Processos estocàstics gaussians i processos estocàstics de Poisson

PID_00253296

Josep Maria Aroca

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 1 hora

Universitat
Oberta
de Catalunya

Índex

Introducció

En aquest mòdul estudiarem dues classes importants de processos: els processos estocàstics gaussians i els processos estocàstics de Poisson. Aquests dos tipus de processos són una extensió de les variables aleatòries del mateix nom que ja havíem vist en el mòdul "Variables aleatòries".

Hem triat aquests dos tipus de processos per la seva rellevància en el món de les telecomunicacions. Quan vam estudiar les variables aleatòries de Gauss i Poisson ja vam veure que ens permetien modelitzar diferents fenòmens i successos que es donen molt freqüentment en multitud de senyals i sistemes. Recordem-ne algunes de les aplicacions que vam estudiar.

Amb la variable aleatòria gaussiana podíem modelitzar el següent:

- Fluctuació de senyals i del comportament dels aparells electrònics.
- Senyals de soroll.
- Control de qualitat estadístic.
- Fluctuació d'un conjunt de mesures aleatòries, etc.

Amb la variable aleatòria de Poisson podíem modelitzar, entre d'altres:

- Nombre de trucades que arriben a una centraleta telefònica o de peticions que arriben a un servidor.
- Nombre de col·lisions de paquets en una xarxa, etc.

El que farem en aquest mòdul és passar de les variables aleatòries de Gauss i Poisson als processos estocàstics. Aquesta extensió ens permetrà modelitzar d'una manera més acurada situacions més complexes. Ara ja no tindrem un valor per a cada realització, com passa en el cas de les variables aleatòries, sinó que obtindrem una funció determinada, com succeeix en el cas dels processos estocàstics. Recordeu* que per a avaluar un procés estocàstic el que fèiem era prendre n mostres en instants de temps diferents i considerar el procés com si fos un vector aleatori. Per tant, podeu entendre el pas de les variables aleatòries als processos estocàstics com el pas de valors unidimensionals a vectors d'ordre n.

Vegeu també

Podeu fer una ullada als subapartats 2.1.4 i 3.2.3 del mòdul "Variables aleatòries" per a recordar les variables aleatòries de Poisson i de Gauss.

* Tal com vam veure en l'apartat 1 del mòdul "Caracterització estadística i paràmetres dels processos estocàstics".

Hem dividit aquest mòdul en dos apartats. En l'apartat 1 estudiarem amb detall els processos estocàstics gaussians. En particular, veurem com es defineix aquest tipus de processos i en veurem les característiques més importants. Aplicarem tot el que veurem a l'estudi del soroll blanc. L'apartat 2 el dedicarem als processos estocàstics de Poisson. Seguint la mateixa estructura que en l'apartat 1, el definirem i en veurem les característiques. Un cop fet això aplicarem tots aquests coneixements a un cas particular: l'estudi dels senyals de telegrafia.

Objectius

Els objectius que ha d'assolir l'estudiant un cop treballats els materials didàctics d'aquest mòdul són:

1. Conèixer els processos gaussians, saber com es caracteritzen.
2. Estudiar les propietats dels processos gaussians.
3. Aplicar els processos gaussians a l'estudi del soroll blanc present en molts sistemes de telecomunicació.
4. Conèixer el procés de Poisson i els seus derivats.
5. Estudiar els paràmetres del procés de Poisson i calcular-los.
6. Aplicar els processos de Poisson per a estudiar un cas concret: els sistemes de telegrafia.

1. Processos estocàstics gaussians

Els processos estocàstics gaussians o normals estenen el concepte de variable aleatòria normal. Es poden pensar com si en cada instant t es generés una variable gaussiana $X(t)$, és a dir, és com tenir una variable gaussiana dependent d'un índex continu t.

Vegeu també

Recordeu la variable aleatòria de Gauss o normal vista en el subapartat 3.2.3 del mòdul "Variables aleatòries".

1.1 Variable gaussiana n-dimensional

Per a poder definir el **procés estocàstic gaussià**, necessitem definir prèviament el **vector aleatori gaussià**.

Recordem primer la variable aleatòria gaussiana unidimensional. Diem que X és gaussiana o normal si la seva densitat és

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1)$$

en què m és el valor mitjà de X i σ (sigma) la desviació típica o estàndard.

El comportament gaussià es generalitza a dimensió superior n prenent una funció de densitat que sigui l'exponencial d'un polinomi de segon grau en les seves variables. Aquest polinomi s'expressa en funció dels paràmetres de primer i segon ordre de les n variables.

Observació

Tingueu en compte que en aquesta definició, el vector **x** que apareix en l'exponencial és n-dimensional. **m** també és un vector i correspon a les mitjanes de cada x_i. K és la matriu de covariàncies, és simètrica i té dimensions $n \times n$.

Definició 1.1. Les variables aleatòries $X_1, X_2, \ldots, X_n$ són **conjuntament gaussianes** si la seva densitat conjunta és

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|K|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T K^{-1}(x-m)}, \quad (2)$$

en què x és un vector de dimensió n: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Els valors de x poden variar entre $-\infty < x_i < \infty$. El vector de valors mitjans, m, també té dimensió n i representa les mitjanes de cada x_i, és a dir, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ és el vector d'esperances i $m_i = \mathrm{E}(X_i)$. K és la matriu de covariàncies: $K_{i,j} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j),\ i,j = 1,2,\ldots,n$ i representem el determinant d'aquesta matriu amb $|K|$. K^{-1} és la inversa de la matriu de covariàncies. Noteu que la matriu K és simètrica, és a dir, $K_{i,j} = K_{j,i}$, ja que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{Cov}(X_j, X_i)$.

Covariància, coeficient de correlació i variància

Recordeu la definició de covariància per als vectors bidimensionals que vam veure en el subapartat 2.4 del mòdul "Vectors aleatoris": $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. També definíem el coeficient de correlació ρ (ro) com: $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$. La variància d'una variable aleatòria és $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \sigma^2$ (subapartat 3.3 del mòdul "Variables aleatòries"), que, si us fixeu, també correspon a $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X,X)$.

Com vam veure en el cas de la variable aleatòria gaussiana, tot el que necessitem per a definir la funció de densitat d'aquest tipus de procés estocàstic és el vector de mitjanes i l'equivalent a la desviació estàndard, que en aquest cas és la matriu de covariàncies.

Vegem-ne un exemple i fem alguns càlculs.

Exemple 1.1

Com a exemple, obtindrem la densitat d'un vector de dimensió 2 gaussià. Representem $X_1 = X, X_2 = Y$. És a dir, tenim un vector bidimensional format per dues variables aleatòries gaussianes, X i Y, amb mitjanes m_x i m_y i desviacions σ_x i σ_y, respectivament. El vector d'esperances és $m = (m_X, m_Y)$. Expressant la covariància en termes del coeficient de correlació ρ i de les desviacions de X i de Y, σ_X i σ_Y, tenim que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y$. Els termes diagonals de K són les variàncies $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$, $\mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$. Així

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

A continuació calculem el determinant de la matriu de covariàncies:

$$|K| = \sigma_X^2\sigma_Y^2(1-\rho^2).$$

Amb aquestes dades ja podem calcular la matriu de covariàncies inversa, K^{-1}:

$$K^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2} & -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_Y^2} \end{pmatrix}.$$

En la funció de densitat que hem vist mitjançant l'equació (2) hem de posar $n = 2$ i $|K|^{1/2} = \sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}$.

L'exponent del terme exponencial es calcula com segueix:

$$(x-m)^T K^{-1}(x-m) = (x-m_X, y-m_Y)\frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2} & -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_Y^2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-m_X \\ y-m_Y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right).$$

Observació

En aquesta expressió es considera $(x-m)$ com una matriu columna, de manera que $(x-m)^T K^{-1}(x-m)$ és producte de matrius amb dimensions $(1\times n)\cdot(n\times n)\cdot(n\times 1) = (1\times 1)$.

I substituint tots els termes que hem calculat en l'expressió de la funció de densitat per a una variable gaussiana multidimensional, arribem a la fórmula següent:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)}. \quad (3)$$

Vegem ara un segon exemple en què es poden aplicar tots aquests conceptes.

Exemple 1.2

(X,Y,Z) és un vector tridimensional gaussià en què $\mathrm{E}(X) = 0, \mathrm{E}(Y) = 1, \mathrm{E}(Z) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1, \mathrm{Var}(Y) = 1, \mathrm{Var}(Z) = \frac{1}{2}$. Ens diuen que X i Y són independents, Y i Z són independents, i $\mathrm{Cov}(X,Z) = \frac{1}{2}$. Es tracta d'escriure'n la densitat conjunta.

Tenim que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,Z) = 0$, ja que dues variables independents també són incorrelacionades. Així, tenim tots els paràmetres de primer i segon ordre i els podem substituir en l'expressió general (equació (2)). Tindrem que $n = 3$ i

$$K = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Cov}(X,Z) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Var}(Y) & \mathrm{Cov}(Y,Z) \\ \mathrm{Cov}(X,Z) & \mathrm{Cov}(Y,Z) & \mathrm{Var}(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

El determinant d'aquesta matriu val $|K| = \frac{1}{4}$ i la seva inversa és

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'exponent de la funció de densitat genèrica que hem vist en l'equació (2) serà:

$$-\frac{1}{2}(x, y-1, z) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2z^2 + 2xz + y - \frac{1}{2}.$$

Finalment, la funció de densitat queda:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} e^{-x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2z^2 + 2xz + y - \frac{1}{2}}.$$

Correlació i variables independents

Recordeu que la definició de correlació és l'esperança del producte menys el producte d'esperances. També hem vist que si dues variables són independents, l'esperança del producte és el producte d'esperances. Per tant, les variables independents són incorrelacionades.

Assenyalem ara les propietats següents del vector gaussià n-dimensional:

1) En un vector aleatori gaussià, la distribució marginal de qualsevol subconjunt de les variables també és gaussiana.

2) La distribució de probabilitat d'un vector aleatori gaussià queda determinada a partir dels paràmetres de primer i segon ordre de les variables que el formen.

Efectivament, la densitat que hem vist en l'equació (2) queda fixada si coneixem les esperances, variàncies i covariàncies de les variables X_i.

Exemple 1.3

Ja sabem que si dues variables, X i Y, són independents, llavors són incorrelacionades. Com acabem de veure en l'exemple anterior, això vol dir que $\text{Cov}(X, Y) = 0$. En general, dues variables poden ser incorrelacionades sense ser independents. Analitzem aquest aspecte per al cas de les variables gaussianes. Què passa si dues variables X i Y conjuntament gaussianes són incorrelacionades ($\text{Cov}(X, Y) = 0$)?

Si són incorrelacionades, el coeficient de correlació val $\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$. Introduint aquest valor en la funció de densitat gaussiana definida en l'equació (3) trobem:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)}.$$

Ara, aquest resultat coincideix amb el producte de les densitats marginals de X i de Y:

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}.$$

Hem demostrat, doncs, que si dues variables gaussianes són incorrelacionades llavors són independents. Aquesta és una propietat característica de les variables aleatòries normals.

Recordatori

Quan dues o més variables gaussianes són incorrelacionades, són també independents.

3) Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, conjuntament gaussianes, són independents si i només si són incorrelacionades ($\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ per a tot $i \neq j$).

Recordem que independència sempre implica incorrelació. En el cas gaussià, també és cert el recíproc. Per a demostrar-ho només cal tenir en compte que, si són incorrelacionades, la matriu K és diagonal i això ens factoritza la densitat conjunta en producte de les densitats marginals de totes les X_i. Recordeu que aquest càlcul s'ha fet en detall per al cas $n = 2$ en l'exemple 1.3.

4) El caràcter gaussià es manté sota transformacions lineals.

És a dir, si tenim un vector gaussià i obtenim noves variables fent combinacions lineals de les variables que formen aquest vector, el resultat són variables que també són gaussianes. El motiu és que en fer el canvi en la funció de densitat s'obté també l'exponencial d'un polinomi de segon grau en les noves variables. De fet, podem fer el canvi no homogeni, és a dir, sumant una constant.

Vegem-ne un exemple per a clarificar aquesta propietat dels vectors gaussians per al cas de dimensió 3.

Exemple 1.4

A partir del vector (X, Y, Z) de l'exemple 1.2 definim un nou vector aleatori (U, V, W) de la manera següent:

$$\begin{cases} U = X + Z \\ V = Y - 1 \\ W = 2X - 3Z \end{cases}$$

Del sistema anterior podem aïllar X, Y, Z en funció de U, V, W:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{5}(3U + W) \\ Y = V + 1 \\ Z = \frac{1}{5}(2U - W) \end{cases}$$

La funció de densitat de (U, V, W) dependrà d'aquestes variables per mitjà de l'exponencial de la funció que s'obté substituint $x = (3u + w)/5, y = v + 1, z = (2u - w)/5$ en el polinomi que teníem en l'exponent de la funció de densitat de (X, Y, Z):

$$-x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2z^2 + 2xz + y - \frac{1}{2}.$$

El resultat és un nou polinomi:

$$-\frac{1}{5}u^2 - \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{5}w^2.$$

Així, el vector (U, V, W) també és gaussià.

Una manera d'escriure la funció de densitat conjunta de les noves variables U, V, W sense fer el canvi a partir de la funció de densitat del vector (X, Y, Z) consisteix a calcular els paràmetres de les noves variables i utilitzar la fórmula general (equació (2)):

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(U) &= \mathrm{E}(X + Z) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Z) = 0, \\ \mathrm{E}(V) &= \mathrm{E}(Y - 1) = \mathrm{E}(Y) - 1 = 0, \\ \mathrm{E}(Z) &= \mathrm{E}(2X - 3Z) = 2\,\mathrm{E}(X) - 3\,\mathrm{E}(Z) = 0. \end{aligned}$$

Per a calcular els paràmetres de segon ordre notem que $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0$. De la mateixa manera s'obté $\mathrm{E}(YZ) = 0$ i $\mathrm{E}(XZ) = \frac{1}{2}$. També tenim que $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{E}(X)^2 = 1$, $\mathrm{E}(Y^2) = 2$ i $\mathrm{E}(Z^2) = \frac{1}{2}$. Ara obtenim

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}(U) = \mathrm{E}(U^2) - \mathrm{E}(U)^2 = \mathrm{E}[(X + Z)^2] = \mathrm{E}(X^2) + 2\,\mathrm{E}(XZ) + \mathrm{E}(Z^2) = \tfrac{5}{2}, \\ &\mathrm{Var}(V) = \mathrm{E}(V^2) - \mathrm{E}(V)^2 = \mathrm{E}[(Y - 1)^2] = \mathrm{E}(Y^2) - 2\,\mathrm{E}(Y) + 1 = 1, \\ &\mathrm{Var}(W) = \mathrm{E}(W^2) - \mathrm{E}(W)^2 = \mathrm{E}[(2X - 3Z)^2] = 4\,\mathrm{E}(X^2) - 12\,\mathrm{E}(XZ) + 9\,\mathrm{E}(Z^2) = \tfrac{5}{2}. \\ &\mathrm{Cov}(U, V) = \mathrm{E}(UV) - \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V) = \mathrm{E}[(X + Z)(Y - 1)] \\ &= \mathrm{E}(XY) + \mathrm{E}(ZY) - \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) = 0, \\ &\mathrm{Cov}(U, W) = \mathrm{E}(UW) - \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}[(X + Z)(2X - 3Z)] \\ &= 2\,\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(XZ) - 3\,\mathrm{E}(Z^2) = 0, \\ &\mathrm{Cov}(V, W) = \mathrm{E}(VW) - \mathrm{E}(V)\,\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}[(Y - 1)(2X - 3Z)] \\ &= 2\,\mathrm{E}(XY) - 3\,\mathrm{E}(ZY) - 2\,\mathrm{E}(X) + 3\,\mathrm{E}(Z) = 0. \end{aligned}$$

La matriu de covariàncies i la seva inversa són:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \qquad K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

El determinant val $|K| = \frac{25}{4}$. Substituint tot això en l'equació (2) surt

$$f_{UVW}(u,v,w) = \frac{2}{5(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{5}u^2 - \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{5}w^2}.$$

Continuem veient algunes propietats.

5) Donat un vector n-dimensional gaussià $X_1, X_2, \ldots, X_n$, sempre és possible trobar n variables $N_1, N_2, \ldots, N_n$ gaussianes de valor mitjà 0 i variància 1, independents, tals que totes les X_i s'obtenen com a combinació lineal d'aquestes més un desplaçament constant.

Així, podem reduir un vector gaussià als seus graus de llibertat més simples. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 1.5

En l'exemple anterior les noves variables U, V, W eren incorrelacionades i, per tant, tractant-se de gaussianes, independents. Tenien esperança zero però la desviació de U i W era diferent de 1. Això ho podem arreglar dividint aquestes dues variables per la seva desviació. El canvi de variable que ens interessa és:

$$\begin{cases} N_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}(X+Z) \\ N_2 = Y - 1 \\ N_3 = \sqrt{\frac{2}{5}}(2X - 3Z) \end{cases}$$

La funció de densitat del vector (N_1, N_2, N_3) és

$$f_{N_1N_2N_3}(n_1,n_2,n_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}n_1^2 - \frac{1}{2}n_2^2 - \frac{1}{2}n_3^2}.$$

En efecte, com que les variables N_i són independents, és el producte de les funcions de densitat marginal:

$$f_{N_1N_2N_3}(n_1,n_2,n_3) = \frac{e^{-\frac{n_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{n_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{n_3^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

En aquest subapartat hem vist com es defineix un vector n-dimensional gaussià i com s'hi treballa. Un cop vist aquest punt ja podem fer el pas següent: a partir d'aquesta definició, estendre l'ús del vector n-dimensional al concepte de procés estocàstic gaussià.

1.2 Procés estocàstic gaussià

Arribem al concepte de procés gaussià de manera natural, ja que un procés s'especifica per mitjà de la distribució de les seves mostres, i aquestes són vectors n-dimensionals.

Definició 1.2. El procés estocàstic $X(t)$ és **gaussià** si per a tot $n \geq 1$ i per a tot $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les variables aleatòries $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ són conjuntament gaussianes.

Es tracta d'un procés d'estat continu. Les funcions de densitat d'ordre n valen:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|K|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T K^{-1}(x-m)}, \qquad (4)$$

en què $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $-\infty < x_i < \infty$. Atès que ara les variables són $X(t_i)$, resulta que $m_i = \mathrm{E}(X(t_i))$ i $K_{i,j} = \mathrm{Cov}(X(t_i), X(t_j)), i, j = 1, 2, \ldots, n$. Aquests valors estan relacionats directament amb les funcions de valor mitjà $m(t) = \mathrm{E}(X(t))$ i d'autocovariància $C(t_1, t_2) = \mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2))$. Així, en la densitat anterior $m = (m(t_1), m(t_2), \ldots, m(t_n))$ i $K_{i,j} = C(t_i, t_j),\ i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Tenim el resultat important següent, que permet caracteritzar els processos gaussians.

Proposició 1.1. La distribució de probabilitat d'un procés estocàstic gaussià queda completament determinada per les funcions de valor mitjà i d'autocorrelació.

Caracterització d'un procés gaussià

Un procés estocàstic gaussià queda estadísticament determinat per les funcions $m(t)$ i $R(t_1, t_2)$.

Demostració: En efecte, conegudes $m(t)$ i $R(t_1, t_2)$, podem escriure la densitat de qualsevol mostra del procés (recordem que $C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2)$).■

Un cop definits els processos estocàstics gaussians ens interessarà centrar-nos en un tipus particular: el processos estocàstics gaussians estacionaris. Recordeu que l'estacionarietat d'un procés estocàstic està determinada pel fet de tenir una estadística invariable amb el temps.

Vegeu també

L'estacionarietat d'un procés estocàstic s'estudia al mòdul "Processos estocàstics estacionaris".

1.3 Propietats dels processos gaussians estacionaris

Hem vist* que un procés estocàstic estacionari en sentit ampli és aquell que té el valor mitjà constant $m(t) = m$ i en què l'autocorrelació depèn només de la distància entre els dos instants de temps fixats, $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$. Podem, doncs, tenir processos gaussians estacionaris en sentit ampli si triem els paràmetres d'aquesta manera. De fet, aquests processos són també estacionaris en sentit estricte, ja que per als processos gaussians tota l'estadística s'obté a partir de $m(t)$ i $R(t_1, t_2)$, que ara són invariants sota desplaçaments temporals.

* Vegeu la definició 1.2 del mòdul "Processos estocàstics estacionaris".

Proposició 1.2. Un procés estocàstic gaussià és estacionari en sentit estricte si i només si és estacionari en sentit ampli.

Estacionarietat dels processos gaussians

Un procés estocàstic gaussià estacionari en sentit ampli també ho és en sentit estricte.

Demostració: Ja sabem que tot procés estacionari en sentit estricte també ho és en sentit ampli. Suposem ara que tenim un procés gaussià estacionari en sentit ampli. Per a ser-ho en sentit estricte cal que totes les densitats d'ordre $n \geq 1$ siguin invariants en fer el canvi $t_i \to t_i + \tau$ per a tot i. Aquesta invariància es dóna, ja que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)$ només depèn dels temps a través $m(t)$, que ara és constant, i de la matriu K, els elements de la qual són tots de la forma $C(t_i, t_j) = R(t_i - t_j) - m^2$. En calcular $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots, t_n + \tau)$ només hem de canviar $C(t_i, t_j)$ per $C(t_i + \tau, t_j + \tau) = R[(t_i + \tau) - (t_j + \tau)] - m^2 = R(t_i - t_j) - m^2 = C(t_i, t_j)$. És a dir, la densitat queda igual. ■

Les figures 1 i 2 mostren realitzacions de processos gaussians estacionaris i no estacionaris.

Figura 1. Procés gaussià no estacionari ($m(t) = \sin t$, línia puntejada)

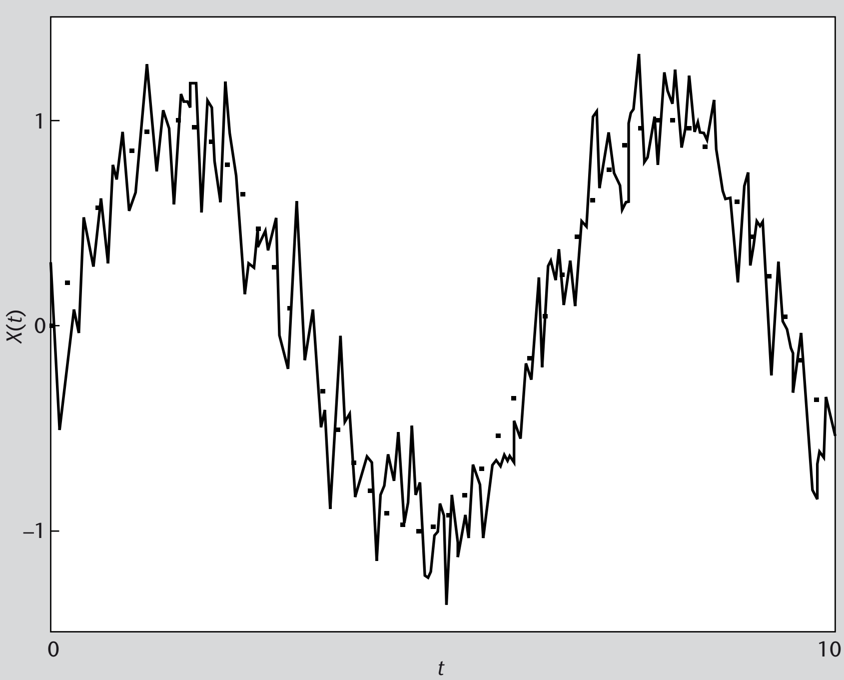

Figura 1

La mitjana d'aquest procés gaussià no és constant, depèn del temps. Per tant, sabem que el procés no és estacionari en sentit ampli tampoc no ho és en sentit estricte.

Figura 2. Procés gaussià estacionari ($m = 1$, línia puntejada)

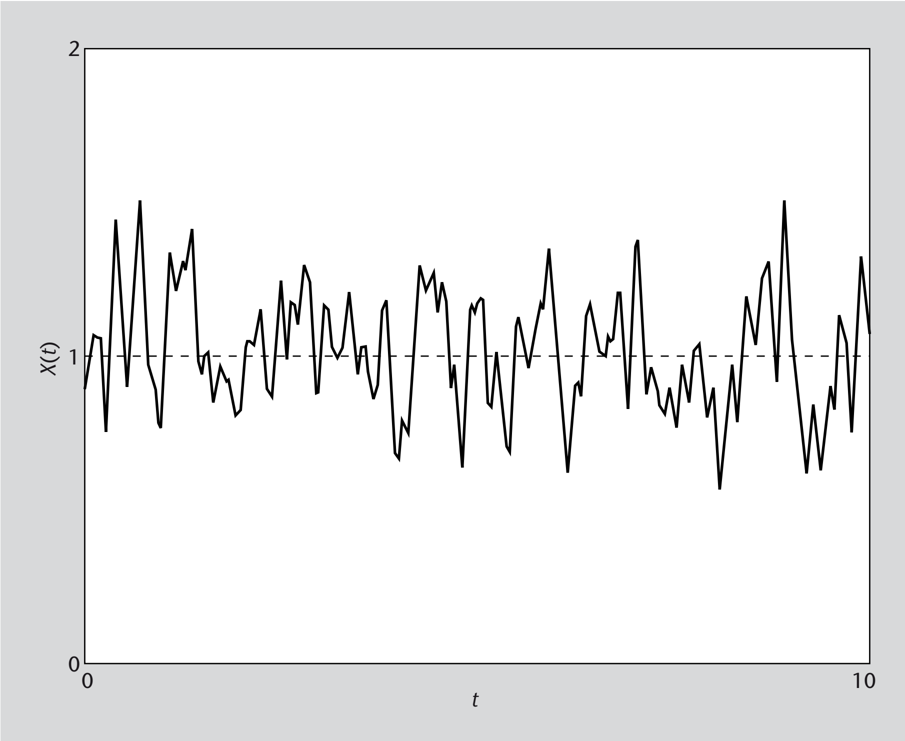

Figura 2

Observeu la realització d'un procés estocàstic gaussià estacionari. Entre d'altres coses, es compleix que la mitjana m és una constant.

En el subapartat següent veurem un exemple de procés estocàstic gaussià estacionari: el soroll blanc.

1.4 Soroll blanc

Abans de començar a veure aquest cas particular de procés estocàstic estacionari, hem de recordar la definició de la funció delta de Dirac, ja que la farem servir en aquest subapartat.

Impuls instantani

La funció delta de Dirac també s'anomena *impuls instantani* ja que és una funció que val infinit per a $t = 0$ i zero per a la resta de valors.

Definició 1.3. La funció **delta de Dirac** és una funció generalitzada que es representa com $\delta(t)$ i es defineix pel seu comportament sota integració. Per a qualsevol funció contínua $\varphi(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)dt = \varphi(a). \qquad (5)$$

Notem que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \qquad (6)$$

$\delta(t)$ s'interpreta com un impuls instantani concentrat per a $t = 0$. Una manera intuïtiva de representar-la és:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

En podem calcular la transformada de Fourier, utilitzant l'equació (5):

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1.$$

Com que $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, tenim que la transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}[1] = \delta(t)$. Així s'obté la representació integral de la delta:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df. \tag{7}$$

Transformada de Fourier

Intuïtivament podem esperar que la transformada de Fourier d'una delta de Dirac sigui una constant en freqüència perquè per a $t = 0$ tenim una variació del senyal infinita. Això es tradueix en un senyal en freqüència que conté totes les freqüències possibles. Inversament, un senyal en freqüència que conté totes les freqüències possibles es traduirà, mitjançant la transformada inversa de Fourier, en un senyal amb variació temporal infinita.

Definició 1.4. Un procés estocàstic estacionari s'anomena de **soroll blanc** si el seu espectre de potència és constant $S(f) = s_0$ per a $-\infty < f < \infty$. Llavors la seva funció d'autocorrelació val

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0 e^{j2\pi f\tau} df = s_0 \delta(\tau), \tag{8}$$

en què s'ha utilitzat la representació integral de la delta de Dirac (equació (7)).

Notem que l'equació (8) ens diu que $R(t_1, t_2) = s_0 \delta(t_2 - t_1)$. Ja hem comentat que la delta és nul·la quan el seu argument és diferent de zero. Així $R(t_1, t_2) = 0$ per a $t_1 \neq t_2$. Atès que no hi ha correlació en instants diferents, el comportament del procés és totalment irregular. En aquest sentit, queda justificat anomenar-ho *soroll*. El terme *blanc* està en analogia amb la llum blanca, en què són presents totes les freqüències (colors) amb el mateix pes. Vegem un exemple de soroll blanc.

Soroll blanc i autocorrelació

La funció d'autocorrelació mesura com fluctua el senyal al llarg del temps, quina memòria o possible predicció de valors passats o futurs té. L'expressió (8) ens diu que el soroll blanc s'assembla a ell mateix en un mateix instant de temps, però que els valors anteriors o posteriors no tenen cap tipus de relació amb el valor actual.

Exemple 1.6

Un exemple de procés de soroll blanc és un procés gaussià estacionari amb $R(\tau) = \delta(\tau)$. En aquest cas els valors del procés en instants diferents són variables independents.

Figura 3. Procés gaussià de soroll blanc

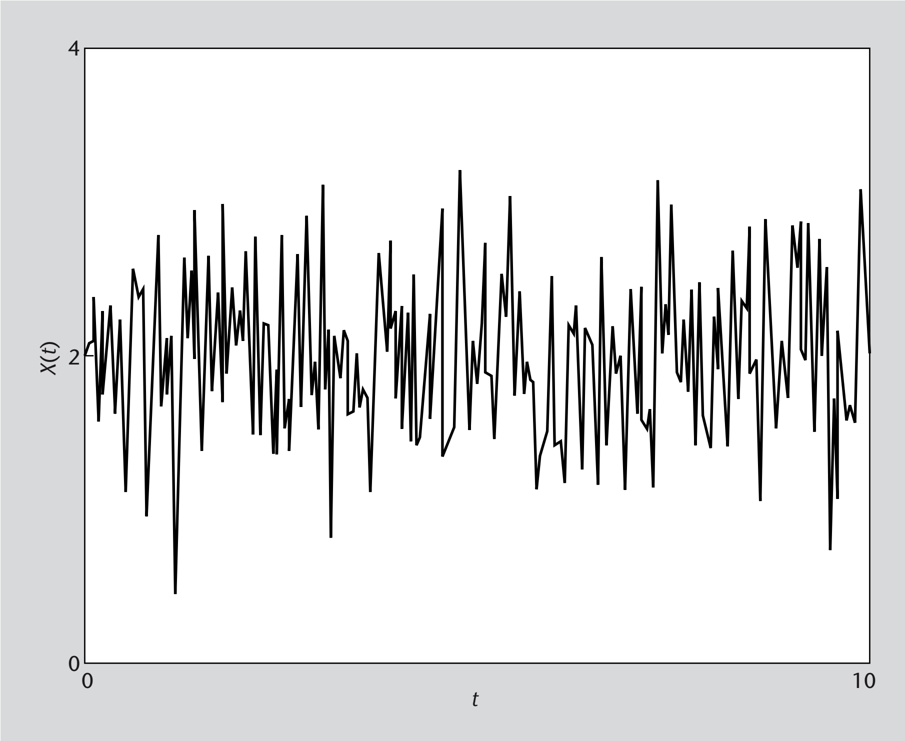

Figura 3

Un procés gaussià estacionari amb $R(\tau) = \delta(\tau)$ és un exemple de soroll blanc.

2. El procés estocàstic de Poisson

Moltes situacions en enginyeria impliquen la presència d'esdeveniments que es van produint en instants aleatoris amb independència uns d'altres. En termes genèrics, un procés de Poisson compta el nombre de cops que succeeix un esdeveniment predeterminat en un interval de temps $[0, t)$. Per exemple, l'arribada de trucades a una centraleta telefònica o de connexions a un servidor d'Internet. Si ens limitem a comptar el nombre d'esdeveniments en un interval fixat, podem definir la variable aleatòria discreta de Poisson tal com la vam veure en el mòdul "Variables aleatòries". Si, a més, volem tractar el temps de manera dinàmica, necessitem el procés de Poisson.

2.1 El procés de Poisson

Considerem la situació en què una sèrie d'esdeveniments es produeixen en instants aleatoris. Representem com $N(t)$ el nombre d'esdeveniments en l'interval $[0, t)$ i $N(t_a, t_b)$ el nombre d'esdeveniments en l'interval $[t_a, t_b)$. Notem que $N(t_a, t_b) = N(t_b) - N(t_a)$. Fixats t_a, t_b, el comptador $N(t_a, t_b)$ és una variable aleatòria unidimensional.

Diem que el procés és de Poisson si:

- El nombre d'esdeveniments en dos intervals temporals disjunts són variables aleatòries independents.
- Si $N = N(t, t+\tau)$, llavors, per a τ molt petit podem aproximar $P(N=1) = \lambda\tau$ i negligir $P(N > 1)$.

Llavors, podem fer l'aproximació consistent a partir el temps en petits intervals disjunts i considerant variables de Bernoulli independents que ens indiquen si a cada petit interval s'ha produït un esdeveniment o no. És possible fer el pas al límit i demostrar que la variable $N = N(t_a, t_b)$ té la funció de probabilitat

$$P(N=n) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}, \tag{9}$$

en què $\alpha = \lambda(t_b - t_a)$ i $n = 0, 1, \ldots$ És a dir, fixat un interval qualsevol el comptador d'esdeveniments corresponent és una variable de Poisson amb paràmetre α.

Definició 2.1. El **procés estocàstic de Poisson** consisteix a prendre com a funció $N(t)$, el nombre total d'esdeveniments produïts en l'interval $[0, t)$.

Figura 4. Realització del procés de Poisson

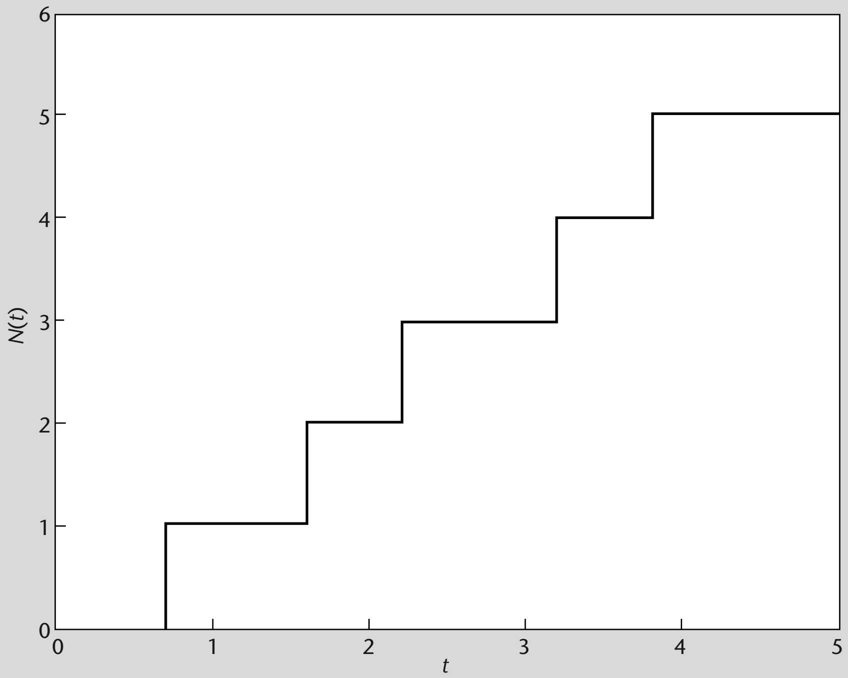

Figura 4

Un procés de Poisson compta el nombre de vegades que es produeix un esdeveniment en un cert interval de temps; per tant, és un procés discret i esglaonat.

És un procés a temps continu i d'estat discret. La seva funció de probabilitat de primer ordre és

$$P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

2.2 Paràmetres del procés de Poisson

Fixat t, $N(t)$ és una variable de Poisson de paràmetre λt. Com sabem, aquesta variable verifica $\mathrm{E}(N(t)) = \mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t$.

Vegeu també

Recordeu els paràmetres de la variable aleatòria de Poisson que vam veure en el subapartat 2.1.4 del mòdul "Variables aleatòries".

Llavors, per al procés de Poisson

$$m(t) = \lambda t, \tag{11}$$

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2, & \text{si } t_1 \le t_2, \\ \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2, & \text{si } t_1 > t_2. \end{cases} \tag{12}$$

Demostració: El valor mitjà és $m(t) = \mathrm{E}(N(t)) = \lambda t$.

Ara considerem $t_1 \leq t_2$. Les variables aleatòries $N(t_1)$ i $N(t_2) - N(t_1)$ són variables de Poisson $N(0, t_1)$ i $N(t_1, t_2)$ independents, ja que els seus intervals són disjunts. Llavors l'autocorrelació és

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[N(t_1)N(t_2)] &= \mathrm{E}[N(t_1)(N(t_2) - N(t_1) + N(t_1))] \\ &= \mathrm{E}[N(t_1)(N(t_2) - N(t_1))] + \mathrm{E}[N(t_1)^2] \\ &= \mathrm{E}[N(t_1)]\,\mathrm{E}[(N(t_2) - N(t_1))] + \mathrm{E}[N(t_1)^2] \\ &= \mathrm{E}[N(t_1)]\,\mathrm{E}[N(t_2)] + \mathrm{E}[N(t_1)^2] - \mathrm{E}[N(t_1)]^2 \\ &= \mathrm{E}[N(t_1)]\,\mathrm{E}[N(t_2)] + \mathrm{Var}[N(t_1)] \\ &= \lambda t_1 \lambda t_2 + \lambda t_1. \end{aligned}$$

El cas $t_1 > t_2$ s'obté intercanviant t_1 i t_2, ja que R és simètrica. ■

Podem escriure $R(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2) + \lambda^2 t_1 t_2$. La funció d'autocovariància és

$$C(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2). \tag{13}$$

Segons l'equació (11) el paràmetre $\lambda = \frac{m(t)}{t}$, és a dir, és el nombre mitjà d'esdeveniments per unitat de temps. Notem que el procés de Poisson no és estacionari, ja que $m(t)$ depèn de t.

Paràmetre d'un procés de Poisson

El paràmetre λ d'un procés de Poisson és el nombre mitjà d'esdeveniments per unitat de temps. Recordeu que ho havíem vist en el subapartat 2.1.4 del mòdul "Variables aleatòries".

Es resumeixen, a continuació, els paràmetres més importants d'un procés estocàstic de Poisson.

Paràmetres del procés de Poisson

$$\begin{aligned} m(t) &= \lambda t \\ R(t_1, t_2) &= \lambda \min(t_1, t_2) + \lambda^2 t_1 t_2 \\ C(t_1, t_2) &= \lambda \min(t_1, t_2) \\ \mathrm{Pot}(t) &= \lambda t + \lambda^2 t^2 \end{aligned}$$

A partir de les característiques dels processos de Poisson farem en el subapartat següent l'estudi d'un senyal telegràfic aleatori.

2.3 Senyal telegràfic aleatori

Donada la situació d'arribada d'esdeveniments de tipus Poisson, hem construït un procés prenent com a funció aleatòria el comptador $N(t)$. En la mateixa situació podem construir altres funcions. Estudiarem primer el procés $Z(t) = (-1)^{N(t)}$, consistent en un signe ± 1 que es va alternant.

Figura 5. Realització del procés de senyal telegràfic

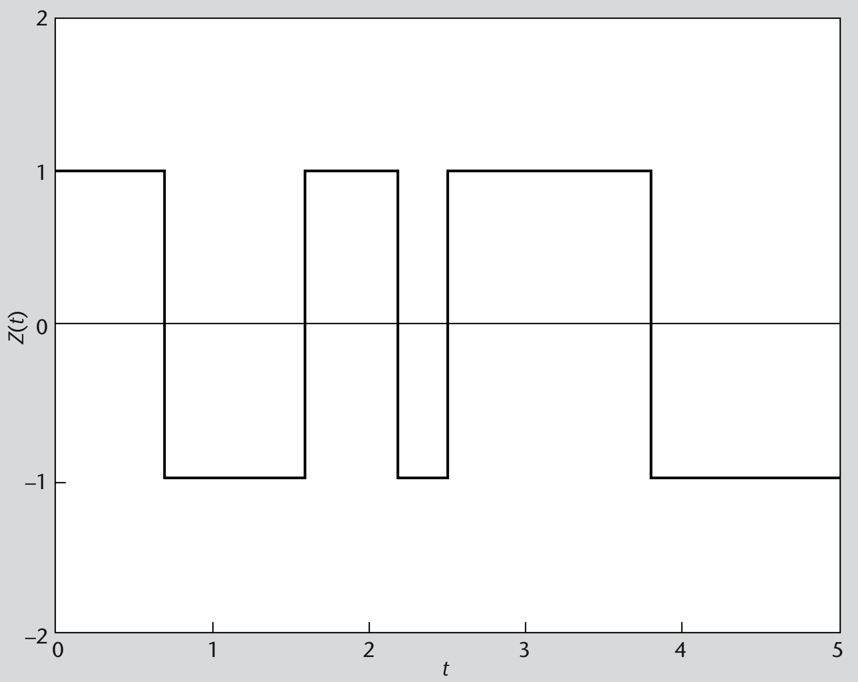

Figura 5

Construïm el procés aleatori de la figura amb l'expressió $Z(t) = (-1)^{N(t)}$, en què $N(t)$ és un procés de Poisson. $Z(t) = 1$ quan $N(t)$ és parell i $Z(t) = -1$ quan $N(t)$ és senar.

$Z(t)$ es tracta d'un procés d'estat discret que només pot prendre els valors $+1$ i -1.

La funció de probabilitat de primer ordre del procés $Z(t) = (-1)^{N(t)}$ val:

$$\begin{cases} P(Z(t)=1) = \dfrac{1+e^{-2\lambda t}}{2}, \\[2ex] P(Z(t)=-1) = \dfrac{1-e^{-2\lambda t}}{2}. \end{cases} \tag{14}$$

Demostració: Recordem la sèrie de Taylor de la funció exponencial. Per a tot x,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{15}$$

La podem separar en una part parella i una part senar:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{16}$$

Ara, que $Z(t)$ valgui $+1$ o -1 correspon al fet que $N(t)$ sigui parell o senar, respectivament, de manera que

$$\begin{aligned} P(Z(t)=1) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=2k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} = \frac{1 + e^{-2\lambda t}}{2}. \end{aligned}$$

De manera anàloga s'obté $P(Z(t) = -1)$. ■

A partir de l'equació (14) calculem el valor mitjà

$$\mathrm{E}(Z(t)) = 1 \cdot P(Z(t)=1) + (-1) \cdot P(Z(t)=-1) = e^{-2\lambda t},$$

i l'autocorrelació (per a $t_1 \leq t_2$)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z(t_1)Z(t_2)) &= \mathrm{E}[(-1)^{N(t_1)}(-1)^{N(t_2)}] = \mathrm{E}[(-1)^{N(t_2)-N(t_1)}] \\ &= \mathrm{E}[(-1)^{N(t_1,t_2)}] = e^{-2\lambda(t_2-t_1)}, \end{aligned}$$

ja que $(-1)^N = (-1)^{-N}$, i $N(t_1, t_2) = N(t_2) - N(t_1)$ torna a ser una variable de Poisson de paràmetre $\lambda(t_2 - t_1)$. En general tindrem $\mathrm{E}(Z(t_1)Z(t_2)) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}$.

Figura 6. Autocorrelació $R(\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau))$ en funció de la diferència de temps τ, per al senyal telegràfic

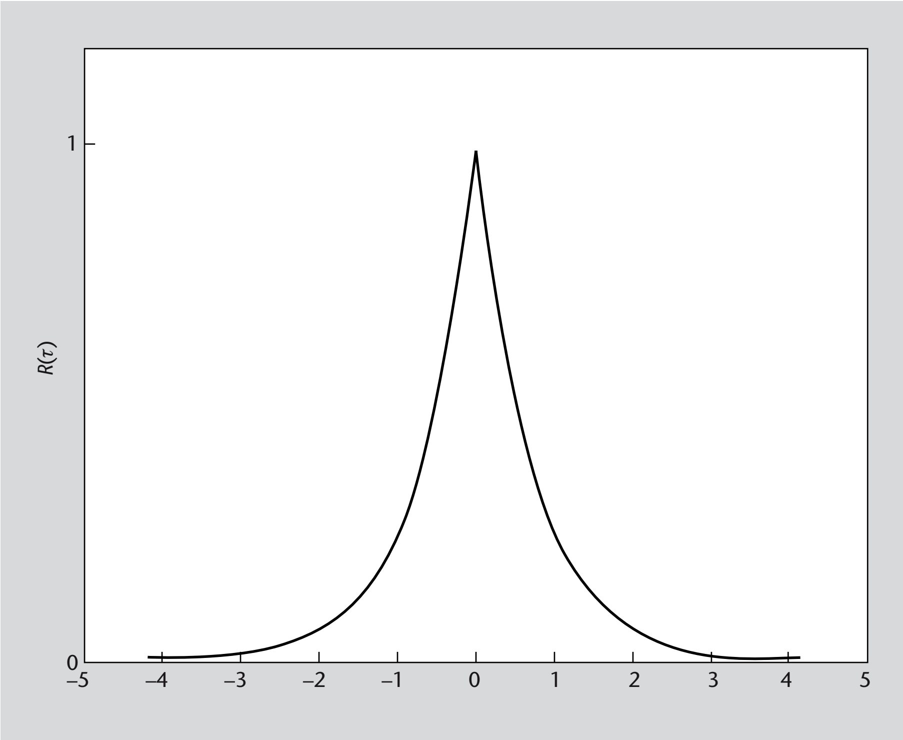

Figura 6

L'autocorrelació del senyal telegràfic aleatori és màxima quan el senyal es compara amb ell mateix i decau ràpidament a mesura que desplacem el senyal.

L'autocorrelació mostra un comportament lògic, ja que a mesura que passa el temps el signe de $Z(t)$ va canviant diverses vegades i perdem la correlació entre els dos instants. També esperaríem que el valor mitjà fos zero. De fet, $\mathrm{E}(Z(t))$ tendeix a zero amb una certa rapidesa a mesura que augmenta t. El motiu és que $Z(0) = 1$ en totes les realitzacions, atès que el comptador $N(t)$ sempre comença a 0.

Per a evitar aquest efecte artificial de condició inicial fem la següent definició.

Definició 2.2. El **procés estocàstic de senyal telegràfic aleatori** és

$$X(t) = S(-1)^{N(t)}, \tag{17}$$

en què $N(t)$ és el procés de Poisson i S és una variable aleatòria que pren valors $+1$ i -1 amb la mateixa probabilitat, independent de $N(t)$.

Notem que $\mathrm{E}(S) = 0$ i $S^2 = 1$. Ara tenim que

$$m_X(t) = 0, \qquad R_X(t_1, t_2) = e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}. \tag{18}$$

Demostració:

$$m_X(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(S(-1)^{N(t)}) = \mathrm{E}(S)\,\mathrm{E}[(-1)^{N(t)}] = 0 \cdot e^{-2\lambda t} = 0,$$

$$R_X(t_1,t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = \mathrm{E}(S^2 Z(t_1)Z(t_2)) = \mathrm{E}(Z(t_1)Z(t_2)) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}. \blacksquare$$

El senyal telegràfic aleatori és un procés estacionari (almenys en sentit ampli) segons es dedueix del resultat anterior. A continuació es presenten els principals paràmetres del senyal telegràfic aleatori.

Paràmetres del senyal telegràfic aleatori

$$m(t) = 0$$

$$R(t_1,t_2) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}$$

$$C(t_1,t_2) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|}$$

$$\mathrm{Pot}(t) = 1$$

2.4 Distribució dels instants de Poisson

En els processos anteriors tota la informació sobre el resultat de l'experiment està en la localització temporal del primer esdeveniment (T_1), la del segon esdeveniment (T_2), etc. Per tant, té interès estudiar la sèrie de variables aleatòries T_i, $i = 1,2,3,\ldots$ De fet, els graus de llibertat més simples són els intervals entre esdeveniments $\Delta_1 = T_1$, $\Delta_2 = T_2 - T_1$, $\Delta_3 = T_3 - T_2$, etc.

Figura 7. Distribució dels intervals de temps entre successos en un procés de Poisson.

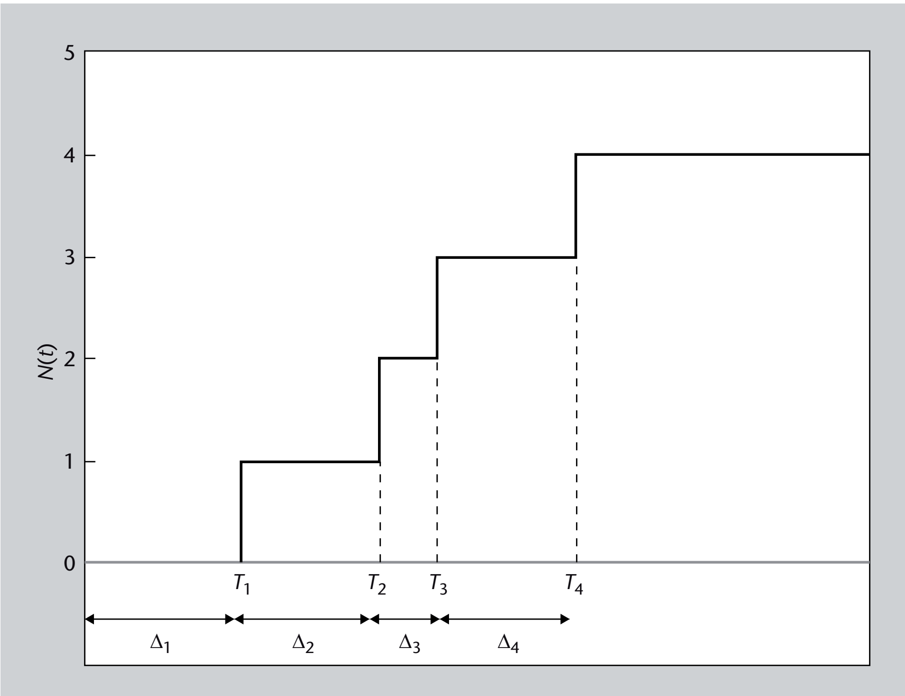

Figura 7

Els esdeveniments de Poisson es produeixen en instants $T_1, T_2, \ldots$ Els intervals entre aquests instants corresponen a les variables $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$

Es pot veure que les variables Δ_i són independents, ja que els esdeveniments es produeixen de manera independent uns d'altres. Llavors, el temps que passa des de T_i fins que es produeix l'esdeveniment $i+1$ és independent de la localització dels esdeveniments anteriors. A més, les variables Δ_i són totes exponencials de paràmetre λ.

Proposició 2.1. En el procés de Poisson el temps que transcorre entre esdeveniment consecutius són variables exponencials de paràmetre λ independents.

Demostració: Calculem la funció de distribució de Δ_i. Per a $t \geq 0$,

$$F_{\Delta_i}(t) = P(\Delta_i \leq t) = 1 - P(\Delta_i > t).$$

Ara, $\Delta_i > t$ equival a dir que en l'interval $[T_i, T_i + t)$ no hi ha hagut cap esdeveniment. Això és la probabilitat P, independent de T_i, que el comptador associat a un interval de longitud t valgui 0, és a dir, $P = e^{-\lambda t}$. Llavors $F_{\Delta_i}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, que és la distribució d'una variable exponencial. ■

Una manera simple de simular un procés de Poisson és anar obtenint valors independents d'una variable exponencial de paràmetre λ i anar-los sumant per a obtenir els instants en què es produeixen els esdeveniments.

Resum

En aquest mòdul hem vist dos tipus de processos estocàstics concrets: els processos gaussians i els processos de Poisson.

Processos estocàstics gaussians

Per a poder definir els processos estocàstics Gaussians cal definir primer el vector aleatori gaussià n-dimensional. Aquesta definició és una extensió de la definició de variable aleatòria gaussiana. Concretament, el vector aleatori $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ és gaussià si la seva densitat és

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|K|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T K^{-1}(x-m)}.$$

Els vectors aleatoris gaussians tenen algunes propietats interessants:

- La distribució marginal de qualsevol subconjunt de les variables del vector gaussià també és gaussiana.
- La distribució de probabilitat d'un vector aleatori gaussià queda determinada a partir dels paràmetres de primer i segon ordre: esperances, variàncies i covariàncies.
- Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, conjuntament gaussianes, són independents si i només si són incorrelacionades ($\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ per a tot $i \neq j$).
- El caràcter gaussià es manté sota transformacions lineals.
- Donat un vector n-dimensional gaussià $X_1, X_2, \ldots, X_n$, sempre és possible trobar n variables $N_1, N_2, \ldots, N_n$ gaussianes de valor mitjà 0 i variància 1, independents, tals que totes les X_i s'obtenen com a combinació lineal d'aquestes més un desplaçament constant.

A partir d'aquesta definició podem definir el concepte de procés estocàstic gaussià. Un procés estocàstic, $X(t)$, és gaussià si les variables aleatòries $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$ són conjuntament gaussianes.

Per a caracteritzar aquest tipus de processos utilitzem el resultat següent: la distribució de probabilitat d'un procés estocàstic queda completament determinada per les funcions de valor mitjà i t'autocorrelació.

Pel que fa a l'estacionarietat dels processos estocàstics gaussians, sabem que els processos estocàstics gaussians són estacionaris en sentit estricte si, i només si, ho són en sentit ampli.

Processos estocàstics de Poisson

Un procés de Poisson compta el nombre de vegades que es produeix un esdeveniment en un interval de temps definit, i el representem amb $N(t)$. Aquest procés es caracteritza pels paràmetres següents:

$$\begin{aligned} m(t) &= \lambda t \\ R(t_1,t_2) &= \lambda \min(t_1,t_2) + \lambda^2 t_1 t_2 \\ C(t_1,t_2) &= \lambda \min(t_1,t_2) \\ \mathrm{Pot}(t) &= \lambda t + \lambda^2 t^2 \end{aligned}$$

Una variació d'aquest tipus de processos és el senyal telegràfic aleatori. En aquest cas hem vist que els paràmetres estadístics són els següents:

$$\begin{aligned} m(t) &= 0 \\ R(t_1,t_2) &= e^{-2\lambda|t_2-t_1|} \\ C(t_1,t_2) &= e^{-2\lambda|t_2-t_1|} \\ \mathrm{Pot}(t) &= 1 \end{aligned}$$

Finalment hem estudiat com és la distribució del temps entre esdeveniments. Hem vist que en els processos estocàstics de Poisson el temps entre esdeveniments consecutius són variables exponencials independents i amb paràmetre λ.

Activitats

1. a) Escriviu la funció de densitat conjunta d'una variable gaussiana bidimensional (X, Y) tal que $\mathrm{E}(X) = 0$, $\mathrm{E}(Y) = 1$, $\mathrm{Var}(X) = 5$, $\mathrm{Var}(Y) = 10$ i $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Escriviu la funció de densitat marginal de la variable X de l'apartat anterior.

c) Escriviu la funció de densitat conjunta d'una variable gaussiana bidimensional (X, Y) tal que $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ i $\rho = \frac{1}{2}$.

d) Escriviu la funció de densitat conjunta d'una variable gaussiana bidimensional (X, Y) tal que $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$, $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 2$ i $\rho = 0$.

e) Són independents les variables X i Y en algun dels apartats anteriors?

2. Un procés estocàstic gaussià $X(t)$ té valor mitjà $m(t) = 1 + \cos \pi t$ i autocorrelació $R(t_1, t_2) = 5e^{-(t_2 - t_1)^2}$.

a) Considereu la variable bidimensional $(X(1), X(2))$. Calculeu-ne les esperances, variàncies i el coeficient de correlació. Escriviu-ne la matriu de covariàncies.

b) Quina és la densitat de la variable aleatòria $X(0)$?

c) És $X(t)$ un procés estacionari?

3. Un procés estocàstic gaussià $X(t)$ té valor mitjà $m(t) = 1 + \alpha \cos \pi t$ (en què α és una constant) i autocorrelació $R(t_1, t_2) = 5e^{-(t_2 - t_1)^2}$.

a) Hi ha algun valor de α tal que el procés sigui estacionari?

b) En aquest cas, és estacionari en sentit estricte, o només en sentit ampli?

4. Considereu un procés de Poisson $X(t)$ amb paràmetre $\lambda = 25$.

a) Calculeu l'esperança i desviació típica de la variable $X(1)$.

b) Calculeu la probabilitat que $X(1) = 20$.

c) Demostreu que el coeficient de correlació ρ entre $X(a)$ i $X(2a)$ és independent de l'instant a i val $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. Considereu el procés $Y(t)$ gaussià amb valor mitjà $m_Y(t) = 0$ i autocorrelació $R_Y(t_1, t_2) = \dfrac{1}{1 + (t_1 - t_2)^2}$.

a) Podem assegurar que és estacionari en sentit estricte?

b) Considereu la variable aleatòria bidimensional $(Y(0), Y(1))$. Quin tipus de variable és? Escriviu-ne la funció de densitat.

6. Un procés gaussià $X(t)$ té: valor mitjà $m_X(t) = 1$, autocorrelació $R_X(t_1, t_2) = 3 \cdot 2^{-|t_1 - t_2|}$.

a) És $X(t)$ estacionari en sentit ampli?

b) És $X(t)$ estacionari en sentit estricte?

c) Considereu les variables aleatòries $A = X(0)$ i $B = X(1)$. Calculeu $\mathrm{E}(A)$, $\mathrm{E}(B)$, $\mathrm{Var}(A)$, $\mathrm{Var}(B)$, $\mathrm{Cov}(A, B)$ i ρ.

d) Quin tipus de variable és la variable bidimensional (A, B)? Escriviu-ne la densitat.

7. Un procés estocàstic gaussià $X(t)$ té valor mitjà $m(t) = 0$ i autocorrelació $R(t_1, t_2) = 1 - (t_2 - t_1)^2$ si $|t_1 - t_2| < 1$ i $R(t_1, t_2) = 0$ en cas contrari.

a) És $X(t)$ estacionari en sentit ampli?

b) És $X(t)$ estacionari en sentit estricte?

c) Calculeu la funció de densitat de primer ordre $f(x;\ t)$ d'aquest procés.

d) Calculeu la densitat espectral de potència $S(f)$ del procés $X(t)$.

8. Un procés estocàstic gaussià $X(t)$ té valor mitjà $m(t) = 1$ i autocorrelació $R(t_1, t_2) = \frac{2}{1 + |t_2 - t_1|}$.

a) És $X(t)$ estacionari en sentit ampli?

b) És $X(t)$ estacionari en sentit estricte?

c) Calculeu la funció de densitat de la variable aleatòria $X(1)$.

9. Els errors que es produeixen al llarg del temps en un sistema de comunicació es compten amb un procés de Poisson $X(t)$ amb paràmetre $\lambda = 2$.

a) Calculeu, en funció de t, la probabilitat $P(X(t) \leq 2)$ i demostreu que és decreixent per a tot $t > 0$.

b) Calculeu les esperances, les variàncies i el coeficient de correlació de la variable bidimensional $(X(3), X(5))$.

10. Un procés estocàstic gaussià $X(t)$ té valor mitjà $m(t) = 2$ i autocorrelació $R(t_1, t_2) = \dfrac{5 + (t_2 - t_1)^2}{1 + (t_2 - t_1)^2}$.

a) És $X(t)$ estacionari en sentit ampli?

b) És $X(t)$ estacionari en sentit estricte?

c) Calculeu la funció de densitat de la variable aleatòria $X(0)$.

11. El nombre de connexions a un servidor entre els instants 0 i t es representa amb un procés de Poisson $X(t)$ de paràmetre $\lambda = 10$.

a) Escriviu les funcions de valor mitjà i d'autocorrelació de $X(t)$.

b) Calculeu en quins instants són màximes i quin és aquest valor màxim que prenen les probabilitats $P(X(t) = 10)$ i $P(X(t) = 15)$.

c) Calculeu les esperances, les variàncies i el coeficient de correlació de la variable bidimensional $(X(1), X(2))$.

12. Un procés estocàstic gaussià $X(t)$ té valor mitjà $m(t) = 3$ i autocorrelació $R(t_1, t_2) = 9 + 2\cos^2(t_2 - t_1)$.

a) És $X(t)$ estacionari en sentit ampli?

b) És $X(t)$ estacionari en sentit estricte?

c) Calculeu la funció de densitat de la variable aleatòria $X(1)$.

13. Les connexions a una intranet es poden modelitzar amb un procés de Poisson $X(t)$ de paràmetre $\lambda = 1$ (expressant el temps en minuts).

a) Escriviu les funcions de valor mitjà i d'autocorrelació de $X(t)$. Calculeu el coeficient de correlació, ρ, de la variable bidimensional $(X(5), X(20))$.

b) Un test de bon funcionament consisteix a comptar les connexions durant un període de 5 minuts. Si aquestes són com a mínim 2 i com a màxim 8 decidim que el sistema funciona correctament. Quina és la probabilitat que, funcionant bé el sistema, arribem a una conclusió errònia?

14. Tenim un generador de processos gaussians $X(t)$, que ens deixa triar la funció de valor mitjà entre $m_1(t) = 3$, $m_2(t) = \sin t$ i $m_3(t) = t - 4$. La funció d'autocovariància es pot triar entre $C_1(t_1, t_2) = 25e^{-t_1^2 - t_2^2}$, $C_2(t_1, t_2) = 17e^{-t_1^2 + 2t_1 t_2 - t_2^2}$, i $C_3(t_1, t_2) = 20e^{t_2^2 - t_1^2}$.

a) Quines funcions hem de triar per tal que $X(t)$ sigui estacionari en sentit ampli?

b) En aquest cas, és $X(t)$ estacionari en sentit estricte?

c) Si triem m_1 i C_1, escriviu la funció d'autocorrelació del procés resultant i trobeu quant temps ha de passar a partir de $t = 0$ perquè la potència es redueixi a la meitat.

15. L'arribada de missatges a un centre de comunicacions està descrita per un procés de Poisson $X(t)$ de paràmetre $\lambda = 2$ missatges per segon.

a) Escriviu les funcions de valor mitjà i d'autocorrelació de $X(t)$. Quin és el nombre mitjà de missatges que arriben durant una hora?

b) Quina és la probabilitat que no arribi cap missatge en un interval de 2 segons?

c) Resulta que passats 4 segons s'han rebut 13 missatges. Calculeu l'esperança i desviació de $X(4 \text{ segons})$ i digueu si el valor mesurat us sembla normal.

d) Per a poder estimar el nombre de missatges rebuts passada una hora i mitja sabent quants n'han arribat durant la primera hora, necessitem el coeficient de correlació, ρ, entre les variables aleatòries $X(1 \text{ hores})$ i $X(1{,}5 \text{ hores})$. Calculeu-lo.

16. Un generador per a simulacions ens permet obtenir processos amb funció de valor mitjà $m(t) = \alpha + \beta \sin t$ i autocovariància $C(t_1, t_2) = \gamma \cos(t_1 - t_2) + \delta \cos^2(t_1 + t_2)$, on α, β, γ, δ són constants que podem fixar arbitràriament.

a) Trobeu els valors de les constants α, β, γ, δ tals que el procés és estacionari en sentit ampli, amb valor mitjà 2 i potència 7.

b) Per a $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, quins són els valors màxim i mínim que pren la potència del procés resultant?

c) El generador ens permet obtenir processos gaussians. En generem dos: $X_1(t)$ amb $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = 1$, i $X_2(t)$ amb $\alpha = \beta = \delta = 0$, $\gamma = 1$. Algun d'aquests és estacionari en sentit ampli? Algun és estacionari en sentit estricte?

d) Considereu un procés gaussià amb $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $\delta = 0$. Escriviu la funció de densitat de la variable bidimensional $(X(0), X(\frac{\pi}{2}))$. Són independents aquestes variables?

17. Les connexions que rep un servidor al llarg del temps segueixen un procés de Poisson $X(t)$ de paràmetre $\lambda = 3$ connexions per minut.

a) Considereu la variable que dóna el nombre de connexions fins a $t = 5$ minuts. Calculeu-ne el valor mitjà m i la desviació típica σ. Feu el mateix per al nombre de connexions fins a $t = 1$ hora. Dieu, en cada cas, si un valor observat que difereixi del valor mitjà en un 25% s'ha de considerar excepcional.

b) Decidim que hi ha algun problema a la xarxa si $X(5 \text{ min}) < m - 2\sigma$. Quina és la probabilitat que, funcionant bé la xarxa, arribem a la decisió equivocada?

c) Anomenem ritme de connexions el procés $Y(t) = \frac{X(t)}{t}$. Calculeu-ne el valor mitjà i l'autocorrelació. És estacionari?

d) Calculeu l'esperança i la variància de la variable $Y(1 \text{ hora})$. Podem considerar que el valor mesurat d'aquesta variable és una bona estimació de λ? Si considerem $Y(t)$ per a t molt gran, millora o empitjora la validesa de l'estimació?

18. Donat un procés $X(t)$ de senyal telegràfic aleatori de paràmetre λ:

a) Considereu el nou procés $Z(t) = \frac{X(t)+1}{2}$. Calculeu-ne el valor mitjà i l'autocorrelació. És $Z(t)$ estacionari en sentit ampli?

b) Calculeu l'espectre de potència de $X(t)$. Dibuixeu l'autocorrelació $R(\tau)$ i l'espectre de potència $S(f)$ per a $\lambda = 0{,}3$, per a $\lambda = 1$ i per a $\lambda = 5$.

(Indicació: noteu que, en general, $S(f) = 2\int_0^\infty R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau$.)

Solucionari

1. Fem servir les fórmules (3) i (1).

a) $m_X = 0, m_Y = 1, \sigma_X = \sqrt{5}, \sigma_Y = \sqrt{10}$.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{5}\sqrt{10}\sqrt{1-(1/\sqrt{2})^2}} e^{-\frac{1}{2(1-(1/\sqrt{2})^2)}\left(\frac{(x-0)^2}{5} - 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-0)(y-1)}{\sqrt{5}\sqrt{10}} + \frac{(y-1)^2}{10}\right)}$$

$$= \frac{1}{10\pi} e^{-\frac{1}{10}\{2x^2+y^2-2xy+2x-2y+1\}}.$$

b) $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{5}} e^{-\frac{(x-0)^2}{2\sqrt{5}^2}} = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{x^2}{10}}$.

c) $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} e^{-\frac{2}{3}\{x^2+y^2-xy\}}$.

d) $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}\{2x^2+y^2\}}$.

e) Dues variables gaussianes són independents si i només si són incorrelacionades ($\rho = 0$). Per tant, només són independents X i Y en l'apartat *d*.

2. a) $\mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 1 + \cos\pi = 0$, $\mathrm{E}(X(2)) = m(2) = 1 + \cos 2\pi = 2$, $\mathrm{Var}(X(1)) = C(1,1) = R(1,1) - m(1)^2 = 5$, $\mathrm{Var}(X(2)) = C(2,2) = R(2,2) - m(2)^2 = 5 - 4 = 1$, $\mathrm{Cov}(X(1), X(2)) = C(1,2) = R(1,2) - m(1)m(2) = 5e^{-1}$, $K = \begin{pmatrix} 5 & 5e^{-1} \\ 5e^{-1} & 1 \end{pmatrix}$.

b) $X(0)$ és una variable gaussiana amb esperança $m(0) = 1 + \cos 0 = 2$ i variància $C(0,0) = R(0,0) - m(0)^2 = 5 - 4 = 1$. La seva densitat és $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$.

c) No, perquè $m(t)$ no és constant.

3. a) Per a ser estacionari, necessàriament $m(t)$ ha de ser constant i $R(t, t+\tau)$ no ha de dependre de t. Com que $R(t, t+\tau) = 5e^{-\tau^2}$, la segona cosa ja passa. Perquè passi la primera, ha de ser $\alpha = 0$.

b) Les condicions anteriors asseguren que el procés és estacionari en sentit ampli. Però, tractant-se d'un procés gaussià, això implica que el procés és estacionari en sentit estricte.

4. a) Per al procés de Poisson $\mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{Var}(X(t)) = \lambda t$. Així, $\mathrm{E}(X(1)) = \mathrm{Var}(X(1)) = 25$.

b) $P(X(1) = 20) = e^{-25}\frac{(25)^{20}}{20!} = 0{,}0519$.

c) $\mathrm{Var}(X(a)) = 25a, \mathrm{Var}(X(2a)) = 50a$. $\mathrm{Cov}(X(a), X(2a)) = C(a, 2a) = 25\min(a, 2a) = 25a$. Així, $\rho = \frac{25a}{\sqrt{25a}\sqrt{50a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. a) Sí, ja que si un procés gaussià és estacionari en sentit ampli llavors també ho és en sentit estricte.

b) És una variable gaussiana, ja que, per definició, totes les mostres d'un procés gaussià són variables gaussianes multidimensionals. Per a escriure'n la densitat en necessitem els paràmetres.

$\mathrm{E}(Y(0)) = m_Y(0) = 0$. $\mathrm{E}(Y(1)) = m_Y(1) = 0$. $\mathrm{E}(Y(0)^2) = R_Y(0,0) = 1$. $\mathrm{E}(Y(1)^2) = R_Y(1,1) = 1$. $\mathrm{E}(Y(0)Y(1)) = R_Y(0,1) = 1/2$. $\mathrm{Var}(Y(0)) = 1, \mathrm{Var}(Y(1)) = 1$,

$\mathrm{Cov}(Y(0), Y(1)) = 1/2, \rho = 1/2$.

$$f(y_0, y_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-(1/2)^2}} e^{-\frac{1}{2(1-(1/2)^2)}\left(\frac{(y_0-0)^2}{1^2} - 2\frac{1}{2}\frac{(y_0-0)(y_1-0)}{1\cdot 1} + \frac{(y_1-0)^2}{1^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}\left(y_0^2+y_1^2-y_0y_1\right)}.$$

6. a) $X(t)$ és estacionari en sentit ampli, ja que $m_X(t)$ és constant i $R_X(t_1,t_2)$ depèn només de la diferència de temps: $R_X(t,t+\tau) = 3 \cdot 2^{-|\tau|}$.

b) Sí, ja que si un procés gaussià és estacionari en sentit ampli llavors també ho és en sentit estricte.

c) $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(X(0)) = m_X(0) = 1$. $\mathrm{E}(B) = \mathrm{E}(X(1)) = m_X(1) = 1$.

$\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(X(0)^2) = \mathrm{E}(X(0)X(0)) = R_X(0,0) = 3 \cdot 2^{-|0-0|} = 3$.

$\mathrm{E}(B^2) = \mathrm{E}(X(1)^2) = \mathrm{E}(X(1)X(1)) = R_X(1,1) = 3 \cdot 2^{-|1-1|} = 3$.

$\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}(X(0)X(1)) = R_X(0,1) = 3 \cdot 2^{-|0-1|} = \frac{3}{2}$.

$\mathrm{Var}(A) = \mathrm{E}(A^2) - \mathrm{E}(A)^2 = 3 - 1^2 = 2$. $\mathrm{Var}(B) = \mathrm{E}(B^2) - \mathrm{E}(B)^2 = 3 - 1^2 = 2$.

$\mathrm{Cov}(A,B) = \mathrm{E}(AB) - \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$. $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(A,B)}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$.

d) (A,B) és una variable gaussiana, ja que, per definició, totes les mostres d'un procés gaussià són variables gaussianes multidimensionals. Per a escriure'n la densitat en necessitem els paràmetres, calculats en l'apartat anterior.

$$f(a,b) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-(1/4)^2}} e^{-\frac{1}{2(1-(1/4)^2)}\left(\frac{(a-1)^2}{2} - 2\frac{1}{4}\frac{(a-1)(b-1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} + \frac{(b-1)^2}{2}\right)} =$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{15}} e^{-\frac{4}{15}\left((a-1)^2+(b-1)^2-\frac{1}{2}(a-1)(b-1)\right)} = \frac{1}{\pi\sqrt{15}} e^{-\frac{2}{15}\{2a^2+2b^2-ab-3a-3b+3\}}.$$

7. a) $X(t)$ és estacionari en sentit ampli, ja que $m(t)$ és constant i $R(t_1,t_2)$ depèn només de la diferència de temps: $R(t,t+\tau) = 1-\tau^2$ si $|\tau| < 1$ i $R(t,t+\tau) = 0$ en cas contrari.

b) Sí, ja que si un procés gaussià és estacionari en sentit ampli llavors també ho és en sentit estricte.

c) Amb t fixat, $X(t)$ és una variable aleatòria gaussiana. Per a escriure'n la densitat de primer ordre n'introduïm els paràmetres $m = \mathrm{E}(X(t)) = m(t) = 0$ i $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - 0^2 = R(t,t) = 1$ en la fórmula de la densitat gaussiana:

$$f(x;\ t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

d)

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau = 2\int_0^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau$$

$$= 2\int_0^1 (1-\tau^2)\cos(2\pi f\tau)d\tau = 2\left(\left[(1-\tau^2)\frac{\sin(2\pi f\tau)}{2\pi f}\right]_0^1 + \frac{1}{\pi f}\int_0^1 \tau\sin(2\pi f\tau)d\tau\right)$$

$$= \frac{2}{\pi f}\left[-\tau\frac{\cos(2\pi f\tau)}{2\pi f} + \frac{\sin(2\pi f\tau)}{(2\pi f)^2})\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi^3 f^3}(\sin(2\pi f) - 2\pi f\cos(2\pi f)).$$

8. a) $X(t)$ és estacionari en sentit ampli, ja que $m(t)$ és constant i $R(t_1,t_2)$ depèn només de la diferència de temps: $R(t,t+\tau) = \frac{2}{1+|\tau|}$.

b) Sí, ja que si un procés gaussià és estacionari en sentit ampli llavors també ho és en sentit estricte.

c) $X(1)$ és una variable aleatòria gaussiana. Per a escriure'n la densitat de primer ordre n'introduïm els paràmetres $m = \mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 1$ i $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X(1)) = \mathrm{E}(X(1)^2) - 1^2 = R(1,1) - 1 = 1$ en la fórmula de la densitat gaussiana:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

9. a) Notem que $P(X(t) = n) = e^{-2t}\frac{(2t)^n}{n!}$, per a $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(X(t) \le 2) = P(X(t)=0) + P(X(t)=1) + P(X(t)=2) = e^{-2t}(1 + 2t + 2t^2).$$

Derivant l'expressió anterior respecte a t s'obté $-4t^2e^{-2t}$, que és negativa per a tot $t > 0$.

b) Tenim $m(t) = 2t$ i $C(t_1, t_2) = 2\min(t_1, t_2)$. Llavors $\mathrm{E}(X(3)) = m(3) = 6$, $\mathrm{E}(X(5)) = m(5) = 10$, $\mathrm{Var}(X(3)) = C(3,3) = 6$, $\mathrm{Var}(X(5)) = C(5,5) = 10$, $\mathrm{Cov}(X(3), X(5)) = C(3,5) = 6$ i $\rho = \dfrac{6}{\sqrt{6}\sqrt{10}} = 0{,}7745$.

10. a) $X(t)$ és estacionari en sentit ampli, ja que $m(t)$ és constant i $R(t_1, t_2)$ depèn només de la diferència de temps: $R(t, t+\tau) = \frac{5+\tau^2}{1+\tau^2}$.

b) Sí, ja que si un procés gaussià és estacionari en sentit ampli llavors també ho és en sentit estricte.

c) $X(0)$ és una variable aleatòria gaussiana. Per a escriure'n la densitat n'introduïm els paràmetres $m = \mathrm{E}(X(0)) = m(0) = 2$ i $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X(0)) = \mathrm{E}(X(0)^2) - 2^2 = R(0,0) - 4 = 1$ en la fórmula de la densitat gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}.$$

11. a) $m(t) = 10t$, $R(t_1, t_2) = 100t_1t_2 + 10\min(t_1, t_2)$.

b) Notem que $P(X(t) = n) = e^{-10t}\dfrac{(10t)^n}{n!}$, per a $n = 0, 1, 2, \ldots$

Per a trobar per a quin valor de t és màxima fem

$$0 = \frac{d}{dt}P(X(t) = n) = \frac{e^{-10t}}{n!}(-10(10t)^n + n10(10t)^{n-1}).$$

La solució és $t = \dfrac{n}{10}$ i $P(X(\dfrac{n}{10}) = n) = e^{-n}\dfrac{n^n}{n!}$. Així, $P(X(t) = 10)$ és màxima en $t = 1$, en què val 0,1251, i $P(X(t) = 15)$ és màxima en $t = 1{,}5$, en què val 0,1024.

c) Notem que $C(t_1, t_2) = 10\min(t_1, t_2)$. Llavors $\mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 10$, $\mathrm{E}(X(2)) = m(2) = 20$, $\mathrm{Var}(X(1)) = C(1,1) = 10$, $\mathrm{Var}(X(2)) = C(2,2) = 20$, $\mathrm{Cov}(X(1), X(2)) = C(1,2) = 10$ i $\rho = \dfrac{10}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = 0{,}7071$.

12. a) $X(t)$ és estacionari en sentit ampli, ja que $m(t)$ és constant i $R(t_1, t_2)$ depèn només de la diferència de temps: $R(t, t+\tau) = 9 + 2\cos^2\tau$.

b) Sí, ja que si un procés gaussià és estacionari en sentit ampli llavors també ho és en sentit estricte.

c) $X(1)$ és una variable aleatòria gaussiana. Per a escriure'n la densitat n'introduïm els paràmetres $m = \mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 3$ i $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X(1)) = \mathrm{E}(X(1)^2) - 3^2 = R(1,1) - 9 = 2$ en la fórmula de la densitat gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{4}}.$$

13. a) $m(t) = t$, $R(t_1, t_2) = t_1 t_2 + \min(t_1, t_2)$.

Notem que $C(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2)$. Llavors $\mathrm{E}(X(5)) = m(5) = 5$, $\mathrm{E}(X(20)) = m(20) = 20$, $\mathrm{Var}(X(5)) = C(5, 5) = 5$, $\mathrm{Var}(X(20)) = C(20, 20) = 20$,

$\mathrm{Cov}(X(5), X(20)) = C(5, 20) = 5$ i $\rho = \dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{20}} = 0{,}5$.

b) Notem que $P(X(t) = n) = e^{-t}\dfrac{t^n}{n!}$, per a $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(\text{error}) = 1 - P(2 \leq X(5) \leq 8) = 1 - \sum_{n=2}^{8} e^{-5}\frac{5^n}{n!} = 1 - e^{-5}\left(\frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \cdots + \frac{5^8}{8!}\right) = 0{,}1085.$$

14. a) $m(t)$ ha de ser constant, de manera que hem de triar $m_1(t)$. $C(t, t+\tau)$ no ha de dependre de t, fet que només verifica $C_2(t_1, t_2)$. En efecte, $C_2(t, t+\tau) = 17e^{-t^2+2t(t+\tau)-(t+\tau)^2} = 17e^{-\tau^2}$.

b) Sí, ja que si un procés gaussià és estacionari en sentit ampli llavors també ho és en sentit estricte.

c) Triant m_1 i C_1, la potència val $R(t, t) = C(t, t) + m(t)^2 = 25e^{-2t^2} + 9$. En $t = 0$ val 34. Quan s'ha reduït a la meitat $25e^{-2t^2} + 9 = 17$, i llavors $t = \sqrt{-\ln(8/25)/2} = 0{,}75$.

15. a) Treballarem en segons. $m(t) = 2t$, $R(t_1, t_2) = 4t_1 t_2 + 2\min(t_1, t_2)$.

En una hora arriben de mitjana $m(3.600) = 7.200$ missatges.

b) Notem que $P(X(t) = n) = e^{-2t}\dfrac{(2t)^n}{n!}$, per a $n = 0, 1, 2, \ldots$. La probabilitat demanada és $P(X(2) = 0) = e^{-4} = 0{,}0183$.

c) $X(t)$ per a t fixat és una variable de Poisson de paràmetre λt. Així, $X(4)$ té esperança 8 i variància 8. La desviació és $\sqrt{8} = 2,8$. El valor 13 difereix de 8 en quasi dues desviacions, de manera que sembla anormalment alt.

d) $C(t_1, t_2) = 2\min(t_1, t_2)$. Llavors, $\mathrm{E}(X(5)) = m(5) = 5$, $\mathrm{E}(X(20)) = m(20) = 20$, $\mathrm{Var}(X(3.600)) = C(3.600, 3.600) = 7.200$, $\mathrm{Var}(X(5.400)) = C(5.400, 5.400) = 10.800$, $\mathrm{Cov}(X(3.600), X(5.400)) = C(3.600, 5.400) = 7.200$ i $\rho = \dfrac{7.200}{\sqrt{7.200}\sqrt{10.800}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = 0{,}8165$.

16. a) Com $m(t) = \alpha + \beta\sin t$ ha de ser constant, $\beta = 0$. Com $C(t, t+\tau) = \gamma\cos\tau + \delta\cos^2(2t+\tau)$ ha de ser independent de t, $\delta = 0$. Tenim ara $m(t) = \alpha = 2$ i $C(t_1, t_2) = \gamma\cos(t_2 - t_1)$. Així $R(t_1, t_2) = C(t_1, t_2) + m(t_1)m(t_2) = \gamma\cos(t_2 - t_1) + 4$. La potència és $R(t, t) = \gamma + 4 = 7$, i llavors $\gamma = 3$. Ha de ser, doncs, $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 3$, $\delta = 0$.

b) Pot $= R(t, t) = C(t, t) + m(t)^2 = 1 + (3 + 2\sin t)^2$. El màxim és 26, quan $\sin t = 1$. El mínim és 2, quan $\sin t = -1$.

c) Tal com s'ha vist en el apartat *a*, el procés és estacionari en sentit ampli només per a $\beta = \delta = 0$. $X_2(t)$ és l'únic que és estacionari en sentit ampli. Tractant-se d'un procés gaussià, també és estacionari en sentit estricte.

d) Notem que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t) = 1 + \sin t$, $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = C(t_1, t_2) = \cos(t_1 - t_2)$.

$(X(0), X(\frac{\pi}{2}))$ és una variable bidimensional gaussiana amb paràmetres

$m_1 = m(0) = 1$, $m_2 = m(\frac{\pi}{2}) = 2$, $\sigma_1^2 = C(0, 0) = 1$, $\sigma_2^2 = C(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1$, $\rho = \frac{C(0, \frac{\pi}{2})}{\sigma_1\sigma_2} = 0$.

Utilitzant la fórmula (3), la densitat és:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}((x_1-1)^2+(x_2-2)^2)}.$$

Són variables independents (gaussianes incorrelacionades).

17. a) Fixat t, $X(t)$ és una variable de Poisson d'esperança i variància iguals a λt. Per a $X(5)$, $m = 15$, $\sigma = \sqrt{15} = 3{,}9$. Per a $t = 1$ hora, és $X(60)$ amb $m = 180$, $\sigma = \sqrt{180} = 13{,}4$.

Per a $X(5)$ el 25% de m és 3,8, comparable amb σ i, per tant, dins de les fluctuacions normals. Per a $X(60)$ el 25% de m és 45, més de tres vegades σ i, per tant, de caràcter excepcional.

b) Es tracta de $P(X(5) < 7,2) = \sum_{n=0}^{7} e^{-15}\frac{15^n}{n!} = 0{,}018$.

c) Treballarem en minuts. $m_X(t) = 3t$, $R_X(t_1,t_2) = 9t_1t_2 + 3\min(t_1,t_2)$.

$$m_Y(t) = \mathrm{E}(Y(t)) = \mathrm{E}\left(\frac{X(t)}{t}\right) = \frac{\mathrm{E}(X(t))}{t} = \frac{m_X(t)}{t} = 3.$$

$$R_Y(t_1,t_2) = \mathrm{E}(Y(t_1)Y(t_2)) = \frac{\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))}{t_1t_2} = \frac{\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))}{t_1t_2} = \frac{R_X(t_1,t_2)}{t_1t_2} = 9 + 3\frac{\min(t_1,t_2)}{t_1t_2}.$$

No és estacionari ja que, encara que $m_Y(t)$ és constant, $R_Y(t_1,t_2)$ no depèn només de la diferència de temps.

d) $\mathrm{E}(Y(60)) = m_Y(60) = 3$. $\mathrm{E}(Y(60)^2) = R_Y(60,60) = 9 + \frac{3}{60}$. $\mathrm{Var}(Y(60)) = 9 + \frac{1}{20} - 3^2 = \frac{1}{20}$. La desviació val $\sigma = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0,22$, de manera que l'estimació es pot considerar relativament bona. En general tenim que per a la variable $Y(t)$ la desviació típica val $\sqrt{\frac{3}{t}}$, de manera que l'estimació és més fiable com més gran sigui t.

18. Segons l'equació (18), $m_X(t) = 0$, $R_X(t_1,t_2) = e^{-2\lambda|t_1-t_2|}$.

a) $m_Z(t) = \mathrm{E}\left(\frac{X(t)+1}{2}\right) = \frac{\mathrm{E}(X(t))+1}{2} = \frac{m_X(t)+1}{2} = \frac{1}{2}$.

$$R_Z(t_1,t_2) = \mathrm{E}(Z(t_1)Z(t_2)) = \mathrm{E}\left(\frac{X(t_1)+1}{2}\cdot\frac{X(t_2)+1}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{4}(R_X(t_1,t_2) + m_X(t_1) + m_X(t_2) + 1) = \frac{1}{4}(1 + e^{-2\lambda|t_1-t_2|}).$$

$Z(t)$ és estacionari en sentit ampli, ja que m_Z és constant i R_Z només depèn de $t_2 - t_1$.

b) Tenim $R_X(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$. L'espectre de potència és

$$S_X(f) = 2\int_0^{\infty} e^{-2\lambda\tau}\cos(2\pi f\tau)d\tau$$

$$= \frac{e^{-2\lambda\tau}}{4\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}(-4\lambda\cos(2\pi f\tau) + 4\pi f\sin(2\pi f\tau))\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=\infty} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2 f^2}.$$

Com es veu en la figura 8, el comportament és el mateix que en l'exemple 4.2 del mòdul "Processos estocàstics estacionaris".

Figura 8. Gràfiques de $R_X(\tau)$ (esquerra) i $S_X(f)$ (dreta)

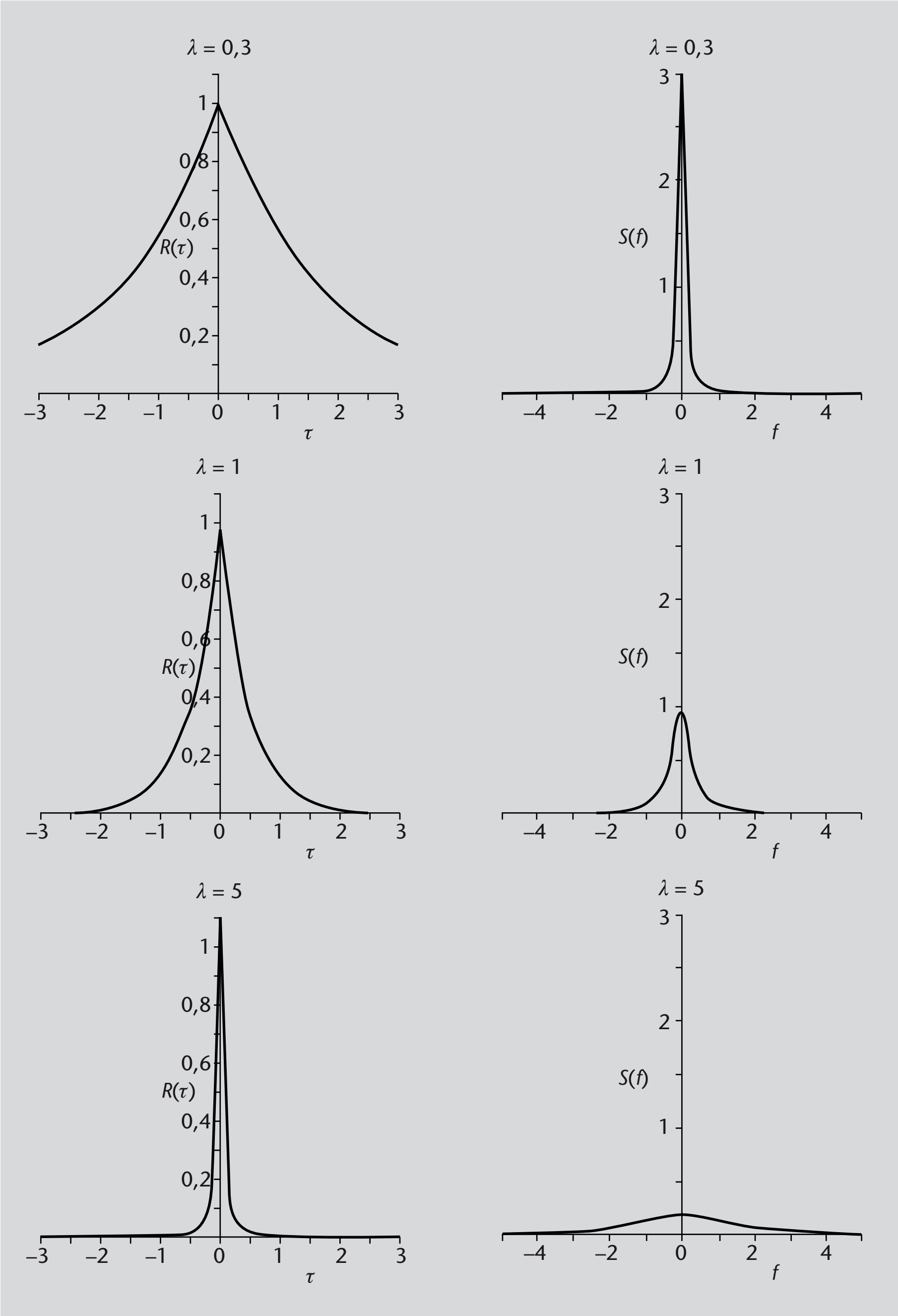

Figura 8

Representació de $R_X(\tau)$ (esquerra) i $S_X(f)$ (dreta). Recordeu l'exemple 4.2 del mòdul "Processos estocàstics estacionaris".