Caracterització estadística i paràmetres dels processos estocàstics

PID_00253295

Josep Maria Aroca

Temps mínim de dedicació recomanat: 4 hores

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

Com hem vist en mòduls anteriors, les variables aleatòries es descriuen per mitjà d'una funció de probabilitat (cas discret) o d'una funció de densitat (cas continu) que conté tota la informació sobre la distribució estadística de la variable. Després, per mitjà de mitjanes es defineixen paràmetres com l'esperança (valor mitjà) o la variància. En el cas dels processos estocàstics es defineixen magnituds similars, que tenen importància especial perquè la caracterització estadística completa pot ser molt difícil de conèixer en alguns casos pràctics.

Vegeu també

Recordeu que els conceptes de funció de probabilitat i de densitat de variables aleatòries discretes i contínues s'estudien el mòdul "Variables aleatòries".

En aquest mòdul, definirem les funcions que caracteritzen tota l'estadística d'un procés estocàstic. Començarem definint les funcions de distribució i de densitat d'ordre n en l'apartat 1. A continuació, en l'apartat 2, definirem una sèrie de paràmetres característics dels processos estocàstics com són les funcions de valor mitjà, l'autocorrelació, la covariància i la potència. En l'apartat 3 veurem alguns exemples de càlcul de paràmetres. En la pràctica, hi sol haver mètodes més o menys directes per a obtenir aquests paràmetres. Aquí, a més d'utilitzar els mètodes directes, farem servir també les funcions de densitat del procés per a donar una visió completa del tema. En l'apartat 4 veurem què són els paràmetres creuats que apareixen quan comparem dos processos estocàstics entre si.

Objectius

Els objectius que ha d'assolir l'estudiant un cop treballats els materials didàctics d'aquest mòdul són:

1. Entendre com es caracteritza estadísticament un procés estocàstic.
2. Conèixer els paràmetres d'un procés estocàstic.
3. Calcular aquests paràmetres per a certs tipus de procés.
4. Caracteritzar la relació entre dos processos estocàstics i obtenir-ne els paràmetres creuats.

1. Funcions de densitat i distribució d'ordre n

En aquest apartat considerarem processos a temps continu $X(t)$. Tingueu en compte que els processos a temps discret tenen un tractament formalment similar. A diferència del que passa amb variables o vectors aleatoris, no hi ha una funció de densitat del procés en conjunt. La caracterització es fa per mitjà de la idea següent.

Fixats n instants diferents $t_1, t_2, \ldots, t_n$, els valors que hi pren el procés, $X(t_1)$, $X(t_2), \ldots, X(t_n)$, constitueixen un vector aleatori n-dimensional. Com que ja sabem descriure de manera completa l'estadística dels vectors aleatoris, caracteritzarem l'estadística d'un procés estocàstic de la manera següent.

Vegeu també

L'estadística dels vectors aleatoris s'estudia al mòdul "Vectors aleatoris" d'aquesta assignatura.

Processos estocàstics i vectors aleatoris

Per a avaluar un procés estocàstic fixarem una sèrie d'instants diferents i considerarem que a cada instant de temps tenim una variable aleatòria ordinària. El nombre n d'instants que fixem ens dirà quina és la dimensió del vector aleatori.

Proposició 1.1. La distribució probabilística d'un procés estocàstic $X(t)$ queda completament determinada si, per a tot $n \geq 1$ i per a tota elecció dels instants $t_1, t_2, \ldots, t_n$, coneixem la distribució probabilística del vector aleatori $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$.

És a dir, podem conèixer la distribució probabilística d'un procés estocàstic, $X(t)$, a partir de la caracterització de les variables aleatòries en certs instants t_i. En rigor, hi pot haver processos que no verifiquin aquest resultat. Fora d'aquests casos patològics, els processos d'interès en les aplicacions pràctiques compleixen l'enunciat anterior.

La proposició 1.1 ens suggereix parlar de mostra de n instants per a referir-nos a la selecció de n valors diferents de t i els valors que hi pren el procés $X(t)$.

Definició 1.1. Una **mostra de mida n** ($n = 1, 2, 3, \ldots$) consisteix en l'elecció de n instants diferents $t_1, t_2, \ldots, t_n$ i en el vector aleatori associat a aquests instants $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$.

La distribució estadística d'un procés estocàstic queda determinada si coneixem la distribució de totes les mostres possibles. Això dóna lloc als conceptes següents.

Definició 1.2. Les **funcions de distribució d'ordre** n d'un procés estocàstic $X(t)$ a temps continu són les funcions de distribució dels vectors aleatoris associats a les mostres de mida n. Les representem $F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Llavors

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) = \\ &P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \ldots, X(t_n) \leq x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Segons aquesta definició, la funció de distribució d'ordre n del procés estocàstic $X(t)$ es defineix com la probabilitat que el procés mostrejat en aquests instants de temps, és a dir, $X(t_i)$, sigui igual o més petit que un cert valor x_i per a $i = 1, ..., n$. Fixeu-vos que aquesta és la definició de funció de distribució que havíem considerat per a variables aleatòries ordinàries unidimensionals. Aquí hem estès aquesta definició al cas n-dimensional.

Vegeu també

Les variables aleatòries ordinàries unidimensionals s'estudien en el mòdul "Variables aleatòries".

Un cop definides les **funcions de distribució**, anem ara amb les **funcions de densitat**.

Observació

Fixeu-vos que la definició 1.2 de funció de distribució la podem aplicar a processos $X(t)$ d'estat tant discret com continu. En la definició 1.3, quan parlem de funcions de densitat, s'especifica que el procés estocàstic $X(t)$ ha de ser d'estat continu.

Definició 1.3. Les **funcions de densitat d'ordre** n d'un procés estocàstic $X(t)$ d'**estat continu** són les funcions de densitat dels vectors aleatoris associats a les mostres de mida n. Les representem $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Llavors

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) = \\ &\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dy_1 dy_2 \cdots dy_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Observeu que en aquesta definició especifiquem que el procés estocàstic $X(t)$ és d'estat continu, ja que si recordeu el mòdul "Variables aleatòries", havíem definit la funció de distribució per a variables discretes i contínues, mentre que la funció de densitat l'havíem definida únicament per a variables contínues.

La característica que sí que havíem definit per a les variables aleatòries discretes era la funció de probabilitat. Anem ara a estendre aquesta definició al cas n-dimensional, és a dir, al cas d'un procés estocàstic $X(t)$ d'estat discret i mostrejat per a certs instants de temps t_i.

Definició 1.4. La **funció de probabilitat d'ordre** n d'un procés estocàstic $X(t)$ d'**estat discret** és la funció de probabilitat del vector aleatori associat a les mostres de mida n. La representem $P(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Llavors

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) = \qquad (3)$$
$$P(X(t_1) = x_1, X(t_2)=x_2, \ldots, X(t_n) = x_n).$$

Observació

Recordeu que en el mòdul "Variables aleatòries" havíem definit la funció de probabilitat únicament per a les variables aleatòries discretes, ja que en aquest cas podíem associar una probabilitat a un resultat concret. La definició 1.4, per tant, la podrem aplicar a processos estocàstics $X(t)$ a temps continu i d'estat discret.

Per tant, la caracterització d'un procés estocàstic depèn de si el procés és d'estat continu o d'estat discret, tal com s'enuncia a continuació.

La distribució estadística d'un procés d'estat continu queda determinada si coneixem les funcions de densitat $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ per a tots els valors de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ i per a tot $n \geq 1$.

La distribució estadística d'un procés d'estat discret queda determinada si coneixem les funcions de probabilitat $P(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)$ per a tots els valors de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ i per a tot $n \geq 1$.

Hi ha una sèrie de vincles entre aquestes funcions. Si prenem la densitat d'ordre n i calculem la funció de densitat marginal de $k < n$ de les seves variables, el resultat ha de ser la densitat d'ordre k. Tenim, doncs, una jerarquia de funcions vinculades. Per exemple, si considerem l'ordre igual a 1, estem prenent el nostre procés estocàstic i prenent una única mostra (fixant un valor de $t = t_1$). En aquest cas tenim la densitat d'ordre 1 $f(x_1;\ t_1)$ que ens descriu la variable unidimensional $X(t_1)$ (t_1 fixat).

Si volem calcular la densitat d'ordre 2, hem de fixar dos instants de temps, t_1 i t_2, que donaran com a resultat dues variables aleatòries, x_1 i x_2. La densitat d'ordre 2, $f(x_1, x_2;\ t_1, t_2)$, ens descriu el vector bidimensional $(X(t_1), X(t_2))$. Si ara en aquest vector calculem la densitat marginal de $X(t_1)$, el resultat ha de ser la densitat corresponent de primer ordre. És a dir:

$$f(x_1;\ t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2;\ t_1, t_2)\, dx_2. \qquad (4)$$

Fixeu-vos que per a calcular la densitat marginal de la variable $X(t_1)$ fem la integral respecte a la variable, x_2.

Probabilitat i densitat marginal

En el mòdul "Vectors aleatoris" vam veure que la funció de probabilitat marginal i densitat marginal d'un vector consistia a sumar (per variables discretes) o integrar (per variables contínues) respecte a tots els valors possibles de la resta de variables. Per al cas $n = 2$ i per a variables discretes, per exemple, teníem: $P(X = a_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X = a_i, Y = b_j)$.

Els valors $t_1, t_2, \ldots, t_n$ figuren en aquestes funcions per a recordar-nos en quins instants prenem les variables, és a dir, en quins instants estem prenent mostres del procés estocàstic $X(t)$. El que ens interessa en tant que funcions de densitat és la dependència de les x_i. Les funcions de densitat (o de probabilitat) d'ordre n es tracten com les d'un vector n-dimensional qualsevol. Per exemple, la condició de normalització de la densitat de primer ordre és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\ t)\, dx = 1. \tag{5}$$

Condició de normalització

Com vam veure en la proposició 2.3 del mòdul "Variables aleatòries", l'àrea total sota la corba que descriu la funció de densitat és igual a 1.

L'obtenció d'aquest conjunt de funcions és, en general, una tasca complicada. Afortunadament, en les aplicacions no sempre necessitem tota aquesta informació, sinó que normalment en tenim prou amb les funcions d'ordre baix, com per exemple, les de primer i segon ordre. En el cas de processos que depenen explícitament d'una o poques variables aleatòries sol ser fàcil obtenir-les, com mostren els exemples següents.

Exemple 1.1

Donada la variable aleatòria unidimensional A, uniforme en l'interval $[0, 1]$, definim el procés $X(t) = e^{At}$, $t \geq 0$.

Figura 1. Realització del procés $X(t)$

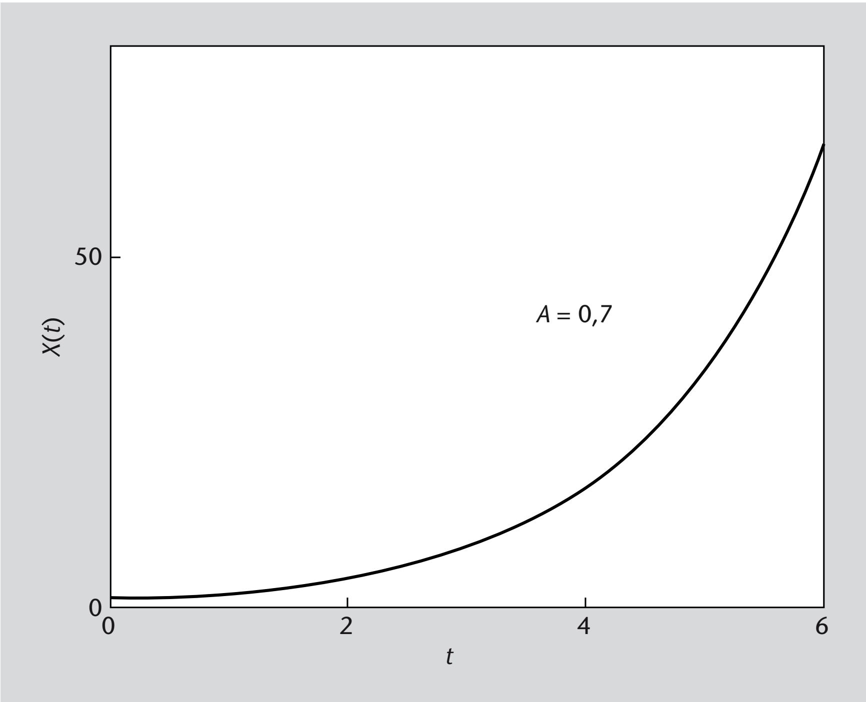


Figura 1

Aquest procés estocàstic és una funció exponencial en què el paràmetre A és una variable aleatòria uniforme dins de l'interval $[0, 1]$.

Com que A varia sobre tot un interval real, e^{At} per a t fixat, també pot prendre valors sobre tot un interval. Per tant, $X(t)$ és un procés d'estat continu. En calculem la densitat de primer ordre per a il·lustrar les idees anteriors. Farem el càlcul per mitjà de la funció de distribució.

La funció de densitat de la variable A (variable aleatòria contínua i de tipus uniforme) és:

$$f_A(a) = \begin{cases} 1, & 0 \leq a \leq 1, \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

Vegeu també

Recordeu la definició de la variable aleatòria uniforme que es veu en el subapartat 3.2.1 del mòdul "Variables aleatòries".

i la seva funció de distribució val:

$$F_A(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ a, & 0 \leq a < 1, \\ 1, & a \geq 1. \end{cases}$$

Recordem també que $F_A(a) = P(A \leq a)$. És a dir, la funció de distribució de la variable aleatòria A avaluada en el punt a és la probabilitat que la variable aleatòria A prengui un valor més petit o igual que a. Ara, si fixem t, el procés estocàstic $X(t)$ pot prendre qualsevol valor en l'interval $[1, e^t]$. Si x es troba dins d'aquest interval, la funció de distribució de primer ordre és:

$$F(x;\ t) = P(X(t) \leq x) = P(e^{At} \leq x) = P\left(A \leq \frac{\ln x}{t}\right) = F_A\left(\frac{\ln x}{t}\right) = \frac{\ln x}{t}.$$

Fixeu-vos que en la tercera igualtat de l'expressió anterior el que hem fet és aïllar la variable aleatòria A de manera que puguem caracteritzar el procés estocàstic $X(t)$ en funció de les característiques de la variable A.

En la darrera igualtat de l'expressió anterior hem substituït el valor de a per l'argument que apareix en la funció de distribució.

Diem que la funció de distribució és de primer ordre perquè únicament hem fixat un únic valor de t i, per tant, tenim una única variable aleatòria. Si volem calcular la funció de densitat de primer ordre hem de derivar la funció de distribució*,

* Tal com havíem vist en el mòdul "Variables aleatòries".

$$f(x;\ t) = \frac{d}{dx} F(x;\ t) = \frac{1}{tx}, \qquad 1 \leq x \leq e^t.$$

Comprovem la condició de normalització:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\ t)\, dx = \int_1^{e^t} \frac{1}{tx} dx = \left[\frac{1}{t} \ln x\right]_{x=1}^{x=e^t} = 1.$$

En aquest tipus de problemes és important manipular amb cura els valors límit i la dependència en els paràmetres temporals. Vegem-ne un exemple numèric partint del procés $X(t)$ que hem vist en l'exemple 1.1.

Exemple 1.2

Partint de l'exemple anterior, considerem que un dispositiu electrònic s'activa quan $X(t)$ sobrepassa el valor 2. Quina és la probabilitat $p(t)$ que en l'instant t estigui activat?

Es tracta de calcular $P(X(t) > 2)$. El primer que hem de tenir en compte és que el conjunt de valors possibles per a $X(t)$ és l'interval $[1, e^t]$, que varia amb t. Perquè la probabilitat anterior no sigui nul·la, cal que aquest interval contingui valors més grans que 2. Per tant, $p(t)$ és diferent de zero a partir del moment en què $2 < e^t$. Si això passa, $P(X(t) > 2) = 1 - P(X(t) \leq 2) = 1 - F(2;\ t) = 1 - \frac{\ln 2}{t}$. És a dir:

$$p(X(t) > 2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \ln 2, \\ 1 - \dfrac{\ln 2}{t}, & t > \ln 2. \end{cases}$$

Figura 2. La funció $p(t)$

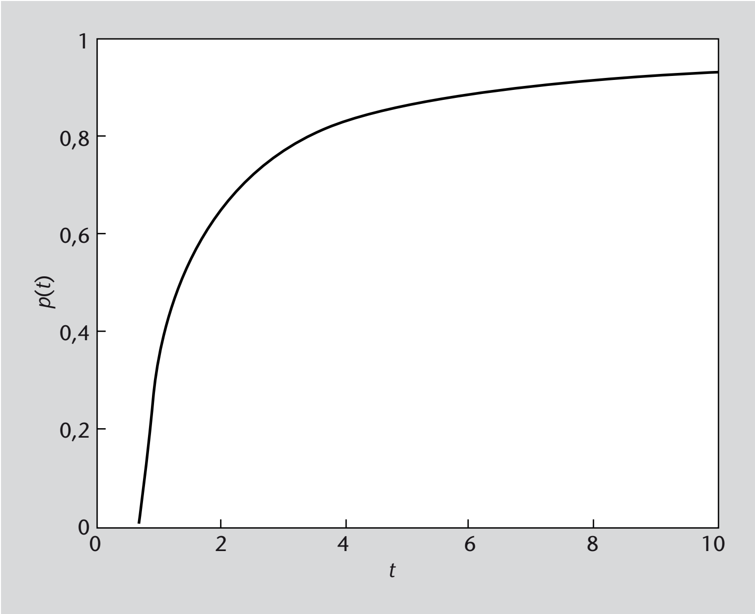


Figura 2

La probabilitat $p(t)$ és la probabilitat que el procés $X(t)$ prengui un valor més gran que 2.

Exemple 1.3

Modelitzem l'arribada de certs paquets crítics d'informació en una xarxa amb la variable aleatòria A. Aquesta variable és uniforme en $[0,1]$. Volem que quan arribi un d'aquests paquets d'informació es generi un senyal de sincronització que ens avisi que aquest esdeveniment s'ha produït. A partir d'aquests requisits definim un nou procés de la forma:

$$X(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < A, \\ 1, & A \leq t \leq 1. \end{cases}$$

És a dir, $X(t)$ passa bruscament de 0 a 1 en l'instant $t = A$.

Figura 3. Realització del procés $X(t)$

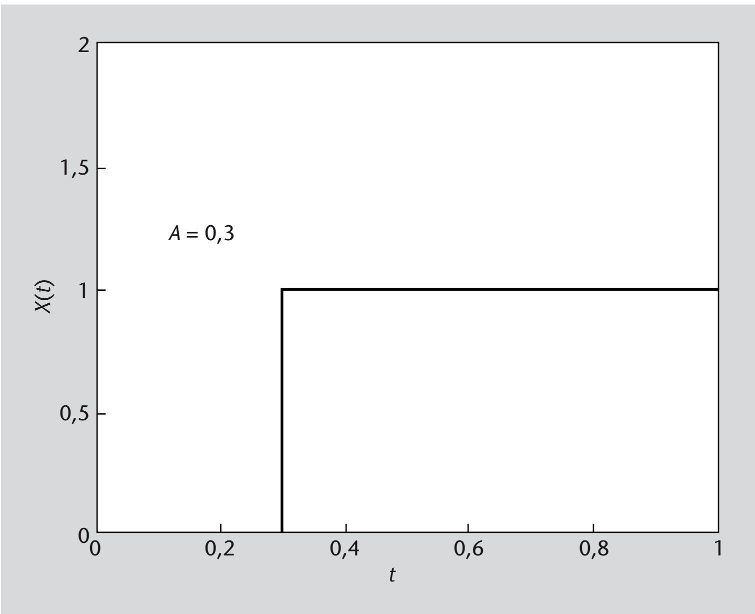


Figura 3

Una possible realització del procés estocàstic a temps continu i d'estat discret $X(t)$.

El procés $X(t)$ és d'estat discret, ja que en qualsevol instant només pot prendre els valors 0 o 1. La funció de probabilitat de primer ordre $P(n;t) = P(X(t) = n)$ ens dóna la probabilitat que $X(t)$ valgui n, en què n només pot ser 0 o 1. Així, hem de determinar

$$P(0;t) = P(X(t)=0) = P(t < A) = 1 - P(A \leq t) = 1 - F_A(t) = 1 - t,$$

$$P(1;t) = P(X(t)=1) = P(A \leq t) = F_A(t) = t.$$

És immediat verificar que aquesta funció està normalitzada: $P(0;t)+P(1;t) = (1-t)+t = 1$. En molts casos pràctics no és possible fer un estudi tan detallat com en els exemples anteriors. Molts processos s'analitzen mitjançant alguns paràmetres que els caracteritzen. En l'apartat següent definim aquests paràmetres.

Vegeu també

En l'apartat 2 d'aquest mòdul definirem, de la mateixa manera com ho vam fer per a les variables aleatòries ordinàries, els paràmetres més rellevants d'un procés estocàstic: el valor mitjà, la funció d'autocorrelació i l'autocovariància. Introduïm també un nou concepte: la funció potència.

2. Paràmetres d'un procés estocàstic. Funcions de valor mitjà, autocorrelació i autocovariància. Potència

De manera anàloga al que fem amb les variables aleatòries ordinàries, es defineixen paràmetres estadístics per als processos estocàstics. Atès que un procés és una variable aleatòria dependent d'un índex t, ara tindrem, en lloc de paràmetres numèrics, funcions amb dependència temporal.

En l'exemple 1.1 de l'inversor amb què comença el mòdul "Introducció als processos estocàstics", una estimació dels beneficis que haurà obtingut el dia i és determinada pel **valor mitjà** de la variable aleatòria X_i. Com que aquest valor mitjà depèn, en principi, de i, resulta també una funció dependent d'aquesta variable independent.

En aquest exemple particular no és difícil d'avaluar, perquè X_i és la suma dels guanys obtinguts els primers i dies. El guany obtingut en un dia qualsevol té com a valor mitjà $p\alpha + (1-p)(-\beta) = 3p - 2(1-p) = 5p - 2$. Com que el guany en i dies és la suma dels guanys en cadascun dels dies, resulta que $\mathrm{E}(X_i) = (5p-2)i$ i, de mitjana, el guany té comportament lineal. De fet, amb aquest resultat ja veiem que la inversió funcionarà bé quan $p > \frac{2}{5}$.

Exemple de l'inversor

Recordeu que en l'exemple de l'inversor del mòdul "Introducció als processos estocàstics", α era el benefici aconseguit que es donava amb una probabilitat p, i li vam donar el valor de $\alpha = 3$. El valor β eren les pèrdues que es donaven amb una probabilitat $(1-p)$, i li vam assignar un valor de $\beta = 2$.

Definició 2.1. La **funció de valor mitjà** d'un procés estocàstic $X(t)$ és

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)). \tag{6}$$

La funció $m(t)$ és simplement el valor mitjà de la variable $X(t)$ a t fixat. La manera de calcular-lo depèn de com es defineixi el procés i de si aquest és d'estat continu o discret. Per a un procés d'estat continu del qual coneixem la densitat de primer ordre resulta:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;\ t)\, dx. \tag{7}$$

Vegeu també

Recordeu les definicions de valor mitjà, esperança o moment d'ordre 1 per a variables aleatòries discretes i contínues dels subapartats 2.2 i 3.3 del mòdul "Variables aleatòries".

Si el procés és d'estat discret l'expressió és:

$$m(t) = \sum_x x P(x;\ t), \tag{8}$$

en què la suma recorre els possibles valors de $X(t)$. Fixeu-vos que el sumatori i la integral estan fets sobre la variable x; per tant, ens queda la dependència sobre la variable independent t.

Ja veurem en els exemples que a vegades no cal conèixer les funcions de primer ordre per a determinar els paràmetres.

La funció de valor mitjà dóna una idea del comportament mitjà de les diverses realitzacions, però a vegades no en tenim prou amb aquesta informació. La funció $m(t)$ no mesura res de la relació entre els valors de la funció en instants diferents.

En l'exemple de l'inversor, hem determinat que el valor mitjà val $(5p-2)i$. Posem que $p = 0{,}7$. L'estimació del guany passats 10 dies (X_{10}) seria aquest valor mitjà, $(5 \cdot 0{,}7 - 2)10 = 15$.

Però suposem que ens plantegem l'estimació de X_{10} el vuitè dia i que aquest dia ja sabem que el guany val $X_8 = 14$. Ara l'estimació de $X_{10} \approx 15$ sembla baixa, ja que els dos dies següents podem guanyar $3+3=6$ amb probabilitat $0{,}7^2 = 0{,}49$, podem guanyar $3-2=1$ amb probabilitat $2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}42$ i podem "guanyar" $-2-2=-4$ amb probabilitat $0{,}3^2 = 0{,}09$. El valor mitjà del guany d'aquests dos dies és $6 \cdot 0{,}49 + 1 \cdot 0{,}42 + (-2) \cdot 0{,}09 = 3{,}18$. Així és més correcte prendre com a estimació de X_{10} el valor $14 + 3{,}18 = 17{,}18$. El que passa és que les variables X_8 i X_{10} tenen una certa correlació, de manera que conèixer el valor d'una afecta la distribució de probabilitat de l'altra.

En el cas de processos estocàstics és habitual haver de fer alguna predicció de l'evolució futura a partir dels resultats del present o del passat. Per a poder fer això necessitem alguna informació de la correlació entre les variables $X(t)$ en instants diferents. La correlació ens dóna una idea de la relació entre les variables $X(t)$ en instants diferents i, per tant, ens permetrà fer algun tipus de predicció de valors futurs a partir de valors que ja hem obtingut. Això motiva els conceptes següents.

Definició 2.2. La **funció d'autocorrelació** d'un procés estocàstic $X(t)$ és

$$R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)], \tag{9}$$

en què t_1 i t_2 són dos instants de temps fixats.

Funció d'autocorrelació

En els subapartats 1.3 i 2.4 del mòdul "Vectors aleatoris" es defineix l'esperança del producte de dues variables aleatòries d'un vector bidimensional. En aquest cas anomenem *funció d'autocorrelació* l'esperança del producte del procés $X(t)$ avaluat en dos instants de temps t_1 i t_2.

És a dir, la funció d'autocorrelació és l'esperança del producte del procés estocàstic avaluat en dos instants de temps diferents. Fixeu-vos que és una propietat de segon ordre, ja que queda determinada per la densitat de segon ordre, és a dir, depèn de dos instants temporals diferents. Si apliquem aquesta definició al cas d'un procés estocàstic d'estat continu, obtenim el següent.

Funció d'autocorrelació per a un procés estocàstic d'estat continu:

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2;\ t_1, t_2)\, dx_1 dx_2. \tag{10}$$

De la definició s'obté immediatament que $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$. Això és útil de vegades, ja que implica que és suficient calcular-la per a $t_1 \leq t_2$.

El paràmetre següent s'anomena autocovariància, i es pot obtenir a partir de l'autocorrelació, tal com s'indica a continuació.

Definició 2.3. La **funció d'autocovariància** d'un procés estocàstic $X(t)$ és

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2), \tag{11}$$

en què t_1 i t_2 són dos instants de temps fixats.

Covariància

Recordeu la definició de covariància que es fa en el mòdul "Vectors aleatoris" en els subapartats 1.3 (per a variables discretes) i 2.4 (per a variables contínues). Es defineix com: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))] = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. Fixeu-vos com ara considerem les variables $X(t_1)$ i $X(t_2)$ en comptes de X i Y.

És a dir, la funció d'autocovariància és la funció d'autocorrelació menys el producte de les funcions valor mitjà. És precisament la covariància de les variables $X(t_1)$ i $X(t_2)$. En efecte, $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) - \mathrm{E}(X(t_1))\,\mathrm{E}(X(t_2))$ i el primer terme és $R(t_1, t_2)$, mentre que el segon és $m(t_1)m(t_2)$. Així,

$$\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = C(t_1, t_2). \tag{12}$$

Per tant, el que havíem anomenat *covariància* en un vector aleatori n-dimensional ho podem traslladar aquí al cas d'un procés estocàstic i ho anomenem *funció d'autocovariància*.

A continuació definim la potència mitjana d'un procés estocàstic.

Definició 2.4. La **potència mitjana** d'un procés estocàstic $X(t)$ és

$$\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2). \tag{13}$$

Potència i funció d'autocorrelació

Observeu que la potència d'un procés estocàstic $X(t)$, $\mathrm{Pot}(t)$, és la funció d'autocorrelació $R(t_1, t_2)$ avaluada per a un únic instant temporal, és a dir, $R(t, t)$.

Notem que $E(X(t)^2) = E[X(t)X(t)] = R(t, t)$. Per tant:

Relació entre la potència i l'autocorrelació:

$$\mathrm{Pot}(t) = R(t, t). \tag{14}$$

El terme *potència* té el seu origen en el fet que si $X(t)$ representa un voltatge o un corrent elèctric, $X(t)^2$ ens dóna la potència absorbida per una resistència unitat. Com que la funció de valor mitjà només involucra la densitat de primer ordre (depèn d'un únic instant temporal, t), diem que és un paràmetre de primer ordre. De manera similar, diem que les funcions d'autocorrelació i d'autocovariància són paràmetres de segon ordre (depenen dels dos instants temporals t_1 i t_2).

Potència i llei d'Ohm

La potència absorbida per una resistència és $P = VI = \frac{V^2}{R} = I^2R$. Si fem aquesta resistència igual a la unitat, llavors $P = V^2 = I^2$.

També podem definir moments d'ordre arbitrari n com:

$$R^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_n)], \tag{15}$$

encara que no els utilitzarem. Fixeu-vos que parlem de moment d'ordre n perquè són funcions que depenen de n instants temporals.

Si tenim més d'un procés estocàstic, $X(t)$, $Y(t)$, etc, podem aclarir de quin procés són els paràmetres etiquetant-los amb el nom del procés: $m_X(t)$, $m_Y(t)$, $R_X(t_1, t_2)$, $C_Y(t_1, t_2)$, $\mathrm{Pot}_X(t)$, etc.

3. Exemples de càlcul de paràmetres

En aquest apartat veurem alguns exemples en què calcularem els paràmetres de diferent ordre que hem definit en els dos apartats anteriors. És a dir, calcularem la funció de valor mitjà, la funció d'autocorrelació, la funció d'autocovariància i la potència.

Exemple 3.1

Calculem els paràmetres de primer i segon ordre per al procés de l'exemple 1.1. Recordeu que l'exemple 1.1 d'aquest mòdul consistia en el procés estocàstic $X(t) = e^{At}$, amb $t \geq 0$ i A una variable aleatòria uniforme en l'interval $[0, 1]$.

Com que ja coneixem la densitat de primer ordre, és fàcil obtenir la funció de valor mitjà:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;\ t)\, dx = \int_{1}^{e^t} x \frac{1}{tx} dx = \frac{e^t - 1}{t}.$$

Funció de densitat de primer ordre

Recordeu que per a aquest procés estocàstic havíem calculat la funció de densitat de primer ordre com: $f(x;\ t) = \frac{1}{tx}$ per a $1 \leq x \leq e^t$.

Hi ha, però, una manera més directa d'obtenir el resultat anterior. Quan un procés s'expressa explícitament en termes d'algunes variables aleatòries, en podem calcular directament els paràmetres utilitzant el teorema de l'esperança:

$$m(t) = \mathrm{E}(e^{At}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} f_A(a)\, da = \int_{0}^{1} e^{at} \cdot 1\, da = \left.\frac{e^{at}}{t}\right|_{a=0}^{a=1} = \frac{e^t - 1}{t}.$$

Teorema de l'esperança

El teorema de l'esperança ens permet calcular la funció de valor mitjà del procés $X(t)$ en funció de la funció de densitat de la variable aleatòria A sense haver de conèixer la funció de densitat del procés estocàstic.

De manera similar obtenim l'autocorrelació

$$R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}(e^{At_1} e^{At_2}) = \mathrm{E}(e^{A(t_1+t_2)}) = \frac{e^{t_1+t_2} - 1}{t_1 + t_2}.$$

Exemple 3.2

Calculem la funció de valor mitjà del procés de l'exemple 1.3. Fent servir la funció de probabilitat de primer ordre:

$$m(t) = 0 \cdot P(0;\ t) + 1 \cdot P(1;\ t) = t.$$

Exemple 1.3

L'exemple 1.3 d'aquest mòdul consisteix en una funció esglaó que canvia del valor 0 al valor 1 en un valor x que depèn de la variable aleatòria uniforme A, definida en l'interval $[0, 1]$.

Amb el teorema de l'esperança, explicitem la dependència de A posant $X(t) = \Phi(t, A)$, que val 0 o 1 segons si $t < A$ o $t > A$, respectivament:

$$m(t) = \int_{0}^{1} \Phi(t, a) f_A(a)\, da = \int_{t}^{1} 0 \cdot 1\, da + \int_{0}^{t} 1 \cdot 1\, da = t.$$

La funció d'autocorrelació es pot calcular seguint el procediment anterior:

$$R(t_1,t_2) = \int_0^1 \Phi(t_1,a)\Phi(t_2,a)f_A(a)\,da = \int_0^{\min(t_1,t_2)} 1\cdot 1\,da = \min(t_1,t_2).$$

Atès que $\Phi(t_1,a)\Phi(t_2,a)$ val zero excepte quan $a < t_1$ i $a < t_2$, és a dir, quan $a < \min(t_1,t_2)$.

Exemple 3.3

Un generador de senyal produeix un to en freqüència però a causa de les condicions ambientals presenta algunes derives en l'amplitud i la fase que genera. Calculem els paràmetres de l'oscil·lació aleatòria següent:

$$X(t) = A\cos(\omega t + B),$$

en què ω és una constant, A és una variable aleatòria exponencial de valor mitjà K, B és una variable aleatòria uniforme en $[0,2\pi]$ i A i B són independents.

$X(t) = \Phi(t,A,B)$

Noteu que ara el nostre procés estocàstic $X(t)$ conté la variable independent t i depèn també de les variables aleatòries A i B. D'aquesta manera podem escriure: $X(t) = \Phi(t,A,B)$.

Notem que tenim tota la informació sobre la variable bidimensional (A,B), de manera que el procés està ben especificat. El seu valor mitjà val

$$m(t) = \mathrm{E}(A\cos(\omega t + B)) = \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(\cos(\omega t + B)),$$

ja que A i B són variables independents (i per tant, també ho són A i $\cos(\omega t + B)$). Ara, ens diuen que $\mathrm{E}(A) = K$ i podem calcular, pel teorema de l'esperança,

$$\mathrm{E}(\cos(\omega t + B)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t + b)f_B(b)\,db = \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + b)\frac{1}{2\pi}\,db = 0.$$

Així, concloem que $m(t) = 0$.

Com passava en l'exemple 4.2 del mòdul "Introducció als processos estocàstics", el valor mitjà és nul. Això és deu novament al fet que en qualsevol instant determinat les diferents realitzacions difereixen en una fase que pren valors sobre un període, de manera que tenim contribucions positives i negatives amb el mateix pes.

Oscil·lacions aleatòries

En l'exemple 4.2 del mòdul "Introducció als processos estocàstics" vam veure una funció sinusoïdal en què l'amplitud i la fase eren dues variables aleatòries exponencial i uniforme, respectivament.

La funció d'autocorrelació es calcula de manera anàloga:

$$R(t_1,t_2) = \mathrm{E}(A\cos(\omega t_1 + B)A\cos(\omega t_2 + B)) = \mathrm{E}(A^2)\,\mathrm{E}(\cos(\omega t_1 + B)\cos(\omega t_2 + B)).$$

El primer factor és, si recordem la propietat de la variància $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{E}(A^2) - \mathrm{E}(A)^2$,

$$\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{Var}(A) + \mathrm{E}(A)^2 = K^2 + K^2 = 2K^2.$$

Variable exponencial

Una variable exponencial $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ té $\mathrm{E}(X) = \lambda^{-1}$, i llavors el paràmetre $\lambda = \mathrm{E}(X)^{-1}$, i $\mathrm{Var}(A) = \lambda^{-2} = \mathrm{E}(X)^2$.

Per al segon factor transformem el producte de cosinus mitjançant la fórmula trigonomètrica

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

i obtenim

$$\mathrm{E}(\cos(\omega t_1 + B)\cos(\omega t_2 + B)) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}[\cos(\omega(t_1 + t_2) + 2B) + \cos(\omega(t_1 - t_2))]\right) =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos(\omega(t_1 + t_2) + 2b) + \cos(\omega(t_1 - t_2)))\frac{1}{2\pi}db = \frac{1}{2}\cos(\omega(t_1 - t_2)).$$

Així, arribem al resultat:

$$R(t_1, t_2) = K^2 \cos\omega(t_1 - t_2).$$

Noteu que, en aquest cas, $C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2)$, ja que $m(t) = 0$. La potència val $\mathrm{Pot}(t) = K^2$.

Notem que l'autocorrelació, en aquest exemple, només depèn de la distància entre els instants t_1 i t_2. A més, quan $t_2 = t_1$ és màxima. Això és un comportament típic, ja que quan $t_2 = t_1$ les variables $X(t_1)$ i $X(t_2)$ són la mateixa i, per tant, tenim la màxima correlació.

Exemple 3.4

Sigui B una variable aleatòria exponencial d'esperança 1. Definim un procés estocàstic de la manera següent:

$$X(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < B, \\ B, & t \ge B. \end{cases}$$

Com són les seves realitzacions? En la figura 4 en mostrem una.

Figura 4. Realització de $X(t)$. ($B = 1{,}5$)

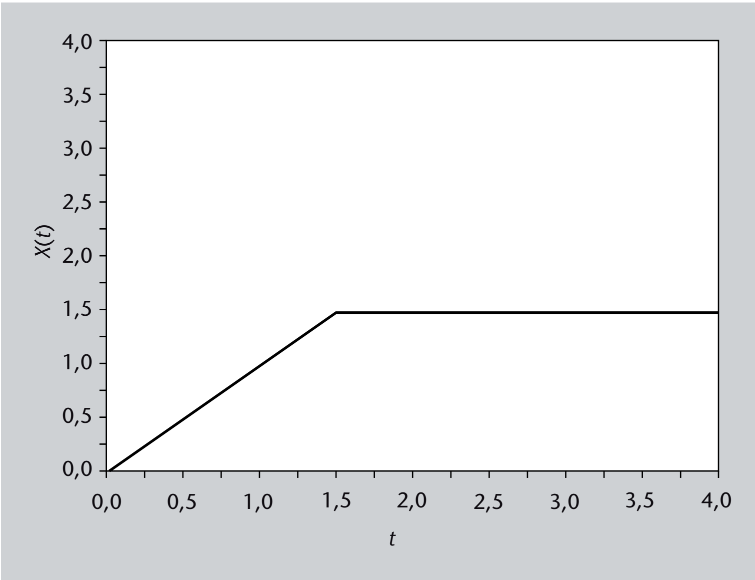


Figura 4

En la figura es mostra una realització possible del procés estocàstic de l'exemple 3.4. $X(t)$ pren el valor de t fins arribar a un valor B. B és una variable aleatòria exponencial de valor mitjà igual a 1.

Calculem la funció de valor mitjà del procés $X(t)$. Es tracta de $m(t) = \mathrm{E}(X(t))$. Com $X(t)$ depèn d'una variable B, farem servir el teorema de l'esperança. $X(t)$ és una funció de B. Noteu que la funció de densitat de B és $f_B(b) = e^{-b}$, $b \geq 0$. En la definició de $X(t)$ veiem que $X(t) = B$ si $0 \leq B \leq t$ mentre que $X(t) = t$ si $B \geq t$. Així separarem la integració sobre b segons aquests dos casos:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_B(b)\, db = \int_0^t b\, e^{-b} db + \int_t^{\infty} t\, e^{-b} db$$

$$= (-(t+1)e^{-t} + 1) + (te^{-t}) = 1 - e^{-t}.$$

La funció $m(t)$ es mostra en la figura 5. Encara que les realitzacions mostren un punt en què la funció no és derivable, el valor mitjà no mostra cap irregularitat.

Figura 5. Valor mitjà de $X(t)$

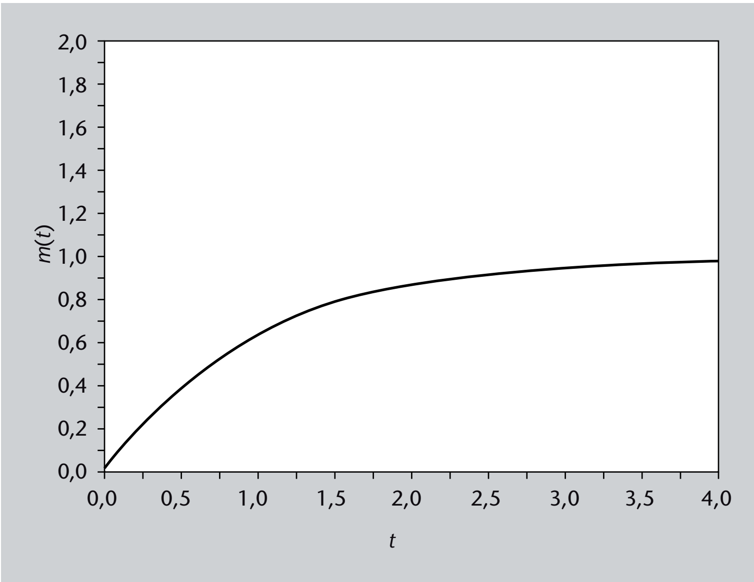


Figura 5

La gràfica mostra el valor mitjà del procés $X(t)$.

En aquest punt podem anar un pas més enllà i preguntar-nos si, de la mateixa manera que hem relacionat els valors d'un procés estocàstic definits en diferents instants temporals, podem relacionar processos estocàstics diferents entre si. Això és el que farem en l'apartat 4 d'aquest mòdul.

4. Paràmetres creuats. Processos independents

Un procés estocàstic $X(t)$ implica l'existència d'una variable aleatòria diferent per a cada instant t. Els paràmetres que hem definit anteriorment mesuren propietats d'aquest conjunt de variables. Es pot donar el cas, també, d'haver de considerar més d'un procés estocàstic. Si $X(t)$ i $Y(t)$ són dos processos estocàstics, en podem estudiar l'estadística conjunta. Això dóna lloc a nous paràmetres. Vegem-los a continuació.

Definició 4.1. La **funció de correlació creuada** de dos processos estocàstics $X(t)$ i $Y(t)$ és

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)Y(t_2)], \tag{16}$$

en què t_1 i t_2 són dos instants de temps fixats.

Fixeu-vos que la definició matemàtica és la mateixa que la que havíem fet en l'apartat anterior però ara avaluem el procés X en l'instant de temps t_1 i el procés Y en t_2. Per tant, podem dir que l'autocorrelació de $X(t)$ seria la correlació creuada de $X(t)$ amb ell mateix.

Definició 4.2. La **funció de covariància** de dos processos estocàstics $X(t)$ i $Y(t)$ és

$$C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2), \tag{17}$$

en què t_1 i t_2 són dos instants de temps fixats.

Observeu que la funció de covariància de les variables $X(t_1)$ i $Y(t_2)$, $C_{XY}(t_1, t_2)$ té la mateixa forma que la funció d'autocovariància que hem vist en la definició 2.3 d'aquest mòdul. Allà havíem comparat el procés $X(t)$ en dos instants de temps diferents. Ara el que comparem són dos processos estocàstics, $X(t)$ i $Y(t)$, en dos instants de temps diferents.

Definició 4.3. Dos processos estocàstics $X(t)$ i $Y(t)$ són **independents** si qualsevol mostra de $X(t)$ és independent de qualsevol mostra de $Y(t)$.

En particular, les variables $X(t_1), Y(t_2)$ són independents per a tot t_1, t_2.

Si $X(t)$, $Y(t)$ són processos independents, llavors $C_{XY}(t_1,t_2) = 0$, ja que per independència $\mathrm{E}[X(t_1)Y(t_2)] = \mathrm{E}(X(t_1))\,\mathrm{E}(Y(t_2))$, és a dir, $R_{XY}(t_1,t_2) = m_X(t_1)m_Y(t_2)$.

Exemple 4.1

Modelitzem el nivell d'ocupació d'una línia de comunicació mitjançant un procés estocàstic que anomenem $Z(t)$. Sabem que el nivell d'ocupació de la línia és degut a un procés estocàstic d'entrada que anomenem $X(t)$ i a un senyal de soroll que anomenem $Y(t)$. Per tant, podem expressar el procés $Z(t)$ com a suma dels processos $X(t)$ i $Y(t)$:

$$Z(t) = X(t) + Y(t). \tag{18}$$

Suposem que $X(t)$ té valor mitjà $m_X(t)$ i autocorrelació $R_X(t_1,t_2)$, i $Y(t)$ té valor mitjà $m_Y(t)$ i autocorrelació $R_Y(t_1,t_2)$.

Usant les propietats de l'esperança trobem els paràmetres estadístics següents:

Valor mitjà de $Z(t)$:

$$m_Z(t) = m_X(t) + m_Y(t). \tag{19}$$

Autocorrelació de $Z(t)$:

$$R_Z(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) + R_Y(t_1,t_2) + R_{XY}(t_1,t_2) + R_{XY}(t_2,t_1). \tag{20}$$

Notem que si $X(t)$ i $Y(t)$ són independents,

$$R_Z(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) + R_Y(t_1,t_2) + m_X(t_1)m_Y(t_2) + m_X(t_2)m_Y(t_1). \tag{21}$$

Fent $t_1 = t_2 = t$ trobem la potència de la suma de processos independents:

$$\mathrm{Pot}_Z(t) = \mathrm{Pot}_X(t) + \mathrm{Pot}_Y(t) + 2m_X(t)m_Y(t). \tag{22}$$

Resum

En aquest mòdul hem estudiat com podem caracteritzar estadísticament els processos estocàstics i els seus paràmetres.

Els processos estocàstics es poden tractar fixant uns certs moments de temps, és a dir, mostrejant el procés i estudiant com es comporta la variable aleatòria resultant per a cada t fixat. El nombre de mostres que prenem ens permet crear un vector de variables aleatòries de dimensió n, $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$. Això permet definir per als processos estocàstics una funció de distribució que caracteritza el procés. Recordeu que ja havíem estudiat aquesta noció per a les variables aleatòries. Les funcions de distribució d'un procés estocàstic d'ordre n (de n mostres) ens diuen quina és la probabilitat que cadascuna de les mostres $X(t_i)$ sigui igual o més petita que un cert valor x_i.

A partir d'això cal diferenciar entre els processos estocàstics d'estat continu i d'estat discret. Per als processos d'estat continu hem definit les funcions de densitat d'ordre n. En el cas dels processos estocàstics d'estat discret hem de treballar amb les funcions de probabilitat.

Així doncs, amb alguns matisos, podem tractar un procés estocàstic a temps continu, $X(t)$, mitjançant vectors n-dimensionals si prenem n mostres del procés, $(X(t_1),\ X(t_2), \ldots, X(t_n))$. Això ens permet caracteritzar aquest tipus de processos estocàstics a partir dels paràmetres següents:

- **Funció de valor mitjà**: $m(t) = \mathrm{E}(X(t))$
- **Funció d'autocorrelació**: $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]$
- **Funció d'autocovariància**: $C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2)$
- **Potència**: $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = R(t, t)$

Finalment, també podem comparar diferents processos estocàstics entre si, estudiant-ne l'estadística conjunta. En particular, si $X(t)$ i $Y(t)$ són dos processos estocàstics, i t_1 i t_2 són dos instants de temps fixats, podem definir:

- **Funció de correlació creuada**: $R_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)Y(t_2)]$
- **Funció de covariància**: $C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2)$

Això ens permet definir la noció de **processos estocàstics independents**. Formalment, $X(t)$ i $Y(t)$ són independents si qualsevol mostra de $X(t)$ és independent de qualsevol mostra de $Y(t)$. En particular, les variables $X(t_1)$, $Y(t_2)$ són independents per a tot t_1, t_2.

Activitats

1. Llegiu amb atenció l'exemple 1.1. Ara, amb la mateixa variable A considereu el procés $X(t) = At$. Calculeu-ne la funció de densitat de primer ordre i mostreu que, amb t fixat, $X(t)$ és una variable aleatòria uniforme en l'interval $[0, t]$.

2. Llegiu amb atenció l'exemple 3.1 d'aquest mòdul. Per al procés de l'exercici anterior:

a) Calculeu-ne el valor mitjà. Feu-ho de dues maneres, tal com es fa en l'exemple 3.1.

b) Calculeu-ne la funció d'autocorrelació, la funció d'autocovariància i la potència. Feu-ho aplicant el teorema de l'esperança, tal com es fa en l'exemple 3.1.

c) Quina és l'esperança de les variables aleatòries següents: $X(1)$, $X(3) - X(2)$, $X(1)X(2)$, $X(3)^2$?

3. Mostreu que si $C(t_1, t_2)$ és la funció d'autocovariància d'un procés, llavors la variància de la variable $X(t)$ amb t fixat està determinada per $C(t, t)$.

Per al procés $X(t)$ del primer exercici:

a) Què valen les variàncies de les variables $X(2)$ i $X(3)$?

b) Què val la covariància de la variable bidimensional $(X(2), X(3))$?

c) Per a la variable bidimensional $(X(2), X(3))$, quin és el coeficient de correlació ρ? A què es deu el resultat?

4. B és una variable aleatòria d'esperança 0 i variància 1. Obtenim tres valors independents d'aquesta variable, B_1, B_2, B_3, i considerem el procés:

$$Y(t) = B_1 + B_2 \cos t + B_3 \sin t.$$

Calculeu el valor mitjà $m(t)$ i l'autocorrelació $R(t_1, t_2)$ d'aquest procés.

5. Repetiu l'exemple 3.4 per al cas en què B és una variable uniforme en $[0, 2]$.

6. Repetiu l'exemple 3.4 per al cas:

$$X(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{A}, & 0 \le t < A, \\[2ex] \dfrac{1-t}{1-A}, & A \le t \le 1, \end{cases}$$

en què A és una variable uniforme en $[0, 1]$.

Compareu la forma de les realitzacions amb la forma del valor mitjà.

7. Considereu dues variables aleatòries A i B tals que A és uniforme en l'interval $[-1, 1]$, B és uniforme en l'interval $[0, 2]$, i són independents. Considereu també el procés estocàstic:

$$X(t) = At + B.$$

a) Calculeu les esperances següents: $\mathrm{E}(A), \mathrm{E}(B), \mathrm{E}(A^2), \mathrm{E}(B^2), \mathrm{E}(AB)$.

b) Calculeu la funció de valor mitjà del procés $X(t)$.

c) Calculeu la funció d'autocorrelació, la funció d'autocovariància i la potència del procés $X(t)$.

d) Si fixem els instants $t = 1$ i $t = 2$ s'obté una variable aleatòria bidimensional $(X(1), X(2))$. Utilitzant les funcions calculades en els dos apartats anteriors, calculeu: l'esperança i la variància d'aquestes dues variables, la seva covariància, $\mathrm{Cov}(X(1), X(2))$, i el seu coeficient de correlació ρ.

8. Donada A, variable aleatòria exponencial d'esperança 1, es defineix el procés:

$$X(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le A, \\ 0, & t > A. \end{cases}$$

a) Calculeu-ne la funció de valor mitjà, $m(t)$, utilitzant el teorema de l'esperança.

b) Calculeu la funció de probabilitat de primer ordre $P(x;\ t)$. (És a dir, fixat t, quins valors pot prendre $X(t)$ i quines són les seves probabilitats.)

c) Torneu a calcular la funció de valor mitjà del procés, ara a partir de la funció anterior $P(x;\ t)$.
Indicació: per als dos últims apartats tingueu present l'exemple 1.3.

9. Considereu dues variables aleatòries U i V, independents, amb funcions de densitat:

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u, & 0 \leq u \leq 2, \\ 0, & \text{altrament}, \end{cases} \qquad f_V(v) = \begin{cases} \frac{7}{2}v^6, & -1 \leq v \leq 1, \\ 0, & \text{altrament}. \end{cases}$$

Considereu també el procés estocàstic:

$$X(t) = U + V \sin t.$$

a) Calculeu les esperances següents: $\mathrm{E}(U), \mathrm{E}(V),\ \mathrm{E}(U^2), \mathrm{E}(V^2), \mathrm{E}(UV)$.

b) Calculeu la funció de valor mitjà, la funció d'autocorrelació i la funció d'autocovariància del procés $X(t)$.

c) En quins instants és màxima la potència del procés $X(t)$?

d) Si fixem els instants $t = \frac{\pi}{6}$ i $t = \frac{\pi}{2}$ s'obté una variable aleatòria bidimensional $(X(\frac{\pi}{6}), X(\frac{\pi}{2}))$. Utilitzant les funcions calculades en els dos apartats anteriors, calculeu: l'esperança i la variància d'aquestes dues variables, la covariància $\mathrm{Cov}(X(\frac{\pi}{6}), X(\frac{\pi}{2}))$ i el coeficient de correlació ρ.

10. Calculeu la funció de valor mitjà, $m(t)$, dels processos següents (utilitzant el teorema de l'esperança).

a) $X(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq B, \\ 2 - t, & t > B, \end{cases}$

en què B és una variable aleatòria uniforme en $[0, 2]$.

b) $Y(t) = \begin{cases} A - t, & 0 \leq t \leq A, \\ t - A, & t > A, \end{cases}$

en què A és una variable aleatòria exponencial d'esperança 1.

11. Considereu el procés estocàstic:

$$X(t) = Ae^t + B.$$

en què A i B són dues variables aleatòries independents, exponencials de paràmetre $\lambda = 1$.

a) Què valen les esperances següents: $\mathrm{E}(A), \mathrm{E}(B),\ \mathrm{E}(A^2), \mathrm{E}(B^2), \mathrm{E}(AB)$?

b) Calculeu la funció de valor mitjà, la funció d'autocorrelació i la funció d'autocovariància del procés $X(t)$.

c) En quin instant la potència del procés $X(t)$ val 26?

d) Si fixem els instants $t = 0$ i $t = \ln 2$ s'obté una variable aleatòria bidimensional $(X(0), X(\ln 2))$. Utilitzant les funcions calculades en els apartats anteriors, calculeu: l'esperança i la variància d'aquestes dues variables, la covariància $\mathrm{Cov}(X(0), X(\ln 2))$ i el coeficient de correlació ρ.

12. Considereu una variable aleatòria V amb funció de densitat: $f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{(v+1)^2}, & v \geq 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}$

Calculeu la funció de valor mitjà, $m(t)$, dels processos següents (utilitzant el teorema de l'esperança).

a) $Y(t) = \begin{cases} t^2+t, & 0 \le t \le V, \\ 0, & t > V. \end{cases}$

b) $Z(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le V, \\ V+1, & t > V. \end{cases}$

13. Considereu el procés estocàstic:

$$X(t) = (t-A)(t-2A),$$

en què A és una variable aleatòria uniforme en l'interval $[0,6]$.

a) Calculeu la funció de valor mitjà del procés $X(t)$. (Indicació: calculeu primer les esperances de A i de A^2.)

b) Si fixem l'instant $t=0$ s'obté una variable aleatòria $X(0)$. Què val la seva variància?

c) Sigui M el valor mínim que pren $X(t)$. Calculeu la probabilitat que M sigui més gran que -1.

14. Considereu el procés estocàstic:

$$X(t) = Ae^{-Bt},$$

en què A i B són dues variables aleatòries independents, exponencials de paràmetre $\lambda = 1$.

a) Calculeu la funció de valor mitjà, la funció d'autocorrelació i la funció d'autocovariància del procés $X(t)$.

b) Si fixem els instants $t=0$ i $t=1$ s'obté una variable aleatòria bidimensional $(X(0), X(1))$. Utilitzant les funcions calculades en els apartats anteriors, calculeu: l'esperança i la variància d'aquestes dues variables, la covariància $\mathrm{Cov}(X(0), X(1))$ i el coeficient de correlació ρ.

15. Considereu una variable aleatòria V uniforme en l'interval $[0,1]$. Calculeu la funció de valor mitjà, $m(t)$, del procés següent (utilitzant el teorema de l'esperança).

$$X(t) = \begin{cases} t^2 - Vt, & \text{si } 0 \le t \le V, \\ t^2 - (V+1)t + V, & \text{si } V < t \le 1. \end{cases}$$

16. Si $X(t)$ és un procés estocàstic que representa cert senyal, podem considerar la presència de soroll representant-lo amb un procés $N(t)$ i considerant que mesurem el procés $Z(t) = X(t) + N(t)$. En el que segueix suposem que $X(t)$ i $N(t)$ són independents i que $N(t)$ té valor mitjà zero ($m_N(t) = 0$).

a) Demostreu que la funció d'autocorrelació de $Z(t)$ és la suma de les autocorrelacions de $X(t)$ i de $N(t)$:

$$R_Z(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) + R_N(t_1,t_2).$$

b) Si $X(t)$ té potència constant igual a 2, i $N(t) = \sin(t-B)$ en què B és una variable aleatòria uniforme en l'interval $[0,\pi]$, quina és la potència de $Z(t)$?

17. En activar un circuït apareix un corrent $X(t)$ per a $t \ge 0$ que podem representar com un procés estocàstic:

$$X(t) = (1 + A\cos(10\pi t))e^{-t},$$

en què A és una variable aleatòria uniforme en l'interval $[-3,3]$.

a) Calculeu la funció de valor mitjà del procés $X(t)$.

b) Considereu la variable aleatòria donada pel corrent en l'instant $t = \frac{1}{2}$: $X(\frac{1}{2})$. Què val la seva variància?

c) Un component del circuït envia un senyal si el corrent $X(t)$ es fa negatiu en algun instant. Quina és la probabilitat que això arribi a passar?

18. Considereu el procés estocàstic:

$$X(t) = A + \frac{B}{1+t},$$

en què A i B són dues variables aleatòries independents, gaussianes de paràmetres $m_A = 1$, $\sigma_A = 1$, $m_B = 0$, $\sigma_B = 1$.

a) Calculeu la funció de valor mitjà, la funció d'autocorrelació i la funció d'autocovariància del procés $X(t)$.

b) Si fixem els instants $t=0$ i $t=1$ s'obté una variable aleatòria bidimensional $(X(0), X(1))$. Utilitzant les funcions calculades en els apartats anteriors, calculeu: l'esperança i la variància d'aquestes dues variables, la covariància $\text{Cov}(X(0), X(1))$, i el coeficient de correlació ρ.

19. Considereu una variable aleatòria Z uniforme en l'interval $[1, 2]$. Calculeu la funció de valor mitjà, $m(t)$, del procés següent (utilitzant el teorema de l'esperança).

$$X(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le Z, \\ \dfrac{Z+1}{t+1}, & t > Z. \end{cases}$$

(Indicació: vegeu gràficament com són les realitzacions del procés. Noteu que per a $0 \le t < 1$ sempre és $X(t) = 1$, amb la qual cosa $m(t) = 1$ per a $0 \le t < 1$. També tenim que per a $t > 2$ és $X(t) = \frac{Z+1}{t+1}$, amb la qual cosa podeu demostrar que $m(t) = \frac{5}{2(t+1)}$ per a $t > 2$. Feu finalment l'anàlisi per a $1 < t < 2$, que requereix tenir en comptes els dos comportaments de la definició de $X(t)$. Podeu utilitzar programari matemàtic per a calcular les integrals.)

20. El senyal que transmet missatges en un canal de comunicació és un procés $X(t)$ amb valor mitjà $m_X(t) = 10$ i potència $\text{Pot}_X(t) = 150$. A la sortida mesurem $Y(t) = X(t) + Q(t)$, en què $Q(t)$ és el soroll introduït pel canal, independent de $X(t)$, amb valor mitjà $m_Q(t) = 2$ i potència $\text{Pot}_Q(t) = 6$.

a) Calculeu la potència de $Y(t)$.

b) Trobeu el valor de la constant a tal que el procés $Z(t) = aY(t)$ tingui el mateix valor mitjà que $X(t)$. Què val, en aquest cas, la potència de $Z(t)$?

21. La demanda que té un centre de subministrament d'energia al llarg d'un dia està determinada pel procés estocàstic:

$$X(t) = 100 + Bt(24 - t),$$

en què $0 \le t < 24$ és el temps en hores i B és una variable aleatòria uniforme en l'interval $[1, 3]$.

a) Calculeu la funció de valor mitjà del procés $X(t)$.

b) Considereu la variable aleatòria donada per la demanda en l'instant $t=3$, $X(3)$. Què val la seva variància?

c) Al centre s'ha d'activar un procediment especial si en algun moment $X(t) > 500$. Quina és la probabilitat que això arribi a passar en un dia?

22. El camp elèctric creat en un punt per una línia d'alta tensió està determinat pel procés estocàstic:

$$X(t) = U \sin t + V \sin 2t,$$

en què U i V són dues variables aleatòries independents, d'esperança 0 i desviació 1.

a) Calculeu la funció de valor mitjà, la funció d'autocorrelació i la funció d'autocovariància del procés $X(t)$.

b) Si fixem els instants $t = \frac{\pi}{3}$ i $t = \frac{\pi}{2}$ s'obté una variable aleatòria bidimensional $(X(\frac{\pi}{3}), X(\frac{\pi}{2}))$. Utilitzant les funcions calculades en l'apartat anterior, calculeu: l'esperança i la variància d'aquestes dues variables, la seva covariància $\mathrm{Cov}(X(\frac{\pi}{3}), X(\frac{\pi}{2}))$, i el seu coeficient de correlació ρ.

23. L'activació d'un circuit produeix un corrent descrit pel procés:

$$X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{Z}, & 0 \leq t \leq Z, \\ 0, & t > Z. \end{cases}$$

en què Z és una variable aleatòria amb funció de densitat $f_Z(z) = \frac{z^2}{2} e^{-z}$ per a $z \geq 0$ (i $f_Z(z) = 0$ en cas contrari). Calculeu la funció de valor mitjà, $m(t)$, del procés $X(t)$.

24. La potència d'un procés està determinada per $\mathrm{Pot}(t) = R(t,t)$ o, sense haver calculat la funció d'autocorrelació, es pot calcular directament per mitjà de $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2)$.

Calculeu la potència dels processos dels dos problemes anteriors aplicant el mètode que us sembli més apropiat.

25. L'ocupació d'amplada de banda en una xarxa en funció del temps està determinada pel procés estocàstic:

$$X(t) = Ae^{-t} + \frac{1}{A},$$

en què $t \geq 0$ és el temps en hores i A és una variable aleatòria amb funció de densitat: $f_A(a) = \dfrac{a}{2}$ si $0 < a < 2$, i $f_A(a) = 0$ en cas contrari.

a) Calculeu la funció de valor mitjà del procés $X(t)$.

b) Considereu la variable aleatòria donada pel decrement de $X(t)$ entre els instants $t = 0$ i $t = 1$, $V = X(0) - X(1)$. Què val la seva variància?

c) Calculeu la probabilitat que en l'instant $t = 2$ l'ocupació d'amplada de banda sigui superior a 2.

26. La càrrega acumulada per una placa solar està determinada pel procés estocàstic:

$$X(t) = Rt + S\cos \pi t,$$

en què R és una variable uniforme en $[1, 3]$, S és una variable uniforme en $[-1, 1]$, i R i S són independents.

a) Calculeu la funció de valor mitjà, la funció d'autocorrelació i la funció d'autocovariància del procés $X(t)$.

b) Si fixem els instants $t = 0$ i $t = 1$ s'obté una variable aleatòria bidimensional $(X(0), X(1))$. Utilitzant les funcions calculades en l'apartat anterior, calculeu: l'esperança i la variància d'aquestes dues variables, la seva covariància $\mathrm{Cov}(X(0), X(1))$, i el seu coeficient de correlació ρ.

c) el terme $S\cos \pi t$ és una correcció deguda a factors interns de la placa. Calculeu la potència del procés, primer sense aquesta correcció i després tenint-la en compte.

Quin significat té la diferència entre els dos valors obtinguts?

27. La càrrega i descàrrega d'un component electrònic està descrita pel procés:

$$X(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq B, \\ Be^{-(t-B)}, & t > B. \end{cases}$$

en què B és una variable aleatòria exponencial de valor mitjà 1.

a) Calculeu la funció de valor mitjà, $m(t)$, del procés $X(t)$.

b) Dibuixeu un parell de realitzacions de $X(t)$ i la funció $m(t)$. Quines similituds i diferències trobeu entre $m(t)$ i les realitzacions?

c) Calculeu el valor màxim de $m(t)$. Compareu-lo amb el valor mitjà del màxim de les realitzacions (calculeu el valor màxim de $X(t)$ i feu l'esperança del resultat). Valen el mateix? Per què?

28. Un tipus de partícula produeix radiació d'intensitat descrita pel procés estocàstic:

$$X(t) = J\cos t + (1 - J)\sin t,$$

en què t és el temps i J és una variable aleatòria de Bernoulli amb paràmetre $p = \frac{1}{2}$.

a) Calculeu la funció de valor mitjà $m(t)$ i la funció d'autocorrelació $R(t_1, t_2)$ del procés $X(t)$.

b) En l'estat coherent tenim dues partícules produint radiació de manera independent. Calculeu la potència total radiada.

c) En un estat supercoherent, les partícules anteriors deixen de ser independents i tenen totes el mateix valor de la variable J. Quina és ara la potència total radiada?

d) L'energia radiada en un període és $U = \int_0^{2\pi} \mathrm{Pot}(t)dt$. Compareu-la en els dos casos anteriors.

e) Generalitzeu a N partícules els tres apartats anteriors. Demostreu que

$$\frac{U_{\text{supercoherent}}}{U_{\text{coherent}}} = \frac{2}{1 + N^{-1}}.$$

(Indicació: noteu que les variables de Bernoulli verifiquen $J^2 = J$.)

29.

a) Demostreu que si un procés té la forma $X(t) = e^{-At}$ en què A és una variable aleatòria, es pot expressar $R(t_1, t_2)$ a partir de $m(t)$. És a dir, havent calculat $m(t)$ ja podem determinar $R(t_1, t_2)$ sense càlculs addicionals.

b) Una variable aleatòria de Simpson és la que pren valors en l'interval $[0, 2]$ amb funció de densitat:

$$f_A(a) = \begin{cases} a, & 0 \le a < 1, \\ 2 - a, & 1 \le a \le 2. \end{cases}$$

Calculeu les funcions de valor mitjà, d'autocorrelació i d'autocovariància del procés $X(t) = e^{-At}$.

c) Quins valors pot prendre la variable $X(1)$? És $X(t)$ un procés d'estat discret o continu.

d) Utilitzant els paràmetres de l'apartat *b*, calculeu l'esperança i la variància de la variable $X(1)$.

e) La variable de Simpson s'obté fent $A = U_1 + U_2$ en què U_1 i U_2 són variables uniformes en $[0, 1]$, independents. Utilitzeu aquest fet per a deduir de manera més simple $m(t)$.

(Indicació: utilitzeu el resultat de l'apartat *a* en el *b*.)

30. El nivell de càrrega en un acumulador d'energia, per a $t \ge 0$, es descriu amb el procés:

$$X(t) = A^2 - B^2 t + t^2,$$

en què A i B són variables uniformes en $[1, 2]$, independents.

a) Calculeu la funció de valor mitjà del procés $X(t)$.

b) Quina és la probabilitat que la diferència entre la càrrega inicial i la càrrega mínima sigui superior a 3?

c) Calculeu el coeficient de correlació ρ entre la càrrega inicial, $X(0)$, i la càrrega en $t = 1$, $X(1)$.

(Indicació: en l'apartat c feu el càlcul expressant les variables en funció de A i B.)

31. L'ús d'amplada de banda de certa connexió correspon al procés:

$$X(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq V, \\ e^{-(t-V)}, & t > V, \end{cases}$$

en què V és una variable aleatòria amb densitat $f_V(v) = ve^{-v}, v \geq 0$.

a) Calculeu la funció de valor mitjà, $m(t)$, del procés $X(t)$.

b) Dibuixeu un parell de realitzacions de $X(t)$ i la funció $m(t)$. Quines similituds i diferències trobeu entre $m(t)$ i les realitzacions?

c) Calculeu, en funció de t, $P(X(t) = 1)$.

d) Quins valors pot prendre $X(1)$? A partir d'això i de l'apartat anterior, què podem dir sobre si el procés és d'estat continu o discret?

Solucionari

1. Teníem que A és uniforme en l'interval $[0,1]$. Recordem que la seva funció de distribució val $F_A(a) = a, 0 \leq a \leq 1$.

Fixat $t > 0$, com que A varia entre 0 i 1, $X(t) = At$ varia entre 0 i t. Ara podem calcular:

$$F(x;\ t) = P(X(t) \leq x) = P(At \leq x) = P\left(A \leq \frac{x}{t}\right) = F_A\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t}.$$

La funció de densitat de primer ordre s'obté derivant la funció anterior:

$$f(x;\ t) = \frac{d}{dx}F(x;\ t) = \frac{1}{t}, \qquad 0 \leq x \leq t.$$

Com que aquesta densitat no depèn de x, tenim que amb t fixat la densitat de $X(t)$ és constant. Per tant, $X(t)$ és una variable uniforme en l'interval $[0,t]$.

2. a) A partir de la densitat de primer ordre:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;\ t)\, dx = \int_0^t \frac{x}{t} dx = \frac{1}{t}\int_0^t x\, dx = \frac{1}{t}\frac{t^2}{2} = \frac{t}{2}.$$

A partir del teorema de l'esperança:

$$m(t) = \mathrm{E}(At) = t\,\mathrm{E}(A) = t\frac{1}{2}.$$

Noteu que en el càlcul anterior t és una constant i, per tant, surt multiplicant l'esperança. Igualment no ha calgut calcular la integral, ja que ja sabem que l'esperança d'una uniforme val el punt mitjà de l'interval. Llavors, $\mathrm{E}(A) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

b) Autocorrelació:

$$R(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}(At_1 At_2) = t_1 t_2\,\mathrm{E}(A^2) = t_1 t_2 \int_0^1 a^2 \cdot 1 da = \frac{t_1 t_2}{3}.$$

Autocovariància: $C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) = \frac{t_1 t_2}{3} - \frac{t_1}{2}\cdot\frac{t_2}{2} = \frac{t_1 t_2}{12}$.

Potència: $\mathrm{Pot}(t) = R(t,t) = \frac{t^2}{3}$.

c) $\mathrm{E}(X(1)) = m(1) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{E}(X(3) - X(2)) = \mathrm{E}(X(3)) - \mathrm{E}(X(2)) = m(3) - m(2) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, $\mathrm{E}[X(1)X(2)] = R(1,2) = \frac{2}{3}$, $\mathrm{E}(X(3)^2) = R(3,3) = 3$.

3. $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = \mathrm{E}[X(t)X(t)] - \mathrm{E}(X(t))\,\mathrm{E}(X(t)) = R(t,t) - m(t)m(t) = C(t,t)$.

a) Utilitzant $C(t_1,t_2) = \frac{t_1 t_2}{12}$: $\mathrm{Var}(X(2)) = C(2,2) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{Var}(X(3)) = C(3,3) = \frac{3}{4}$.

b) $\mathrm{Cov}(X(2),X(3)) = C(2,3) = \dfrac{1}{2}$.

c) $\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(X(2),X(3))}{\sigma_{X(2)}\ \sigma_{X(3)}}$. Com que $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$: $\rho = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{3}{4}}} = 1$.

Resulta que la correlació és màxima. Això es deu al fet que $X(2) = 2A$ i $X(3) = 3A$. Llavors, una variable determina exactament l'altra, de manera lineal, ja que $X(3) = \frac{3}{2}X(2)$.

4. Segons l'enunciat: $\mathrm{E}(B_1) = \mathrm{E}(B_2) = \mathrm{E}(B_3) = 0$. $\mathrm{E}(B_1^2) = \mathrm{Var}(B_1) + \mathrm{E}(B_1)^2 = 1$. Igualment, $\mathrm{E}(B_2^2) = \mathrm{E}(B_3^2) = 1$. Com que són independents, $\mathrm{E}(B_1B_2) = \mathrm{E}(B_1)\,\mathrm{E}(B_2) = 0$. Igualment, $\mathrm{E}(B_2B_3) = \mathrm{E}(B_1B_3) = 0$.

$$m(t) = \mathrm{E}[Y(t)] = \mathrm{E}(B_1 + B_2\cos t + B_3\sin t) = \mathrm{E}(B_1) + \mathrm{E}(B_2)\cos t + \mathrm{E}(B_3)\sin t = 0.$$

$$R(t_1,t_2) = \mathrm{E}[Y(t_1)Y(t_2)] = \mathrm{E}[(B_1 + B_2\cos t_1 + B_3\sin t_1)(B_1 + B_2\cos t_2 + B_3\sin t_2)]$$

$$= \mathrm{E}(B_1^2) + \mathrm{E}(B_1B_2)\cos t_2 + \mathrm{E}(B_1B_3)\sin t_2 + \mathrm{E}(B_2B_1)\cos t_1 + \mathrm{E}(B_2^2)\cos t_1\cos t_2$$

$$+\,\mathrm{E}(B_2B_3)\cos t_1\sin t_2 + \mathrm{E}(B_3B_1)\sin t_1 + \mathrm{E}(B_3B_2)\sin t_1\cos t_2 + \mathrm{E}(B_3^2)\sin t_1\sin t_2$$

$$= 1 + \cos t_1\cos t_2 + \sin t_1\sin t_2 = 1 + \cos(t_2 - t_1).$$

Per tant, $m(t) = 0$ i $R(t_1,t_2) = 1 + \cos(t_2 - t_1)$.

5.

$$X(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < B, \\ B, & t \ge B, \end{cases}$$

en què B és una variable uniforme en $[0,2]$.

Les realitzacions tenen la mateixa forma que en l'exemple (figura 4). El que varia és la freqüència d'aparició dels diferents valors de B. De fet, abans es podia donar qualsevol B positiu, mentre que ara està limitat entre 0 i 2.

Funció de valor mitjà del procés $X(t)$:

Hem de calcular $m(t) = \mathrm{E}(X(t))$. Com que $X(t)$ depèn d'una variable B, farem servir el teorema de l'esperança. La funció de densitat de B és $f_B(b) = \frac{1}{2}, 0 \le b \le 2$. En la definició de $X(t)$ veiem que $X(t) = B$ si $0 \le B \le t$, mentre que $X(t) = t$ si $B \ge t$. Així separarem la integració sobre b segons aquests dos casos:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_B(b)\,db = \int_0^t b\frac{1}{2}db + \int_t^2 t\frac{1}{2}db$$

$$= \left.\frac{b^2}{4}\right|_0^t + \left.\frac{bt}{2}\right|_t^2 = \frac{t^2}{4} + \frac{(2-t)t}{2} = t - \frac{t^2}{4}.$$

Però el segon cas no es pot donar quan $t \ge 2$. Per a aquests valors de t

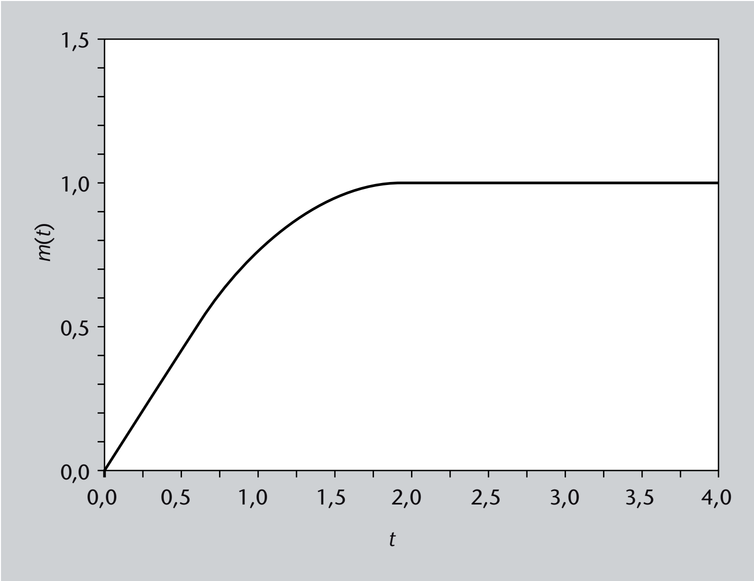
$$m(t) = \int_0^2 b\frac{1}{2}db = \left.\frac{b^2}{4}\right|_0^2 = 1.$$

Així,

$$m(t) = \begin{cases} t - \dfrac{t^2}{4}, & 0 \le t < 2 \\ 1, & t \ge 2 \end{cases}$$

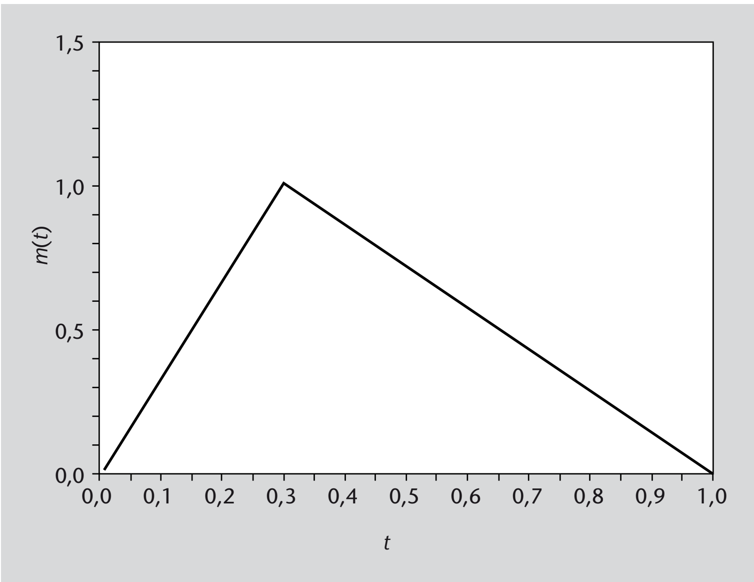
La funció $m(t)$ es mostra en la figura 6.

Figura 6. Valor mitjà de $X(t)$



6. Les realitzacions tenen forma de triangle, tal com es veu en la figura 7.

Figura 7. Realització de $X(t)$. ($A = 0{,}3$)



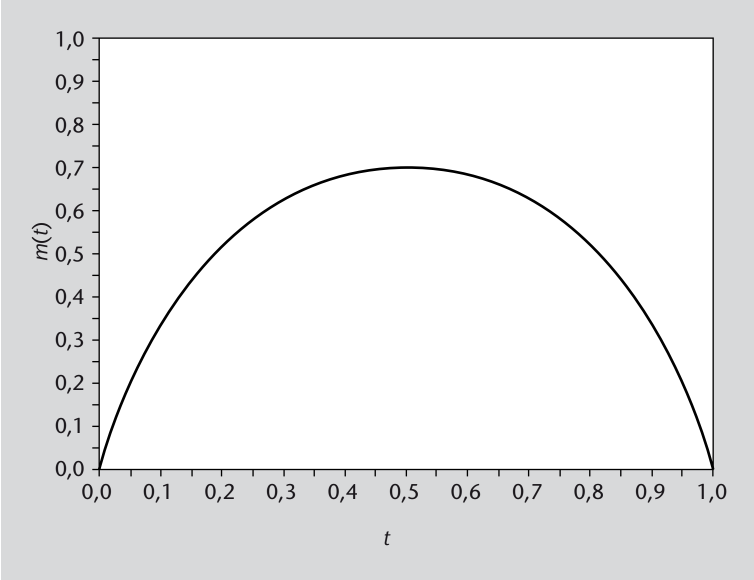
Per a calcular la funció de valor mitjà del procés $X(t)$ farem servir el teorema de l'esperança. La funció de densitat de A és $f_A(a) = 1{,}0 \leq a \leq 1$. En la definició de $X(t)$ veiem que $X(t) = \frac{1-t}{1-A}$ si $0 \leq A \leq t$, mentre que $X(t) = \frac{t}{A}$ si $t < A \leq 1$. Així separarem la integració sobre a segons aquests dos casos:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_A(a)\, da = \int_0^t \frac{1-t}{1-a} da + \int_t^1 \frac{t}{a} da$$

$$= -(1-t)\ln(1-a)|_0^t + t\ln a|_t^1 = -(1-t)\ln(1-t) - t\ln t.$$

La funció $m(t)$ es mostra en la figura 8. Noteu que mentre que les realitzacions tenen un punt on no són derivables (una "punxa"), la funció de valor mitjà és "suau". Moltes vegades les irregularitats de les realitzacions se suavitzen en fer la mitjana.

Figura 8. Valor mitjà de $X(t)$



7. a) $\mathrm{E}(A) = \dfrac{1+(-1)}{2} = 0$. $\mathrm{E}(B) = \dfrac{0+2}{2} = 1$.

Densitats: $f_A(a) = \dfrac{1}{2}, -1 \le a \le 1$. $f_B(b) = \dfrac{1}{2}, 0 \le b \le 2$.

$\mathrm{E}(A^2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} a^2 \frac{1}{2} da = \left[\frac{a^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$. $\mathrm{E}(B^2) = \displaystyle\int_{0}^{2} b^2 \frac{1}{2} db = \left[\frac{b^3}{6}\right]_{0}^{1} = \frac{4}{3}$.

Com són independents, $\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = 0 \cdot 1 = 0$.

b) $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(At + B) = \mathrm{E}(A)t + \mathrm{E}(B) = 0 \cdot t + 1 = 1$.

c) $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}[(At_1 + B)(At_2 + B)] = \mathrm{E}(A^2 t_1 t_2 + AB(t_1 + t_2) + B^2)$
$= \mathrm{E}(A^2)t_1t_2 + \mathrm{E}(AB)(t_1 + t_2) + \mathrm{E}(B^2) = \dfrac{1}{3}t_1t_2 + 0 \cdot (t_1 + t_2) + \dfrac{4}{3} = \dfrac{t_1t_2 + 4}{3}$.

$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = \dfrac{t_1t_2 + 4}{3} - 1 \cdot 1 = \dfrac{t_1t_2 + 1}{3}$.

$\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = R(t, t) = \dfrac{t^2 + 4}{3}$.

d) Atès que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t, t) - m(t)^2 = C(t, t)$ i $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = C(t_1, t_2)$:

$\mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 1, \mathrm{E}(X(2)) = m(2) = 1, \mathrm{Var}(X(1)) = C(1, 1) = \dfrac{2}{3}$,
$\mathrm{Var}(X(2)) = C(2, 2) = \dfrac{5}{3}, \mathrm{Cov}(X(1), X(2)) = C(1, 2) = 1$,
$\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(X(1), X(2))}{\sigma_{X(1)}\sigma_{X(2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{5}{3}}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}9487$.

8.

a) $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_A(a)\, da$.

La variable exponencial A té paràmetre $\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}(A)} = 1$ i llavors la densitat val $f_A(a) = e^{-a}, a \ge 0$.

També tenim que $X(t) = 0$ si $A < t$ i $X(t) = t$ si $A \ge t$. Llavors

$$m(t) = \int_0^t 0 \cdot e^{-a} da + \int_t^{\infty} t \cdot e^{-a} da = t \int_t^{\infty} e^{-a} da = t \left[\frac{e^{-a}}{-1}\right]_t^{\infty} = te^{-t}.$$

b) $X(t)$ només pot prendre dos valors: 0 i t. La seva funció de probabilitat de primer ordre val:

$$P(x=0;\ t) = P(X(t)=0) = P(A<t) = \int_0^t e^{-a}da = 1-e^{-t}.$$

$$P(x=t;\ t) = P(X(t)=t) = P(A\geq t) = \int_t^\infty e^{-a}da = e^{-t}.$$

(Noteu que les dues probabilitats estan entre 0 i 1 i la seva suma val 1.)

c) $m(t) = \sum_k x_k P(x_k;\ t) = 0\cdot P(x=0;\ t) + t\cdot P(x=t;\ t) = 0\cdot(1-e^{-t}) + t\cdot e^{-t} = te^{-t}$.

9. a) $\mathrm{E}(U) = \int_0^2 u\cdot \frac{u}{2}db = \left[\frac{u^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$. $\mathrm{E}(U^2) = \int_0^2 u^2\cdot\frac{u}{2}db = \left[\frac{u^4}{8}\right]_0^2 = 2$. $\mathrm{E}(V) = \int_{-1}^1 v\cdot\frac{7}{2}v^6 db = \left.\frac{7v^8}{16}\right|_{-1}^1 = 0$. $\mathrm{E}(V^2) = \int_{-1}^1 v^2\cdot\frac{7}{2}v^6db = \left.\frac{7v^9}{18}\right|_{-1}^1 = \frac{7}{9}$.

Com són independents, $\mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V) = 0$.

b) $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(U+V\sin t) = \mathrm{E}(U)+\mathrm{E}(V)\sin t = \frac{4}{3}+0\cdot\sin t = \frac{4}{3}$.

$R(t_1,t_2) = \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) = \mathrm{E}((U+V\sin t_1)(U+V\sin t_2)) = \mathrm{E}(U^2+UV(\sin t_1+\sin t_2)+V^2\sin t_1\sin t_2) = \mathrm{E}(U^2)+\mathrm{E}(UV)(\sin t_1+\sin t_2)+\mathrm{E}(V^2)\sin t_1\sin t_2 = 2+\frac{7}{9}\sin t_1\sin t_2$.

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2)-m(t_1)m(t_2) = 2+\frac{7}{9}\sin t_1\sin t_2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{9}(2+7\sin t_1\sin t_2).$$

c) $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = R(t,t) = 2+\frac{7}{9}\sin^2 t$.

És màxima quan $\sin t = \pm 1$, és a dir, quan $t = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ amb k enter.

d) Atès que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2)-\mathrm{E}(X(t))^2 = R(t,t)-m(t)^2 = C(t,t)$ i $\mathrm{Cov}(X(t_1),X(t_2)) = C(t_1,t_2)$:

$$\mathrm{Var}\left(X\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = C\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{12}, \mathrm{Var}\left(X\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = C\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$\mathrm{Cov}\left(X\left(\frac{\pi}{6}\right),X\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = C\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right) = \frac{11}{18},$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X(\frac{\pi}{6}),X(\frac{\pi}{2}))}{\sigma_{X(\frac{\pi}{6})}\sigma_{X(\frac{\pi}{2})}} = \frac{\frac{11}{18}}{\sqrt{\frac{5}{12}}\sqrt{1}} = \frac{11}{\sqrt{135}} = 0{,}9467.$$

10. a) $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)f_B(b)\,db$.

La variable uniforme B té densitat $f_B(b) = 1/2, 0\leq b\leq 2$.

També tenim que $X(t) = 0$ si $B\geq t$ i $X(t) = 2-t$ si $B<t$. Llavors

Per a $0\leq t<2$:

$$m(t) = \int_0^t (2-t)\cdot\frac{1}{2}db + \int_t^2 0\cdot\frac{1}{2}db = (2-t)\int_0^t\frac{1}{2}db = (2-t)\left[\frac{b}{2}\right]_0^t = t-\frac{t^2}{2}.$$

Per a $t\geq 2$, qualsevol valor de B dóna $X(t) = 2-t$. Per tant:

$m(t) = 2-t$.

b) $m(t) = \mathrm{E}(Y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)f_A(a)\,da$.

La variable exponencial A té paràmetre $\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}(A)} = 1$ i llavors la densitat val $f_A(a) = e^{-a}, a\geq 0$.

També tenim que $Y(t) = t - A$ si $A < t$ y $Y(t) = A - t$ si $A \geq t$. Llavors

$$m(t) = \int_0^t (t-a)\cdot e^{-a}da + \int_t^\infty (a-t)\cdot e^{-a}da = (a-t+1)e^{-a}|_0^t - (a-t+1)e^{-a}|_t^\infty = 2e^{-t}+t-1.$$

11. a) $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = \frac{1}{\lambda} = 1$. $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{Var}(A) + \mathrm{E}(A)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + 1 = 2$. $\mathrm{E}(B^2) = 2$. Com són independents, $\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = 1$.

b) $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(Ae^t + B) = \mathrm{E}(A)e^t + \mathrm{E}(B) = e^t + 1$.

$R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}[(Ae^{t_1} + B)(Ae^{t_1} + B)] = \mathrm{E}(A^2e^{t_1+t_2} + AB(e^{t_1} + e^{t_2}) + B^2) = \mathrm{E}(A^2)e^{t_1+t_2} + \mathrm{E}(AB)(e^{t_1} + e^{t_2}) + \mathrm{E}(B^2) = 2e^{t_1+t_2} + e^{t_1} + e^{t_2} + 2$.

$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = 2e^{t_1+t_2} + e^{t_1} + e^{t_2} + 2 - (e^{t_1} + 1)(e^{t_2} + 1) = e^{t_1+t_2} + 1$.

c) $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = R(t, t) = 2e^{2t} + 2e^t + 2$.

$\mathrm{Pot}(t) = 26 \Rightarrow 2e^{2t} + 2e^t + 2 = 26 \Rightarrow e^{2t} + e^t - 12 = 0$.

Anomenant $z = e^t$ ens queda l'equació de segon grau $z^2 + z - 12 = 0$, que té les solucions $z = 3$ i $z = -4$. Com que e^t ha de ser positiu, tenim finalment que $t = \ln 3 = 1{,}098$.

d) Atès que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t, t) - m(t)^2 = C(t, t)$ i $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = C(t_1, t_2)$:

$\mathrm{E}(X(0)) = m(0) = 2, \mathrm{E}(X(\ln 2)) = m(\ln 2) = 3$.

$\mathrm{Var}(X(0)) = C(0, 0) = 2, \mathrm{Var}(X(\ln 2)) = C(\ln 2, \ln 2) = 5$.

$\mathrm{Cov}(X(0), X(\ln 2)) = C(0, \ln 2) = 3, \rho = \frac{\mathrm{Cov}(X(0),X(\ln 2))}{\sigma_{X(0)}\sigma_{X(\ln 2)}} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}9486$.

12. $m_Y(t) = \mathrm{E}(Y(t)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} Y(t)f_V(v)dv$.

Ara tenim que $Y(t) = t^2 + t$ si $V \geq t$ i $Y(t) = 0$ si $V < t$. Llavors

$$m_Y(t) = \int_0^t 0 \cdot \frac{1}{(v+1)^2}dv + \int_t^\infty (t^2 + t) \cdot \frac{1}{(v+1)^2}dv = (t^2 + t)\int_t^\infty \frac{1}{(v+1)^2}dv = (2-t)\left[-\frac{1}{v+1}\right]_t^\infty = \frac{t^2+t}{t+1} = t.$$

De la mateixa manera, $Z(t) = 0$ si $V \geq t$ i $Z(t) = V + 1$ si $V < t$. Llavors

$$m_Z(t) = \int_0^t (v+1) \cdot \frac{1}{(v+1)^2}dv + \int_t^\infty 0 \cdot \frac{1}{(v+1)^2}dv = \int_0^t \frac{1}{v+1}dv = \ln(t+1).$$

13. a) $\mathrm{E}(A) = \frac{0+6}{2} = 3$, $\mathrm{E}(A^2) = \int_0^6 a^2 \frac{1}{6}da = 12$.

$$m(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}(t^2 - 3At + 2A^2) = t^2 - 3t\,\mathrm{E}(A) + 2\,\mathrm{E}(A^2) = t^2 - 9t + 24.$$

b) $\mathrm{E}[X(0)] = m(0) = 24$. Com $X(0) = 2A^2$, $\mathrm{E}(X(0)^2) = 4\,\mathrm{E}(A^4) = 4\int_0^6 a^4 \frac{1}{6}da = \frac{5.184}{5}$. Llavors,

$$\mathrm{Var}[X(0)] = \mathrm{E}[X(0)^2] - \mathrm{E}[X(0)]^2 = \frac{2.304}{5} = 460{,}8.$$

c) Calculem primer M en funció de A: $\frac{dX(t)}{dt} = 2t - 3A$, i llavors el mínim es dóna en $t_m = \frac{3A}{2}$. Així, $M = X(t_m) = -\frac{A^2}{4}$.

$$P(M > -1) = P\left(-\frac{A^2}{4} > -1\right) = P(0 < A < 2) = \frac{1}{3}.$$

14. a) Notem que $\mathrm{E}(A) = \frac{1}{\lambda} = 1$, $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{Var}(A) + \mathrm{E}(A)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + 1^2 = 2$. La densitat de B val $f_B(b) = e^{-b}$ per a $b \geq 0$.

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(Ae^{-Bt}) = \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(e^{-Bt}) = 1 \cdot \int_0^\infty e^{-bt}e^{-b}db = \frac{1}{1+t}.$$

$$R(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}(Ae^{-Bt_1}Ae^{-Bt_2}) = \mathrm{E}(A^2e^{-B(t_1+t_2)})$$

$$= \mathrm{E}(A^2)\,\mathrm{E}(e^{-B(t_1+t_2)}) = \frac{2}{1+t_1+t_2}.$$

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) = \frac{2}{1+t_1+t_2} - \frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}.$$

b) Atès que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t,t) - m(t)^2 = C(t,t)$ i $\mathrm{Cov}(X(t_1),X(t_2)) = C(t_1,t_2)$:

$$\mathrm{E}(X(0)) = m(0) = 1, \qquad \mathrm{E}(X(1)) = m(1) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{Var}(X(0)) = C(0,0) = 1, \qquad \mathrm{Var}(X(1)) = C(1,1) = \frac{5}{12}.$$

$$\mathrm{Cov}(X(0),X(1)) = C(0,1) = \frac{1}{2}.$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X(0),X(1))}{\sigma_{X(0)}\sigma_{X(1)}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1}\sqrt{\frac{5}{12}}} = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}7745.$$

15. $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(t)f_V(v)\,dv.$

Ara tenim que $X(t) = t^2 - Vt$ si $V \geq t$ i $X(t) = t^2 - (V+1)t + V$ si $V < t$. Llavors,

$$m(t) = \int_0^t (t^2 - (v+1)t + v) \cdot 1\,dv + \int_t^1 (t^2 - vt) \cdot 1\,dv$$

$$= \left[t^2v - \left(\frac{v^2}{2} + v\right)t + \frac{v^2}{2}\right]_0^t + \left[t^2v - \frac{v^2}{2}t\right]_t^1 = \frac{t^2-t}{2}.$$

16. a) Vegem quina és la funció d'autocorrelació.

$$R_Z(t_1,t_2) = \mathrm{E}(Z(t_1)Z(t_2)) = \mathrm{E}((X(t_1)+N(t_1))(X(t_2)+N(t_2)))$$

$$= \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2) + X(t_1)N(t_2) + N(t_1)X(t_2) + N(t_1)N(t_2))$$

$$= \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) + \mathrm{E}(X(t_1)N(t_2)) + \mathrm{E}(N(t_1)X(t_2)) + \mathrm{E}(N(t_1)N(t_2))$$

$$= \mathrm{E}(X(t_1)X(t_2)) + \mathrm{E}(X(t_1))\,\mathrm{E}(N(t_2)) + \mathrm{E}(N(t_1))\,\mathrm{E}(X(t_2)) + \mathrm{E}(N(t_1)N(t_2))$$

$$= R_X(t_1,t_2) + R_N(t_1,t_2).$$

b) $\mathrm{Pot}_Z(t) = R_Z(t,t) = R_X(t,t) + R_N(t,t) = \mathrm{Pot}_X(t) + \mathrm{Pot}_N(t)$. $\mathrm{Pot}_X(t) = 2$ i

$$\mathrm{Pot}_N(t) = \mathrm{E}(N(t)^2) = \int_0^\pi \sin^2(t-b)\frac{1}{\pi}db = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2(t-b))}{2}\frac{1}{\pi}db = \frac{1}{2}.$$

Per tant, $\mathrm{Pot}_Z(t) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

17.

a) Calculem primer $\mathrm{E}(A) = \frac{-3+3}{2} = 0$. Llavors,

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}((1 + A\cos(10\pi t))e^{-t}) = e^{-t} + e^{-t}\cos(10\pi t)\,\mathrm{E}(A) = e^{-t}.$$

b) $\mathrm{E}(X(\frac{1}{2})) = m(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}$. Notem també que $\mathrm{E}(A^2) = V(A^2) = \frac{(3-(-3))^2}{12} = 3$. Com $X(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}(1-A)$, $\mathrm{E}(X(\frac{1}{2})^2) = e^{-1}\,\mathrm{E}(1 - 2A + A^2) = e^{-1}(1 - 2\cdot 0 + 3) = 4e^{-1}$. Llavors,

$$\mathrm{Var}(X(0)) = \mathrm{E}(X(0)^2) - \mathrm{E}(X(0))^2 = 4e^{-1} - e^{-1} = 3e^{-1} = 0{,}367.$$

c) Perquè $X(t)$ no es faci mai negatiu cal que $|A| \leq 1$. Així, la probabilitat que ens demanen és

$$P(-1 \leq A \leq 1) = \frac{1}{3}.$$

18. a) Notem que $\mathrm{E}(A) = 1$, $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{Var}(A) + \mathrm{E}(A)^2 = 1 + 1^2 = 2$, $\mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{E}(B^2) = \mathrm{Var}(B) + \mathrm{E}(B)^2 = 1$ i $\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}(A)\,\mathrm{E}(B) = 0$. Amb aquestes dades podem calcular:

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}\left(A + \frac{B}{1+t}\right) = \mathrm{E}(A) + \frac{\mathrm{E}(B)}{1+t} = 1.$$

$$R(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}\left(\left(A + \frac{B}{1+t_1}\right)\left(A + \frac{B}{1+t_2}\right)\right) =$$

$$\mathrm{E}(A^2) + \mathrm{E}(AB)\left(\frac{1}{1+t_1} + \frac{1}{1+t_2}\right) + \frac{\mathrm{E}(B^2)}{(1+t_1)(1+t_2)} = 2 + \frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}.$$

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) = 2 + \frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)} - 1\cdot 1 = 1 + \frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}.$$

b) Atès que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t,t) - m(t)^2 = C(t,t)$ i $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = C(t_1,t_2)$:

$$\mathrm{E}(X(0)) = m(0) = 1, \qquad \mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 1.$$

$$\mathrm{Var}(X(0)) = C(0,0) = 2, \qquad \mathrm{Var}(X(1)) = C(1,1) = \frac{5}{4}.$$

$$\mathrm{Cov}(X(0), X(1)) = C(0,1) = \frac{3}{2}.$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X(0), X(1))}{\sigma_{X(0)}\sigma_{X(1)}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}9486.$$

19. $m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_Z(z)\,dz.$

Ara tenim que $X(t) = \frac{Z+1}{t+1}$ si $Z < t$ i $X(t) = 1$ si $Z \geq t$. Llavors, si $1 < t < 2$:

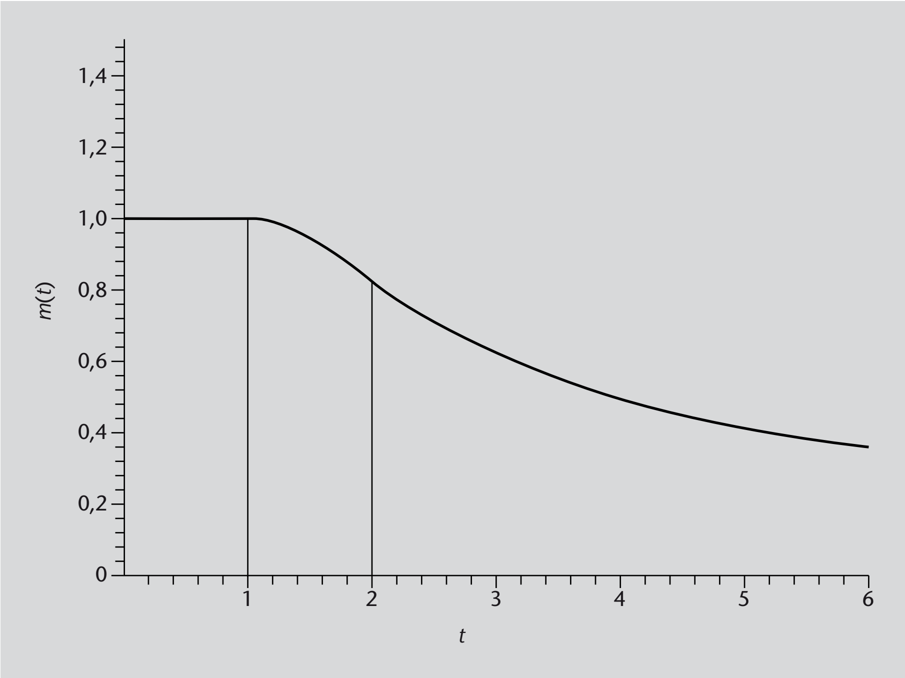
$$m(t) = \int_1^t \frac{z+1}{t+1} \cdot 1\,dz + \int_t^2 1 \cdot 1\,dz = \left.\frac{z^2+2z}{2(t+1)}\right|_1^t + z|_t^2 = \frac{1+4t-t^2}{2(t+1)}.$$

Si $t > 2$:

$$m(t) = \int_1^2 \frac{z+1}{t+1} \cdot 1\,dz = \left.\frac{z^2+2z}{2(t+1)}\right|_1^2 = \frac{5}{2(t+1)}.$$

Vegeu la figura 9.

Figura 9. $m(t)$



20. a) Tenim $\mathrm{E}(X(t)) = 10$, $\mathrm{E}(X(t)^2) = 150$, $\mathrm{E}(Q(t)) = 2$ i $\mathrm{E}(Q(t)^2) = 6$. Llavors:

$$\mathrm{Pot}_Y(t) = \mathrm{E}(Y(t)^2) = \mathrm{E}[(X(t)+Q(t))^2] = \mathrm{E}(X(t)^2 + 2X(t)Q(t) + Q(t)^2) =$$

$$\mathrm{E}(X(t)^2) 2\,\mathrm{E}(X(t))\,\mathrm{E}(Q(t)) + \mathrm{E}(Q(t)^2) = 150 + 2 \cdot 10 \cdot 2 + 6 = 196.$$

b) $\mathrm{E}(Z(t)) = a\,\mathrm{E}(Y(t)) = a(\mathrm{E}(X(t)) + \mathrm{E}(Q(t))) = 12a$ i $\mathrm{Pot}_Z(t) = \mathrm{E}(Z(t)^2) = 196a^2$. Ha de ser, per tant, $a = \dfrac{10}{12}$ i $\mathrm{Pot}_Z(t) = 136{,}1$.

21. a) Calculem primer $\mathrm{E}(B) = \frac{1+3}{2} = 2$. Llavors,

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}[100 + Bt(24-t)] = 100 + \mathrm{E}(B)t(24-t) = 100 + 48t - 2t^2.$$

b) És $X(3) = 100 + 63B$. Fent servir les propietats de la variància:

$$\mathrm{Var}(X(3)) = \mathrm{Var}(100 + 63B) = 63^2\,\mathrm{Var}(B) = 63^2\,\frac{(3-1)^2}{12} = 1.323.$$

(Alternativament, $\mathrm{E}(X(3)) = m(3) = 226$. Notem també que $\mathrm{E}(B^2) = \int_1^3 b^2 \frac{1}{2} db = \frac{13}{3}$ i llavors $\mathrm{E}(X(3)^2) = \mathrm{E}(10.000 + 12.600B + 3.969B^2) = 52.399$. Llavors, $\mathrm{Var}(X(3)) = \mathrm{E}(X(3)^2) - \mathrm{E}(X(3))^2 = 52.399 - 226^2 = 1.323$.)

c) Perquè $X(t)$ arribi a superar en algun moment el valor 500 cal que el màxim de la paràbola, $X(12) = 100 + 144B$, sigui superior a 500. Així, la probabilitat que ens demanen és

$$P(100 + 144B > 500) = P\left(B > \frac{25}{9}\right) = \frac{3 - \frac{25}{9}}{2} = \frac{1}{9}.$$

22. a) Notem que $\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(V) = 0$, $\mathrm{E}(U^2) = \mathrm{E}(V^2) = \mathrm{Var}(V) + \mathrm{E}(V)^2 = 1^2 + 0^2 = 1$ i $\mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V) = 0$. Amb aquestes dades podem calcular:

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(U \sin t + V \sin 2t) = \mathrm{E}(U) \sin t + \mathrm{E}(V) \sin 2t = 0.$$

$$R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}[(U \sin t_1 + V \sin 2t_1)(U \sin t_2 + V \sin 2t_2)]$$

$$= \mathrm{E}(U^2) \sin t_1 \sin t_2 + \mathrm{E}(V^2) \sin 2t_1 \sin 2t_2 + \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V)(\sin t_1 \sin 2t_2 + \sin 2t_1 \sin t_2)$$

$$= \sin t_1 \sin t_2 + \sin 2t_1 \sin 2t_2$$

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = \sin t_1 \sin t_2 + \sin 2t_1 \sin 2t_2.$$

b) Atès que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t,t) - m(t)^2 = C(t,t)$ i $\mathrm{Cov}[X(t_1), X(t_2)] = C(t_1, t_2)$:

$$\mathrm{E}\left(X\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) = m\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = 0, \qquad \mathrm{E}\left(X\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = m\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$\mathrm{Var}\left(X\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) = C\left(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{3}{2}, \qquad \mathrm{Var}\left(X\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = C\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$\mathrm{Cov}\left(X\left(\tfrac{\pi}{3}\right), X\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = C\left(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X(\frac{\pi}{3}), X(\frac{\pi}{2}))}{\sigma_{X(\frac{\pi}{3})}\sigma_{X(\frac{\pi}{2})}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071.$$

23.

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_Z(z)\, dz.$$

Ara tenim que $X(t) = 0$ si $Z < t$ i $X(t) = \dfrac{1}{Z}$ si $Z \geq t$. Llavors:

$$m(t) = \int_0^t 0 \cdot \frac{z^2}{2} e^{-z} dz + \int_t^{\infty} \frac{1}{z} \cdot \frac{z^2}{2} e^{-z} dz = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} z e^{-z} dz = \frac{1}{2} \left[-(z+1)e^{-z}\right]_t^{\infty} = \frac{t+1}{2} e^{-t}.$$

24. Per al primer procés: $\mathrm{Pot}(t) = R(t,t) = \sin^2 t + \sin^2 2t$.

Per al segon procés:

$$\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)^2 f_Z(z)\,dz = \int_t^{\infty} \frac{1}{z^2} \cdot \frac{z^2}{2} e^{-z} dz = \frac{1}{2}\int_t^{\infty} e^{-z} dz = \frac{e^{-t}}{2}.$$

25. a) Calculem primer:

$$\mathrm{E}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} a f_A(a)\,da = \int_0^2 a\frac{a}{2}\,da = \frac{4}{3}, \qquad \mathrm{E}\left(\frac{1}{A}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} f_A(a)\,da = \int_0^2 \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{2}\,da = 1.$$

Llavors,

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}\left(Ae^{-t} + \frac{1}{A}\right) = \mathrm{E}(A)e^{-t} + \mathrm{E}\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{4}{3}e^{-t} + 1.$$

b) A partir de la forma explícita de $X(t)$, $V = X(0) - X(1) = \left(A + \frac{1}{A}\right) - \left(Ae^{-1} + \frac{1}{A}\right) = A(1-e^{-1})$. Fent servir les propietats de la variància:

$$\mathrm{Var}(V) = \mathrm{Var}(A(1-e^{-1})) = (1-e^{-1})^2\,\mathrm{Var}(A) = \frac{2}{9}(1-e^{-1})^2 = 0{,}08879,$$

ja que $\mathrm{E}(A^2) = \int_0^2 a^2 \frac{a}{2} da = 2$, $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{E}(A^2) - \mathrm{E}(A)^2 = \frac{2}{9}$.

c) La probabilitat que ens demanen és

$$P(X(2) > 2) = P\left(Ae^{-2} + \frac{1}{A} > 2\right) = P(e^{-2}A^2 - 2A + 1 > 0).$$

Els zeros del polinomi de segon grau són $e^2 \pm \sqrt{e^4 - e^2}$, aproximadament 14,26 i 0,52. El polinomi és positiu fora de l'interval $[0{,}52, 14{,}26]$. Tenint en compte que A es troba entre 0 i 2:

$$P(X(2) > 2) = P(0 < A < e^2 - \sqrt{e^4 - e^2}) = \int_0^{e^2 - \sqrt{e^4-e^2}} \frac{a}{2} da$$
$$= \frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^3}{2}\sqrt{e^2-1} = 0{,}0671.$$

26. a) Notem que $\mathrm{E}(R) = \frac{1+3}{2} = 2$, $\mathrm{E}(S) = \frac{-1+1}{2} = 0$, $\mathrm{Var}(R) = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$, $\mathrm{Var}(S) = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{1}{3}$, $\mathrm{E}(R^2) = \mathrm{Var}(R) + \mathrm{E}(R)^2 = \frac{13}{3}$, $\mathrm{E}(S^2) = \mathrm{Var}(S) + \mathrm{E}(S)^2 = \frac{1}{3}$ i $\mathrm{E}(RS) = \mathrm{E}(R)\,\mathrm{E}(S) = 0$. Amb aquestes dades podem calcular:

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(Rt + S\cos\pi t) = \mathrm{E}(R)t + \mathrm{E}(S)\cos\pi t = 2t.$$

$$R(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}[(Rt_1 + S\cos\pi t_1)(Rt_2 + S\cos\pi t_2)]$$

$$= \mathrm{E}(R^2)t_1t_2 + \mathrm{E}(S^2)\cos\pi t_1\cos\pi t_2 + \mathrm{E}(R)\,\mathrm{E}(S)(t_1\cos\pi t_2 + t_2\cos\pi t_1)$$

$$= \tfrac{13}{3}t_1t_2 + \tfrac{1}{3}\cos\pi t_1\cos\pi t_2.$$

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) = \frac{1}{3}(t_1t_2 + \cos\pi t_1\cos\pi t_2).$$

b) Atès que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t,t) - m(t)^2 = C(t,t)$ i $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = C(t_1, t_2)$:

$$\mathrm{E}(X(0)) = m(0) = 0, \qquad \mathrm{E}(X(1)) = m(1) = 2.$$

$$\mathrm{Var}(X(0)) = C(0,0) = \tfrac{1}{3}, \qquad \mathrm{Var}(X(1)) = C(1,1) = \tfrac{2}{3}.$$

$$\mathrm{Cov}(X(0), X(1)) = C(0,1) = -\tfrac{1}{3}.$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}[X(0),X(1)]}{\sigma_{X(0)}\sigma_{X(1)}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -0{,}7071.$$

c) Per al procés complet, $\mathrm{Pot}(t) = R(t,t) = \frac{1}{3}(13t^2 + \cos^2 \pi t)$.

Per al procés sense el terme amb S, $\mathrm{Pot}(t) = \mathrm{E}(X(t)^2) = \mathrm{E}((Rt)^2) = \mathrm{E}(R^2)t^2 = \frac{13}{3}t^2$.

La diferència és $\frac{1}{3}\cos^2 \pi t$, i correspon a la potència del terme de correcció: $\mathrm{E}((S\cos \pi t)^2)$.

27. a) $m(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_B(b)\, db.$

Ara tenim que $X(t) = Be^{-(t-B)}$ si $B < t$ i $X(t) = t$ si $B \geq t$. Llavors:

$$m(t) = \int_0^t be^{-(t-b)} \cdot e^{-b} db + \int_t^{\infty} t \cdot e^{-b} db = e^{-t} \int_0^t b\, db + t \int_t^{\infty} e^{-b} db = \left(t + \frac{t^2}{2}\right) e^{-t}.$$

b) $m(t)$ segueix el comportament de pujada i baixada de les realitzacions, si bé la mitjana estadística ha fet desaparèixer la irregularitat (punxa).

Figura 10. Realitzacions comparades amb $m(t)$

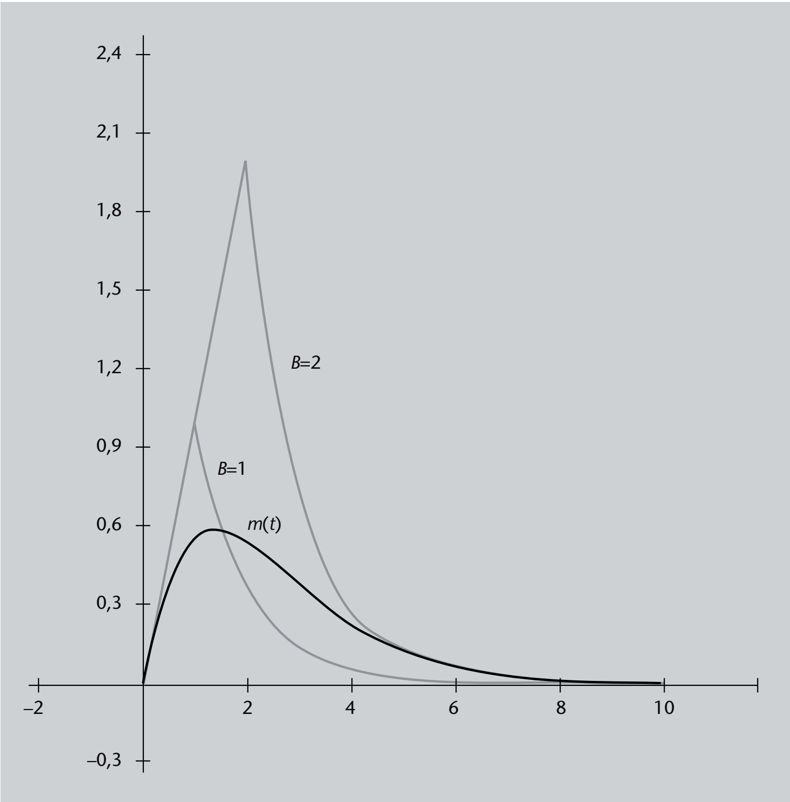


Figura 10

Realitzacions per a $B = 1$ i $B = 2$ comparades amb $m(t)$.

c) Fent $\frac{dm(t)}{dt} = \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) e^{-t} = 0$ trobem el màxim M de $m(t)$ en $t = \sqrt{2}$, que és $M = (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} = 0{,}587$. En canvi, el valor màxim d'una realització val B (correspon al pic) i el valor mitjà és 1.

En efecte, no coincideixen, ja que un és el màxim del valor mitjà i l'altre el valor mitjà del màxim (per exemple, per a qualsevol variable, en general és diferent el valor mitjà del quadrat que el quadrat del valor mitjà).

28. a) Notem que $\mathrm{E}(J) = p = \frac{1}{2}$. Llavors,

$$m(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}(J\cos t + (1-J)\sin t)$$

$$= \mathrm{E}(J)\cos t + (1-\mathrm{E}(J))\sin t = \tfrac{1}{2}(\cos t + \sin t).$$

$$R(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}[(J\cos t_1 + (1-J)\sin t_1)(J\cos t_2 + (1-J)\sin t_2)]$$

$$= \mathrm{E}[J^2\cos t_1\cos t_2 + (1-J)J(\sin t_1 + \cos t_2) + (1-J)^2\sin t_1\sin t_2)]$$

$$= \mathrm{E}[J\cos t_1\cos t_2 + (1-J)\sin t_1\sin t_2)] = \mathrm{E}(J)\cos t_1\cos t_2 + (1-\mathrm{E}[J])\sin t_1\sin t_2$$

$$= \tfrac{1}{2}(\cos t_1\cos t_2 + \sin t_1\sin t_2) = \tfrac{1}{2}\cos(t_2 - t_1).$$

(Hem utilitzat $J^2 = J$, $(1-J)J = J - J^2 = 0$ i $(1-J)^2 = 1 - 2J + J^2 = 1 - J$.)

Alternativament, es poden calcular les esperances sumant sobre els valors de J ($X(t) = \cos t$ o $X(t) = \sin t$ amb probabilitat $\frac{1}{2}$ cada valor). En aquest cas hauria estat més directe fer-ho així, però el mètode utilitzat és més general.

b) Representem per $X_1(t)$ i $X_2(t)$ les intensitats radiades per cada partícula. Són dos processos amb la mateixa distribució probabilística, independents. La intensitat total és $Y_c(t) = X_1(t) + X_2(t)$. La potència total és:

$$\mathrm{Pot}_{Y_c} = \mathrm{E}(Y_c(t)^2) = \mathrm{E}[(X_1(t) + X_2(t))^2]$$

$$= \mathrm{E}[X_1(t)^2 + X_2(t)^2 + 2X_1(t)X_2(t)] = \mathrm{Pot}_{X_1} + \mathrm{Pot}_{X_2} + 2m_{X_1}(t)m_{X_2}(t)$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{4}(\cos t + \sin t)^2$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}(1 + 2\cos t\sin t) = \tfrac{3}{2} + \cos t\sin t.$$

c) Ara la intensitat total val $Y_{sc}(t) = 2X(t)$. La potència total és:

$$\mathrm{Pot}_{Y_{sc}} = \mathrm{E}(Y_{sc}(t)^2) = 4\,\mathrm{E}(X(t)^2) = 4\mathrm{Pot}_X = 2.$$

d)

$$U_c = \int_0^{2\pi} \mathrm{Pot}_{Y_c}(t)dt = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{3}{2} + \cos t\sin t\right) dt = 3\pi.$$

$$U_{sc} = \int_0^{2\pi} \mathrm{Pot}_{Y_{sc}}(t)dt = \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi.$$

L'energia en l'estat supercoherent és $1,3$ vegades superior.

e) Si tenim N partícules, $Y_{sc}(t) = NX(t)$, $\mathrm{Pot}_{Y_{sc}} = N^2\mathrm{Pot}_X = \frac{N^2}{2}$ i $U_{sc} = N^2\pi$.

En l'estat coherent, $Y_c(t) = \sum_{i=1}^{N} X_i(t)$.

$$\mathrm{Pot}_{Y_c} = \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i(t)\right)^2\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i(t)^2 + 2\sum_{i<j} X_i(t)X_j(t)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Pot}_{X_i} + 2\sum_{i<j} m_{X_i}(t)m_{X_i}(t) = N\frac{1}{2} + 2\binom{N}{2}\frac{1}{4}(\cos t + \sin t)^2$$

$$= \frac{N}{2} + \frac{N^2 - N}{4}(1 + 2\cos t \sin t) = \frac{N^2 + N}{4} + \frac{N^2 - N}{2}\cos t \sin t.$$

$$U_c = \frac{N^2 + N}{2}\pi.$$

$$\frac{U_{sc}}{U_c} = \frac{N^2\pi}{\frac{N^2+N}{2}\pi} = \frac{2}{1 + N^{-1}}.$$

29. a) $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \mathrm{E}(e^{-At_1}e^{-At_2}) = \mathrm{E}(e^{-A(t_1+t_2)}) = m(t_1 + t_2)$.

b)

$$m(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} f_A(a)\,da = \int_0^1 e^{-at} a\,da + \int_1^2 e^{-at}(2-a)\,da$$

$$= \left[-\left(\frac{a}{t} + \frac{1}{t^2}\right)e^{-at}\right]_{a=0}^{a=1} - \left[\left(\frac{2-a}{t} - \frac{1}{t^2}\right)e^{-at}\right]_{a=1}^{a=2}$$

$$= \frac{1 - 2e^{-t} + e^{-2t}}{t^2} = \left(\frac{1 - e^{-t}}{t}\right)^2.$$

Utilitzant el resultat de a:

$$R(t_1, t_2) = \left(\frac{1 - e^{-(t_1+t_2)}}{t_1 + t_2}\right)^2.$$

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = \left(\frac{1 - e^{-(t_1+t_2)}}{t_1 + t_2}\right)^2 - \left(\frac{(1 - e^{-t_1})(1 - e^{-t_2})}{t_1 t_2}\right)^2.$$

c) $X(1) = e^{-A}$ pren tots les valors dins de l'interval $[e^{-2}, 1]$. El procés és d'estat continu, ja que la variable resultant en fixar t és contínua.

d) Atès que $\mathrm{E}(X(t)) = m(t)$ i $\mathrm{Var}(X(t)) = \mathrm{E}(X(t)^2) - \mathrm{E}(X(t))^2 = R(t,t) - m(t)^2 = C(t,t)$:

$$\mathrm{E}(X(1)) = m(1) = (1 - e^{-1})^2 = 0{,}3996.$$

$$\mathrm{Var}(X(1)) = C(1,1) = \left(\frac{1 - e^{-2}}{2}\right)^2 - (1 - e^{-1})^4 = 0{,}0272.$$

e)

$$m(t) = \mathrm{E}\left(e^{-(U_1+U_2)t}\right) = \mathrm{E}\left(e^{-U_1 t}e^{-U_2 t}\right) = \mathrm{E}\left(e^{-U_1 t}\right)\mathrm{E}\left(e^{-U_2 t}\right) =$$

$$\left(\int_0^1 e^{-ut}du\right)^2 = \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)^2.$$

30. a) Com A i B són del mateix tipus, tenen els mateixos paràmetres. En particular, $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(B^2) = \int_1^2 a^2 da = \frac{7}{3}$.

$$m(t) = \mathrm{E}(A^2 - B^2 t + t^2) = \mathrm{E}(A^2) - \mathrm{E}(B^2)t + t^2 = \frac{7}{3}(1-t) + t^2.$$

b) La càrrega inicial és $X(0) = A^2$. La càrrega mínima es dóna quan $0 = \frac{dX(t)}{dt} = -B^2 + 2t$, és a dir, per a $t = \frac{B^2}{2}$. Així, $X_{\text{min}} = A^2 - \frac{B^4}{4}$ i la diferència entre els dos valors és $\frac{B^2}{4}$.

$$P\left(\frac{B^4}{4} > 3\right) = P(\sqrt[4]{12} < B \leq 2) = 2 - \sqrt[4]{12} = 0{,}1388.$$

c) $X(0) = A^2$ i $X(1) = A^2 - B^2 + 1$.

$\mathrm{Cov}(X(0), X(1)) = \mathrm{Cov}(A^2, A^2 - B^2 + 1) = \mathrm{Cov}(A^2, A^2) - \mathrm{Cov}(A^2, B^2) + \mathrm{Cov}(A^2, 1) = \mathrm{Var}(A^2)$.

$\mathrm{Var}(X(0)) = \mathrm{Var}(A^2)$. $\mathrm{Var}(X(1)) = \mathrm{Var}(A^2 - B^2 + 1) = \mathrm{Var}(A^2) + \mathrm{Var}(B^2) = 2\,\mathrm{Var}(A^2)$.

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}[X(0), X(1)]}{\sigma_{X(0)}\sigma_{X(1)}} = \frac{\mathrm{Var}(A^2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(A^2)}\sqrt{2\,\mathrm{Var}(A^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071.$$

Encara que no ha estat necessari, notem que $\mathrm{Var}(A^2) = \mathrm{E}(A^4) - \mathrm{E}(A^2)^2 = \int_1^2 a^4 da - (\frac{7}{3})^2 = \frac{34}{45}$.

31.

a) $m(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_V(v) dv.$

Ara tenim que $X(t) = e^{-(t-V)}$ si $V < t$ i $X(t) = 1$ si $V \geq t$. Llavors:

$$m(t) = \int_0^t e^{-(t-v)} \cdot ve^{-v} dv + \int_t^\infty 1 \cdot ve^{-v} dv$$

$$= e^{-t} \int_0^t v\, dv + \int_t^\infty ve^{-v} dv = \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) e^{-t}.$$

b) $m(t)$ segueix el comportament decreixent de les realitzacions, si bé la mitjana estadística ha fet desaparèixer la irregularitat (punxa).

Figura 11

Dues realitzacions del procés $X(t)$, ús de l'amplada de banda d'una connexió.

Figura 12

Valor mitjà de $X(t)$.

Figura 11. Dues realitzacions del procés $X(t)$

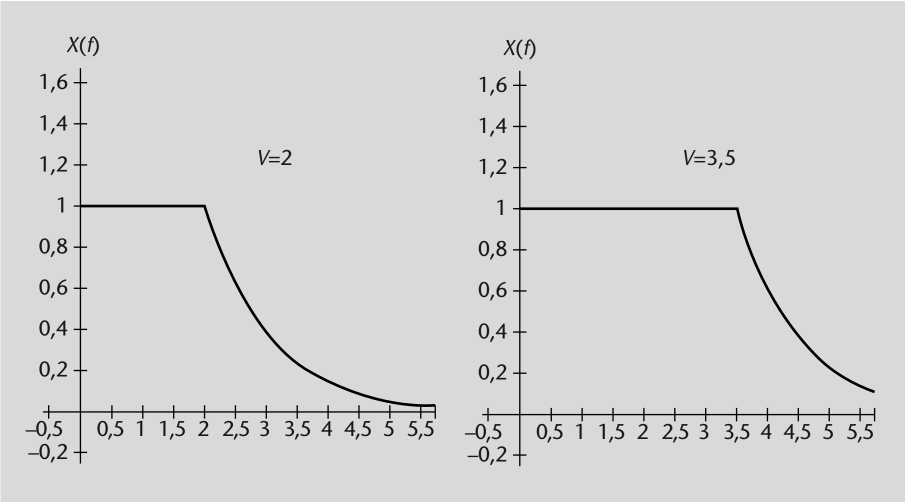
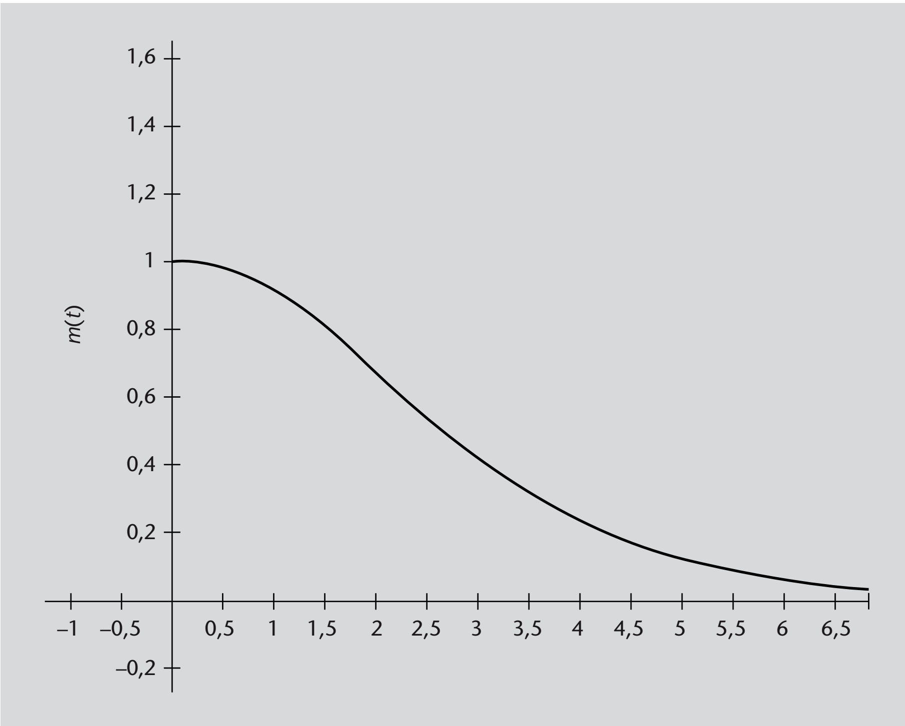


Figura 12. Valor mitjà de $X(t)$



c) $P(X(t) = 1) = P(V \geq t) = \int_t^\infty ve^{-v}dv = (1 + t)e^{-t}$.

d) El valor mínim es dóna quan $V = 0$ i $X(1) = e^{-1}$. El valor màxim és 1, i es poden agafar tots els valors intermedis.

El fet de prendre valors sobre un interval real indica caràcter continu, mentre que el fet que el valor 1 tingui probabilitat no nul·la indica aspectes discrets. Es tracta d'una variable mixta.