Exercicis d'autoavaluació de matrius i sistemes d'equacions

PID_00255400

Raquel Ferreras
Jordi Sales

Universitat
Oberta
de Catalunya

Raquel Ferreras

Professora dels Estudis d'Economia i Empresa de la Universitat Oberta de Catalunya. Llicenciada en Administració i Direcció d'Empreses per la Universitat de Barcelona. Doctora en Educació i TIC (*e-learning*) per la Universitat Oberta de Catalunya.

Jordi Sales

Professor de la Facultat de Turisme i Direcció Hotelera Sant Ignasi de la Universitat Ramon Llull. Llicenciat i doctor en Economia per la Universitat de Barcelona. Consultor dels Estudis d'Economia i Empresa de la UOC.

Índex

Introducció

En aquest mòdul comencem l'estudi de l'àlgebra, i el seu objectiu principal és repassar com treballar amb matrius i resoldre sistemes d'equacions. Presentarem un conjunt de preguntes curtes amb les corresponents solucions. Es recomana intentar fer els exercicis i posteriorment revisar les solucions proposades.

Objectius

Els objectius que hauríeu d'assolir un cop fets els exercicis que proposem són:

1. Operacions amb matrius: suma, producte per escalar, producte de matrius, matriu transposada i matriu simètrica.

2. Càlcul de la matriu inversa.

3. Càlcul del rang d’una matriu.

4. Resolució de sistemes d’equacions.

1. Enunciats de les preguntes curtes

1.1. Operacions amb matrius

1) Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, calculeu $B \cdot A + A^t \cdot B^t$.

2) Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, calculeu $A \cdot B^t - 2 \cdot C^{-1}$.

3) Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, calculeu $A^{-1} + B^t \cdot C$.

1.2. Matriu inversa i simètrica

1) Calculeu la matriu inversa de la matriu $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Calculeu la matriu inversa de la matriu $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

3) Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, determineu per a quins valors del paràmetre k la matriu $B \cdot A$ té matriu inversa.

4) Donades les matrius $M = \begin{pmatrix} x & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, determineu el valor de x per tal que $M \cdot N$ tingui com a resultat una matriu simètrica.

1.3. Rang d'una matriu

1) Determineu el rang de la matriu $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ a & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ per als diferents valors del paràmetre a.

2) Estudieu el rang de la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ segons els valors del paràmetre k.

3) Donada la matriu $M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ m & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, determineu el seu rang per als diferents valors de *m*.

4) Donada la matriu $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & -a & a \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, determineu el/s valor/s del paràmetre *a* per als quals la matriu té rang 2.

1.4. Sistemes d’equacions

1) Donat el següent sistema d’equacions lineals:

$$\left.\begin{aligned} x+5y&=a \\ 2x+ay&=a^2 \end{aligned}\right\}$$

a) Discutiu el sistema en funció del valor del paràmetre *a*.

b) Resoleu el sistema en funció del paràmetre *a* quan sigui compatible.

2) Per a quin/s valor/s del paràmetre *a* el sistema d'equacions $\left.\begin{aligned} x+(a-1)y&=3 \\ ax+ay&=6 \end{aligned}\right\}$ és compatible indeterminat?

3) Per a quin/s valor/s del paràmetre *k* el sistema d'equacions $\left.\begin{aligned} x+(k+1)y&=1 \\ kx+2y&=-2 \end{aligned}\right\}$ és incompatible?

4) Per a quin/s valor/s del paràmetre *m* el sistema d'equacions $\left.\begin{aligned} 2x-y&=5 \\ 4x+(1-m)y&=m+7 \end{aligned}\right\}$ és compatible indeterminat?

2. Solucions a les preguntes curtes

2.1. Operacions amb matrius

1) Primer obtindrem el producte B·A. L'ordre de la matriu B és (3x2) i el de la matriu A és (2x3).

Nota

Com que el nombre de columnes de la primera matriu coincideix amb el nombre de files de la segona matriu, el producte es pot fer.

Per tant,

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & -2+0 & 1-2 \\ 4+2 & -8+0 & 4+2 \\ 4+0 & -8+0 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & -8 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculem ara les matrius transposades A^t i B^t, intercanviant files per columnes:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenim ara el producte $A^t \cdot B^t$, :

$$A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 4+2 & 4+0 \\ -2+0 & -8+0 & -8+0 \\ 1-2 & 4+2 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 4 \\ -2 & -8 & -8 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finalment,

$$B \cdot A + A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & -8 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 6 & 4 \\ -2 & -8 & -8 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 4 & -16 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

2) Primer obtindrem la matriu transposada de B, intercanviant files per columnes.

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A continuació, fem el producte $A \cdot B^t$. L'ordre de la matriu A és (2x3) i el de la matriu Bt és (3x2). Com que el nombre de columnes de la primera matriu coincideix amb el nombre de files de la segona matriu, el producte es pot fer. Per tant,

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0+0 & -6+4+0 \\ 2+0-1 & -3-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Nota

La matriu inversa d'una matriu P ve donada per $P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot adj(P^t)$.

Calculem ara C^{-1}, per a això calculem el determinant de la matriu C:

$$det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2.$$

Com que és diferent de zero, sabem que existeix C^{-1}. A continuació, transposem la matriu C $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ i fem la matriu d'adjunts de la matriu transposada $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Multipliquem per l'invers del determinant i obtenim

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalment,

$$A \cdot B^t - 2 \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

3) Primer trobarem A^{-1}, per això calculem el determinant de la matriu A, $det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2.$

Nota

Com que el determinant és diferent de zero, sabem que existeix A^{-1}.

Transposem la matriu A, $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ i fem la matriu d'adjunts de la matriu transposada $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Finalment multipliquem per l'invers del determinant i obtenim

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcularem el producte $B^t \cdot C$. La matriu transposada de la matriu B és $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. L'ordre de la matriu B^t és (2x3) i el de la matriu C és (3x2). Com que el nombre de columnes de la primera matriu coincideix amb el nombre de files de la segona matriu, el producte és pot fer. Per tant,

$$B^t \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+8-9 & 1+12-6 \\ 0+16-15 & 0+24-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

Finalment,

$$A^{-1}+B^t\cdot C=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 1 & 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{17}{2}\\ 3 & 15\end{pmatrix}.$$

2.2. Matriu inversa i simètrica

1) Calcularem la matriu inversa de la matriu P amb la fórmula dels adjunts. En primer lloc, calculem el determinant de la matriu:

$$\begin{vmatrix}-2 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 2\end{vmatrix}=-4+8-(-6+8)=4-2=2.$$

Transposem P, $P^t=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ i fem la matriu adjunta de la matriu transposada:

$$adj(P^t)=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -2 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ -4 & 2 & -4\\ -7 & 2 & -6\end{pmatrix}.$$

Per últim,

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}\cdot adj(P^t)=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ -4 & 2 & -4\\ -7 & 2 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ -\frac{7}{2} & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

2) Calcularem la matriu inversa de la matriu M amb la fórmula dels adjunts. En primer lloc, calculem el determinant de la matriu:

$$\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=10-5=5.$$

Transposem M, $M^t=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

Fem la matriu adjunta de la matriu transposada $adj(M^t)=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Per últim, $M^{-1}=\frac{1}{|M|}\cdot adj(M^t)=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & \frac{-1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & \frac{-3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$.

3) Realitzem en primer lloc el producte $B\cdot A$. Aquest producte de matrius es pot fer perquè el nombre de columnes de la primera matriu (B) i el nombre de files de la segona (A) coincideixen:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}k & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k+0+0 & 0+0-1\\ 1+2+0 & 0+k+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & -1\\ 3 & k+2\end{pmatrix}.$$

La matriu resultant del producte $B\cdot A$ és una matriu d'ordre 2x2. La matriu inversa es podrà calcular si el seu determinant és diferent de 0. Calculem el determinant:

$$\begin{vmatrix}k & -1\\ 3 & k+2\end{vmatrix}=k^2+2k+3.$$

L'equació $k^2+2k+3=0$ no té solució, per tant, el determinant de la matriu serà sempre diferent de zero. D'aquesta manera, podem concloure que existeix la matriu inversa per a qualsevol valor de $k\in R$.

4) Procedim a calcular en primer lloc el producte $M\cdot N$. L'ordre de la matriu M és (2x2) i el de la matriu N és (2x2). Com que el nombre de columnes de la primera matriu coincideix amb el nombre de files de la segona matriu, el producte es pot fer. Per tant,

$$M\cdot N=\begin{pmatrix}x & -5\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2-10 & 2x+5\\ 3x+4 & 4\end{pmatrix}.$$

Nota

Una matriu A és simètrica quan $A=A^t$.

La matriu resultant és simètrica només quan $3x+4=2x+5\leftrightarrow x=1$, de manera que ens queda:

$$M\cdot N=\begin{pmatrix}-9 & 7\\ 7 & 4\end{pmatrix}.$$

Observem doncs que efectivament és simètrica.

2.3. Rang d'una matriu

Nota

El rang d'una matriu és el màxim ordre dels menors no nuls de la matriu.

1) Si calculem el determinant de la matriu M el resultat és:

$$det(M)=\begin{vmatrix}3 & 4 & 2\\ a & 3 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=4a-4-6+6=4a-4.$$

Necessitem conèixer els valors de a que anul·len aquest determinant. Així, per a $4a-4=0\rightarrow a=1$, el determinant de la matriu és zero.

Analitzem els diferents casos:

- Si $a \neq 1$, el determinant de la matriu és diferent de zero i el rang de la matriu M és 3.

- En el cas de $a = 1$, el rang de la matriu M serà inferior a 3. Com que en aquest cas la matriu M resulta ser $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, podem trobar alguna submatriu quadrada d'ordre 2 amb determinant no nul, com $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = .$ Així, podem assegurar que el rang de la matriu és 2 quan $a = 1$.

2) Si calculem el determinant de la matriu M, el resultat és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 4k^2 + 10 - (4 + 14k) = 4k^2 - 14k + 6.$$

Necessitem conèixer els valors de k que anul·len aquest determinant. Així, si resolem l'equació $4k^2 - 14k + 6 = 0$, les solucions són $k = 3$ i $k = \frac{1}{2}$. Analitzem els diferents casos:

- Si $k \neq 3$ i $k \neq \frac{1}{2}$, el determinant de la matriu M és diferent de zero i el seu rang és 3.

- En el cas de $k = 3$, la matriu queda $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ i podem trobar una submatriu quadrada d'ordre 2 amb determinant no nul com $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. Així, podem assegurar que el rang de la matriu M és 2 quan $k = 3$.

- En el cas de $k = \frac{1}{2}$, la matriu queda $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ i també podem trobar una submatriu quadrada d'ordre 2 amb determinant no nul com $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Així, podem assegurar que el rang de la matriu M és 2 quan $k = \frac{1}{2}$.

Podem concloure, doncs, que la matriu M té rang 2 per a $k = 3$ i $k = \frac{1}{2}$, i en la resta de casos té rang 3.

3) Si calculem el determinant de la matriu M, el resultat és:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ m & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - m^2 - 12 - (9m - 8 - 2m) = -m^2 - 7m + 8.$$

Necessitem conèixer els valors de m que anul·len aquest determinant. Així, si resolem l'equació $-m^2-7m+8=0$, les solucions són $m=-8$ i $m=1$. Per tant:

- Si $m\neq -8$ i $m\neq 1$, el determinant de la matriu és diferent de zero i el seu rang és 3.

- En el cas de $m=-8$, la matriu queda $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 \\ -8 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ i podem trobar una submatriu quadrada d'ordre 2 amb determinant no nul com $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 3 \end{vmatrix}=-2\neq 0$. Així, podem assegurar que el rang de la matriu és 2 quan $m=-8$.

- En el cas de $m=1$, la matriu queda $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ i també podem trobar una submatriu quadrada d'ordre 2 amb determinant no nul com $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7\neq 0$. Així, podem assegurar que el rang de la matriu és 2 quan $m=1$.

4) Si calculem el determinant de la matriu A, el resultat és:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & -a & a \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-9a+2a-(-a^2+30)=a^2-7a-30.$$

Necessitem conèixer els valors de a que anul·len aquest determinant. Així, si resolem l'equació $a^2-7a-30=0$, les solucions són $a=-3$ i $a=10$. Per tant:

- Si $a\neq -3$ i $a\neq 10$, el determinant de la matriu és diferent de zero i el seu rang és 3.

- En el cas de $a=-3$, la matriu queda $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ i podem trobar una submatriu quadrada d'ordre 2 amb determinant no nul com $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-1\neq 0$. Així, podem assegurar que el rang de la matriu és 2 quan $a=-3$.

- En el cas de $a=10$, la matriu queda $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 5 & -10 & 10 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ i també podem trobar una submatriu quadrada d'ordre 2 amb determinant no nul com $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -10 \end{vmatrix}=-40\neq 0$. Així, podem assegurar que el rang de la matriu és 2 quan $a=10$.

Podem concloure, doncs, que la matriu A tindrà rang 2 per a $a=-3$ i $a=10$ i que en la resta de casos té rang 3.

2.4. Sistemes d'equacions

1)

a) Si utilitzem el mètode de Gauss, substituint la segona fila per la suma d'aquesta i de la primera multiplicada per (-2), obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & a \\ 2 & a & a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & a \\ 0 & a-10 & a^2-2a \end{pmatrix}.$$

Per a $a = 10$, ens quedaria la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 80 \end{pmatrix}$. Per tant, el rang de la matriu de coeficients és 1 i, en canvi, el rang de la matriu ampliada és 2. Podem deduir, doncs, que per a $a = 10$ el sistema és incompatible perquè el rang de la matriu de coeficients i el de la ampliada no coincideixen.

Nota

Un sistema és compatible determinat si el rang de la matriu de coeficients coincideix amb el rang de la matriu ampliada i és igual que el nombre d'incògnites.

Per a $a \neq 10$, com que el rang de la matriu de coeficients i el de la matriu ampliada és 2 i coincideixen amb el nombre d'incògnites, el sistema és compatible determinat.

b) Si $a \neq 10$, la solució del sistema en funció del paràmetre a serà:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & a \\ 2 & a & a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & a \\ 0 & a-10 & a^2-2a \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = a - 5 \cdot \frac{a^2-2a}{a-10} = \frac{a^2-10a-5a^2+10a}{a-10} = \frac{-4a^2}{a-10} \\ y = \frac{a^2-2a}{a-10} \end{cases}$$

Una altra opció seria resoldre per Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 5 \\ a^2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & a \end{vmatrix}} = \frac{-4a^2}{a-10} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & a \end{vmatrix}} = \frac{a^2-2a}{a-10}$$

2) Esbrinem el rang de la matriu de coeficients i de la matriu ampliada en funció del valor del paràmetre a.

Nota

Un sistema és compatible indeterminat si el rang de la matriu de coeficients coincideix amb el rang de la matriu ampliada i és menor que el nombre d'incògnites.

La matriu de coeficients és $\begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a & a \end{pmatrix}$ i la matriu ampliada és $\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ a & a & 6 \end{pmatrix}$.

Analitzem, en primer lloc, el rang de la matriu de coeficients a partir del seu determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a & a \end{vmatrix} = a - a(a-1) = -a^2 + 2a.$$

Si el determinant és nul, el rang de la matriu de coeficients és 1. Això passa quan

$$-a^2 + 2a = 0 \quad \leftrightarrow \quad a = 0 \quad o \quad a = 2.$$

Per tant, per a $a=0$ i $a=2$ el rang de la matriu de coeficients és 1. En canvi, per a $a\neq 0$ i $a\neq 2$ el rang de la matriu de coeficients és 2, i coincidirà amb el rang de la matriu ampliada i amb el nombre d'incògnites, essent el sistema compatible determinat.

Calculem ara el rang de la matriu ampliada per al cas $a=0$, essent la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. El rang és 2, ja que la submatriu $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ té determinant no nul. En conseqüència, per a $a=0$, com que el rang de la matriu de coeficients i el de la matriu ampliada no coincideixen, el sistema és incompatible.

Calculem ara el rang de la matriu ampliada per al cas $a=2$, essent la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. El rang és 1, ja que no podem trobar cap submatriu d'ordre dos amb determinant no nul. Per tant, per a $a=2$, com que el rang de la matriu de coeficients i el rang de la matriu ampliada coincideixen però és menor que el nombre d'incògnites, el sistema és compatible indeterminat.

Podem concloure, doncs, que el sistema serà compatible indeterminat per a $a=2$.

3) Esbrinem el rang de les dues matrius en funció del valor del paràmetre k.

Nota

Un sistema és incompatible si el rang de la matriu de coeficients és diferent del rang de la matriu ampliada.

La matriu de coeficients és $\begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ k & 2 \end{pmatrix}$ i la matriu ampliada és $\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ k & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Analitzem, en primer lloc, el rang de la matriu de coeficients a partir del seu determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ k & 2 \end{vmatrix} = 2-k(k+1) = -k^2-k+2.$$

Si el determinant és nul, el rang de la matriu de coeficients és 1. Això passa quan

$$-k^2-k+2=0 \quad \leftrightarrow \quad k=-2 \quad o \quad k=1.$$

Per tant, per a $k=-2$ i $k=1$, el rang de la matriu de coeficients és 1. En canvi, per a $k\neq -2$ i $k\neq 1$, el rang de la matriu de coeficients és 2, i coincidirà amb el rang de la matriu ampliada i amb el nombre d'incògnites, essent el sistema compatible determinat.

Calculem ara el rang de la matriu ampliada per al cas $k=-2$, essent la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. El rang és 1, ja que no podem trobar cap submatriu d'ordre dos amb determinant no nul. Per tant, per a $k=-2$, com que el rang de la matriu de coeficients i el rang de la matriu ampliada coincideixen però és menor que el nombre d'incògnites, el sistema és compatible indeterminat.

Calculem ara el rang de la matriu ampliada per al cas $k=1$, essent la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. El rang és 2, ja que la submatriu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ té determinant no nul. En conseqüència, per a $k=1$, com que el rang de la matriu de coeficients i el de la matriu ampliada no coincideixen, el sistema és incompatible.

Podem concloure, doncs, que el sistema serà incompatible per a $k=1$.

4) Esbrinem el rang de les dues matrius en funció del valor del paràmetre m.

La matriu de coeficients és $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1-m \end{pmatrix}$ i la matriu ampliada és $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1-m & m+7 \end{pmatrix}$.

Analitzem, en primer lloc, el rang de la matriu de coeficients, a partir del seu determinant:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1-m \end{vmatrix} = 2(1-m)-(-4) = -2m+6.$$

Si $m \neq 3$, el determinant és diferent de 0, de manera que el rang de la matriu de coeficients és 2. Així, com que el rang de la matriu ampliada és com a màxim 2 i la matriu de coeficients és una submatriu de l'ampliada, podem dir que la matriu ampliada també té rang 2. A més, com que els rangs coincideixen amb el nombre d'incògnites, podem afirmar que el sistema és compatible determinat.

El determinant de la matriu de coeficients és nul quan $m=3$, de manera que el seu rang és 1.

Calculem ara el rang de la matriu ampliada per al cas $m=3$, essent la matriu $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$. El rang és 1, ja que no podem trobar cap submatriu d'ordre dos amb determinant no nul. Per tant, per a $m=3$, com que el rang de la matriu de coeficients i el rang de la matriu ampliada coincideixen però és menor que el nombre d'incògnites, el sistema és compatible indeterminat.

Podem concloure, doncs, que el sistema únicament serà compatible indeterminat per a $m=3$.