# Processos estocàstics estacionaris

PID_00253291

Josep Maria Aroca

Temps mínim de dedicació recomanat: 3 hores

Universitat
Oberta
de Catalunya

*Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu copiar-los, distribuir-los i transmetre'ls públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), no en feu un ús comercial i no en feu obra derivada. La llicència completa es pot consultar a* `http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.ca`.

# Índex

## Introducció

En els mòduls anteriors hem definit i hem treballat amb algunes propietats dels processos estocàstics en general. Hem vist com es defineixen els processos estocàstics en el mòdul "Introducció als processos estocàstics". En el mòdul "Caracterització estadística i paràmetres dels processos estocàstics" hem vist els paràmetres estadístics més importants que caracteritzen un procés estocàstic. En aquest mòdul veurem un tipus particular de processos estocàstics, els anomenats **processos estacionaris**. Veurem que les propietats estadístiques d'aquests processos no depenen de la posició temporal en què les mesurem. Això es correspon a situacions en què la dinàmica subjacent al procés no depèn explícitament del temps.

Diferenciarem dos tipus de processos estacionaris:

- Els processos estacionaris en sentit estricte
- Els processos estacionaris en sentit ampli o dèbil

Per als processos del primer tipus exigirem que l'estadística sigui sempre invariable, independent del moment temporal en què mirem el procés. Per als processos estacionaris en sentit ampli, en canvi, només demanarem que les funcions mitjana i autocorrelació no depenguin de $t$. De fet, l'estacionarietat en sentit ampli ja ens va bé per a modelitzar molts tipus de senyals i de sistemes de processament de senyal.

Un aspecte nou que introduïm en aquest mòdul és l'anàlisi en freqüència d'aquest tipus de processos. Veurem que aquesta transformació és molt útil a l'hora de treballar amb senyals, filtres i altres sistemes de comunicacions, ja que moltes vegades el tractament en freqüència ens simplifica molt els càlculs. El concepte principal que veurem és el de **densitat espectral de potència**.

Aquest mòdul s'estructura com segueix: en l'apartat 1 veurem la diferència entre un procés estocàstic estacionari en sentit estricte i en sentit ampli. L'apartat 2 el dediquem a estudiar les oscil·lacions aleatòries com a exemple de procés estocàstic estacionari. En l'apartat 3 s'estudien els processos ciclostacionaris. Veurem que per a un procés ciclostacionari, la mitjana i la funció d'autocorrelació són funcions periòdiques. En l'apartat 4 es defineix i s'estudia la noció d'espectre de potència d'un procés estacionari.

## Objectius

Els objectius que ha d'assolir l'estudiant un cop treballats els materials didàctics d'aquest mòdul són:

**1.** Entendre el concepte d'estacionarietat en sentit estricte i en sentit ampli i saber-ne posar exemples.

**2.** Analitzar l'estacionarietat per mitjà de l'anàlisi d'oscil·lacions aleatòries.

**3.** Estudiar els processos estocàstics ciclostacionaris en sentit ampli i en sentit estricte. Entendre la diferència d'aquest tipus de processos respecte dels processos aleatoris estacionaris i saber-ne posar exemples.

**4.** Comprendre el concepte d'espectre de potència d'un procés i entendre'n la relació amb l'autocorrelació.

# 1. Estacionarietat en sentit estricte i en sentit ampli

En aquest apartat definirem què és un procés estocàstic estacionari i veurem que n'hi ha de dos tipus: els processos estacionaris en sentit estricte i en sentit ampli.

Donat un procés estocàstic, ens podem plantejar si la seva estadística és invariant en el temps. Per exemple, en el moviment brownià* la causa del moviment són les fluctuacions tèrmiques del líquid que està en equilibri termodinàmic, que són independents del temps. Si un procés té aquesta independència del temps, hem d'esperar que les seves realitzacions mostrin característiques similars en diferents intervals de temps. És a dir, podem estudiar el procés sobre diversos intervals i obtenir-ne moltes realitzacions i comparar-ne l'aspecte. Si observem el mateix comportament tenim un símptoma del que anomenarem estacionarietat. Abans de definir-la amb precisió, vegem-ne un exemple.

* Vegeu l'exemple 4.4 del mòdul "Introducció als processos estocàstics".

**Processos estacionaris**

A grans trets, un procés és estacionari si la seva estadística és independent del temps.

**Exemple 1.1**

Partim d'una variable aleatòria $B$ uniforme en $[0,1]$ i definim dos processos estocàstics:

$$X(t) = e^{-Bt}, \qquad Y(t) = \sin(t + 2\pi B).$$

Comparem el resultat de representar gràficament diverses realitzacions sobre intervals temporals diferents, concretament $[0,1]$, $[2,3]$ i $[9,10]$. El resultat es mostra en les figures 1 i 2.

Figura 1. Realitzacions del procés $e^{-Bt}$

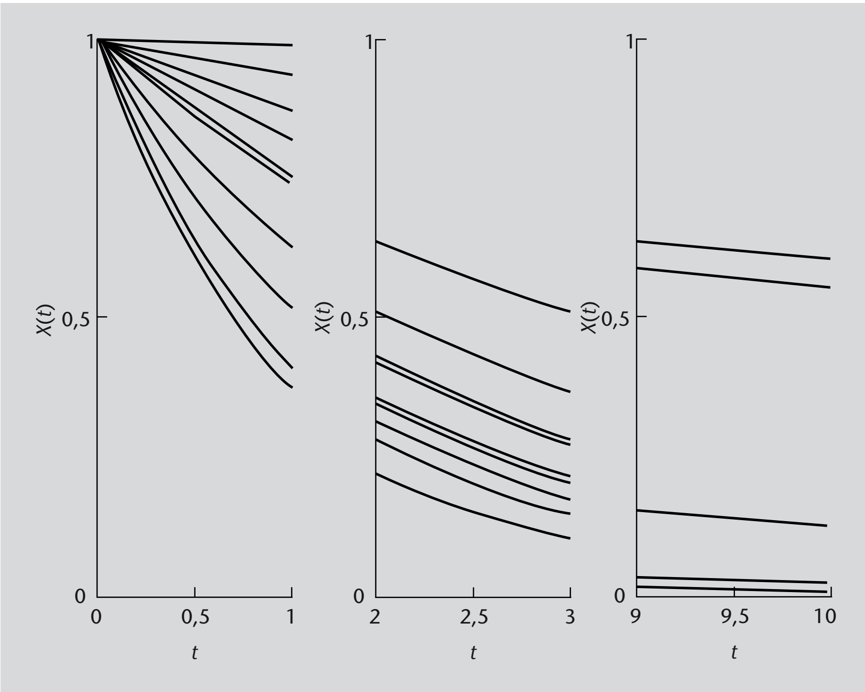



**Figura 1**

Aquesta figura representa diverses realitzacions del procés $X(t)$, que en aquest cas té forma de funcions exponencials, i avaluades en diferents intervals temporals. Com podeu veure, el procés $X(t)$ no sembla repetir-se al llarg del temps.

Figura 2. Realitzacions del procés $\sin(t + 2\pi B)$

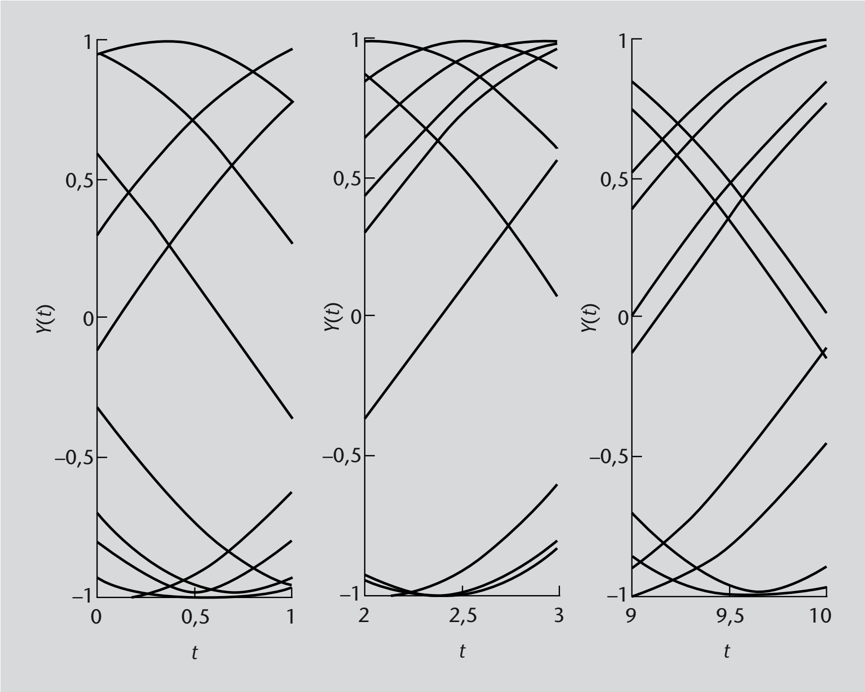



**Figura 2**

En aquest cas es representen diferents realitzacions del procés $Y(t)$, que té forma sinusoïdal, en diferents intervals temporals. Fixeu-vos que en aquest cas els valors del procés estocàstic sí que tenen una certa regularitat al llarg del temps.

En el primer cas es veu una clara diferència en els tres intervals. Resulta que com més grans són els valors de $t$ que observem, més petits són els valors que prenen les realitzacions. Si ens mostressin moltes realitzacions sobre un interval temporal desconegut, podríem tenir una idea de per on està localitzat aquest interval a partir de l'aspecte de les realitzacions.

En el segon cas les tres gràfiques tenen un aspecte molt similar. No podem deduir per on està localitzat l'interval temporal de l'observació de les realitzacions. Això suggereix que aquest procés pot ser estacionari.

Diem que un procés estocàstic és **estacionari** si la seva distribució probabilística és invariant sota qualsevol translació temporal. De manera més precisa, com que la caracterització de l'estadística d'un procés es fa per mitjà de les seves mostres, arribem a la definició següent.

**Definició 1.1.** El procés estocàstic $X(t)$ és **estacionari en sentit estricte** si per a tot $n \geq 1$ i per a tota elecció de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ els vectors aleatoris $(X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \ldots, X(t_n+\tau))$ i $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ tenen la mateixa distribució de probabilitat per a tot $\tau$ real.

Les funcions de distribució d'un procés estacionari en sentit estricte verifiquen:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots, t_n + \tau) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n). \tag{1}$$

Per a tot $n, t_1, t_2, \ldots, t_n$ i $\tau$. Tindrem les mateixes expressions per a les funcions de densitat d'un procés d'estat continu i per a les funcions de probabilitat d'un procés d'estat discret.

**Exemple 1.2**

Analitzem la condició d'estacionarietat per als dos processos que hem vist en l'exemple 1.1. Ens limitarem a mostres de mida 1. Així, obtindrem la densitat de primer ordre $f(x;\ t)$ i mirarem si aquesta depèn de $t$.

Per al cas de $X(t) = e^{-Bt}$ tenim que, com que $B$ varia de 0 a 1, fixat $t$, $X(t)$ varia de $e^{-t}$ a 1. Obtenim la funció de densitat fent el canvi directament a partir de la densitat de $B$. La relació entre variables és $x = e^{-bt}$. La densitat de $B$, que és una variable uniforme, és $f_B(b) = 1, 0 \leq b \leq 1$. Llavors, per a $x \in [e^{-t}, 1]$

$$f(x;\ t) = \frac{f_B(b)}{|dx/db|} = \frac{1}{te^{-bt}}.$$

Expressant el resultat en termes de $x$ arribem a

$$f(x;\ t) = \frac{1}{tx}, \qquad\qquad e^{-t} \leq x \leq 1.$$

Aquesta densitat depèn de $t$, fet que demostra que aquest procés no és estacionari. Això és el que havíem previst en les realitzacions dibuixades en la primera figura.

Ara veurem el segon procés estocàstic. Per al procés $Y(t) = \sin(t + 2\pi B)$ notem que l'argument del sinus, quan $B$ varia de 0 a 1, recorre l'interval $[t, t + 2\pi]$. Això és un període complet del sinus, de manera que $Y(t)$ pren tots els valors entre $-1$ i 1.

Figura 3. Gràfica de la dependència entre $b$ i $y = \sin(t + 2\pi b)$, per al cas $t = 1$

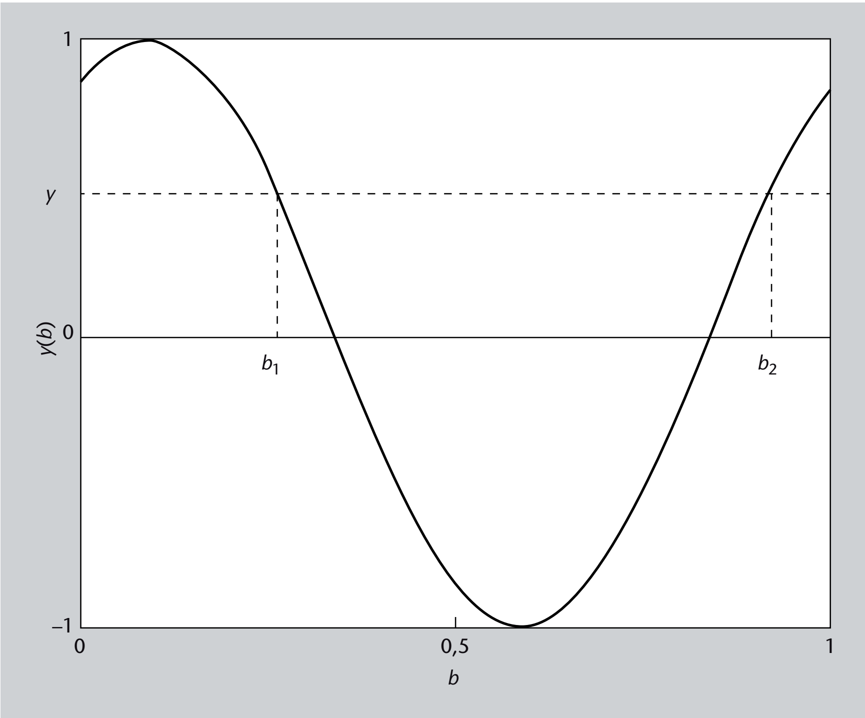



**Figura 3**

Les diferents realitzacions del procés $Y(t)$ tenen forma sinusoïdal i, per tant, es van repetint en el temps.

Com es veu a la gràfica de la figura 3, per a cada $y$ entre $-1$ i 1 hi ha dos valors de $b$ ($b_1$ i $b_2$) que hi van a parar. També hi veiem que per simetria el pendent de la recta tangent (derivada) en aquests punts és igual i de signe oposat. La fórmula del canvi de variable a la densitat ens queda:

$$f(y;\ t) = \frac{f_B(b_1)}{|\frac{dy}{db}(b_1)|} + \frac{f_B(b_2)}{|\frac{dy}{db}(b_2)|}.$$

Ara tenim que $f_B(b_1) = f_B(b_2) = 1$, $|\frac{dy}{db}(b_2)| = |\frac{dy}{db}(b_1)|$ i

$$\frac{dy}{db} = 2\pi\cos(t + 2\pi b) = 2\pi\sqrt{1 - \sin^2(t + 2\pi b)} = 2\pi\sqrt{1 - y^2}.$$

La funció de densitat de primer ordre del procés $Y(t)$ queda:

$$f(y;\ t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - y^2}} \qquad\qquad -1 \leq y \leq 1.$$

Veiem, doncs, que aquesta densitat no depèn de $t$ (notem que això fa referència tant a la forma de la funció $f(y;\ t)$ com a l'interval de valors que pot prendre $y$). Això és consistent amb el que sospitàvem a partir de les gràfiques (exemple 1.1). Notem que això no demostra que el procés sigui estacionari, ja que només hem vist la invariància de les propietats estadístiques de primer ordre. En l'apartat següent d'aquest mòdul es demostrarà que aquest procés és estacionari en sentit estricte.

Vegem ara que en un procés estacionari en sentit estricte els paràmetres verifiquen certes condicions.

**Proposició 1.1.** Si un procés estocàstic $X(t)$ és estacionari en sentit estricte, llavors el valor mitjà és constant i l'autocorrelació depèn només de la diferència entre els dos instants: $m(t) = m$ i $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$.

**Observació**

Per als processos estocàstics estacionaris es compleix que $m(t) = m$ i $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$.

**Demostració: 1)** $m(t) = \mathrm{E}(X(t))$. Com que $X(t)$ és estacionari en sentit estricte, la condició d'invariància (definició 1.1) en el cas $n = 1$ ens diu que $X(t)$ i $X(t+\tau)$ són variables distribuïdes igualment per a tot $t$ i per a tot $\tau$. Per al cas particular $\tau = -t$ resulta que, per a tot $t$, $X(t)$ té la mateixa distribució que $X(0)$ $(X(t + \tau) = X(t - t) = X(0))$. Llavors $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(X(0))$, que és un nombre que anomenem $m$. Així, $m(t) = m$ independent de $t$.

**2)** $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))$. Si en la condició d'invariància ara fem $n = 2$ i prenem $\tau = -t_1$, el vector $(X(t_1), X(t_2))$ està distribuït idènticament en $(X(0), X(t_2 - t_1))$. Així, la distribució de qualsevol mostra de dos instants depèn només de la distància temporal entre aquests. Ara tenim $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = \mathrm{E}(X(0)X(t_2 - t_1)) = R(0, t_2 - t_1)$ i escrivim aquesta funció com a dependent d'una sola variable: $R(t_2 - t_1)$. ■

El final de les demostracions l'indiquem amb el símbol ■.

És habitual anomenar $\tau$ la diferència entre els dos instants de temps, $t_1$ i $t_2$, de manera que podem escriure $R(\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t + \tau))$. Igualment deduïm que $C(t_1, t_2) = C(t_2 - t_1)$ (notem que per a processos estacionaris $R$ i $C$ difereixen solament en una constant, $C(\tau) = R(\tau) - m^2$).

De vegades no es coneix tota la distribució de probabilitat d'un procés, de manera que no podem determinar si és estacionari en sentit estricte, però és habitual conèixer les funcions $m(t)$ i $R(t_1, t_2)$, cosa que ens porta a una versió més dèbil del concepte d'estacionarietat, l'**estacionarietat en sentit ampli**.

**Estacionarietat en sentit ampli i estricte**

Compareu la definició d'estacionarietat en sentit ampli i estricte i noteu que si un procés estocàstic és estacionari en sentit estricte, també ho és en sentit ampli.

**Definició 1.2.** El procés estocàstic $X(t)$ és **estacionari en sentit ampli** si la seva funció de valor mitjà és constant i la seva funció d'autocorrelació depèn només de la diferència de temps:

$$m(t) = m, \tag{2}$$

$$R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1). \tag{3}$$

Quan calculem l'autocorrelació podem mantenir la notació $R(t_1, t_2)$ o utilitzar, alternativament, la forma $R(t, t + \tau)$. Si ho fem d'aquesta última manera, l'equació (3) equival a dir que $R(t, t + \tau)$ no depèn de $t$. En general, això és més senzill que veure si una expressió en dues variables depèn només de la seva diferència.

**Exemple 1.3**

Tenim un procés aleatori $X(t)$ i necessitem transmetre'l per un canal que treballa només a certes freqüències. Per a poder transmetre'l modulem el nostre senyal $X(t)$ amb una portadora $\cos(\omega_0 t + \theta)$. D'aquesta manera hem format un nou procés aleatori $Y(t) = X(t)\cos(\omega_0 t + \theta)$. L'angle $\theta$ és una variable distribuïda uniformement en l'interval $[0, 2\pi)$ i independent del procés $X(t)$. Sota quines condicions el procés $Y(t)$ serà estacionari en sentit ampli?

Per a respondre aquesta pregunta haurem de calcular el valor mitjà i l'autocorrelació, tal com acabem de veure en la proposició 1.1. Comencem amb la funció valor mitjà:

$$m_Y(t) = \mathrm{E}[X(t)\cos(\omega_0 t + \theta)] = \mathrm{E}[X(t)]\,\mathrm{E}[\cos(\omega_0 t + \theta)] = 0.$$

Noteu que l'esperança dels termes en què apareix $\theta$ dins del cosinus és zero.

Veiem que el valor mitjà és constant i val zero. Calculem ara la funció d'autocorrelació:

$$R_Y(t_1, t_2) = \mathrm{E}[Y(t_1)Y(t_2)] = \mathrm{E}[X(t_1)\cos(\omega_0 t_1 + \theta)X(t_2)\cos(\omega_0 t_2 + \theta)].$$

Agrupant termes i considerant que $X(t)$ i $\theta$ són independents, arribem a l'expressió següent:

$$R_X(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]\,\mathrm{E}[\cos(\omega_0 t_1 + \theta)\cos(\omega_0 t_2 + \theta)].$$

Sabem que $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$. Per tant:

$$R_X(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}[\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\theta) + \cos(\omega_0(t_2 - t_1))] =$$

$$\tfrac{1}{2}R_X(t_1, t_2)\cos\omega_0(t_2 - t_1).$$

Veiem que el terme que depèn de la freqüència portadora sí que depèn de la diferència de temps. L'autocorrelació de $Y(t)$ dependrà únicament de la diferència de temps si l'autocorrelació de $X(t)$, $R_X(t_1,t_2)$ depèn també de la diferència de temps. En aquest cas, el procés $Y(t)$ serà estacionari en sentit ampli si $X(t)$ també ho és. Fixeu-vos que podem assegurar que és estacionari en sentit ampli, però no podem assegurar que ho sigui en sentit estricte (hauríem de fer més càlculs per a veure-ho).

**Exemple 1.4**

Construïm un procés estocàstic tal que $X(t) = At + B$, en què $A$ i $B$ són variables aleatòries independents i uniformes en l'interval $(-1,1)$. Vegem si aquest procés és estacionari en sentit ampli. Calculem, en primer lloc, el valor mitjà:

$$m_X(t) = \mathrm{E}(At+B) = \mathrm{E}(A)t + \mathrm{E}(B) = 0.$$

Veiem que aquest valor mitjà és constant i igual a zero. Calculem, a continuació, la funció d'autocorrelació:

$$R_X(t_1,t_2) = \mathrm{E}[(At_1+B)(At_2+B)] = \mathrm{E}[A^2t_1t_2 + B^2 + AB(t_1+t_2)] = \frac{1}{3}t_1t_2 + \frac{1}{3}.$$

Fixeu-vos que en aquest cas la funció d'autocorrelació no depèn de la diferència de temps $t_2 - t_1$; per tant, podem dir que $X(t)$ no és un procés estacionari (no ho és en sentit ampli i, per tant, tampoc no ho serà en sentit estricte).

**Recordatori**

Com vam veure en l'apartat 3 del mòdul "Variables aleatòries", $\mathrm{E}(X^2) = \int x^2 f(x)dx$. Per al cas d'aquesta distribució uniforme, $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2}$. Per tant $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3}$ en aquest exemple.

Com hem vist, tot procés estacionari en sentit estricte també ho és en sentit ampli. El contrari no és cert. Hi ha processos estacionaris en sentit ampli que no ho són en sentit estricte.

A partir dels conceptes que acabem de veure en aquest apartat, dedicarem l'apartat següent a l'estudi de les oscil·lacions aleatòries. Aquest tipus de senyals són àmpliament utilitzats en sistemes de telecomunicacions i molt sovint s'utilitzen per a modelitzar senyals més complexos.

A continuació veurem una sèrie d'exemples, determinarem si els processos són estacionaris en sentit estricte o ampli i en calcularem els paràmetres.

## 2. Oscil·lacions aleatòries

En aquest apartat estudiarem les oscil·lacions aleatòries* i estudiarem les propietats d'estacionarietat d'aquest senyal.

* Reprenem en aquest apartat l'exemple de les oscil·lacions aleatòries que ja hem vist en el mòdul "Caracterització estadística i paràmetres dels processos estocàstics".

**Exemple 2.1**

Ja havíem vist** un senyal a una freqüència determinada, però l'amplitud del senyal i la seva fase variaven de manera aleatòria. El senyal tenia la forma següent:

** En l'exemple 3.3 del mòdul "Caracterització estadística i paràmetres dels processos estocàstics".

$$X(t) = A\cos(\omega t + B),$$

en què $\omega$ es definia com una constant, $A$ era una variable aleatòria exponencial de valor mitjà $K$ i $B$ una variable aleatòria uniforme distribuïda en l'interval $[0, 2\pi]$.

Havíem obtingut el valor següent per a la funció de valor mitjà:

$$m(t) = 0$$

i el resultat següent pel que fa a la funció d'autocorrelació:

$$R(t_1, t_2) = K^2 \cos(\omega(t_1 - t_2)).$$

Això ens mostra que el procés $X(t) = A\cos(\omega t + B)$ és estacionari en sentit ampli amb $m = 0$ i $R(\tau) = K^2\cos(\omega\tau)$.

Ara ens podem plantejar si a més ho és en sentit estricte. Resulta que sí, i es pot veure per mitjà del fet següent. En fer un desplaçament temporal, $X(t+\tau) = A\cos(\omega(t+\tau)+B) = A\cos(\omega t + (B + \omega\tau))$. Així, l'efecte d'una translació temporal equival a canviar la variable $B$ per $B + \omega\tau$. Però si $B$ era uniforme sobre un període de longitud $2\pi$, el fet de sumar-li una constant dóna una nova variable que també és uniforme sobre un interval de longitud $2\pi$, amb la qual cosa l'estadística del procés queda invariant.

Podem generalitzar l'anàlisi de l'estacionarietat per al cas d'oscil·lacions aleatòries qualssevol. Com vam veure**:

**Definició 2.1.** Una **oscil·lació aleatòria** és un procés que es pot expressar:

$$X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{4}$$

en què $\omega$ està fixada i $(A, B)$ és un vector aleatori bidimensional.

**Proposició 2.1.** El procés d'oscil·lació aleatòria (4) és estacionari:

1) **en sentit ampli** si i només si $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ i el coeficient de correlació entre $A$ i $B$ val $\rho = 0$.
2) **en sentit estricte** si i només si la distribució de $(A, B)$ té simetria circular. Diem que un vector aleatori bidimensional té simetria circular quan la funció de densitat conjunta $f(x, y)$ depèn només de la distància del punt $(x, y)$ a l'origen de coordenades i no de la seva orientació.

**Demostració:**

1) **Estacionarietat en sentit ampli**. Observeu que el valor mitjà del procés és el següent:

$$m(t) = \mathrm{E}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = \mathrm{E}(A)\cos\omega t + \mathrm{E}(B)\sin\omega t.$$

I la funció d'autocorrelació és la següent:

$$R(t, t+\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau))$$

$$= \mathrm{E}[(A\cos\omega t + B\sin\omega t)(A\cos\omega(t+\tau) + B\sin\omega(t+\tau))]$$

$$= \mathrm{E}(A^2)\cos\omega t\cos\omega(t+\tau) + \mathrm{E}(B^2)\sin\omega t\sin\omega(t+\tau) +$$

$$+\,\mathrm{E}(AB)(\cos\omega t\sin\omega(t+\tau) + \sin\omega t\cos\omega(t+\tau)).$$

a) Demostrarem que si $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ i $\rho = 0$, llavors el procés és estacionari en sentit ampli.

Suposem que es verifica $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ i $\rho = 0$. Anomenem $\sigma^2$ (sigma al quadrat) el valor comú de la variància de $A$ i $B$. Llavors tenim que

$$\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{Var}(A) + \mathrm{E}(A)^2 = \sigma^2,$$

$$\mathrm{E}(B^2) = \mathrm{Var}(B) + \mathrm{E}(B)^2 = \sigma^2.$$

També resulta que $\rho = 0$ equival a $\mathrm{Cov}(A, B) = 0$. En el nostre cas, per hipòtesi, $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, de manera que

$$\mathrm{Cov}(A, B) = \mathrm{E}(AB) - \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = \mathrm{E}(AB).$$

De manera que concloem també que $\mathrm{E}(AB) = 0{,}2$.

**Tècnica de demostració**

Per a demostrar la condició *si i només si* de l'enunciat 1 hem de demostrar els dos sentits de la implicació, és a dir:

- Si $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ i $\rho = 0$, llavors el procés és estacionari en sentit ampli.
- Si el procés és estacionari en sentit ampli, llavors $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ i $\rho = 0$

Substituint aquests valors en les expressions de $m(t)$ i $R(t, t+\tau)$ obtenim $m(t) = 0$ i

$$R(t, t+\tau) = \sigma^2(\cos \omega t \cos \omega(t+\tau) + \sin \omega t \sin \omega(t+\tau)) = \sigma^2 \cos \omega\tau.$$

Veiem, doncs, que $m(t)$ és constant i $R(t, t+\tau)$ només depèn de $\tau$, és a dir, el procés és estacionari en sentit ampli.

b) Ara demostrarem la implicació contrària. És a dir, que si el procés és estacionari en sentit ampli, llavors $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ i $\rho = 0$.

Suposem que el procés és estacionari en sentit ampli. Llavors, com que $m(t)$ és constant, $m(0) = m(\frac{\pi}{\omega})$, és a dir, $\mathrm{E}(A) = -\mathrm{E}(A)$ i llavors $\mathrm{E}(A) = 0$. De manera anàloga, $m(\frac{\pi}{2\omega}) = m(\frac{3\pi}{2\omega})$, és a dir, $\mathrm{E}(B) = -\mathrm{E}(B)$ i llavors $\mathrm{E}(B) = 0$.

També tenim que, per hipòtesi, $R(t, t+\tau)$ no depèn de $t$. Així, per al cas $\tau = 0$, $R(t,t)$ és independent de $t$, llavors $R(0,0) = R(\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega})$, és a dir, $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(B^2)$. Si representem $\sigma^2 = \mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(B^2)$, queda

$$R(t, t+\tau) = \sigma^2 \cos \omega\tau + \mathrm{E}(AB) \sin \omega(2t+\tau).$$

Perquè aquesta expressió no depengui de $t$ és necessari que $\mathrm{E}(AB) = 0$. Hem vist, doncs, que $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = \mathrm{E}(AB) = 0$. D'això obtenim

$$\mathrm{Var}(A) = \mathrm{E}(A^2) - \mathrm{E}(A)^2 = \mathrm{E}(A^2) = \sigma^2,$$

$$\mathrm{Var}(B) = \mathrm{E}(B^2) - \mathrm{E}(B)^2 = \mathrm{E}(B^2) = \sigma^2,$$

$$\mathrm{Cov}(A,B) = \mathrm{E}(AB) - \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = 0.$$

Així hem arribat a la conclusió

$$\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0, \mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B) \text{ i } \rho = 0.$$

2) **Estacionarietat en sentit estricte**.

Per a veure quan és estacionari en sentit estricte utilitzem coordenades polars: $A = R\cos\Theta$, $B = R\sin\Theta$.

**Paràmetres del procés i de les variables**

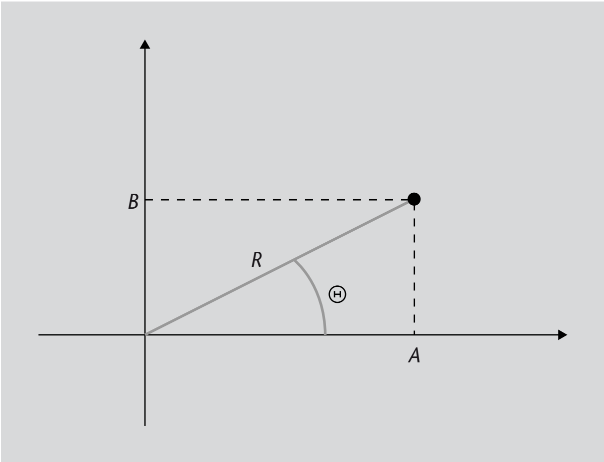
Notem que $X(0) = A$, $X(\frac{\pi}{\omega}) = -A$, $X(\frac{\pi}{2\omega}) = B$ i $X(\frac{3\pi}{2\omega}) = -B$. Atès que $m(t) = \mathrm{E}(X(t))$ i $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))$, triant valors específics de $t$ podem relacionar els paràmetres de les variables $A$ i $B$ amb valors de les funcions $m(t)$ i $R(t_1, t_2)$.

**Tècnica de demostració**

En aquest apartat també cal demostrar l'afirmació *si i només si* de l'enunciat 2. Caldrà, doncs, demostrar els dos sentits de la implicació:

- Si les variables $(A, B)$ de l'oscil·lació aleatòria tenen simetria circular, el procés és estacionari en sentit estricte.
- Si el procés és estacionari en sentit estricte, la distribució de $(A, B)$ té simetria circular.

Figura 4. Significat de les coordenades polars $(R, \Theta)$




$R$ és la distància del punt $(A, B)$ a l'origen i $\Theta$ és l'angle que forma el radi vector amb l'eix $OX$.

**Figura 4**

En aquesta figura podeu veure quina és la relació entre les coordenades cartesianes i les coordenades polars. En el primer cas expressem un valor mitjançant els valors $(x, y)$. En el segon cas utilitzem distància a l'origen dels eixos i un angle $\theta$.

Llavors $X(t) = R\cos\Theta\cos\omega t + R\sin\Theta\sin\omega t = R\cos(\Theta - \omega t)$, en què hem utilitzat la fórmula trigonomètrica $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Així, podem expressar el procés com

$$X(t) = R\cos(\Theta - \omega t). \tag{5}$$

El vector $(A, B)$ té simetria circular quan la seva distribució de probabilitat depèn només de $R$ i és, per tant, invariant si fem qualsevol desplaçament de l'angle $\Theta \to \Theta - \alpha$.

a) Demostrem que si el procés és estacionari en sentit estricte, llavors $(A, B)$ té simetria circular:

Si el procés és estacionari en sentit estricte, llavors el vector $\left(X(t), X\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right)\right)$ té la mateixa distribució per a tot $t$. A $t = 0$ i $t = \frac{\alpha}{\omega}$ tenim els vectors $(R\cos\Theta, R\sin\Theta)$ i $(R\cos(\Theta - \alpha), R\sin(\Theta - \alpha))$, respectivament. En polars corresponen a $(R, \Theta)$ i $(R, \Theta - \alpha)$. Així, la funció de densitat no pot dependre de $\theta$, és a dir, tenim simetria circular.

b) Demostrem que si $(A, B)$ té simetria circular, llavors el procés és estacionari en sentit estricte:

Si tenim simetria circular, el canvi $\Theta \to \Theta + \omega t_1$ deixa totes les distribucions invariants. Ara bé, utilitzant l'equació (5) veiem que aquest canvi ens passa $X(t)$ a $X(t - t_1)$. Per tant, la distribució conjunta del vector $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ és idèntica a la de $(X(0), X(t_2 - t_1), \ldots, X(t_n - t_1))$, que és invariant sota translacions temporals. ■

# 3. Ciclostacionarietat

En definir l'estacionarietat requerim la invariància sota desplaçaments $\tau$ arbitraris. Es pot donar el cas d'un procés l'estadística del qual sigui invariant només sota desplaçaments que siguin múltiples d'un període determinat $T$. En aquesta situació parlem de **ciclostacionarietat**.

**Definició 3.1.** El procés estocàstic $X(t)$ és **ciclostacionari en sentit estricte** si existeix un nombre $T$ tal que per a tot $n \geq 1$ i per a tota elecció de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ els vectors aleatoris $(X(t_1 + kT), X(t_2 + xkT), \ldots, X(t_n + kT))$ i $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ tenen la mateixa distribució de probabilitat per a tot $k$ enter.

Això vol dir que el nostre procés estocàstic té una estadística invariant per a un desplaçament $T$ o per a un múltiple $kT$ d'aquest valor $T$. Com hem vist en el cas de l'estacionarietat, de vegades no coneixem amb detall tota l'estadística del procés però podem aplicar una definició més relaxada, és a dir, en sentit més ampli, de ciclostacionarietat.

**Definició 3.2.** El procés estocàstic $X(t)$ és **ciclostacionari en sentit ampli** si existeix una constant $T$ tal que per a tot $k$ enter la seva funció de valor mitjà verifica $m(t + kT) = m(t)$ (és a dir, $m(t)$ és periòdica) i la seva autocorrelació verifica $R(t_1 + kT, t_2 + kT) = R(t_1, t_2)$.

**Exemple 3.1**

Considerem una oscil·lació aleatòria $X(t) = A \cos t + B \sin t$, tal que $\mathrm{E}(A) \neq 0$. Segons el resultat que acabem de veure en l'apartat 2 d'aquest mòdul, $X(t)$ no pot ser estacionari perquè hem dit que perquè fos estacionari en sentit ampli, la mitjana de les variables aleatòries havia de ser zero. En canvi, és ciclostacionari en sentit estricte. Això es veu perquè el procés mateix és periòdic: $X(t + 2\pi) = X(t)$. Atès que totes les realitzacions del procés són periòdiques, l'estadística del procés és invariant sota el canvi $t \to t + 2\pi k$, per a $k$ enter.

L'últim apartat del mòdul el dedicarem a l'estudi de l'espectre de potència dels processos estacionaris. L'espectre de potència d'un procés estocàstic ens permetrà estudiar aquest tipus de processos en el domini de la freqüència. Aquest salt conceptual és important perquè un cop caracteritzem aquests processos en funció de la freqüència podrem integrar aquest tipus de senyals ens sistemes de telecomunicacions que molt sovint es caracteritzen en el domini de la freqüència més que no pas en el domini del temps.

## 4. Espectre de potència d'un procés estacionari

En aquest apartat definirem què és l'espectre de potència d'un procés estacionari. Aquesta definició la farem a partir de la funció d'autocorrelació $R(\tau)$. Vegem, doncs, quines propietats té aquesta funció i a continuació definirem l'espectre de potència del procés.

Considerem un procés $X(t)$ estacionari, amb valor mitjà $m(t) = m$ i autocorrelació $R(\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau))$. Algunes de les propietats de la funció $R(\tau)$ són les següents.

**Funcions parelles**

En una funció parella es compleix que $f(x) = f(-x)$. Si dibuixem la gràfica d'una funció parella, aquesta sempre té simetria respecte a l'eix $y$.

**Proposició 4.1.** Propietats de la funció d'autocorrelació $R(\tau)$ d'un procés estacionari:

1) $R(\tau)$ és una funció parella.

2) $R(\tau)$ ens dóna una mesura del ritme de variació temporal del procés.

3) $R(\tau)$ és màxima per a $\tau = 0$, és a dir, $|R(\tau)| \leq R(0)$ per a tot $\tau$.

**Demostració:**

1) En efecte, com que $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$ (ja que podem invertir l'ordre dels factors en la definició de l'autocorrelació) resulta $R(-\tau) = R(\tau)$.

2) Demostrem a continuació la segona propietat: Volem avaluar la diferència $X(t+\tau) - X(t)$, però en tractar-se d'una quantitat aleatòria el que farem és fer la mitjana del seu quadrat per tal de tenir-ne una mesura de la magnitud

$$\mathrm{E}((X(t+\tau) - X(t))^2) = \mathrm{E}(X(t+\tau)^2 - 2X(t+\tau)X(t) + X(t)^2)$$

$$= R(t+\tau, t+\tau) - 2R(t+\tau, t) + R(t,t) = 2(R(0) - R(\tau)).$$

3) Per a demostrar la tercera propietat partim de $\mathrm{E}(XY)^2 \leq \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$ (desigualtat de Cauchy-Schwarz) vàlida per a tot parell de variables aleatòries $X$ i $Y$. Llavors $R(\tau)^2 = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau))^2 \leq \mathrm{E}(X(t)^2)\,\mathrm{E}(X(t+\tau)^2) = R(0)^2$. (Recordem també que $R(0) = \mathrm{E}(X(t)^2) \geq 0$.) ■

**Autocorrelació d'un procés estacionari**

Com que $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))$, en calcular esperances de productes de valors del procés podem expressar el resultat en funció de $R$. Per exemple, $\mathrm{E}(X(t+\tau)X(t)) = R(t+\tau, t)$. Si el procés és estacionari, $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2))$ es redueix a $R(t_2 - t_1)$ (o $R(t_1 - t_2)$, ja que $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$). Per exemple, $R(t+\tau, t) = R(\tau)$.

**Desigualtat de Cauchy-Schwarz**

La desigualtat de Cauchy-Schwarz ens diu que per a tot parell de vectors $X$ i $Y$ d'un espai vectorial amb producte escalar definit, es compleix que $|\langle X, Y\rangle|^2 \leq \langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle$.

**Exemple 4.1**

Vegem aquestes propietats mitjançant l'exemple que es mostra en la figura 5. A la columna de la dreta podeu veure una realització d'un procés $X(t)$. A la columna de l'esquerra podeu veure la funció d'autocorrelació d'aquest procés.

Figura 5. Tres funcions d'autocorrelació i tres realitzacions de $X(t)$

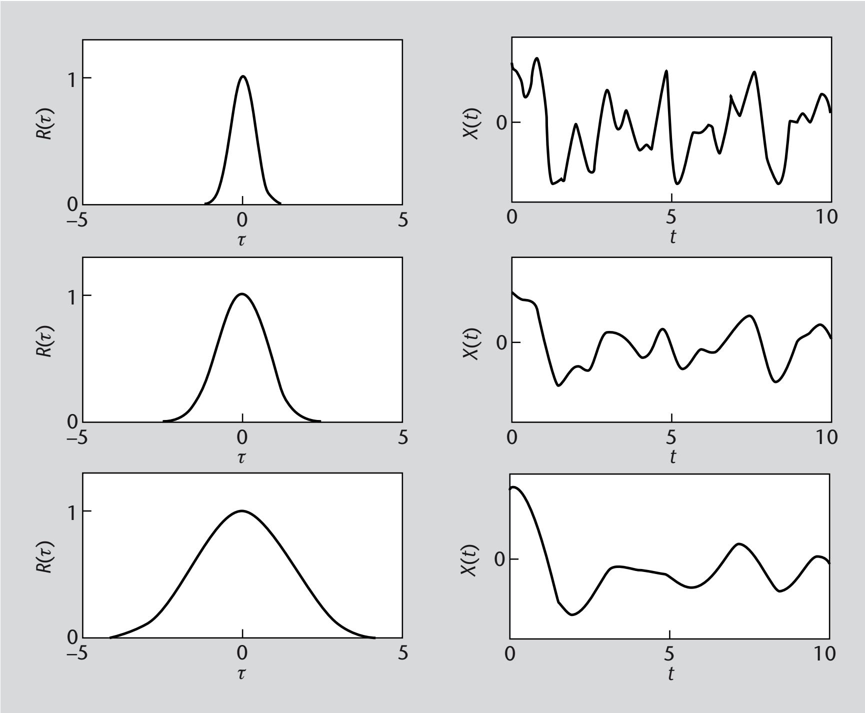



**Figura 5**

A la columna esquerra tenim diferents funcions d'autocorrelació $R(\tau)$. A la columna dreta una realització del procés $X(t)$ per a cadascuna. Podem observar les tres propietats de $R(\tau)$ que hem esmentat en la proposició 4.1.

Fixeu-vos, en primer lloc, que per a tots els casos la funció d'autocorrelació és parella, és a dir, té simetria respecte de l'eix $y$. Com havíem vist en la primera propietat de la proposició 4.1, $R(\tau) = R(-\tau)$.

Vegem la segona propietat, que ens diu que $R(\tau)$ ens dóna una idea de la variació temporal del procés. Veiem que si $R$ disminueix lentament, com és el cas de la tercera realització de la figura, $R(0) - R(\tau)$ és petit i el procés tendeix a variar poc en transcórrer el temps. És un fet intuïtiu, ja que $R$ mesura la correlació entre valors del procés en instants diferents. Si aquesta correlació no disminueix, $X(t+\tau)$ tendeix a tenir valors propers a $X(t)$. Però si $R$ disminueix ràpidament, com podeu veure en la primera realització de la figura, es perd la correlació i el procés en $t+\tau$ ja ha "oblidat" el valor que prenia en $t$. En definitiva, com menys varia $R(\tau)$ més suaus són les fluctuacions de les realitzacions del procés estocàstic.

En la figura 5 podeu veure també la tercera propietat: $R(\tau)$ és màxima en $\tau = 0$. Noteu que $R(\tau) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau))$ mesura la correlació entre la funció $X(t)$ i la mateixa funció desplaçada $X(t+\tau)$. El màxim d'aquesta correlació el tenim, per tant, quan no hi ha desplaçament i comparem la funció amb ella mateixa.

En la segona propietat parlàvem de la variació del procés $X(t)$ en temps, i hem vist que aquesta variació es pot avaluar segons la forma que té $R(\tau)$. Una altra manera de mirar com varia el procés amb el temps és mitjançant el contingut freqüencial. Si el procés efectua canvis ràpids en el temps, hi haurà un contingut elevat en les freqüències altes. Si, en canvi, el procés fluctua poc en el temps, sabem que en el seu contingut freqüencial predominaran les freqüències baixes. La magnitud que s'utilitza per a mesurar-lo és la **densitat espectral de potència**.

**Transformació de Fourier**

Recordem la definició de la transformada de Fourier. Transformada directa (pas de temps a freqüència):

$$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau.$$

Transformada inversa (pas de freqüència a temps):

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{j2\pi f\tau} df.$$

**Definició 4.1.** La **densitat espectral de potència** $S(f)$ d'un procés estocàstic **estacionari** $X(t)$ és la transformada de Fourier de la seva funció d'autocorrelació:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \tag{6}$$

Amb la transformació inversa de l'equació (6) expressem $R$ en funció de $S$:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df. \tag{7}$$

Podem relacionar la potència mitjana del procés, que representarem per Pot, amb l'espectre de potència $S(f)$. Tenim* que $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = R(0)$. Així posem $\tau = 0$ en l'equació (7) i obtenim $R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\, df$. Arribem, per tant, al resultat:

* Tal com havíem vist en l'apartat 2 del mòdul "Caracterització estadística i paràmetres dels processos estocàstics".

$$\mathrm{Pot} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\, df. \tag{8}$$

**Potència d'un procés estacionari**

En un procés estacionari la potència no depèn de $t$. En efecte, $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = \mathrm{E}(X(t)X(t)) = R(t,t) = R(0)$, que és una constant.

Això justifica el nom de $S(f)$, ja que en ser integrada sobre totes les freqüències ens dóna la potència.

És fàcil veure que en ser $R$ (la funció d'autocorrelació) una funció real i parella, la densitat espectral de potència, $S$, també és real i parella:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)(\cos 2\pi f\tau - j \sin 2\pi f\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f\tau\, d\tau,$$

ja que $R(\tau)\sin 2\pi f\tau$ és una funció senar i la seva integral s'anul·la. Ara es veu clarament que $S(f)$ és real i que $S(-f) = S(f)$. Finalment, podem escriure:

$$S(f) = 2\int_{0}^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f\tau\, d\tau. \tag{9}$$

Vegem-ne un exemple en què aplicarem tots aquests conceptes.

**Exemple 4.2**

Un procés té autocorrelació

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\delta}, & |\tau| \le \delta, \\ 0, & |\tau| > \delta. \end{cases}$$

Es tracta de calcular-ne l'espectre de potència i observar gràficament que com més ràpidament decau $R$, més contingut hi ha d'altes freqüències, tal com hem vist en la figura 5:

$$S(f) = \int_{-\delta}^{\delta} \left(1 - \frac{|\tau|}{\delta}\right) \cos 2\pi f \tau d\tau = 2 \int_{0}^{\delta} \left(1 - \frac{\tau}{\delta}\right) \cos 2\pi f \tau d\tau = \frac{1 - \cos 2\pi f \delta}{2\pi^2 f^2 \delta}.$$

Com més petit és $\delta$, més dispersa queda la funció $S$.

Figura 6. La funció d'autocorrelació $R(\tau)$ per a diferents valors de $\delta$ al costat dels espectres de potència corresponents. Com més lentament decau $R(\tau)$, més concentrada està la funció $S(f)$

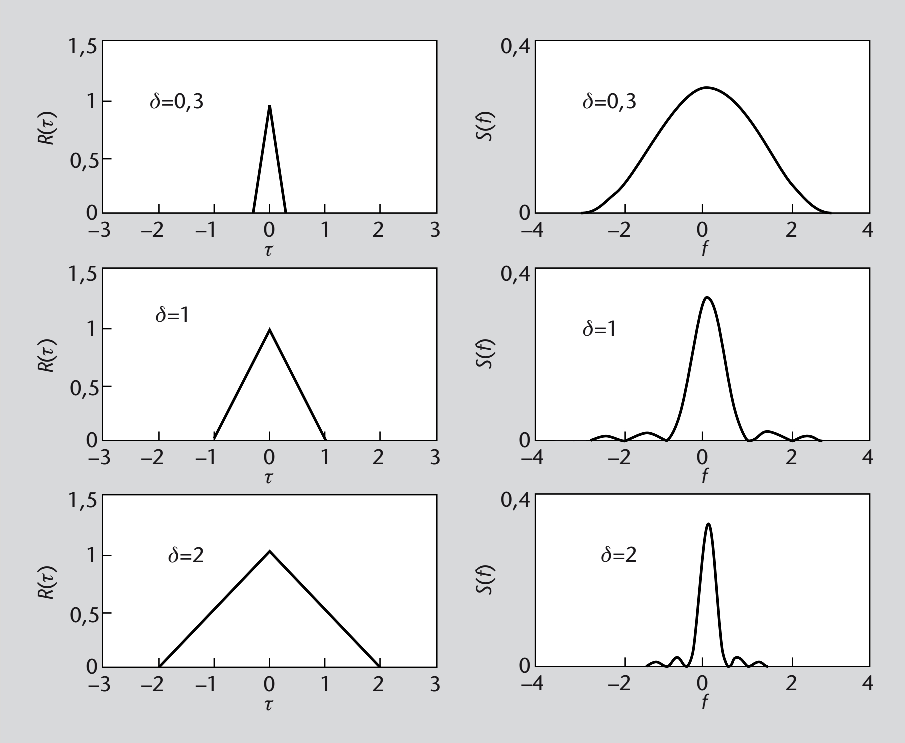



**Figura 6**

Quan la funció d'autocorrelació decau molt ràpidament, vol dir que el senyal en temps fluctua molt i que tindrem contingut freqüencial a altes freqüències. Quan la funció d'autocorrelació varia poc, el procés en temps també ho fa i això es tradueix en freqüències baixes entorn del zero.

## Resum

Un procés estocàstic és estacionari quan la seva estadística és invariant al llarg del temps. Podem diferenciar entre els dos tipus següents:

- **Procés estocàstic estacionari en sentit estricte**: si els vectors aleatoris $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ i $(X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \ldots, X(t_n+\tau))$ tenen la mateixa distribució de probabilitats. És a dir, encara que ens desplacem un interval $\tau$ en l'eix del temps, continuem veient els mateixos paràmetres estadístics.

- **Procés estocàstic estacionari en sentit ampli**: si la seva funció de valor mitjà és constant i la seva funció d'autocorrelació depèn només de la diferència del temps. És a dir, $m(t) = m$ i $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$.

Observeu que aquestes dues condicions que es donen en els processos estacionaris en sentit ampli també es donen en els processos estacionaris en sentit estricte.

Com a exemple, hem comprovat que, en certs casos, les oscil·lacions aleatòries que hem anat veient en diferents mòduls són un exemple de procés estocàstic estacionari en sentit ampli i també en sentit estricte.

Una variant del concepte d'estacionarietat és la **ciclostacionaritat**. Aquest és el cas dels processos estocàstics, que són invariants només sota determinats desplaçaments, que són múltiples d'un període concret $T$. En aquests casos podem diferenciar entre el següent:

- **Processos ciclostacionaris en sentit estricte**: si existeix un nombre $T$ tal que per a tot $n \geq 1$ i per a tota elecció de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ els vectors aleatoris $(X(t_1+kT), X(t_2+xkT), \ldots, X(t_n+kT))$ i $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ tenen la mateixa distribució de probabilitat per a tot $k$ enter.

- **Processos ciclostacionaris en sentit ampli**: si existeix una constant $T$ tal que per a tot $k$ enter la seva funció de valor mitjà verifica $m(t+kT) = m(t)$ i la seva autocorrelació verifica $R(t_1+kT, t_2+kT) = R(t_1, t_2)$.

En el cas dels processos estocàstics estacionaris, la funció d'autocorrelació $R(t_1, t_2)$ depèn únicament de la diferència de temps $\tau = t_2 - t_1$. Sota aquestes condicions $R(\tau)$ compleix les propietats següents:

- $R(\tau)$ és una funció parella.

- $R(\tau)$ ens dóna una idea de com varia el procés $X(t)$ en el temps.
- $R(\tau)$ és màxima en $\tau = 0$.

Finalment, hem definit una nova funció que ens permet avaluar com varien els processos en temps i hem definit l'**espectre de potència** d'un procés estocàstic aleatori com la transformada de Fourier de la funció d'autocorrelació:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \tag{10}$$

Amb aquesta transformació passem del domini temps al domini freqüència. De la mateixa manera, amb la transformada de Fourier inversa de l'espectre de potència, podem obtenir la funció d'autocorrelació del procés:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df. \tag{11}$$

## Activitats

**1.** Quins dels paràmetres estadístics següents (valor mitjà i funció d'autocorrelació) corresponen a processos estacionaris en sentit ampli?

**a)** $m(t) = 1$, $R(t_1, t_2) = e^{-|t_1 - t_2|} + 3$.

**b)** $m(t) = t$, $R(t_1, t_2) = \cos(t_2 - t_1) + t_1 t_2$.

**c)** $m(t) = 2$, $R(t_1, t_2) = t_1 + t_2 + 5$.

**d)** $m(t) = 0$, $R(t_1, t_2) = t_2^2 - t_1^2$.

Indicació: recordeu que una manera d'assegurar que la funció d'autocorrelació només depèn de la diferència de temps és escriure $R(t, t + \tau)$ i veure que no depèn de $t$.

**2.** Considereu una oscil·lació estacionària $X(t) = A\cos t + B \sin t$ en què $(A, B)$ és una variable bidimensional uniforme en una regió $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$. Digueu si $X(t)$ té algun tipus d'estacionarietat en els casos següents:

**a)** $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

**b)** $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$.

**c)** $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

**Indicació**

Mireu en l'apartat 2 els criteris d'estacionarietat per a oscil·lacions aleatòries.

**3.** Considereu que $X(t)$ és un procés estacionari en sentit estricte. Suposeu que $X(0)$ és una variable aleatòria exponencial amb paràmetre $\lambda = 2$ i que $X(0)$ i $X(1)$ són independents. Calculeu o digueu si ens falta informació per a calcular-ho:

**a)** $\mathrm{E}(X(2))$.

**b)** $\mathrm{E}(X(3)^2)$.

**c)** $\mathrm{E}(X(1)X(3))$.

**d)** $\mathrm{Cov}(X(1), X(2))$.

**e)** $\mathrm{E}(X(4)X(5))$.

**4.** Considereu que $X(t)$ és un procés estacionari en sentit ampli tal que $m(t) = 0$ i $R(\tau) = 2e^{-|\tau|}$.

**a)** Què val la potència d'aquest procés?

**b)** Què val $\mathrm{E}((X(2) - X(1))^2)$?

**c)** Calculeu l'espectre de potència $S(f)$ d'aquest procés.

**5.** Considereu els dos processos estocàstics següents:

- $X(t)$ amb valor mitjà $m_X(t) = 2^{-t}$ i autocorrelació $R_X(t_1, t_2) = \dfrac{1}{1 + (t_1 - t_2)^2}$.
- $Y(t)$ amb valor mitjà $m_Y(t) = 0$ i autocorrelació $R_Y(t_1, t_2) = \dfrac{1}{1 + (t_1 - t_2)^2}$.

**a)** Són estacionaris $X(t)$ o $Y(t)$?

**b)** Definim un nou procés $Z(t) = X(t)X(t + 1)$. Demostreu que la funció de valor mitjà de $Z(t)$, $m_Z(t)$ és constant.

**c)** Definim les variables aleatòries $A = X(1) - X(0)$ i $B = X(2)$. Calculeu-ne les esperances i variàncies, i també $\mathrm{Cov}(A, B)$.

**d)** La variació del procés $Y(t)$ la podem estudiar a partir de la variable aleatòria $V_a = Y(a) - Y(0)$ en què $a > 0$. Calculeu $\mathrm{E}(V_a^2)$ i demostreu que el resultat és una funció creixent de $a$.

**e)** Calculeu la densitat espectral de potència $S_Y(f)$ del procés $Y(t)$.
Indicació: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^2 + \beta^2} dx = \frac{\pi e^{-\beta|\alpha|}}{2\beta}$.

**6.** Un procés té funció de valor mitjà $m(t) = \alpha + \beta t$ i funció d'autocorrelació $R(t_1, t_2) = \cos(\alpha t_1 + (\alpha - 2)t_2)$. Determineu els valors de les constants $\alpha$ i $\beta$ per tal que el procés sigui estacionari en sentit ampli.

**7.** Un procés estacionari $Y(t)$ té valor mitjà $m_Y(t) = 0$ i autocorrelació $R_Y(t_1, t_2) = e^{-(t_1 - t_2)^2}$.

**a)** Per a estudiar-ne la variació definim la variable aleatòria $V_a = Y(a) - Y(0)$ en què $a > 0$. Calculeu $\mathrm{E}(V_a^2)$ i demostreu que el resultat és una funció creixent de $a$.

**b)** Calculeu la densitat espectral de potència $S_Y(f)$ del procés $Y(t)$.
Indicació: $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\alpha x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$.

**8.** Un procés té funció de valor mitjà $m(t) = e^{-\kappa t}$ i funció d'autocovariància $C(t_1,t_2) = e^{-|t_2-t_1|}$.

**a)** Per al cas $\kappa = 1$: calculeu l'esperança i la variància de la variable aleatòria $X(1)$.

**b)** Hi ha algun valor de la constant $\kappa$ tal que el procés sigui estacionari en sentit ampli?

**c)** (En aquest apartat *b* substituïu $\kappa$ pel valor trobat en el apartat *c*.) Considereu el procés $Z(t) = X(t+a) - X(t)$ amb $a > 0$. Calculeu la potència de $Z(t)$ i demostreu que aquesta és una funció creixent de $a$.

**9.** Un procés té funció de valor mitjà $m(t) = \cos^2\alpha + t\sin^2\alpha$ i funció d'autocovariància $C(t_1,t_2) = 1 + \cos(\pi(t_2 - t_1))$.

**a)** Trobeu els valors de $\alpha$ tals que el procés sigui estacionari en sentit ampli.

**b)** Preneu $\alpha$ com en l'apartat anterior i calculeu l'esperança i la variància de la variable $Z = \frac{1}{2}(X(0) + X(1))$.

**10.** El voltatge en un punt d'una línia elèctrica està determinat per un procés estocàstic gaussià $X(t)$ de valor mitjà $m(t) = 1 + a\cos t$ i autocovariància $C(t_1,t_2) = \cos(t_1 + bt_2)$, en què $a$ i $b$ són dues constants.

**a)** Determineu $a$ i $b$ per tal que el procés sigui estacionari en sentit ampli. I perquè ho sigui en sentit estricte.

**b)** Per al cas $a = b = 1$, trobeu la potència del procés i determineu en quins instants és màxima.

**11.** Un procés té funció de valor mitjà $m(t) = \alpha t + \beta(1-t)$ i funció d'autocovariància $C(t_1,t_2) = \cos^2(\pi(2t_1 + \beta t_2))$.

**a)** Trobeu els valors de $\alpha$ i $\beta$ tals que el procés sigui estacionari en sentit ampli.

**b)** Preneu $\alpha$ i $\beta$ com en l'apartat anterior. Si $Z = X(\frac{1}{4}) - X(0)$, calculeu les esperances de $Z$ i de $Z^2$.

**12.** El senyal elèctric en un punt d'una línia està determinat per un procés $X(t)$, estacionari, amb valor mitjà 10 i de potència 100. En un altre punt de la línia el senyal que apareix és $Y(t) = X(t) + S(t)$ en què $S(t)$ és el soroll afegit per la línia, independent del procés $X(t)$, amb valor mitjà constant $\mu$ i potència 15.

**a)** Es mesura la potència de $Y(t)$ i dóna 165. Què val $\mu$?

**b)** Demostreu que si $S(t)$ és estacionari en sentit ampli, llavors $Y(t)$ també ho és.

**13.** Un procés té funció de valor mitjà $m(t) = \alpha(t+1) + \beta(1-t) + \gamma(2t-1)$ i funció d'autocorrelació $R(t_1,t_2) = \dfrac{1}{\beta + (\alpha t_1 + \gamma t_2)^2}$.

**a)** Trobeu els valors de les constants $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ tals que el procés és estacionari en sentit ampli, amb potència igual a 2.

**b)** Preneu $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ com en l'apartat anterior. Si $Z = X(2) - X(0)$, calculeu la variància de $Z$.

**14.** Un segment d'una xarxa de comunicacions afegeix soroll al senyal transmès de manera que si aquest és originalment $X(t)$, el que es transmet és $Y(t) = X(t) + N(t)$ en què $N(t)$ té valor mitjà zero i està correlacionat amb $X(t)$ de manera que $\mathrm{E}(X(t)N(t)) = \epsilon\sqrt{\mathrm{Pot}_X}$ en què $\epsilon$ és una constant i $\mathrm{Pot}_X$ és la potència del procés $X(t)$.

**a)** Determineu la relació entre la potència del senyal original $X(t)$ i la del senyal present $Y(t)$.

**b)** Trobeu $\epsilon$ i la potència de $N(t)$ sabent que si la potència de $X(t)$ val 2, la de $Y(t)$ val 2,78, i si la potència de $X(t)$ val 4, la de $Y(t)$ val 4,90.

**15.** Un senyal de comunicació $X(t)$ és un procés estacionari amb valor mitjà $m_X(t) = \mu$ i autocorrelació $R_X(t,t+\tau) = \varphi(\tau)$ (en què $\mu$ és una constant i $\varphi(\tau)$ una funció). A causa de la modulació, apareix el procés $Y(t) = \cos(2\pi f_0 t)X(t)$ en què la constant $f_0$ és la freqüència de modulació. Llegiu les definicions de ciclostacionarietat (3.1 i 3.2) i demostreu que, si bé no és estacionari, $Y(t)$ és ciclostacionari en sentit ampli.

**16.** Un procés té funció de valor mitjà $m(t) = \cos(at)+b$ i funció d'autocovariància $C(t_1, t_2) = \cos^2(ct_1 + \pi t_2)$.

**a)** Trobeu els valors de les constants $a, b, c$ tals que el procés sigui estacionari en sentit ampli, amb potència igual a 5.

**b)** Ara preneu $a = c = \pi$, $b = 2$. Calculeu l'esperança i la variància de $X(0)$ i de $X(1)$ i també la covariància. Calculeu també la variància de $Y = X(0) - X(1)$ i digueu què es pot dir de la relació entre $X(0)$ i $X(1)$ a partir d'aquest valor.

**17.** Un canal de comunicació transmet un senyal $X(t)$ estacionari, amb valor mitjà 0 i potència 12. A la sortida trobem $Y(t) = X(t)+N(t)$ en què $N(t)$ és el soroll introduït pel canal. Aquest soroll està correlacionat amb $X(t)$ de manera que $N(t) = (1 - e^{-A})X(t)$ en què $A$ és una variable aleatòria exponencial d'esperança 1, independent de $X(t)$.

**a)** Demostreu que si $A$ és una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda$, i $\alpha$ és una constant no negativa: $\mathrm{E}(e^{-\alpha A}) = \dfrac{\lambda}{\lambda + \alpha}$.

**b)** Determineu la potència del senyal final $Y(t)$.

**c)** Considereu ara que a $X(t)$ li afegim un soroll que té la mateixa potència que el soroll anterior però és independent de $X(t)$. Quina és ara la potència de $Y(t)$?

**18.** Un senyal de comunicació $X(t)$ és un procés estacionari amb valor mitjà $m_X(t) = \mu$ i autocorrelació $R_X(t, t + \tau) = \varphi(\tau)$ (en què $\mu$ és una constant i $\varphi(\tau)$ una funció).

Demostreu que el procés $Y(t) = X(t)+X(t+a)$, en què $a$ és una constant, és també estacionari en sentit ampli i trobeu-ne el valor mitjà i l'autocorrelació expressats a partir de $\mu$ i $\varphi(\tau)$.

## Solucionari

**1.** Hem de comprovar que $m(t)$ és constant i $R(t, t+\tau)$ depèn només de $\tau$.

**a)** Sí, ja que $R(t, t+\tau) = e^{-|\tau|} + 3$.

**b)** No, ja que $m(t) = t$ no és costant.

**c)** No, ja que $R(t, t+\tau) = 2t + \tau + 1$ depèn de $t$.

**d)** No, ja que $R(t, t+\tau) = (t+\tau)^2 - t^2 = 2t\tau + \tau^2$ depèn de $t$.

**2.** Per a ser estacionari en sentit estricte cal que la variable bidimensional $(A, B)$ tingui simetria circular. En els tres exemples la funció de densitat conjunta és constant sobre $\mathcal{D}$ però només tenim simetria circular en el tercer cas ($x^2 + y^2 \leq 1$ defineix un cercle de radi 1 centrat en l'origen). Així, el tercer cas correspon a un procés estacionari en sentit estricte i els dos primers no.

El tercer també és estacionari en sentit ampli, ja que ho és en sentit estricte (proposició 1.1). Per als altres dos hem de comprovar les condicions ($\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$, $\rho = 0$).

Primer cas: $\mathcal{D}$ és un quadrat d'àrea 1. $f_A(a) = \int_0^1 1 \cdot db = 1$ per a $0 \leq a \leq 1$. Així $A$ és uniforme en $[0, 1]$ i, per tant, $\mathrm{E}(A) = \frac{1}{2}$. El procés no és estacionari en sentit ampli.

Segon cas: $\mathcal{D}$ és un quadrat d'àrea 4. $f_A(a) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} db = \frac{1}{2}$ per a $-1 \leq a \leq 1$. $f_B(b) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} da = \frac{1}{2}$ per a $-1 \leq b \leq 1$. Llavors $A$ i $B$ són uniformes en $[-1, 1]$ i, per tant, $\mathrm{E}(A) = 0$, $\mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$ ($A$ i $B$ tenen la mateixa densitat) i $\mathrm{E}(AB) = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} ab\frac{1}{4} da db = 0$, amb la qual cosa $\mathrm{Cov}(A, B) = 0$. Així, el procés és estacionari en sentit ampli.

**3.** Si el procés és estacionari en sentit estricte, $X(t)$ té la mateixa funció de densitat per a tot $t$. El mateix passa amb la variable bidimensional $(X(t), X(t+1))$. Així, per a tot $t$, $X(t)$ és $Exp(2)$ i $X(t)$ i $X(t+1)$ són independents. Recordem també que per a una $Exp(\lambda)$ l'esperança val $\frac{1}{\lambda}$ i la variància $\frac{1}{\lambda^2}$.

Llavors: $\mathrm{E}(X(2)) = \frac{1}{2}$. $\mathrm{E}(X(3)^2) = \mathrm{Var}(X(3)) + \mathrm{E}(X(3))^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. $\mathrm{E}(X(1)X(3))$ no es pot determinar, ja que no tenim informació sobre el que passa a distància temporal 2. $\mathrm{Cov}(X(1), X(2)) = 0$, ja que $X(1)$ i $X(2)$ també són independents. $\mathrm{E}(X(4)X(5)) = \mathrm{Cov}(X(4), X(5)) + \mathrm{E}(X(4))\,\mathrm{E}(X(5)) = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

**4.** Tenim que $\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1) = 2e^{-|t_2 - t_1|}$.

**a)** La potència és $R(t, t)$ i en el cas estacionari val $R(t - t) = R(0)$. Així, la potència val $2e^{-|0|} = 2$.

**b)** $\mathrm{E}((X(2) - X(1))^2) = \mathrm{E}(X(1)^2 + X(2)^2 - 2X(1)X(2)) = \mathrm{E}(X(1)^2) + \mathrm{E}(X(2)^2) - 2\,\mathrm{E}(X(1)X(2)) = R(0) + R(0) - 2R(1) = 2(R(0) - R(1)) = 2(2 - 2e^{-1}) = 4(1 - e^{-1})$.

**c)** $S(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)\, d\tau = 2\int_0^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)\, d\tau = 2\int_0^{\infty} 2e^{-\tau}\cos(2\pi f\tau)\, d\tau =$
$4 \left. \dfrac{e^{-\tau}(-\cos(2\pi f\tau) + 2\pi f\sin(2\pi f\tau))}{1 + (2\pi f)^2} \right|_{\tau=0}^{\tau=\infty} = \dfrac{4}{1 + 4\pi^2 f^2}$.

**5. a)** $X(t)$ no és estacionari, ja que $m_X(t)$ depèn de $t$. $Y(t)$ és estacionari en sentit ampli, ja que $m_Y(t)$ és constant i $R_Y(t_1, t_2)$ depèn només de la diferència de temps: $R_Y(t, t+\tau) = \dfrac{1}{1 + \tau^2}$.

**b)** $m_Z(t) = \mathrm{E}(Z(t)) = \mathrm{E}(X(t)X(t+1)) = R_X(t, t+1) = \dfrac{1}{1 + (t - (t+1))^2} = \dfrac{1}{2}$.

**c)** $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(X(1) - X(0)) = \mathrm{E}(X(1)) - \mathrm{E}(X(0)) = m_X(1) - m_X(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

$\mathrm{E}(B) = \mathrm{E}(X(2)) = m_X(2) = \frac{1}{4}$.

$\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}((X(1) - X(0))^2) = \mathrm{E}(X(1)^2) + \mathrm{E}(X(0)^2) - 2\,\mathrm{E}(X(1)X(0)) = R_X(1, 1) + R_X(0, 0) - 2R_X(1, 0) = 1 + 1 - 2\frac{1}{2} = 1$.

$\mathrm{E}(B^2) = \mathrm{E}(X(2)^2) = \mathrm{E}(X(2)X(2)) = R_X(2, 2) = \frac{1}{1 + (2-2)^2} = 1$.

$\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}((X(1) - X(0))X(2)) = \mathrm{E}(X(1)X(2)) - \mathrm{E}(X(0)X(2)) = R_X(1, 2) - R_X(0, 2) = \frac{1}{1 + (1-2)^2} - \frac{1}{1 + (0-2)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$.

$\mathrm{Var}(A) = \mathrm{E}(A^2) - \mathrm{E}(A)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$\mathrm{Var}(B) = \mathrm{E}(B^2) - \mathrm{E}(B)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

$\mathrm{Cov}(A, B) = \mathrm{E}(AB) - \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = \frac{3}{10} - (-\frac{1}{2})\frac{1}{4} = \frac{17}{40}$.

**d)** $\mathrm{E}(V_a^2) = \mathrm{E}((Y(a) - Y(0))^2) = \mathrm{E}(Y(a)^2) + \mathrm{E}(Y(0)^2) - 2\,\mathrm{E}(Y(a)Y(0)) = R_Y(a, a) + R_Y(0, 0) - 2R_Y(a, 0) = \dfrac{1}{1 + (a - a)^2} + \dfrac{1}{1 + (0 - 0)^2} - 2\dfrac{1}{1 + (a - 0)^2} = \dfrac{2a^2}{1 + a^2}$.

Podem comprovar que és creixent observant que la seva derivada és $\dfrac{4a}{(1 + a^2)^2} > 0$.

**e)** $Y(t)$ és un procés estacionari amb $R_Y(\tau) = \dfrac{1}{1 + \tau^2}$.

$$S_Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau)\cos 2\pi f\tau \, d\tau = 2\int_{0}^{\infty} R_Y(\tau)\cos 2\pi f\tau \, d\tau$$
$$= 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + \tau^2}\cos 2\pi f\tau \, d\tau = \pi e^{-2\pi|f|}.$$

**6.** $m(t)$ no ha de dependre de $t$, de manera que necessàriament $\beta = 0$.

$R(t_1, t_2)$ ha de dependre només de la diferència de temps. És a dir, $R(t, t + \tau) = \cos(\alpha t + (\alpha - 2)(t + \tau)) = \cos(2(\alpha - 1)t + (\alpha - 2)\tau)$ no ha de dependre de $t$. Així, necessàriament $\alpha = 1$.

Prenent $\alpha = 1, \beta = 0$ ens queda un procés estacionari en sentit ampli amb $m(t) = 1$ i $R(t, t + \tau) = \cos\tau$.

**7. a)** $\mathrm{E}(V_a^2) = \mathrm{E}((Y(a) - Y(0))^2) = \mathrm{E}(Y(a)^2) + \mathrm{E}(Y(0)^2) - 2\,\mathrm{E}(Y(a)Y(0)) = R_Y(a, a) + R_Y(0, 0) - 2R_Y(a, 0) = e^{-(a-a)^2} + e^{-(0-0)^2} - 2e^{-(a-0)^2} = 2 - 2e^{-a^2}$.

Podem comprovar que és creixent observant que la seva derivada és $4ae^{-a^2} > 0$.

**b)** $Y(t)$ és un procés estacionari amb $R_Y(\tau) = e^{-\tau^2}$.

$$S_Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau)\cos 2\pi f\tau \, d\tau = 2\int_{0}^{\infty} R_Y(\tau)\cos 2\pi f\tau \, d\tau$$
$$= 2\int_{0}^{\infty} e^{-\tau^2}\cos 2\pi f\tau \, d\tau = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2 f^2}.$$

**8. a)** $\mathrm{E}(X(1)) = m(1) = e^{-1}$. $\mathrm{Var}(X(1)) = C(1, 1) = e^0 = 1$.

**b)** $m(t)$ no ha de dependre de $t$, de manera que necessàriament $\kappa = 0$. $R(t_1, t_2)$ ha de dependre només de la diferència de temps, fet que ja succeeix. Així el procés és estacionari en sentit ampli quan $\kappa = 0$.

**c)** Tenim $m(t) = 1$ i $R(t_1, t_2) = C(t_1, t_2) + m(t_1)m(t_2) = e^{-|t_2 - t_1|} + 1$.

La potència de $Z(t)$ val $\mathrm{Pot}_Z = \mathrm{E}(Z(t)^2) = \mathrm{E}((X(t+a) - X(t))^2) = \mathrm{E}(X(t+a)^2) + \mathrm{E}(X(t)^2) - 2\,\mathrm{E}(X(t+a)X(t)) = R(t+a, t+a) + R(t, t) - 2R(t+a, t) = (e^{-0}+1) + (e^{-0}+1) - 2(e^{-a}+1) = 2 - 2e^{-a}$. És creixent, ja que la seva derivada val $2e^{-a} > 0$.

**9.**

**a)** $m(t)$ ha de ser constant i $R$ (o $C$) dependre de la diferència de temps. La segona condició ja es verifica. Per a la primera cal $\sin\alpha = 0$, que implica $\alpha = k\pi$ en què $k$ és qualsevol enter. En aquest cas sempre queda $m(t) = 1$.

**b)** Notem que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t) = 1$ i $\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = R(t_1, t_2) = C(t_1, t_2) + m(t_1)m(t_2) = 2 + \cos(\pi(t_2 - t_1))$.

$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}(X(0) + X(1))\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{E}(X(0)) + \mathrm{E}(X(1))) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$.

$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{E}(\frac{1}{4}(X(0) + X(1))^2) = \frac{1}{4}(\mathrm{E}(X(0)^2) + \mathrm{E}(X(1)^2) + 2\,\mathrm{E}(X(0)X(1))) = \frac{1}{4}(R(0, 0) + R(1, 1) + 2R(0, 1)) = \frac{1}{4}(3 + 3 + 2 \cdot 1) = 2$.

$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - \mathrm{E}(Z)^2 = 1$.

**10. a)** $m(t)$ ha de ser constant, i llavors $a = 0$. $C(t, t+\tau) = \cos((1+b)t + b\tau)$ no ha de dependre de $t$, i llavors $b = -1$. Així, el procés és estacionari en sentit ampli quan $a = 0$ i $b = -1$. En aquest cas també serà estacionari en sentit estricte, ja que el procés és gaussià.

**b)** $\mathrm{Pot} = R(t,t) = C(t,t) + m(t)^2 = \cos(2t) + (1+\cos t)^2 = 3\cos^2 t - 2\cos t$.

La seva derivada val $2\sin t(1 - 3\cos t)$ i s'anul·la per a $t = k\pi$ amb $k$ enter, en què tenim màxims locals, i per als temps amb $\cos t = \frac{1}{3}$, en què tenim mínims locals. Els màxims es donen, per tant, en $t = k\pi$, i la potència val 1 per a $k$ parell i 5 per a $k$ imparell.

**11. a)** $m(t)$ ha de ser constant i $R$ (o $C$) dependre de la diferència de temps. Com que $m(t) = \beta + (\alpha - \beta)t$, ha de ser $\alpha = \beta$. Si posem $C(t, t+\tau) = \cos^2(\pi((2+\beta)t + \beta\tau))$, ha de ser $\beta = -2$. Llavors, $\alpha = \beta = -2$, $m(t) = -2$ i $C(t_1, t_2) = \cos^2(2\pi(t_2 - t_1))$.

**b)** Notem que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t) = -2$ i $\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = R(t_1,t_2) = C(t_1,t_2) + m(t_1)m(t_2) = 4 + \cos^2(2\pi(t_2 - t_1))$.

$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X(\frac{1}{4}) - X(0)) = \mathrm{E}(X(\frac{1}{4})) - \mathrm{E}(X(0))) = -2 - (-2) = 0.$

$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{E}((X(\frac{1}{4}) - X(0))^2) = \mathrm{E}(X(\frac{1}{4})^2) + \mathrm{E}(X(0)^2) - 2\,\mathrm{E}(X(0)X(\frac{1}{4})) = R(\frac{1}{4}) + R(0,0) - 2R(0, \frac{1}{4}) = 5 + 5 - 2\cdot 4 = 2.$

**12. a)** $\mathrm{Pot}_Y = \mathrm{E}(Y(t)^2) = \mathrm{E}((X(t)+S(t))^2) = \mathrm{E}(X(t)^2 + S(t)^2 + 2X(t)S(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) + \mathrm{E}(S(t)^2) + 2\,\mathrm{E}(X(t))\,\mathrm{E}(S(t)) = \mathrm{Pot}_X + \mathrm{Pot}_Y + 2m_X m_Y$.

Així, $165 = 100 + 15 + 2\cdot 10\mu$, i llavors $\mu = 2{,}5$.

**b)** $m_Y(t) = \mathrm{E}(X(t)) + \mathrm{E}(S(t)) = 10 + \mu$, és constant.

$R_Y(t_1,t_2) = \mathrm{E}((X(t_1)+S(t_1))(X(t_2)+S(t_2)) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) + \mathrm{E}(S(t_1)S(t_2)) + \mathrm{E}(X(t_1))\,\mathrm{E}(S(t_2)) + \mathrm{E}(S(t_1))\,\mathrm{E}(X(t_2))$.

Llavors $R_Y(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) + R_S(t_1,t_2) + 20\mu$. Com $X$ i $S$ són estacionaris, $R_X$ i $R_S$ depenen només de la diferència de temps. Per tant, $R_Y$ depèn només de la diferència de temps i el procés $Y$ és estacionari.

**13. a)** $m(t)$ ha de ser constant i $R(t_1,t_2)$ dependre només de la diferència de temps. Com $m(t) = \alpha + \beta - \gamma + (\alpha - \beta + 2\gamma)t$, ha de ser $\alpha - \beta + 2\gamma = 0$. Si posem $R(t, t+\tau) = \dfrac{1}{\beta + ((\alpha+\gamma)t + \gamma\tau)^2}$, ha de ser $\alpha + \gamma = 0$. Finalment, la potència és (tenint en compte la condició anterior) $R(t,t) = \dfrac{1}{\beta} = 2$, i llavors $\beta = \dfrac{1}{2}$ Llavors, $\alpha = -\dfrac{1}{2}, \beta = \gamma = \dfrac{1}{2}$.

**b)** Notem que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t) = -\dfrac{1}{2}$ i $\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = R(t_1,t_2) = \dfrac{4}{2 + (t_2 - t_1)^2}$.

$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X(2) - X(0)) = \mathrm{E}(X(2)) - \mathrm{E}(X(0))) = -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 0.$

$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{E}((X(2) - X(0))^2) = \mathrm{E}(X(2)^2) + \mathrm{E}(X(0)^2) - 2\,\mathrm{E}(X(0)X(2)) = R(2,2) + R(0,0) - 2R(0,2) = 2 + 2 - 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$. $\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - \mathrm{E}(Z)^2 = \frac{8}{3}$.

**14. a)** $\mathrm{Pot}_Y = \mathrm{E}(Y(t)^2) = \mathrm{E}((X(t)+N(t))^2) = \mathrm{E}(X(t)^2 + N(t)^2 + 2X(t)N(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) + \mathrm{E}(N(t)^2) + 2\,\mathrm{E}(X(t)N(t)) = \mathrm{Pot}_X + \mathrm{Pot}_N + 2\epsilon\sqrt{\mathrm{Pot}_X}$.

**b)** Així, $2{,}78 = 2 + \mathrm{Pot}_N + 2\epsilon\sqrt{2}$ i $4{,}90 = 4 + \mathrm{Pot}_N + 2\epsilon\sqrt{4}$. La solució del sistema és $\mathrm{Pot}_N = 0{,}49$ i $\epsilon = 0{,}10$.

**15.** Calculem els paràmetres del procés $Y(t)$:

$m_Y(t) = \mathrm{E}(Y(t)) = \mathrm{E}(\cos(2\pi f_0 t)X(t)) = \cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{E}(X(t)) = \mu\cos(2\pi f_0 t).$

$R_Y(t_1,t_2) = \mathrm{E}(Y(t_1)Y(t_2)) = \mathrm{E}(\cos(2\pi f_0 t_1)X(t_1)\cos(2\pi f_0 t_2)X(t_2))$

$= \cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2)\,\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = \varphi(t_2 - t_1)\cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2).$

$Y(t)$ no és estacionari, ja que $m_Y(t)$ depèn de $t$. Sí que verifica les condicions de ciclostacionarietat en sentit ampli, prenent $T = \frac{1}{f_0}$. En efecte, per a $k$ enter, $m_Y(t + kT) = \mu\cos(2\pi f_0(t + \frac{k}{f_0})) = \mu\cos(2\pi f_0 t + 2\pi k) = \mu\cos(2\pi f_0 t) = m_Y(t)$.

$R_Y(t_1+kT, t_2+kT) = \varphi((t_2+kT)-(t_1+kT))\cos(2\pi f_0(t_1+\frac{k}{f_0}))\cos(2\pi f_0(t_2+\frac{k}{f_0}))$

$= \varphi(t_2-t_1)\cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2) = R_Y(t_1,t_2)$.

**16.**

**a)** Com $m(t) = \cos(at)+b$ ha de ser constant, $a = 0$. Com $C(t,t+\tau) = \cos^2(ct+\pi(t+\tau))$ ha de ser independent de $t$, $c = -\pi$. Tenim ara $m(t) = 1+b$ i $C(t_1,t_2) = \cos^2(\pi(t_2-t_1))$. Així $R(t_1,t_2) = C(t_1,t_2)+m(t_1)m(t_2) = \cos^2(\pi(t_2-t_1))+(1+b)^2$. La potència és $R(t,t) = 1+(1+b)^2 = 5$, i llavors $b = 1$ o $b = -3$.

**b)** Notem que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t) = 2+\cos\pi t$, $\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = R(t_1,t_2) = \cos^2(\pi(t_1+t_2)) + (2+\cos\pi t_1)(2+\cos\pi t_2)$.

Així, $\mathrm{E}(X(0)) = m(0) = 3$, $\mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 1$, $\mathrm{E}(X(0)^2) = R(0,0) = 10$, $\mathrm{E}(X(1)^2) = R(1,1) = 2$, $\mathrm{E}(X(0)X(1)) = R(0,1) = 4$.

Amb les dades anteriors, $\mathrm{Var}(X(0)) = \mathrm{E}(X(0)^2)-\mathrm{E}(X(0))^2 = 1$, $\mathrm{Var}(X(1)) = \mathrm{E}(X(1)^2) - \mathrm{E}(X(1))^2 = 1$, $\mathrm{Cov}(X(0),X(1)) = \mathrm{E}(X(0)X(1))-\mathrm{E}(X(0))\,\mathrm{E}(X(1)) = 1$.

$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X(0))-\mathrm{E}(X(1)) = 2$. $\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{E}(X(0)^2+X(1)^2-2X(0)X(1)) = 10+2-2\cdot 4 = 4$. $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2)-\mathrm{E}(Y)^2 = 0$. Com $Y$ té variància zero, ha de ser constant. Llavors podem assegurar que $X(0) = 2+X(1)$.

**17.**

**a)** $\mathrm{E}(e^{-\alpha A}) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha a}\lambda e^{-\lambda a}da = \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+\alpha)a}da = \lambda\left.\frac{e^{-(\lambda+\alpha)a}}{-(\lambda+\alpha)}\right|_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda+\alpha}$.

**b)** $\mathrm{Pot}_Y = \mathrm{E}(Y(t)^2) = \mathrm{E}((X(t)+N(t))^2) = \mathrm{E}((X(t)+(1-e^{-A})X(t))^2) = \mathrm{E}((2-e^{-A})^2X(t)^2) = \mathrm{E}((2-e^{-A})^2)\,\mathrm{E}(X(t)^2) = \mathrm{E}(4-4e^{-A}+e^{-2A})\mathrm{Pot}_X = (4-4\cdot\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2+1})12 = 28$.

**c)** La potència del soroll original és

$$\mathrm{Pot}_N = \mathrm{E}(N(t)^2) = \mathrm{E}((1-e^{-A})^2X(t)^2) = \mathrm{E}(1-2e^{-A}+e^{-2A})\mathrm{Pot}_X = 4.$$

Ara, $\mathrm{Pot}_Y = \mathrm{E}((X(t)+N(t))^2) = \mathrm{E}(X(t)^2+N(t)^2+2X(t)N(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2)+\mathrm{E}(N(t)^2) + 2\,\mathrm{E}(X(t))\,\mathrm{E}(N(t)) = \mathrm{Pot}_X+\mathrm{Pot}_N+0 = 16$.

**18.** Notem que $\mathrm{E}(X(t)) = \mu$ i $\mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = \varphi(t_2-t_1)$. Calculem els paràmetres del procés $Y(t)$:

$m_Y(t) = \mathrm{E}(Y(t)) = \mathrm{E}(X(t)+X(t+a)) = \mathrm{E}(X(t))+\mathrm{E}(X(t+a)) = 2\mu$.

$R_Y(t,t+\tau) = \mathrm{E}(Y(t)Y(t+\tau)) = \mathrm{E}((X(t)+X(t+a))(X(t+\tau)+X(t+\tau+a))) = \mathrm{E}(X(t)X(t+\tau))+\mathrm{E}(X(t)X(t+\tau+a))+\mathrm{E}(X(t+a)X(t+\tau))+\mathrm{E}(X(t+a)X(t+\tau+a)) = \varphi(\tau)+\varphi(\tau+a)+\varphi(\tau-a)+\varphi(\tau)$.

$Y(t)$ és estacionari en sentit ampli, ja que $m_Y(t)$ és constant i $R_Y(t,t+\tau)$ no depèn de $t$. La seva autocorrelació és $R_Y(t,t+\tau) = 2\varphi(\tau)+\varphi(\tau+a)+\varphi(\tau-a)$.