=a_i) \leq 1$.

2) La suma de totes les probabilitats ha de ser 1, ja que els esdeveniments $X=a_i, \forall i$ formen una partició de l'espai mostral. És a dir:

$$\sum_i P(X=a_i) = 1. \quad (1)$$

Definició 2.2. X és una **variable aleatòria discreta uniforme** si pren els valors $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ amb probabilitats

$$P(X=a_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

És a dir, tots els elements a_i tenen la mateixa probabilitat assignada.

El valor $1/n$, es dedueix tenint en compte que segons (1), si la probabilitat de cada resultat és un valor comú p, la suma d'aquestes probabilitats és $\sum_{i=1}^{n} p = np = 1$.

La uniformitat sol anar lligada a la simetria de certs experiments. Per exemple, l'ús de monedes i daus simètrics. La variable que val 0 o 1 segons surti creu o cara en llançar una moneda a l'aire, i la variable que dona el resultat obtingut en llançar un dau són exemples de variables aleatòries discretes uniformes. En el cas de la moneda la probabilitat d'obtenir 0 o 1 és $\frac{1}{2}$. En el cas del dau, la probabilitat d'obtenir qualsevol dels resultats és $\frac{1}{6}$.

2.1 Variables aleatòries discretes més importants

2.1.1 Variable aleatòria de Bernoulli: B(p)

Aquest és el tipus més senzill de variable aleatòria discreta i s'utilitza per a representar experiències en què només podem tenir dos resultats possibles.

Partim d'una experiència aleatòria i distingim entre els resultats $\Omega = \{A, A^c\}$. El resultat A s'anomena **èxit** i definim $X(A) = 1$. El resultat A^c s'anomena **no-èxit** i definim $X(A^c) = 0$. La variable aleatòria pren només els dos valors $\{0, 1\}$. Només cal donar la probabilitat assignada a un d'aquests valors i la

A* i *A^c

Els conjunts A i A^c són complementaris. Recordeu el que havíem vist al mòdul "Introducció a la probabilitat" (apartat 2.2, fórmula (12)): si $P(A) = p$, la probabilitat del conjunt complementari, $P(A^c)$, és $1 - p$.

distribució queda definida completament. Si $P(A) = p$ llavors $P(X=1) = p$ i $P(X=0) = 1-p$.

Diem que X és una **variable aleatòria de Bernoulli** amb probabilitat d'èxit p quan aquesta variable pot prendre els valors $X = 1$ (èxit) amb probabilitat p i $X = 0$ (no-èxit) amb probabilitat $(1-p)$.

S'escriu: $X \sim \mathrm{B}(p)$, en què p indica la probabilitat d'èxit i $p \in [0,1]$. Direm que s'ha produït èxit quan el resultat obtingut estigui dins del conjunt A, és a dir, si passa A, i no-èxit quan el resultat obtingut estigui en el conjunt A^c (complementari de A), és a dir, si no succeeix A.

La variable de l'exemple 1.1 d'aquest mòdul segueix una distribució $\mathrm{B}(\frac{1}{2})$. Tornem al cas de la moneda. Si definim èxit, A, que surti cara, i el no-èxit, A^c, que surti creu, la nostra variable aleatòria, X, segueix una distribució de Bernoulli $\mathrm{B}(\frac{1}{2})$. Noteu que també podríem haver definit A com a creu i A^c com a cara.

Exemple 2.1

En comunicacions binàries X pot indicar l'error en la transmissió d'un bit. L'espai mostral de l'experiència és determinat per $\Omega = \{\text{error}, \text{no error}\}$ i la variable aleatòria pren els valors $X = 1$ si hi ha error i $X = 0$ si no n'hi ha. $P(X = 1) = P(\text{error})$ i $P(X = 0) = P(\text{no error})$. Fixeu-vos que en aquest exemple hem definit èxit, A, com la presència d'error en la transmissió.

Un altre exemple similar d'aplicació de la distribució de Bernoulli en les telecomunicacions es dona en els sistemes de radar. Podem definir èxit, A (és a dir $X = 1$), quan el radar detecta la presència d'un objecte i A^c ($X = 0$) quan el radar no detecta cap objecte.

Exemple 2.2

En llançar un dau ens fixem en la màxima puntuació possible i definim $A = \{\text{surt un } 6\}$, llavors $A^c = \{\text{no surt un } 6\}$. Definim $X(A) = 1$ i $X(A^c) = 0$. La variable X segueix una distribució $\mathrm{B}(\frac{1}{6})$, ja que la probabilitat del que hem definit com a èxit és $\frac{1}{6}$.

Observació

En l'exemple 2.2:

$$P(X=0) = \frac{5}{6}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{6}$$

2.1.2 Variable aleatòria binomial: $\mathrm{Bin}(n,p)$

La **variable aleatòria binomial**, $\mathrm{Bin}(n,p)$, es dona quan repetim n cops i de manera independent una experiència $\mathrm{B}(p)$ de Bernoulli. A cada resultat (seqüència de n valors 0 o 1), la variable aleatòria X li assigna el nombre d'èxits que han sortit. Així, X pren els valors $\{0,1,2,\ldots,n\}$.

La funció de probabilitat (probabilitat que té cada un dels valors que pren la variable X) és determinada per:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{amb} \quad k \in \{0,1,2,\ldots,n\}. \tag{2}$$

Diem que X és una variable aleatòria binomial i escrivim $X \sim \text{Bin}(n, p)$, en què n és el nombre de cops que repetim l'experiència de Bernoulli $\text{B}(p)$, de probabilitat d'èxit p.

Recordeu que $\binom{n}{k}$ (es llegeix n sobre k) es calcula com $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

La fórmula (2) correspon al fet que hem de posar un factor p per a cada èxit resultant (per tant, p^k) i un factor $(1-p)$ per a cada no-èxit (per tant, $(1-p)^{n-k}$). El factor $\binom{n}{k}$ es deu al fet que fixar el nombre k d'èxits encara deixa llibertat per a situar aquests èxits en la seqüència de n resultats. El nombre de maneres de triar les k posicions dels èxits és l'anterior nombre combinatori, ja que la tria la fem sense ordre i sense repetició.

En l'exemple 2.3 X segueix una distribució $\text{Bin}(10, 0, 1)$, en què 10 és el nombre de cops que es repeteix l'experiment i $0, 1$ la probabilitat d'èxit de cada experiment.

Exemple 2.3

Una persona, emissor, ha d'enviar un missatge de 10 elements, triats del conjunt $\{0, 1\}$ i ordenats. Un missatge d'aquest tipus podria ser la paraula 0011111101 (formada amb 10 bits). Suposem que cada cop que la persona tria un bit per formar la paraula la probabilitat que sigui un 0 és 0,1 i, per tant, que sigui un 1 és 0,9. En aquest exemple considerarem que es dona la condició d'èxit, A, quan es transmet un zero i la condició de no-èxit, A^c, quan es transmet un u. Amb aquesta idea ens venen al cap tota una sèrie de preguntes, com per exemple:

1) Quina és la probabilitat que l'emissor enviï exactament la paraula 0011111101?
2) Quina és la probabilitat que l'emissor enviï una paraula que tingui exactament tres zeros?
3) Quina és la probabilitat que l'emissor enviï una paraula que tingui exactament k zeros?
4) Quina és la probabilitat que l'emissor enviï una paraula que tingui com a màxim tres zeros?

Les qüestions anteriors les podem resoldre aplicant el que heu après en el tema anterior. S'obtenen els resultats següents:

1) $0{,}1^3 \cdot 0{,}9^7 = 0{,}00048$.

   La paraula per enviar té tres zeros i, per tant, la probabilitat que en 10 experiències obtinguem 3 èxits és: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. En aquest cas ens demanen una combinació concreta de totes les possibles que podrien incloure 3 zeros i, per tant, no tenim en compte el terme $\binom{n}{k}$ i $P = 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{10-3}$.
2) El resultat anterior ens dona la probabilitat per a una paraula que té 3 zeros i 7 uns. Vam veure en l'apartat anterior que el nombre de paraules que es poden formar amb 3 zeros i 7 uns és $\binom{10}{3}$. Llavors la resposta és $\binom{10}{3} 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^7 = 0{,}0574$.

   En aquest cas ens demanen la probabilitat d'una seqüència amb 3 zeros. Aquests zeros poden estar en qualsevol posició i, per tant, hem de considerar totes les combinacions possibles de paraules de 10 bits que poden contenir aquests zeros.
3) És clar que una paraula de mida 10 pot tenir entre 0 i 10 zeros. Així, $0 \le k \le 10$. Fent el mateix raonament que en l'apartat anterior, tenim $\binom{10}{k} 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{10-k}$. Observeu que k és el nombre de zeros que pot contenir la paraula, no el nombre d'experiències, que per a aquest cas és 10.
4) Ara hem de tenir en compte els casos en què el nombre de zeros sigui més petit o igual a 3. De l'expressió anterior, sumem els casos en què k pren els valors 0, 1, 2 i 3.

Obtenim:

$$\sum_{k=0}^{3}\binom{10}{k}0{,}1^k\cdot 0{,}9^{10-k}=\binom{10}{0}0{,}1^0\cdot 0{,}9^{10-0}+\binom{10}{1}0{,}1^1\cdot 0{,}9^{10-1}$$

$$+\binom{10}{2}0{,}1^2\cdot 0{,}9^{10-2}+\binom{10}{3}0{,}1^3\cdot 0{,}9^{10-3}$$

$$=0{,}3487+0{,}3874+0{,}1937+0{,}0574=0{,}9872.$$

Si a la variable X li assignem el nombre de zeros que té cada paraula, els apartats anteriors els podem escriure utilitzant la $X \sim \mathrm{Bin}(10,\ 0{,}1)$:

- $P(X=3)=\binom{10}{3}0{,}1^3\cdot 0{,}9^7$.
- $P(X=k)=\binom{10}{k}0{,}1^k\cdot 0{,}9^{10-k}$.
- $P(X\le k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{10}{i}0{,}1^i\cdot 0{,}9^{10-i}$.

Exemple 2.4

Enviem una paraula de n bits en què cada bit pot portar error o no, independentment dels altres. La variable $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ pren el valor del nombre de bits erronis que hi ha en la paraula i, per tant, els valors possibles són $\{0,1,2,\ldots,n\}$. p és la probabilitat que un bit sigui erroni*.

* Recordeu que hem definit l'èxit A com el fet de transmetre un bit erroni.

2.1.3 Variable aleatòria geomètrica: Geom(p)

La **variable aleatòria geomètrica**, $\mathrm{Geom}(p)$, es dona quan repetim, de manera independent, una experiència $\mathrm{B}(p)$, fins a obtenir el primer èxit. X compta el nombre de cops que cal fer l'experiència per a obtenir el primer èxit. Per tant, X pren els valors $\{1,2,3,\ldots\}$. La seva distribució de probabilitats és determinada per:

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \quad \text{amb} \quad k\in\{1,2,3,\ldots\}, \tag{3}$$

en què p és la probabilitat d'èxit i k el nombre d'intents que necessitem fins a obtenir l'èxit. Diem que X és una variable aleatòria geomètrica amb probabilitat d'èxit p i escrivim $X \sim \mathrm{Geom}(p)$.

La fórmula (3) s'obté considerant que perquè el primer èxit passi en la posició k s'han d'obtenir $k-1$ no-èxits seguits (factor $(1-p)^{k-1}$) i, a continuació, un exit (factor p).

En l'exemple que veurem a continuació, X segueix una distribució Geom(0,2). Fixeu-vos que l'expressió de la distribució geomètrica és similar a l'expressió de la distribució binomial però sense el terme $\binom{n}{k}$, ja que en aquest cas estem fixant la seqüència de resultats com a A^c,A^c,...,A^c,A.

Exemple 2.5

Per a enviar missatges per internet, els missatges es divideixen en paquets i després s'envien per la xarxa. Si la xarxa està congestionada els paquets es poden perdre. Suposem que en una xarxa molt congestionada la probabilitat de perdre un paquet és 0,8. Això significa que el paquet no es perd en una transmissió amb una probabilitat de 0,2. El paquet es transmet repetidament fins que el receptor el rep. Ens fem les preguntes següents:

1) Quina és la probabilitat que el paquet hagi de ser enviat almenys tres cops?
2) Quina és la probabilitat que hàgim d'enviar el paquet com a màxim 5 cops perquè el receptor el rebi?

Si la variable aleatòria X compta el nombre de vegades que cal enviar un paquet, pren valors del conjunt $\{1, 2, 3, \ldots\}$ (X és una variable discreta infinita). Podem escriure:

1) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X=1) + P(X=2)) = 1 - (0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}2) = 0{,}64.$
2) $P(X \leq 5) = \sum_{k=1}^{5} 0,2 \cdot 0,8^{k-1} = 0{,}2(1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + 0{,}8^3 + 0{,}8^4) = 0{,}67232.$

2.1.4 Variable aleatòria de Poisson: Poiss(α)

La variable aleatòria de Poisson s'utilitza per a modelitzar alguns fenòmens com els següents:

- El nombre d'accidents en un encreuament donat i per a un interval de temps fixat.
- El nombre de trucades que arriben a una centraleta en un cert interval de temps.
- El nombre de peticions que arriben a un servidor en un cert interval de temps.
- El nombre d'electrons o forats que travessen una barrera de potencial.
- El nombre de defectes de fabricació d'un producte d'unes dimensions determinades.
- Teoria de cues en xarxes de comunicacions de veu i dades.

Comptem esdeveniments que es produeixen en posicions aleatòries d'un cert interval de mida T (típicament, esdeveniments que passen en instants aleatoris al llarg d'un temps total T). La variable aleatòria X dona el nombre total d'esdeveniments i pren els valors $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

La funció de probabilitat per a una **variable aleatòria de Poisson** és:

$$P(X=k) = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha} \quad \text{amb} \quad k \in \{0,1,2,3,\ldots\}, \tag{4}$$

on $\alpha = \lambda T$ és el nombre mitjà d'esdeveniments en l'interval T. Per tant, λ és el nombre mitjà d'esdeveniments per unitat de temps (taxa).

Diem que X és una variable aleatòria de Poisson de paràmetre α, i escrivim $X \sim \text{Poiss}(\alpha)$.

Exemple 2.6

Sabem que a un servidor arriben de mitjana 5 peticions per segon. Quina és la probabilitat que en un segon no hi arribi cap petició? Quina és la probabilitat que en un segon hi arribi una o més peticions?

Segons l'enunciat, $\lambda = 5$ i $T = 1$; així, $\alpha = 5$. Ara ja podem donar les respostes. En el primer cas hem de calcular la probabilitat que el nombre d'arribades, k, sigui zero; per tant:

$$P(X=0) = \frac{5^0}{0!}e^{-5} = e^{-5} = 0{,}0067.$$

En aquest segon cas hem de calcular la probabilitat que arribi una o més peticions al servidor:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}0067 = 0{,}9933.$$

2.2 Paràmetres: valor mitjà i variància

Fins ara en aquest apartat hem definit què és una variable aleatòria discreta i hem vist algunes de les distribucions més importants: la distribució de Bernoulli, la binomial, la geomètrica i la de Poisson. En aquest subapartat veurem dos paràmetres molt utilitzats que ens permetran de manera molt global avaluar i comparar les diferents variables aleatòries. Aquests paràmetres són el **valor mitjà** i la **variància**.

Definició 2.3. Sigui X una variable aleatòria discreta que pren els valors $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (per al cas que X prengui infinits valors es fa de manera semblant, però en lloc de sumes finites tenim sèries numèriques).

El **valor mitjà, esperança** o **moment d'ordre 1** de X:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(X=a_i). \tag{5}$$

El **moment d'ordre 2**:

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 P(X = a_i). \quad (6)$$

El **moment d'ordre** k, $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\mathrm{E}(X^k) = \sum_{i=1}^{n} a_i^k P(X = a_i). \quad (7)$$

L'esperança de X és un nombre que ens dona la posició al voltant de la qual es concentra la variable. Un significat més precís és el següent. Si repetim l'experiment un nombre gran de vegades N, obtenim valors per a la variable X: $X_1, X_2, \ldots, X_N$. En aquesta llista apareix cada valor possible a_i un nombre N_i de vegades. Si fem la mitjana aritmètica de tots els resultats:

$$\frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \cdots + X_N) = \frac{1}{N}(a_1 N_1 + a_2 N_2 + \cdots + a_n N_n) = \sum_i a_i \frac{N_i}{N}.$$

Quan N és molt gran, les freqüències relatives $\frac{N_i}{N}$ s'estabilitzen en els valors $P(a_i)$, de manera que la mitjana aritmètica anterior tendeix a l'esperança de la variable X.

Definició 2.4. La **variància** d'una variable aleatòria discreta X és:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - \mathrm{E}(X))^2 P(X = a_i). \quad (8)$$

La **desviació típica** de X és:

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}. \quad (9)$$

Observació

La desviació típica es representa amb la lletra σ, que es llegeix "sigma".

Variància i desviació típica

Noteu que la variància és una mitjana de les diferències al quadrat, mentre que la desviació típica és el mateix paràmetre però donat en les mateixes unitats que la variable aleatòria. La relació entre elles és: $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

La variància és una mitjana de les distàncies dels valors de X al valor mitjà. El quadrat es posa perquèe totes les desviacions es comptin amb signe positiu. Amb la desviació típica recuperem les dimensions originals de X aplicant una arrel quadrada a la variància. La variància o la desviació donen una mesura de la dispersió de X. Si les probabilitats es concentren molt al voltant de $\mathrm{E}(X)$ la dispersió serà petita.

Propietats de la variància.

$$\mathrm{Var}(X) \geq 0. \tag{10}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2. \tag{11}$$

En efecte, en (8) veiem que la suma que defineix $\mathrm{Var}(X)$ només conté termes positius (nombres al quadrat i probabilitats) d'on s'obté (10). Desarrollant el quadrat en (8):

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i (a_i - \mathrm{E}(X))^2 P(X = a_i) = \sum_i (a_i^2 - 2\,\mathrm{E}(X)a_i + \mathrm{E}(X)^2) P(X = a_i)$$

$$= \sum_i a_i^2 P(X = a_i) - 2\,\mathrm{E}(X) \sum_i a_i P(X = a_i) + \mathrm{E}(X)^2 \sum_i P(X = a_i)$$

$$= \mathrm{E}(X^2) - 2\,\mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2,$$

obtenim (11) que ens diu que la variància és l'esperança del quadrat de X menys el quadrat de l'esperança de X. Aquesta és la manera més habitual de calcular variàncies ja que el segon moment sol ser més fàcil calcular que la suma en (8).

Exemple 2.7

Siguin X_1 i X_2 dues variables aleatòries equiprobables que prenen els valors $\{4, 5, 6\}$ i $\{0, 5, 10\}$, respectivament. Aquests valors podrien ser les tres notes obtingudes en una determinada assignatura per dos alumnes diferents. Suposant que les tres notes tenen el mateix pes, podem estimar l'esperança i variància de cada una de les variables:

$$\mathrm{E}(X_1) = 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} = 5.$$

$$\mathrm{E}(X_2) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{3} = 5.$$

$$\mathrm{Var}(X_1) = (4-5)^2 \cdot \frac{1}{3} + (5-5)^2 \cdot \frac{1}{3} + (6-5)^2 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}66, \qquad \sigma_{X_1} = 0{,}82.$$

$$\mathrm{Var}(X_2) = (0-5)^2 \cdot \frac{1}{3} + (5-5)^2 \cdot \frac{1}{3} + (10-5)^2 \cdot \frac{1}{3} = 16{,}67, \qquad \sigma_{X_2} = 4{,}08.$$

El que podem dir és que els dos alumnes tenen la mateixa nota de mitjana $\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2)$, però el segon alumne presenta més dispersió en les seves notes, ja que $\sigma_{X_2} > \sigma_{X_1}$ (és a dir, el segon alumne és menys regular).

Figura 1. Notes obtingudes pels dos estudiants

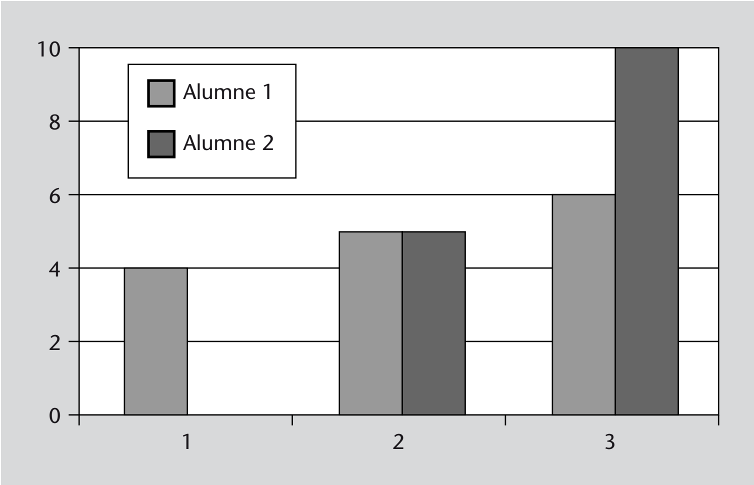


Figura 1

Distribució de les notes obtingudes pels dos estudiants. En l'eix horitzontal es representa el número de prova, i en l'eix vertical la nota obtinguda. Els dos estudiants obtenen la mateixa nota mitjana, però observeu que el primer és més regular (tendeix a treure notes en un interval més petit) que el segon, que obté resultats més dispersos.

Paràmetres de les principals variables aleatòries discretes

Per a cadascuna de les distribucions vistes, s'obtenen els valors de l'esperança i la variància de la taula següent.

Distribucions de variables aleatòries discretes

$X \sim$	k	$P(X=k)$	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{B}(p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\{0,1,2,\ldots,\ n\}$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Geom}(p)$	$\{1,2,3,\ldots\}$	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathrm{Poiss}(\alpha)$	$\{0,1,2,\ldots\}$	$P(X=k)=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$	α	α

Comprovem els resultats de la taula anterior, que corresponen a $X \sim \mathrm{B}(p)$:

- El valor mitjà, $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$.
- El moment d'ordre 2, $\mathrm{E}(X^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$.
- La variància, $\mathrm{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p)$.

2.3 Funció de distribució

Una manera de donar el valor de les probabilitats acumulades és a partir de la funció de distribució.

Definició 2.5. La **funció de distribució** d'una variable aleatòria X es defineix com

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

És a dir, la funció de distribució ens dona la probabilitat que la nostra variable aleatòria X prengui un valor igual o més petit que un valor x determinat. Vegem-ne un exemple.

Exemple 2.8

Per al cas de $X \sim \mathrm{B}(p)$, la funció de distribució $F_X(x)$ presenta una discontinuïtat de salt en $X = 0$ i en $X = 1$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Considerem aquí que zero és no-èxit.

Figura 2. Funció de distribució de $X \sim \mathrm{B}(p)$

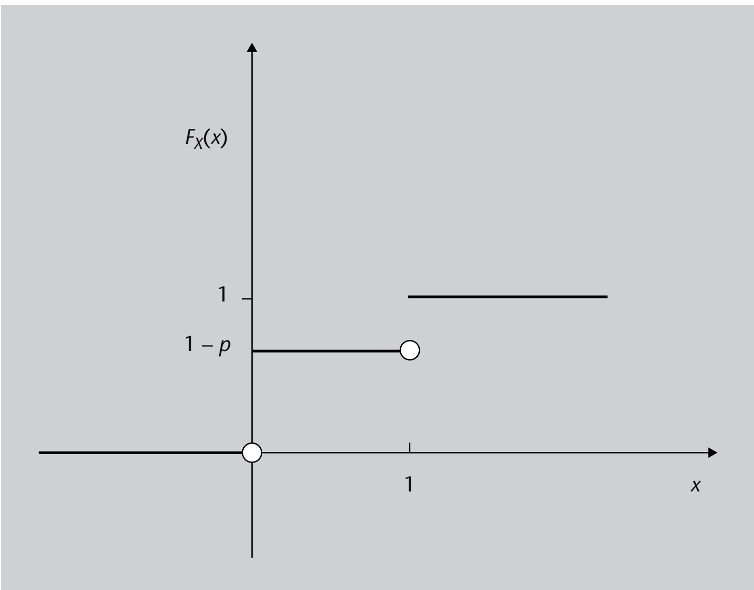


Figura 2

Recordeu, del subapartat 2.1.1 d'aquest mòdul, que l'espai mostral de la distribució de Bernoulli es definia com $\Omega = \{A^c, A\} = \{0, 1\}$. En la figura s'ha definit $1 - p$ com la probabilitat de no-èxit, $P(X=0)$, i p com la probabilitat d'èxit $P(X=1)$.

Fixeu-vos en els intervals definits en la figura 2. El resultat de l'experiment aleatori ens ha de donar no-èxit o èxit, és a dir, 0 o 1. Per tant, la probabilitat d'obtenir un nombre més petit que 0 com a resultat és nul·la. En el segon interval de la gràfica tenim la probabilitat d'obtenir un zero (no-èxit), i aquesta probabilitat és $1 - p$. Per a la darrera part de la gràfica ($x \geq 1$), estem considerant la probabilitat acumulada d'obtenir o bé 0 o bé 1. Com que sabem segur que obtindrem un dels dos resultats, la funció de distribució val 1 a partir d'aquest punt. En els cas de variables aleatòries discretes, la funció de distribució és esglaonada. La funció experimenta un salt en cada nombre real que correspongui a un valor que pren X.

Funció de distribució

La funció de distribució ens dona la probabilitat que una variable aleatòria, X, tingui un valor més petit o igual que una x determinada. Noteu que per aquesta raó també s'anomena **probabilitat acumulada**, és a dir, probabilitat de tots els valors fins a x.

Vegem ara un segon exemple: la funció de distribució per la variable aleatòria binomial.

Exemple 2.9

En el cas $X \sim \text{Bin}(4, 1/2)$, $F_X(x)$ presenta una discontinuïtat de salt en els valors del conjunt $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Tenint en compte que $P(X = k) = \binom{4}{k}(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{4-k}$ i que

$$F_X(x) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{4}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{4-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{4}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^4,$$

obtenim els valors més significatius de la funció de distribució:

$$\begin{aligned}
F_X(0) &= 0{,}0625. \\
F_X(1) &= 0{,}0625 + 0{,}250 = 0{,}3125. \\
F_X(2) &= 0{,}0625 + 0{,}250 + 0{,}375 = 0{,}6875. \\
F_X(3) &= 0{,}0625 + 0{,}2500 + 0{,}3750 + 0{,}2500 = 0{,}9375. \\
F_X(4) &= 0{,}0625 + 0{,}2500 + 0{,}3750 + 0{,}2500 + 0{,}0625 = 1.
\end{aligned}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0{,}0625 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0{,}3125 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0{,}6875 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0{,}9375 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

Distribució binomial

Recordeu, com hem vist en el subapartat 2.1.2 d'aquest mòdul, que la distribució binomial consisteix a repetir n vegades un experiment de Bernoulli. En aquest cas, la nostra variable aleatòria comptabilitza el nombre d'èxits que obtenim en fer l'experiment n cops.

Figura 3. Funció de distribució de $X \sim \text{Bin}(4, \frac{1}{2})$

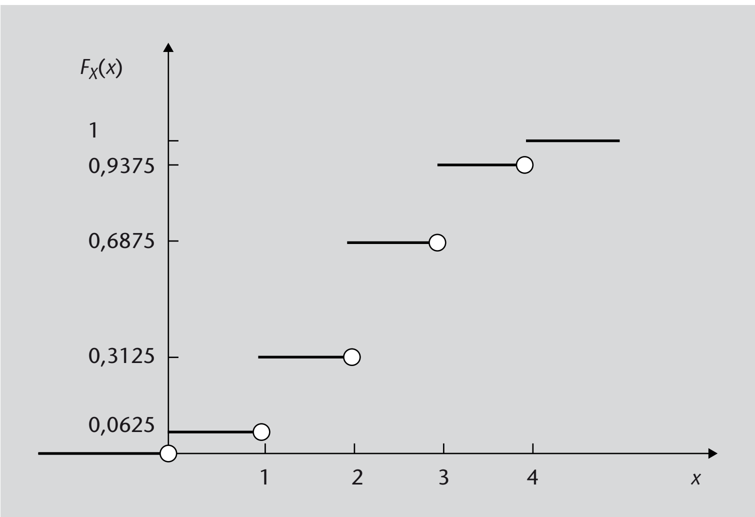


Figura 3

Noteu com la funció de distribució és un valor que va acumulant la probabilitat d'obtenir un cert nombre d'èxits igual o més petit que x.

Fixeu-vos en la figura. La probabilitat d'obtenir un nombre d'èxits més petit que zero és nul·la perquè si fem l'experiment de Bernoulli 4 vegades obtindrem o bé 0 èxits o bé 1, 2, 3 o 4, però en cap cas un valor negatiu. Per tant, $F(x < 0) = 0$.

La probabilitat d'obtenir 0 èxits és la següent:

$$P(X=0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} = \frac{1}{16} = 0{,}0625.$$

Per tant, en $x = 0$ tenim un salt de la funció de distribució, $F(x)$, que passa de valer zero a tenir el valor de 0,0625.

Ara calculem la probabilitat de tenir un èxit en els quatre experiments. Aquesta probabilitat és determinada per l'expressió següent:

$$P(X=1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = \frac{1}{16} = 0{,}25.$$

Així, doncs, la funció de distribució, $F(x)$, en $x = 1$ és la probabilitat acumulada d'obtenir zero èxits o un èxit, és a dir, $F(1) = 0{,}0625 + 0{,}25 = 0{,}3125$.

Si fem els càlculs per a la resta de valors de x, en què x és el nombre d'èxits per als quatre experiments, obtenim els valors que es mostren en la figura 3.

Notem que $F_X(x)$ és una probabilitat, de manera que pren valors entre 0 i 1. A més, donats $a < b$, de la descomposició disjunta $(-\infty, b] = (\infty, a] \cup (a, b]$ obtenim $P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$, és a dir:

$$F_X(b) = F_X(a) + P(a < X \leq b).$$

Com que $P(a < X \leq b) \geq 0$, tenim que $F_X(b) \geq F_X(a)$, així que F_X és una funció creixent. A més, si $x \to -\infty$, $F_X(x)$ dona la probabilitat de $\varnothing$, és a dir, 0; si $x \to \infty$, $F_X(x)$ dona la probabilitat de tot $\mathbb{R}$, és a dir, 1. Per tant, es verifiquen les propietats següents:

Propietats de la funció de distribució

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
2) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.
3) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
4) $F_X(x)$ és creixent, és a dir, si $a < b$ llavors $F_X(a) \leq F_X(b)$.
5)

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a). \tag{13}$$

Les quatre primeres propietats de la funció de distribució, F_X, s'observen fàcilment en la figura 3. Els valors de les probabilitats acumulades els obtenim directament de la funció de distribució. En donem alguns valors com a exemple:

$$\begin{aligned}
P(X \leq 0,5) &= F_X(0,5) = 0{,}0625. \\
P(X \leq 1,7) &= F_X(1,7) = 0{,}3125. \\
P(X \leq 2,4) &= F_X(2,4) = 0{,}6875. \\
P(1,7 < X \leq 2,4) &= F_X(2,4) - F_X(1,7) = 0{,}375.
\end{aligned}$$

En el cas de variables discretes només ens interessa conèixer la funció de distribució en els valors que pot prendre la variable, ja que F_X es manté constant entre un d'aquests valors i el següent.

Considerem la probabilitat d'un punt aïllat qualsevol a. Per a calcular la probabilitat $P(X = a)$, calculem la d'un interval $(a - \epsilon, a]$ utilitzant (13) i fem $\epsilon \to 0^+$:

$$P(X = a) = \lim_{\epsilon \to 0^+} P(a - \epsilon < X \leq a) = \lim_{\epsilon \to 0^+} (F_X(a) - F_X(a - \epsilon)). \tag{14}$$

L'anterior límit és el salt que fa la funció F_X en el punt a. Com hem vist en els exemples anteriors, F_X té una discontinuïtat de salt en cada punt dels possibles. La magnitud del salt és igual a la probabilitat del punt. En canvi, els punts on F_X és contínua tenen probabilitat zero.

Si una variable aleatòria discreta X pot prendre els valors a_i ordenats de manera creixent segons l'índex i:

$$F_X(a_i) = \sum_{j \leq i} P(X = a_j). \tag{15}$$

En el cas d'una variable $X \sim \text{Bin}(n, p)$, tenim:

$$F_X(k) = \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l}.$$

Per una variable $X \sim \text{Poiss}(\alpha)$, tenim:

$$F_X(k) = \sum_{l=0}^{k} \frac{\alpha^l}{l!} e^{-\alpha}.$$

En els dos casos anteriors no és possible expressar en forma compacta el resultat dels sumatoris. Hem de recórrer a programari matemàtic o fer la suma quan el nombre de termes és petit.

Un cas en què sí podem calcular el sumatori que dona F_X és el de la variable aleatòria geomètrica.

Si $X \sim \text{Geom}(p)$,

$$F_X(k) = 1 - (1-p)^k \quad \text{amb} \quad k \in \{1, 2, 3, \ldots\}. \tag{16}$$

Aquest es demostra fent el sumatori $\sum_{l=1}^{k}(1-p)^l p$ (suma de tipus geomètric) o amb el raonament següent: $F_X(k) = P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = 1 - (1-p)^k$, ja que $X > k$ equival al fet que en les primeres k realitzacions s'ha obtingut no-èxit.

Exemple 2.10

Es llancen dos daus repetidament fins que s'obté el doble sis. Sigui X la variable que compta el nombre de llaçaments.

1) Calculem les probabilitats següents:

- Que calguin 10 tirades o menys.
- Que calguin 20 tirades o més.
- Que calguin entre 30 i 40 tirades.

La probabilitat del doble sis és 1/36. El nombre de tirades és $X \sim \text{Geom}(1/36)$. La seva funció de distribució, segons (16), és $F_X(k) = 1 - (\frac{35}{36})^k$.
La primera probabilitat demanada és:

$$P(X \leq 10) = F_X(10) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{10} = 0{,}2455.$$

La segona probabilitat és:

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) = 1 - F_X(19) = \left(\frac{35}{36}\right)^{19} = 0{,}5855.$$

La tercera probabilitat és:

$$P(30 \leq X \leq 40) = P(29 < X \leq 40) = F_X(40) - F_X(29)$$

$$= \left(\frac{35}{36}\right)^{29} - \left(\frac{35}{36}\right)^{40} = 0{,}1177.$$

2) Quin és el nombre mitjà de tirades que cal fer?
Es tracta de $\text{E}(X)$. En la taula de paràmetres veiem que una variable $\text{Geom}(p)$ té esperança $1/p$. Així, en el nostre cas $\text{E}(X) = 36$.

3) Quin és el nombre mínim de tirades que ens assegura una probabilitat d'almenys el 90% d'obtenir el doble sis?

La probabilitat que el doble sis surti a tot tardar en la jugada N-èsima és $P(X \leq N) = F_X(N)$. Llavors volem $F_X(N) \geq 0{,}9$. L'equació és:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^N \geq 0{,}9,$$

que implica

$$N \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(35/36)} = 81{,}7.$$

Així, calen com a mínim 82 tirades.

3. Variable aleatòria contínua

En l'apartat 2 d'aquest mòdul hem vist què és una variable aleatòria discreta i hem estudiat quatre de les distribucions més utilitzades: la distribució de Bernoulli, la binomial, la geomètrica i la de Poisson. Hem vist també els paràmetres valor mitjà i variància i finalment hem vist què és la funció de distribució d'una variable aleatòria discreta. L'estructura d'aquest apartat és molt similar a la de l'anterior. Aquí veurem els conceptes anteriors aplicats al cas de les variables aleatòries contínues.

En l'exemple 1.2 de l'apartat 1, quan hem definit què és una variable aleatòria, hem vist que la variable aleatòria contínua X pot prendre un valor qualsevol de l'interval $[0, 2]$. En aquest cas, si suposem que cap dels valors dins $[0, 2]$ té preferència, podríem trobar els resultats següents de manera intuïtiva:

1) Quina és la probabilitat que el senyal emès sigui entre 0 i 1 mV? És a dir, $P(0 \leq X \leq 1)$? Tot ens fa pensar que és $\frac{1}{2}$, ja que estem jugant amb la meitat de possibilitats.

2) Quina és la probabilitat que el senyal emès sigui entre 3 i 4 mV? És a dir, $P(3 \leq X \leq 4)$? Com que sabem que això no succeirà mai perquè el generador només ens dona un senyal en l'interval [0,2], diem que és 0.

3) Quina és la probabilitat que el senyal emès sigui exactament d'1 mV? Aquest cas ens caracteritza les distribucions de variables aleatòries contínues. Diem que $P(X=1) = 0$. En una distribució de variable aleatòria contínua, la probabilitat en qualsevol punt x, és zero.

3.1 Funció de distribució i funció de densitat

La funció de distribució es defineix de la mateixa manera que per a una variable aleatòria discreta, tal com ho havíem definit en l'apartat 2.3.

Definició 3.1. La **funció de distribució d'una variable aleatòria** X es defineix com

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Observeu les similituds en la definició de **funció de distribució** per a variables aleatòries discretes i contínues.

La funció de distribució $F_X(x)$ verifica les propietats següents:

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$.

2) $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

4) $F_X(x)$ és creixent, és a dir, si $a < b$ llavors $F_X(a) \leq F_X(b)$.

5) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Fixeu-vos que són exactament les mateixes propietats que havíem vist per al cas de les variables aleatòries discretes, però aplicades, en aquest cas, a les variables contínues.

Definició 3.2. Una **variabla aleatòria** X és **contínua** si $F_X(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R}$ (tret, potser, d'un nombre finit de punts).

Això implica que la probabilitat d'un punt aïllat val zero. Aplicant (14), tenim $P(X = a) = 0$.

Definició 3.3. Si X és una variable aleatòria contínua amb funció de distribució $F_X(x)$, la **funció de densitat** es defineix com

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

És a dir, la funció de densitat, $f_X(x)$, és la derivada en funció de x (variable independent que ens diu quins valors pot prendre la nostra variable aleatòria X) de la funció de distribució, $F_X(x)$. Recordeu que la funció de distribució ens donava la probabilitat acumulada a mesura que anàvem considerant els valors possibles de la variable aleatòria. La funció de densitat, $f_X(x)$, ens dona una idea de com varia la funció de distribució d'una variable aleatòria. I, inversament, la funció de distribució és la integral sobre x de la funció de distribució.

Funcions contínues i derivables

Diem que una funció $f(x)$ és **contínua** si a mesura que ens anem desplaçant per l'eix de la variable independent, x, no es produeixen salts o canvis bruscos. Intuïtivament, són funcions que podríem dibuixar sobre un paper sense aixecar el llapis. Diem que una funció és **derivable** o **diferenciable** en un punt si hi ha la seva derivada en aquell punt. Recordeu que totes les funcions derivables són contínues.

Vegem-ne un exemple. Com podeu veure en la figura 4, l'àrea per sota de la corba de $f(x)$ correspon a un punt de $F(x)$.

Figura 4. Funció de densitat $f(x)$ i funció de distribució $F(x)$

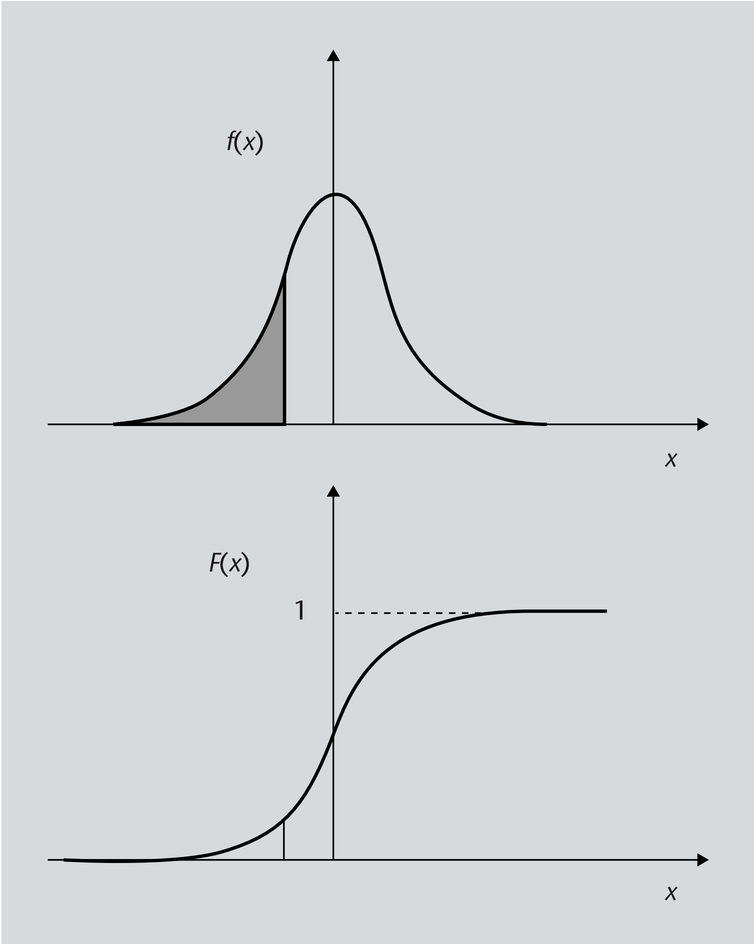


Figura 4

En la figura podeu observar la relació entre la funció de distribució, $F_X(x)$, i la funció de densitat, $f_X(x)$.

A continuació vegem quines relacions hi ha entre la **funció de distribució**, $F_X(x)$, i la **funció de densitat**, $f_X(x)$, d'una variable aleatòria contínua.

Observació

Si X és una variable aleatòria contínua, llavors $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$.
En efecte, com que la probabilitat d'un punt és zero, la probabilitat d'un interval no varia n'incloguem o no els punts extrems.

Propietats de la funció de densitat

Si X és una variable aleatòria contínua amb funció de distribució $F_X(x)$ i funció de densitat $f_X(x)$, llavors

1)

$$f_X(x) \geq 0. \tag{19}$$

Això és clar si observem l'equació (18) de la definició 3.3 i pensem que $F_X(x)$ és creixent, ja que una funció creixent sempre té pendent positiu.

2)

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\,dx. \qquad (20)$$

És a dir, la probabilitat entre dos punts a i b l'obtenim integrant la funció de densitat entre aquests dos punts, és a dir, l'àrea per sota de la corba de la funció de densitat (el resultat es dedueix del fet que F_X és una primitiva de f_X i és contínua).

3)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt. \qquad (21)$$

És a dir, la probabilitat acumulada també la podem pensar com una àrea per sota de la funció de densitat $f_X(x)$. Això es dedueix de (20) amb $a = -\infty$ i $b = x$, ja que $X \leq x$ correspon a l'interval $(-\infty, x]$.

4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1. \qquad (22)$$

És a dir, l'àrea total per sota de la corba $f_X(x)$ és 1. S'obté de (21) fent $x \to \infty$.

Arribats en aquest punt ens podríem preguntar: per què és necessari definir la funció de densitat d'una variable aleatòria contínua si ja tenim el concepte de funció de distribució, com havíem vist amb les variables aleatòries discretes? La resposta és que per al cas de les variables contínues no sempre és possible expressar la funció de distribució d'una manera senzilla i tancada. A més, moltes de les propietats d'aquestes variables es veuen més clarament quan utilitzem la funció de densitat en comptes de la funció de distribució.

3.2 Variables aleatòries contínues més importants

Com acabem de veure en el subapartat anterior, quan treballem amb variables aleatòries contínues, aquestes es poden caracteritzar amb la seva funció de densitat. Vegem-ne a continuació les més importants.

3.2.1 Variable aleatòria uniforme: $\mathbf{U}(a, b)$

La variable X pot prendre un valor qualsevol de l'interval (a, b) i de manera uniforme. En aquest cas diem que X és una **variable aleatòria uniforme** en (a, b). Això ho indiquem amb la funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } \; a < x < b \\ \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \tag{23}$$

La funció de distribució serà, doncs:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x < a \\ \\ \dfrac{1}{b-a}(x-a) & \text{si } \; a \leq x < b \\ \\ 1 & \text{si } \; b \leq x \end{cases} \tag{24}$$

Escrivim $X \sim \mathrm{U}(a, b)$.

En la figura 5 podeu veure un exemple de variable uniforme i les seves funcions de densitat i de distribució. Com podeu veure, l'àrea indicada per sota de $f(x)$ correspon a un punt de $F(x)$.

Figura 5. Funció de densitat $f(x)$ i funció de distribució $F(x)$ de la variable aleatòria $X \sim \mathrm{U}(a, b)$

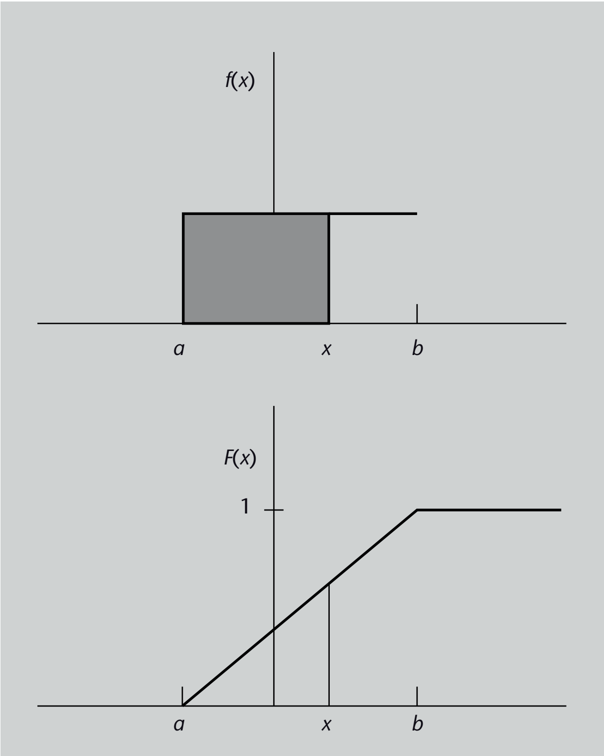


Figura 5

Funció de densitat $f(x)$ i funció de distribució $F(x)$ d'una variable aleatòria uniforme $X \sim \mathrm{U}(a, b)$. Fixeu-vos com la probabilitat acumulada en el punt x, $F(x)$, correspon a l'àrea sota la funció de densitat $f(x)$.

L'exemple 1.2 segueix una distribució $X \sim \mathrm{U}(0,2)$. Així, la probabilitat que el senyal emès es trobi entre 0 i 1 mV ens la dona l'àrea per sota de la corba de la funció de densitat, que en aquest cas correspon a l'àrea d'un rectangle de base 1 i altura $\frac{1}{2}$. És a dir, $P(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{2}$.

Un altre exemple de sistema que utilitza les distribucions uniformes són els generadors de nombres aleatoris. Aquests dispositius generen nombres dins d'un interval determinat de manera uniforme, de tal manera que tots el nombres tenen la mateixa probabilitat de ser generats. Vegem-ne un exemple a continuació.

Exemple 3.1

Triem a l'atzar un nombre, X, en l'interval $(0,5)$. La funció de densitat és:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} & \text{si } \; x \in (0,5) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Calculem algunes probabilitats.

1) Probabilitat que el nombre sigui més petit que 3, $P(X < 3) = \int_0^3 \frac{1}{5}\, dx = \frac{3}{5}$.

2) Sabent que el nombre és més gran que 2, probabilitat que sigui més petit que 3,

$$P(X < 3 \,|\, X > 2) = \frac{P(2 < X < 3)}{P(X > 2)} = \frac{1/5}{3/5} = \frac{1}{3}.$$

Vegeu també

Recordeu el subapartat 2.3 del mòdul "Introducció a la probabilitat", en què vam veure la probabilitat condicionada, és a dir, la probabilitat d'un succés sabent que s'ha produït un altre succés conegut.

3.2.2 Variable aleatòria exponencial: Exp(λ)

La distribució exponencial se sol utilitzar per a modelitzar experiències en què intervé un temps d'espera, com els següents:

- Temps d'espera en una consulta sense cita prèvia.
- Temps d'espera en un servidor per a rebre resposta a una petició enviada.
- La vida d'un component electrònic.

La distribució de Poisson que hem vist en l'apartat de les variables aleatòries discretes està molt relacionada amb la distribució exponencial. Si un procés és de Poisson (succés aleatori en el temps), la variable temps, t, que passa fins que té lloc el primer succés, és exponencial. Cal destacar que el paràmetre de la variable de Poisson val $\alpha = \lambda T$, en què T és l'interval en què comptem els esdeveniments que succeeixen.

La **variable aleatòria exponencial** té per funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } \ x \geq 0 \\ \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{25}$$

Obtenim la funció de distribució integrant. Així,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } \ x \geq 0 \\ \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{26}$$

Escrivim $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

En la figura 6 veiem la representació de la funció de densitat, per a tres valors diferents de λ. (No s'ha representat l'eix negatiu d'abscisses en què la funció és 0.)

Figura 6. Funcions densitat de $X \sim \mathrm{Exp}(1)$, $X \sim \mathrm{Exp}(2)$ i $X \sim \mathrm{Exp}(3)$

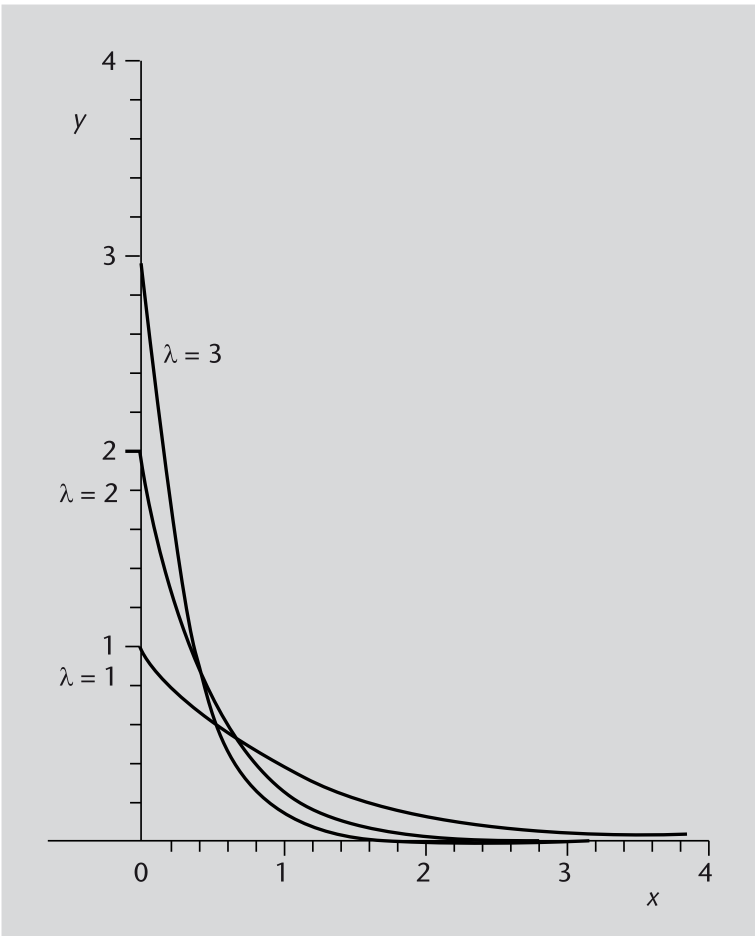


Figura 6

Representació de la funció de densitat d'una variable exponencial per als valors de λ 1, 2 i 3. Com més gran és λ (més trucades per unitat de temps, per exemple) més probable és que hàgim d'esperar poc temps fins que arribi una trucada.

Fixeu-vos que, tal com λ creix, el pic de la funció al voltant de $x = 0$ s'accentua. La causa d'això és que, si arriben molts successos per unitat de temps, la major part de la probabilitat de tenir una arribada es concentra en valors de x petits. Per contra, si tenim pocs successos per unitat de temps (α o λ petits) la probabilitat d'arribada és més uniforme.

Exemple 3.2

Suposem que el temps, en hores, que es necessita per a arreglar un cert tipus d'avaria telefònica és una variable aleatòria, T, que segueix una llei exponencial de paràmetre $\lambda = 0{,}5$. En aquest cas tenim $f(t) = 0{,}5e^{-0{,}5t}$ i $F(t) = 1 - e^{-0{,}5t}$ per a $x \geq 0$. Calculem algunes probabilitats:

1) Probabilitat que el temps de reparació passi de 2 h. És a dir,

$$P(T > 2) = 1 - P(T < 2) = 1 - F(2) = e^{-1} = 0{,}368.$$

2) Sabent que el temps de reparació ja ha sobrepassat 9 h, quina és la probabilitat que la reparació trigui almenys 10 h? En aquest cas es tracta de trobar una probabilitat condicionada; escrivim:

$$P(T > 10 \,|\, T > 9) = \frac{P(\{T > 10\} \cap \{T > 9\})}{P(T > 9)} = \frac{P(T > 10)}{P(T > 9)}$$

$$= \frac{1 - F(10)}{1 - F(9)} = e^{-0{,}5 \cdot 1} = 0{,}606.$$

Vegeu també

Aquí tornem a utilitzar la noció de probabilitat condicionada del subapartat 2.3 del mòdul "Introducció a la probabilitat".

3.2.3 Variable aleatòria normal o de Gauss: $\mathrm{N}(m, \sigma)$

És una de les distribucions de probabilitat més utilitzades. Molts fenòmens físics que afecten circuits i aparells de telecomunicacions es modelitzen utilitzant la distribució normal o de Gauss. També s'utilitza molt freqüentment per al control de qualitat estadístic de components electrònics. Depèn de dos paràmetres, m i σ, que veurem en el subapartat següent.

Paràmetres de la distribució normal

La distribució normal o de Gauss es caracteritza per dos paràmetres: el valor mitjà m (paràmetre de posició) i la desviació típica σ, paràmetre que ens mesura la dispersió de la variable aleatòria respecte de m.

Una particularitat que presenta aquesta distribució és que és la forma límit d'algunes distribucions discretes quan s'augmenta indefinidament el nombre de repeticions d'un experiment. Moltes variables aleatòries com pesos, alçades, talles, consums de gas, etc., segueixen una distribució normal perquè cadascuna és la suma d'un gran nombre de variables aleatòries independents. Així, l'alçada d'una persona és la suma de molts factors: herència, alimentació, tipus de vida, etc.

Els errors, anomenats *aleatoris*, que es presenten en observacions astronòmiques, pesades d'una balança, el soroll generat als aparells de telecomunicació, etc., i, en general, en la majoria de mesures amb algun aparell, són la suma d'un gran nombre d'errors elementals independents, com corrents d'aire, vibracions, error d'apreciació, etc. Per això, els errors aleatoris segueixen una distribució normal.

La **variable aleatòria normal** té per funció de densitat:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

$m \in \mathbb{R}$ és l'esperança de X i $\sigma > 0$ és la desviació típica de X. Escrivim $X \sim \mathrm{N}(m, \sigma)$.

En aquest cas la funció de distribució no es pot obtenir integrant analíticament de manera senzilla, com ho hem fet abans. Per aquesta raó, ens serà més útil treballar amb la funció de densitat.

Vegem alguns gràfics de la funció de densitat en variar els paràmetres m i σ.

Càlcul de probabilitats

Per a calcular probabilitats, utilitzarem taules estadístiques o bé algun programari matemàtic de tipus Scilab, Excel, Wiris, Minitab, SPSS, R, etc.

En la figura 7 hem representat $\mathrm{N}(0, 1)$ i $\mathrm{N}(2, 1)$. El primer paràmetre de la funció $\mathrm{N}(x, y)$ (0 i 2 en aquest exemple) fa referència al valor mitjà. El segon paràmetre (1 en els dos exemple) és la desviació estàndard. Fixeu-vos que, com que totes dues variables aleatòries tenen la mateixa desviació típica, σ (sigma), la forma de la funció no ha variat. $\mathrm{N}(2, 1)$ és traslladada dues unitats a la dreta respecte de $\mathrm{N}(0, 1)$, ja que el valor mitjà és diferent en cada cas.

Figura 7. Funcions de densitat de $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ i $X \sim \mathrm{N}(2, 1)$

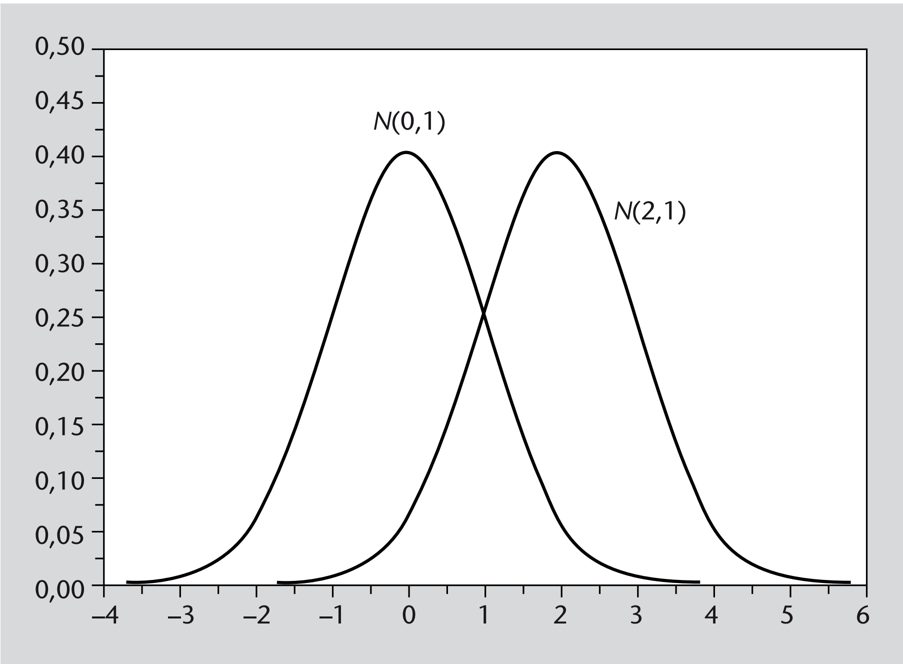
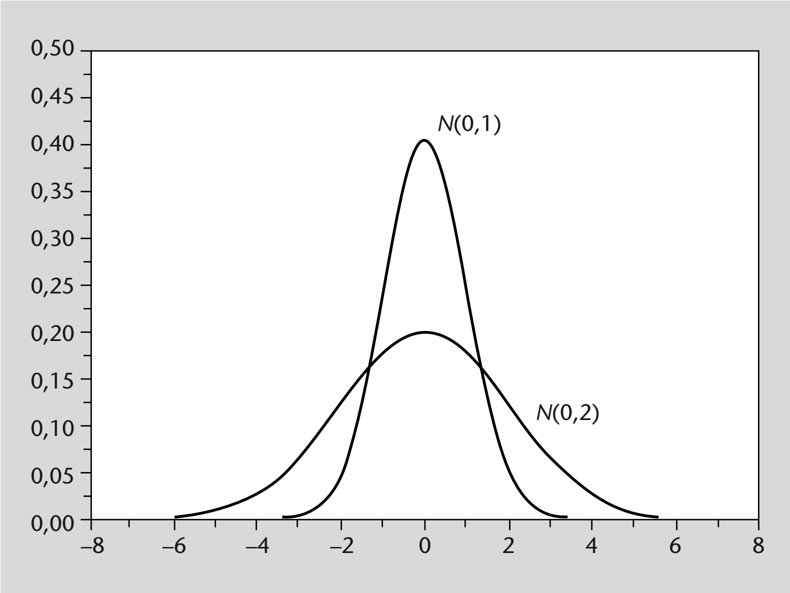


Figura 7

La corba de l'esquerra representa la distribució $\mathrm{N}(0, 1)$, centrada a 0 i amb una desviació típica de valor 1. La corba de la dreta representa la distribució $\mathrm{N}(2, 1)$, amb valor mitjà 2 i desviació estàndard 1.

En la figura 8 fixem el valor a $m = 0$ i modifiquem σ. Observem que per a un valor més petit que σ hi ha menys dispersió. Per a $\sigma = 2$ tenim més dispersió, i per tant la funció de densitat és menys punxeguda.

Figura 8. Funcions de densitat de $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ i $X \sim \mathrm{N}(0,2)$



Observeu que encara que canviï la forma de la funció, l'àrea total per sota de la corba és 1, la probabilitat total.

Figura 8

La funció $\mathrm{N}(0,1)$ és una distribució gaussiana amb mitjana 0 i desviació estàndard 1. En la funció $\mathrm{N}(0,2)$ hem augmentat la desviació estàndard, i com que tenim més dispersió, aquesta funció és més plana, menys punxeguda. Noteu, però, que l'àrea total sota les dues corbes ha de ser la mateixa i igual a 1.

Ja que no podem integrar analíticament $f(x)$, per a trobar probabilitats cal utilitzar taules o bé algun programari matemàtic o estadístic.

Figura 9. Funció de densitat de $X \sim \mathrm{N}(0,1)$

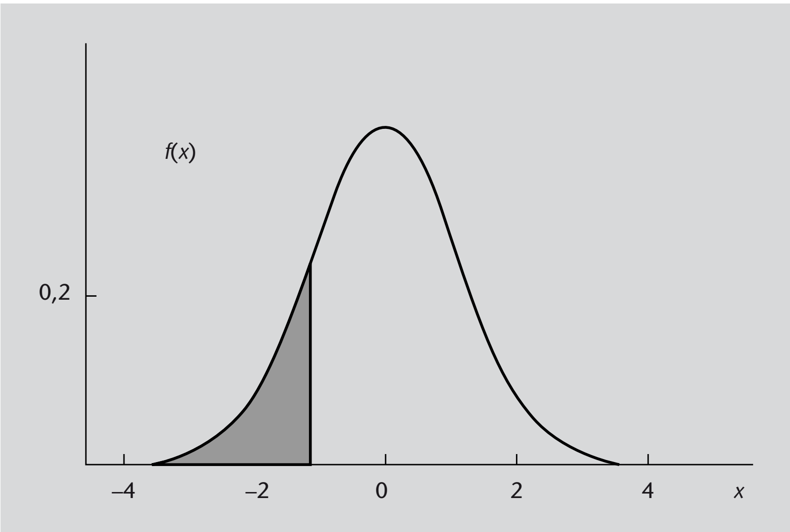


Figura 9

En aquest exemple s'ha calculat la probabilitat que $x < -1$. Per a fer-ho, hem calculat l'àrea sota la distribució de Gauss des de $-\infty$ fins a $x = 1$. Utilitzant programari matemàtic, s'ha obtingut que $P(x < -1) = 0{,}158655$.

3.3 Paràmetres: valor mitjà (esperança) i variància

En el subapartat anterior hem vist tres de les distribucions contínues més freqüents: la distribució uniforme, l'exponencial i la de Gauss. De manera semblant a com ho hem fet per al cas de les variables aleatòries discretes, en aquest subapartat veurem dos paràmetres que defineixen aquestes distribucions: el valor mitjà i la variància. La diferència fonamental entre les variables discretes i les contínues és que en aquest cas transformarem els sumatoris que havíem vist en el subapartat 2.2 en integrals. El significat dels paràmetres és el mateix que en el cas discret.

Definició 3.4. Sigui X una variable aleatòria contínua.

El **valor mitjà, esperança** o **moment d'ordre 1** de X:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx. \tag{28}$$

El **moment d'ordre 2**:

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx. \tag{29}$$

El **moment d'ordre *k***, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\mathrm{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx. \tag{30}$$

La **variància**:

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}(X))^2 f(x)\, dx = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2. \tag{31}$$

La **desviació típica**:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}. \tag{32}$$

Paràmetres de les principals variables aleatòries contínues

Per a cada una de les distribucions vistes, s'obtenen els valors de l'esperança i la variància de la taula següent.

Distribucions de variables aleatòries contínues

$X \sim$	**Funció de densitat**	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{U}(a,b)$	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in (a,b) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
$\mathrm{N}(m,\sigma)$	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$	m	σ^2
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$

Comprovem algun resultat per al cas de $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x \quad \mathrm{i} \quad du = dx \\ dv = \lambda e^{-\lambda x} \quad \mathrm{i} \quad v = -e^{-\lambda x} \end{array} \right\} = \\
&= \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{x\to\infty}(-xe^{-\lambda x}) - \lim_{x\to 0}(-xe^{-\lambda x}) + \frac{1}{\lambda} = \\
&= 0 + 0 + \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

3.4 Variables aleatòries mixtes

Com hem vist, les variables aleatòries discretes tenen una funció de distribució constant a trossos i les variables aleatòries contínues tenen una funció de distribució contínua a tot $\mathbb{R}$ i derivable a trossos. Això no exaureix totes les possibilitats, ja que podem tenir una funció de distribució que sigui derivable a trossos i que tingui algunes discontinuïtats de salt. En aquest cas parlem de variables aleatòries mixtes. Per a aquestes tenim alguns punts amb probabilitat no nul·la ($P(X = a) > 0$) i a més poden prendre tots els valors de conjunts com a intervals reals.

Exemple 3.3

Considerem una variable aleatòria amb funció de distribució

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}
$$

La funció anterior és creixent, tendeix a 0 per $x \to -\infty$ i tendeix a 1 per $x \to \infty$, així que és una funció de distribució correcta.

La variable X no és contínua, ja que en $x = 0$ $F(x)$ salta de 0 a 1/2. Llavors, $P(X = 0) = 1/2$, probabilitat que seria zero per a una variable contínua.

Tampoc no és discreta, ja que pot prendre qualsevol valor positiu atès que $F(x)$ és estrictament creixent per a $x > 0$.

Es tracta, doncs, d'una variable mixta. No té una densitat definida degut a la discontinuïtat en zero. Encara així es pot definir una densitat utilitzant funcions generalitzades (delta de Dirac), tal com es veurà en l'apartat 3.6.

3.5 Funcions de densitat condicionades

De la mateixa manera que la probabilitat d'un esdeveniment, $P(A)$, canvia quan sabem que s'ha produït un altre esdeveniment B, per a passar a ser $P(A \mid B)$, les característiques de les variables aleatòries també canvien en aquesta situació.

Exemple 3.4

Considerem una variable X que dona el temps que passa fins que arriba un senyal de comunicació. Si ha passat un cert temps, diguem 2 segons, i el senyal no ha arribat, la probabilitat que X prengui certs valors queda condicionada per aquest fet. En aquest cas $B = \{X > 2\}$ i, donat B, la probabilitat que, per exemple, $X > 5$ s'ha de calcular com una probabilitat condicionada: $P(X > 5 \,|\, B)$.

En aquesta situació pot ser més pràctic tenir una densitat per a la variable X que ja incorpori la condició. Això ens porta a definir la densitat condicionada.

Si B és un esdeveniment que afecta la variable aleatòria X, la densitat de X, $f(x)$ es modifica per passar a ser $f(x \,|\, B)$, densitat de X condicionada al succés B.

A partir d'aquí podem calcular l'esperança de X condicionada a l'esdeveniment B:

$$\mathrm{E}(X \,|\, B) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x \,|\, B) dx. \tag{33}$$

La situació que considerem és quan l'esdeveniment B és de la forma $X \in A$, on A és un subconjunt de $\mathbb{R}$. El resultat és el següent:

$$f(x \,|\, X \in A) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{P(A)} & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \tag{34}$$

En l'anterior exemple, aquest seria el cas. Amb $B = \{X > 2\}$ és $A = (2, \infty)$.

Exemple 3.5

El temps que triga un servidor en processar una petició és una variable aleatòria X de tipus exponencial amb valor mitjà 2 s. Suposem que passat 1 s el procés encara no ha acabat. Quina és la densitat i el valor mitjà de X condicionats a aquest fet?

$X \sim \mathrm{Exp}(1/2)$, ja que el valor mitjà és $1/\lambda = 2$. La densitat de X és $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}$, $x \geq 0$ i la funció de distribució de X és $F(x) = 1 - e^{-x/2}$, $x \geq 0$.

La condició que tenim és $X > 1$, així que el conjunt A és $(1, \infty)$. Notem que la seva probabilitat val $P(A) = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = e^{-1/2}$. Llavors,

$$f(x \,|\, X > 1) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}e^{-x/2}}{e^{-1/2}} = \frac{1}{2}e^{-(x-1)/2} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

L'esperança condicionada val:

$$\mathrm{E}(X \,|\, X > 1) = \int_1^{\infty} x \frac{1}{2} e^{-\frac{x-1}{2}} dx = [-(x+2)e^{-\frac{x-1}{2}}]_1^{\infty} = 3.$$

Notem que aquesta esperança és més gran que l'esperança sense condicionar, $E(X) = 2$, ja que la condició desplaça el pes de les probabilitats cap a valors més grans.

3.6 Delta de Dirac. Densitat en el cas discret

Les variables aleatòries discretes i les mixtes tenen funcions de distribució amb discontinuïtats de salt. En aquests casos no hi ha la derivada i per tant no hi ha una funció de densitat en el sentit de la fórmula (18) o la (20). Això és possible fer-ho utilitzant el que s'anomenen **funcions generalitzades**, més concretament, la delta de Dirac. La seva definició és:

Definició 3.5. La funció generalitzada **delta de Dirac**, $\delta(x)$, es defineix a través de la següent propietat formal:

Per a tota funció contínua $g(x)$ i nombres $\alpha < \beta$, es verifica:

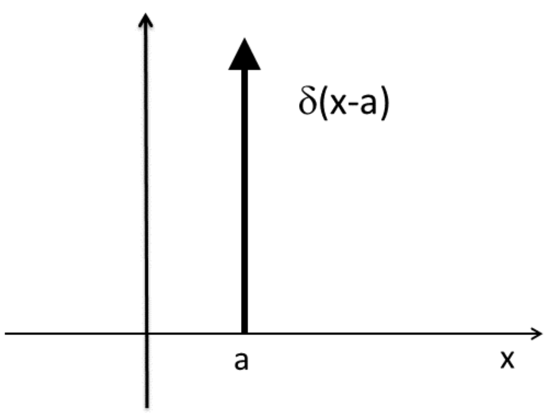
$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(x)g(x)\,dx = \begin{cases} g(0) & \text{si } \alpha < 0 < \beta \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \tag{35}$$

Més generalment, utilitzem la delta desplaçada al punt a:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(x-a)g(x)\,dx = \begin{cases} g(a) & \text{si } \alpha < a < \beta \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \tag{36}$$

Notem que $\int_{\alpha}^{\beta} \delta(x-a)\,dx = 1$ sempre que l'interval d'integració contingui el punt a, per petit que sigui aquest interval. Això no es podria conseguir amb cap funció ordinària. Una visualització de la $\delta(x-a)$ seria una funció que val 0 per a tota $x \neq a$ i val ∞ en el punt a de manera que la integral valgui 1 (figura 10).

Figura 10. Delta de Dirac centrada en el punt a



Com que la probabilitat d'una variable aleatòria discreta es concentra en punts aïllats, és raonable representar-la amb una densitat amb deltes de Dirac. Si X és una variable aleatòria discreta que pren valors a_i amb probabilitats $P_X(a_i) = P(X = a_i)$, li podem associar la densitat següent:

$$f_X(x) = \sum_i P_X(a_i)\delta(x - a_i). \tag{37}$$

Una manera més precisa d'arribar al resultat anterior és mitjançant la funció esglaó:

Definició 3.6. La **funció esglaó** o **funció de Heaviside**, $u(x)$, és:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{38}$$

La funció esglaó es relaciona amb la delta de la manera següent:

$$\frac{d}{dx}u(x - a) = \delta(x - a). \tag{39}$$

En efecte, de (36) deduïm que $\int_{-\infty}^{x} \delta(y - a)\, dy = 0$ per a $x < a$, mentre que $\int_{-\infty}^{x} \delta(y - a)\, dy = 1$ per a $x > a$, així que

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(y - a)\, dy = u(x - a).$$

Derivant els dos costats de l'anterior equació, s'obté (39).

Ara, podem expressar la funció de distribució d'una variable discreta o mixta amb funcions esglaó i derivar-la utilitzant (39).

Per una variable discreta, podem expressar la funció de distribució

$$F_X(x) = \sum_i P_X(a_i)u(x - a_i),$$

ja que F_X és una funció esglaonada i l'alçada de cada esglaó és el factor $P_X(a_i)$. Derivant l'anterior equació, s'obté (37).

En el cas de variables mixtes convé tenir en compte la propietat següent. Per a qualsevol funció contínua $h(x)$:

$$\delta(x-a)h(x) = \delta(x-a)h(a). \tag{40}$$

La igualtat anterior es demostra multiplicant els dos costats per qualsevol funció contínua $g(x)$ i veient que en integrar sobre qualsevol interval s'obté el mateix resultat en els dos costats.

Exemple 3.6

Obtindrem la densitat per la variable mixta de l'exemple 3.3.

Podem expressar la distribució de X com a $F(x) = u(x)\frac{x+1}{x+2}$.

Derivant, i utilitzant (40),

$$f(x) = u'(x)\frac{x+1}{x+2} + u(x)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)' = \delta(x)\frac{x+1}{x+2} + u(x)\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\delta(x) + u(x)\frac{1}{(x+2)^2}.$$

4. Teorema central del límit. Aplicació

En aquest mòdul hem vist les variables aleatòries discretes i contínues. Per a cada variable aleatòria, n'hem calculat el valor mitjà i la variància. Aquests paràmetres ens donen una idea global del comportament de la variable aleatòria. També, per a cada una de les variables estudiades, hem vist la funció de distribució, que ens permet calcular la probabilitat acumulada donat un cert valor x i la funció de densitat, que ens diu com varia (és la derivada en funció de x) la funció de distribució.

En aquest darrer apartat del mòdul veurem com podem relacionar les variables aleatòries discretes vistes en l'apartat 2 amb la variable aleatòria contínua normal o de Gauss que hem vist en l'apartat 3. Tal com hem dit abans, la distribució normal és la forma límit d'algunes distribucions discretes quan s'augmenta indefinidament el nombre de repeticions d'un experiment.

Recordeu l'exemple 2.8 que hem vist en el subapartat 2.2, en què teníem la distribució de notes de dos alumnes com a exemple de distribució discreta. Fixeu-vos que hi hem calculat el valor mitjà i la desviació típica, justament els paràmetres que defineixen una distribució normal. Què passaria si en la nostra distribució discreta augmentéssim el nombre de mostres i en comptes de 3 resultats prenguéssim moltes més notes? O si dibuixéssim la distribució de notes, no de 2, sinó de molts més alumnes? Això és el que ens permet el teorema central del límit: aproximar una distribució discreta a una de normal quan augmentem el nombre de mostres i es donen una sèrie de condicions que veurem a continuació.

Enunciem el teorema central del límit (TCL) que reflecteix aquest fet.

Observació

El teorema central del límit ens permet aproximar una variable aleatòria discreta a una distribució de Gauss quan repetim un nombre suficientment gran de vegades un experiment.

Teorema central del límit

Sigui $\{X_n\}$ amb $n \geq 1$ una successió de variables aleatòries independents, que segueixen la mateixa llei de probabilitat, amb una esperança m i variància σ^2. Considerem la nova variable aleatòria definida per

$$Y_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}. \tag{41}$$

Aquesta variable tal com l'hem definida té un valor mitjà igual a zero i una variància igual a 1. Es té que la variable Y_n convergeix cap a la distribució $\mathrm{N}(0,1)$ quan n tendeix a infinit. La distribució $\mathrm{N}(0,1)$ també es coneix com a **distribució normal estàndard**.

Alternativament, podem considerar la variable:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Llavors, el TCL ens diu que per a n gran $S_n \sim \mathrm{N}(nm, \sqrt{n}\sigma)$.

4.1 Aproximació de llei binomial a la normal

Si estem treballant amb una variable discreta $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ recordem que X compta el nombre d'èxits en n repeticions d'un experiment de Bernoulli. Llavors podem expressar-la com $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, on les X_i són variables de Bernoulli independents. X_i és un indicador que val 1 si la i-èsima vegada que fem l'experiment s'obté èxit, i 0 en cas contari. La suma dels indicadors dona el nombre total d'èxits.

Sent $X_i \sim \mathrm{B}(p)$, tenim $\mathrm{E}(X_i) = p$ i $\mathrm{Var}(X_i) = p(1-p)$. Aplicant el TCL, si n és gran, X s'aproxima a una normal $Y \sim \mathrm{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$, en què la variable Y té la mateixa esperança i variància que X. Fixeu-vos que en aquest cas el valor mitjà de la distribució normal, m, és igual a np, i la desviació, σ, és $\sqrt{np(1-p)}$, en què n i p són els paràmetres de la distribució binomial.

Encara que en el teorema anterior es parla d'aproximació quan n tendeix a infinit, en la pràctica aquesta aproximació és vàlida quan es compleix $np > 5$ i $n(1-p) > 5$.

Cal tenir en compte que passem d'una distribució discreta que pren valors enters entre 0 i n a una variable contínua que pren valors en tot $\mathbb{R}$. A més, en el cas de la llei binomial, la probabilitat en un punt és diferent de zero, mentre que no és així en el cas de la llei normal perquè és una distribució contínua.

Observació

Recordeu que $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ és el nombre de n experiències de Bernoulli $\mathrm{B}(p)$ indexades.

Per aquestes raons, quan aproximem una distribució binomial a una de normal cal fer una correcció de continuïtat de la manera següent:

Si $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ amb $np > 5$ i $n(1-p) > 5$ i volem calcular $P(a \leq X \leq b)$, considerem la variable $Y \sim \mathrm{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ i calculem $P(a - 0{,}5 < Y < b + 0{,}5)$.

Observació

Fixeu-vos en els factors $-0,5$ i $+0,5$, que hem afegit als límits a i b a causa de la correcció de continuïtat.

Exemple 4.1

En un magatzem s'ha analitzat durant un any el percentatge de peces defectuoses i se n'ha detectat el 8%. És a dir, podem considerar que la probabilitat que una peça sigui defectuosa és de 0,08. S'agafa una mostra de 100 peces i es defineix la variable aleatòria X com el nombre de peces defectuoses dins de la mostra de 100. La variable aleatòria X segueix una llei binomial $\mathrm{Bin}(100, 0{,}08)$, ja que repetirem l'experiment de prendre una peça 100 cops i la probabilitat d'èxit (aquí definim èxit com l'obtenció d'una peça defectuosa) serà 0,08. Calculem la probabilitat que en les 100 peces n'hi hagi entre 10 i 20 de defectuoses.

Primer ho calculem sense fer l'aproximació. Com que $X \sim \mathrm{Bin}(100,\ 0{,}08)$,

$$P(10 \leq X \leq 20) = \sum_{k=10}^{20} \binom{100}{k} 0{,}08^k 0{,}92^{100-k} = 0{,}2779.$$

Comprovem a continuació que podem fer l'aproximació de la distribució binomial a una de normal:

- $np = 100 \cdot 0{,}08 = 8 > 5$.
- $n(1-p) = 100 \cdot 0{,}92 = 92 > 5$.

Un cop confirmat que podem fer l'aproximació prenem una distribució normal amb els paràmetres següents: $m = np = 8$ i $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 2{,}713$. Per tant, la nostra distribució normal és $Y \sim \mathrm{N}(8,\ 2{,}713)$. La probabilitat que en 100 peces n'hi hagi entre 10 i 20 de defectuoses és:

$$P(10 \leq X \leq 20) = P(9{,}5 < Y < 20{,}5) = 0{,}2901.$$

Recordeu que hem de corregir els límits de l'interval amb el factor $0,5$. L'últim valor numèric s'ha obtingut amb l'ajut d'un programari matemàtic.

Resum

En l'apartat 1 hem vist què és una **variable aleatòria** i l'hem definida com una funció que assigna un nombre a cada element de l'espai mostral Ω. Per exemple, si llancem una moneda podem definir $X = 0$ si obtenim cara i $X = 1$ si obtenim creu.

També hem vist que hi ha dos tipus de variables aleatòries:

- Variables aleatòries discretes: els valors que pot prendre X són dins d'un conjunt finit o infinit numerable d'elements.

- Variables aleatòries contínues: X pot prendre qualsevol valor en conjunts no numerables.

L'apartat 2 l'hem dedicat a estudiar en detall algunes de les variables aleatòries discretes més importants. Hem definit què és la **funció de probabilitat** i hem vist les distribucions següents:

- Variable aleatòria discreta **uniforme**.
- Distribució de **Bernoulli**, $\mathrm{B}(p)$, definida pel paràmetre p (probabilitat d'èxit).
- Distribució **binomial**, $\mathrm{Bin}(n, p)$, que consisteix en un experiment de Bernoulli repetit n cops.
- Distribució **geomètrica**, $\mathrm{Geom}(p)$, que es dona quan repetim l'experiment de Bernoulli fins que obtenim el primer èxit.
- Distribució de **Poisson**, $\mathrm{Poiss}(\alpha)$, caracteritzada pel paràmetre α (nombre mitjà d'esdeveniments dins d'un cert interval).

Hem definit els moments d'ordre n d'una variable aleatòria discreta i, en particular, hem vist l'**esperança** o **valor mitjà**, la **variància** i la **desviació típica**. Definim el valor mitjà o esperança com s'indica a continuació:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(X = a_i).$$

El moment d'ordre 2 és:

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 P(X = a_i).$$

La variància i la desviació típica són:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2, \qquad \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Finalment, hem vist el concepte de **funció de distribució** com a funció de probabilitat acumulada que ens dona la probabilitat que la variable aleatòria X sigui igual o més petita que un cert valor x:

$$F_X(x) = P(X \leq x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En la taula següent podeu veure els paràmetres més importants per a les variables aleatòries discretes que hem vist.

Distribucions de variables aleatòries discretes

$X \sim$	k	$P(X=k)$	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{B}(p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1) = p$ $P(X=0) = 1-p$	p	$p(1-p)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\{0,1,2,\ldots,\ n\}$	$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Geom}(p)$	$\{1,2,3,\ldots\}$	$P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathrm{Poiss}(\alpha)$	$\{0,1,2,\ldots\}$	$P(X=k) = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$	α	α

Hem dedicat l'apartat 3 a l'estudi de les variables aleatòries contínues. Hem començat l'apartat definint la **funció de distribució**, que conceptualment és la mateixa que per al cas de les variables discretes. Per al cas de les variables contínues, hem definit una nova funció, la **funció de densitat**, que és la derivada de la **funció de distribució**. A continuació hem vist les variables aleatòries contínues més importants:

- La distribució **uniforme**, $X \sim \mathrm{U}(a,b)$, caracteritzada per l'interval (a,b), en què la **funció de densitat** és constant i val $\frac{1}{b-a}$ en aquest interval.

- La distribució **exponencial**, $\mathrm{Exp}\,(\lambda)$, en què λ és la taxa de successos per unitat de temps.

- La distribució **normal** o de **Gauss**, $\mathrm{N}(m,\sigma)$, caracteritzada pel valor mitjà i la desviació típica.

De la mateixa manera que hem fet en l'apartat 2 amb les variables aleatòries discretes, hem vist també en aquest apartat que per a les variables aleatòries contínues podem definir els **moments d'ordre** n, la **variància** i la **desviació típica**. El valor mitjà o esperança s'expressa com segueix:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

El moment d'ordre 2 és:

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx.$$

La variància i la desviació estàndard són:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2, \qquad \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

La funció de distribució i de densitat les definim com segueix:

$$F_X(x) = P(X \leq x), \qquad f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

En la taula següent podeu veure els paràmetres més importants per a les variables aleatòries contínues que hem vist.

Distribucions de variables aleatòries contínues

$X \sim$	**Funció de densitat**	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{U}(a,b)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in (a,b) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathrm{N}(m,\sigma)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$	m	σ^2
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Finalment, en l'apartat 4, hem vist el **teorema central del límit**. Aquest teorema ens permet aproximar la suma o la mitjana d'una successió de variables aleatòries independents a una **distribució normal** amb certes condicions. En particular, hem vist com podem aplicar aquesta llei per a aproximar una distribució binomial a una de normal.

Activitats

1. Una empresa de fabricació de microxips observa que el nombre de components electrònics que fallen abans de complir 100 h de funcionament segueix una distribució de Poisson. De mitjana, el nombre de microxips que fallen en aquest interval de temps és 8. Es demana:

a) Comproveu que la funció de probabilitat corresponent a la Poisson satisfà la condició que la suma de totes les probabilitats de valors possibles de la variable té un valor de 1, és a dir, que $1 = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)$.
Pista: Recordeu la sèrie de Taylor de la funció exponencial.

b) Quina és la probabilitat que falli exactament un microxip al cap de 50 h de funcionament?

c) Quina és la probabilitat que no fallin més de dos microxips en 100 h?

d) Quina és la probabilitat que fallin almenys 10 microxips en 125 h?

2. Una font binària genera dígits 1 i 0 de manera aleatòria amb probabilitats $0,6$ i $0,4$, respectivament. Es demana:

a) Amb quina de les variables aleatòries vistes podríem modelitzar el comportament d'aquesta font?

b) Quina és la probabilitat que en una seqüència de 5 dígits surtin dos 1 i tres 0?

c) Quina és la probabilitat que en la seqüència de 5 dígits s'obtinguin almenys tres 1?

3. Suposeu que el temps (en segons) que triga un servidor de bases de dades a donar resposta a una consulta SQL és una variable aleatòria exponencial amb paràmetre $\lambda = 1/10$. Si el servidor rep una altra consulta SQL just abans de la vostra, es demana:

a) Quins valors pot prendre el temps d'espera X per a poder llançar una consulta? Es tracta d'una variable aleatòria discreta o contínua?

b) Quina és la probabilitat que l'anterior temps d'espera sigui menys de 5 s.

c) Quina és la probabilitat que el temps d'espera estigui entre 5 i 10 s.

4. En una xarxa de telecomunicacions, s'ha calculat que la probabilitat que un encaminador falli en una jornada d'activitat extrema és de 0,04. Si es considera un total de 2.500 jornades d'activitat extrema, llavors:

a) Sigui X el nombre de vegades que falla l'encaminador. De quin tipus de variable aleatòria es tracta?

b) Quina és la probabilitat que l'encaminador falli més de 120 cops en aquest període?

c) I que falli entre 100 i 120 cops (tots dos inclosos) en aquest període?

Pista: Gràcies al TCL, és possible aproximar una binomial mitjançant una normal.

5. El nombre de consultes que un servidor de bases de dades processa en un interval de 10 s és una variable aleatòria de Poisson, X, amb taxa $\lambda = 0,5$ consultes per segon. Es demana:

a) Quina és la probabilitat que cap consulta sigui processada en un interval de 10 s?

b) Quina és la probabilitat que almenys 2 consultes siguin processades en un interval de 10 s?

6. Un emissor A transmet un missatge a un receptor B. Sigui p la probabilitat que B rebi correctament el missatge. Per a assegurar-se que el missatge serà rebut almenys un cop, A tornarà a enviar el missatge fins a un màxim de n intents. Suposant que les n transmissions són independents, es demana:

a) Identifiqueu quina és la distribució estadística associada a la variable aleatòria X = nombre de missatges rebuts correctament per B en els n intents.

b) Si $p = 0{,}7$ i $n = 3$, calculeu la probabilitat que B acabi rebent el missatge.

c) Si $p = 0{,}8$, quin és el valor mínim de n que fa que la probabilitat que el missatge es rebi sigui, com a mínim, de 0,95?

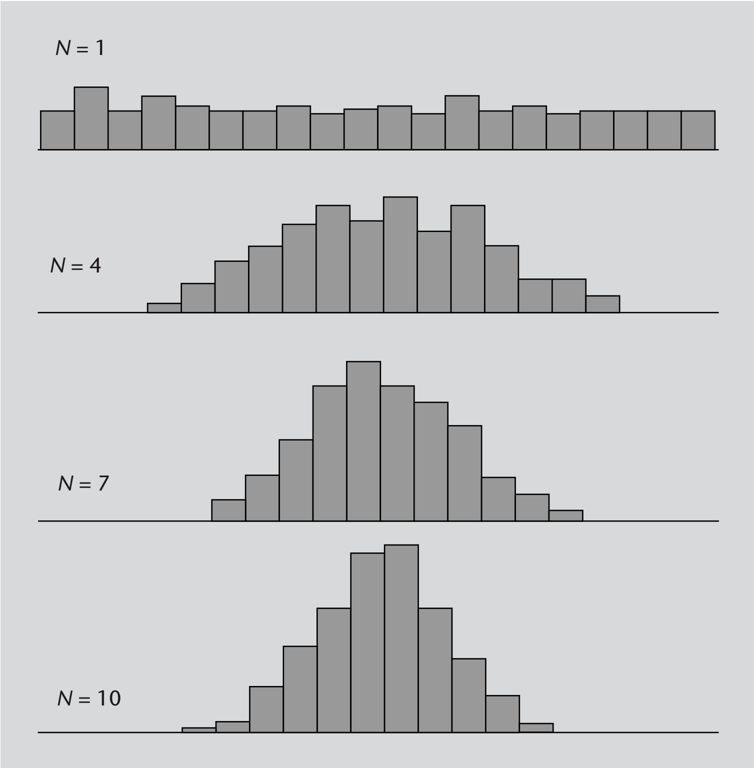
7. Suposeu que la temperatura T a què ha de treballar una sonda de mesura durant una missió espacial és una variable aleatòria gaussiana (distribució normal) amb mitjana 85 °F i desviació estàndard de 10 °F.

a) En un moment determinat, quina és la probabilitat que la temperatura estigui entre 75 i 95 °F?

b) I que estigui entre 65 i 105 °F?

c) Busqueu a internet informació sobre la regla 68/95/99 i justifiqueu que els resultats anteriors són coherents amb això.

d) Feu ús del teorema central del límit per a explicar la gràfica següent.



8. Una centraleta telefònica rep 300 trucades per hora. La centraleta està dimensionada de tal manera que no es poden establir més de 12 connexions per minut. Amb aquestes dades ens demanen el següent:

a) Quina és la probabilitat que la centraleta quedi saturada en un minut determinat?

b) Quina és la probabilitat que es rebi una única trucada en un minut determinat?

9. D'una estació parteix un tren cada 20 min. Si arribem a l'estació en un moment qualsevol, ens demanen determinar el següent:

a) La funció de distribució de la variable aleatòria "temps d'espera".

b) La probabilitat que hàgim d'esperar a l'estació menys de 7 min.

c) L'esperança, la variància i la desviació de la variable aleatòria "temps d'espera".

d) La probabilitat que hàgim d'esperar exactament 12 min.

10. Un avió d'alt rendiment té una computadora central i dues més d'idèntiques preparades per si falla alguna de les altres. Durant una hora d'operació la probabilitat que falli la computadora principal o qualsevol de les altres és de 0,1. Suposant que cada hora representa un experiment independent de la resta:

a) Quin és el temps mitjà que passa perquè fallin totes tres computadores?

b) Quina és la probabilitat que les 3 computadores fallin en un vol de 5 h?

Solucionari

1.

a) Es tracta de comprovar que $1 = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)$.

Tenint en compte la sèrie de Taylor $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha} \cdot e^{\alpha} = 1.$$

b) Sabem que el nombre mitjà de microxips que fallen abans de complir 100 h de funcionament és 8 i tenim que la taxa és $\lambda = 8/100 = 0,08$ microxips per hora. El nombre mitjà de microxips que fallen en un interval de 50 h serà $\alpha = \lambda \cdot 50 = 4$. La probabilitat que fallin k microxips en aquest interval de temps és: $P(X = k) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$ Substituint pels valors de l'enunciat:

$$P(X=1) = \frac{4^1}{1!} e^{-4} = 0{,}0732.$$

c) En aquest cas l'interval per considerar són 100 h, el mateix que ens donen per enunciat. En aquest interval $\alpha = 8$, la probabilitat que fallin com a molt dos microxips és:

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{2} \frac{8^k}{k!} e^{-8} = \left(\frac{8^0}{0!} + \frac{8^1}{1!} + \frac{8^2}{2!} \right) e^{-8} = 0{,}0137.$$

d) Considerant ara l'interval de 125 h, podem dir que de mitjana el nombre de microxips que fallen és de $\alpha = 10$. La probabilitat que fallin 10 o més microxips és igual a 1 menys la probabilitat que falli un nombre més petit que 10. És a dir:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = 1 - \left(\sum_{k=0}^{9} \frac{10^k}{k!} \right) e^{-10} = 0{,}542.$$

2.

a) Podem modelitzar el comportament d'aquest emissor amb una variable aleatòria discreta binomial que compti el nombre d'1 obtinguts, ja que cada bit es considera una variable aleatòria de Bernoulli i el nombre d'experiències serà el nombre de bits emesos.

b) Si denominem X la variable aleatòria que representa el nombre d'observacions 1 (èxits) que s'obtenen en generar la seqüència de 5 dígits, X segueix una distribució binomial de paràmetres $n = 5$ i $p = 0{,}6$, és a dir, $X \sim \text{Bin}(5, 0{,}6)$. Per tant, $P(X=2) = \binom{5}{2} 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}23$.

c) Ara es demana $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$.

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k} 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{5-k} = 0{,}4^5 + 5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^4 + 10 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}317.$$

Per tant, $P(X \geq 3) = 1 - 0{,}317 = 0{,}683$.

3.

a) X pren qualsevol valor entre 0 i ∞. És una variable de tipus exponencial ja que coincideix amb el temps de resposta descrit en l'enunciat. Per tant, és contínua.

b) Com hem vist, $X \sim \text{Exp}(1/10)$. Per tant la seva funció de distribució és $F(x) = 1 - e^{-x/10}$ per a $x \geq 0$.

$$P(X < 5) = F(5) = 1 - e^{-1/2} = 0{,}393.$$

c) Anàlogament:

$$P(5 < X < 10) = F(10) - F(5) = (1 - e^{-1}) - (1 - e^{-1/2}) = e^{-1/2} - e^{-1} = 0{,}239.$$

4.

a) Si representem per X = "nombre de cops que falla l'encaminador en les 2.500 jornades", i entenem per "èxit" el fet que l'encaminador falli, llavors: $X \sim \text{Bin}(2.500,\ 0{,}04)$.

En aquest cas podem definir com A, èxit, el fet que l'encaminador falla. Això passa amb una probabilitat de 0,04. El nombre de vegades que repetim l'experiment, segons l'enunciat, és de 2.500. Per tant, podem considerar que la nostra variable aleatòria segueix una distribució binomial amb paràmetres $n = 2.500$, $p = 0{,}04$.

Amb l'aproximació d'una binomial a una normal, podem treballar amb la variable Y:

$$Y \sim \text{N}(2.500 \cdot 0{,}04,\ \sqrt{2.500 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96}) = \text{N}(100,\ 9{,}798).$$

b) El que es demana és:

$$P(X > 120) = 1 - P(X \leq 120) = 1 - P(Y < 120{,}5) = 1 - 0{,}98179 = 0{,}0182.$$

c) Ara el que es demana és:

$$P(100 \leq X \leq 120) = P(99{,}5 < Y < 120{,}5) = 0{,}98179 - 0{,}47965 = 0{,}502.$$

(En els apartats (b) i (c) s'ha utilitzat programari matemàtic per a calcular la funció de distribució de la variable normal Y.)

5. X és una variable de Poisson de paràmetre $\alpha = \lambda T = 0,5 \cdot 10 = 5$.

a) La funció de probabilitat de X és $P(X = k) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!}$ i, per tant, $P(X = 0) = e^{-5} \frac{5^0}{0!} = 0{,}0067$.

b) Ara ens demanen $P(X \geq 2)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (e^{-5} + 5e^{-5}) = 1 - 6e^{-5} = 0{,}9596.$$

6.

a) Si representem per X la variable aleatòria que representa el nombre d'èxits (missatges rebuts) en les n proves, tenim que X segueix una distribució binomial de paràmetres n i p, és a dir, $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$.

b) En aquest cas, $n = 3$ i $p = 0{,}7$ i, per tant,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{3}{0} 0{,}7^0 \cdot 0{,}3^3 = 1 - 0{,}027 = 0{,}973.$$

c) Ara n és desconegut i $p = 0{,}8$. Es demana trobar n tal que $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{n}{0} 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^n = 1 - 0{,}2^n.$$

Plantegem la inequació: $1 - 0{,}2^n \geq 0{,}95 \Rightarrow n \geq \ln 0{,}05 / \ln 0{,}2 = 1{,}86$, és a dir, agafem $n = 2$.

7.

a) El que es demana és: $P(75 < X < 95) = 0{,}68269 \approx 0{,}68$ (coherent amb la regla).

b) Ara el que es demana és: $P(65 < X < 105) = 0{,}9545 \approx 0{,}95$ (coherent amb la regla).

c) Per exemple:

Figura 11. Distribució de les notes obtingudes pels dos estudiants. En l'eix horitzontal es representa el número de prova, i en l'eix vertical la nota obtinguda.

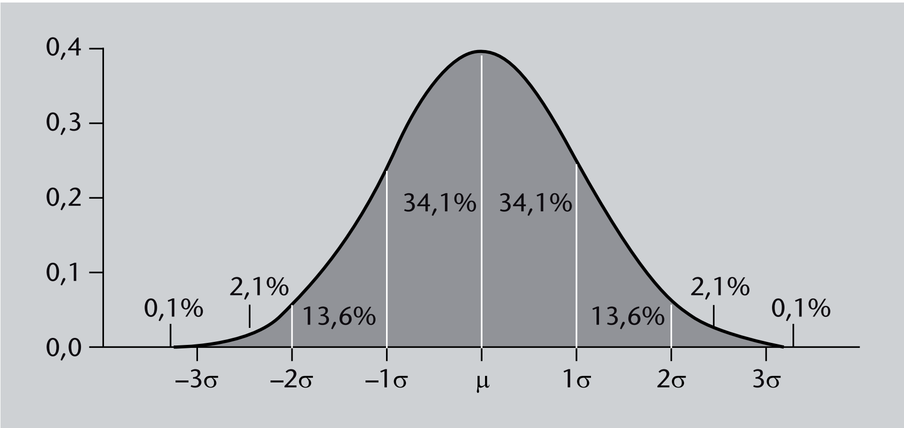


Figura 11

La part en blau fosc és menys d'una desviació estàndard des de la mitjana. Per a una distribució normal, això representa el 68% del conjunt (blau fosc). La part en blau menys fosc està situada fins a dues desviacions estàndards i representa el 95% del conjunt. La part en blau clar (fins a tres desviacions estàndards) representa el 99,7%.

d) La primera fila correspon a la distribució original de la variable X. La resta de files correspon a les distribucions de les mitjanes mostrals per a diferents mides de la mostra ($n = 4$, $n = 7$ i $n = 10$). S'observa que, amb independència de com es distribueixi la variable X, les distribucions de les mitjanes mostrals es van aproximant a una distribució normal tal com augmenta la mida de la mostra. Aquest resultat és conegut com a teorema central del límit.

8. Per a resoldre aquest exercici, tindrem en compte que podem modelitzar l'arribada de trucades a una centraleta mitjançant una distribució de Poisson, $X \sim \text{Poiss}(\alpha)$.

El paràmetre que defineix la distribució, α, coincideix amb l'esperança de la variable, com hem vist en el subapartat 2.2. L'enunciat ens diu que arriben 300 trucades en una hora; per tant, la taxa és $\lambda = \frac{300}{60} = 5$ trucades/minut.

a) La probabilitat que el nombre de trucades en un minut sigui més gran que 12 i que, per tant, la central quedi saturada, és:

$$P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - e^{-5} \sum_{k=0}^{12} \frac{5^k}{k!} = 0{,}00202.$$

b) La probabilitat que es rebi una única trucada en un minut és:

$$P(X = 1) = e^{-5} \frac{5^1}{1!} = 0{,}0337.$$

9.

a) Si arribem a l'estació en qualsevol moment i tots els moments són equiprobables, podem assumir que la variable aleatòria "temps d'espera" segueix una distribució uniforme en l'interval (0, 20). La funció de distribució és la següent:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \leq 0, \\ \dfrac{x}{20} & \text{si } 0 \leq x < 20, \\ 1 & \text{si } \leq 20. \end{cases}$$

La funció de densitat $f(x)$ és $\frac{1}{20}$ dins de l'interval $(0, 20)$.

b) La probabilitat que esperi menys de 7 min és la següent:

$$P(X < 7) = F(7) = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

c) L'esperança de la variable "temps d'espera" és:

$$\text{E}(X) = \frac{0 + 20}{2} = 10.$$

I la variància és:

$$\text{Var}(X) = \frac{(20 - 0)^2}{12} = \frac{100}{3} = 33{,}33.$$

La desviació és $\sigma = \sqrt{33,33} = 5{,}7$.

d) La probabilitat que el temps d'espera sigui exactament de 12 min és zero, ja que és una variable aleatòria contínua i, en aquest cas, la probabilitat d'un valor determinat és zero.

10.

a) Representem per X el nombre d'hores que passa fins que fallen els 3 sistemes. X_1, X_2 i X_3 són el nombre d'hores que passa fins que falla el primer, segons i tercer sistema, respectivament. Cada X_i és una variable geomètrica de paràmetre $p = 0{,}1$. Per tant, $\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2) = \mathrm{E}(X_3) = 1/p = 10$ hores. El temps total és $X = X_1 + X_2 + X_3$, així que $\mathrm{E}(X) = 3 \cdot 10 = 30$ h.

b) A continuació ens demanen la probabilitat que les 3 computadores fallin en un vol de 5 h, és a dir:

$$P(X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5).$$

$P(X = 3) = p^3 = 0{,}001$, ja que correspon a $X_1 = X_2 = X_3 = 1$.

$P(X = 4) = 3p^3(1 - p) = 0,0027$, ja que correspon a $X_1 = 2$, $X_2 = X_3 = 1$ o $X_2 = 2$, $X_1 = X_3 = 1$ o $X_3 = 2$, $X_1 = X_2 = 1$.

$P(X = 5) = 6p^3(1 - p)^2 = 0{,}00486$, ja que correspon al fet que una valgui 3 i les altres dues valguin 1 (3 maneres de fer-ho) o que dues valguin 2 i l'altra valgui 1 (3 maneres de fer-ho).

Llavors,

$$P(X \leq 5) = p^3 + 3p^3(1 - p) + 6p^3(1 - p)^2 = 0{,}00856.$$