Exercicis d'autoavaluació de les idees bàsiques del càlcul

PID_00255403

Raquel Ferreras
Jordi Sales

Universitat
Oberta
de Catalunya

Raquel Ferreras

Professora dels Estudis d'Economia i Empresa de la Universitat Oberta de Catalunya. Llicenciada en Administració i Direcció d'Empreses per la Universitat de Barcelona. Doctora en Educació i TIC (*e-learning*) per la Universitat Oberta de Catalunya.

Jordi Sales

Professor de la Facultat de Turisme i Direcció Hotelera Sant Ignasi de la Universitat Ramon Llull. Llicenciat i doctor en Economia per la Universitat de Barcelona. Consultor dels Estudis d'Economia i Empresa de la UOC.

Índex

Introducció

En aquest mòdul continuem l'estudi del càlcul treballant el càlcul de límits i analitzant quan una funció és contínua. També repassarem el càlcul de derivades i integrals i veurem com són d'importants aquests dos conceptes per treballar amb funcions amb contingut econòmic. Per assolir aquests objectius presentarem un conjunt de preguntes curtes amb les corresponents solucions. Es recomana intentar fer els exercicis i posteriorment revisar les solucions proposades.

Objectius

Els objectius que hauríeu d'assolir una cop fets els exercicis que proposem són:

1. Càlcul de límits i anàlisi de la continuïtat d'una funció.

2. Càlcul de la derivada i aplicació de la regla de la cadena per derivar funcions compostes.

3. Càlcul d'integrals definides i indefinides. Aplicació de la regla de Barrow.

4. Construcció de la funció de beneficis. Relació entre funcions derivades i integrals.

1. Enunciats de les preguntes curtes

1.1. Límits i continuïtat

1) Calculeu el valor dels següents límits:

a) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-2}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2+2x-4} - 2x$

c) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+3}$

2) Calculeu el valor dels següents límits:

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-8x^2+16x-3}{x^2-8x+15}$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-4x^4}{(x^2+1)^2}$

3) Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 - m & \text{per a } x \le 3 \\ 3m \cdot e^{x-3} + 1 & \text{per a } x > 3 \end{cases}$.

a) Determineu per a quins valors del paràmetre m la funció $f(x)$ és contínua en el punt $x = 3$.

b) Per a $m = 1$, justifiqueu si la funció $f(x)$ és derivable en el punt $x = 3$.

1.2. Càlcul de derivades

1) Determineu per a quins valors de a, la derivada de la funció $f(x) = (ax^3 + 2ax + 5)^2$ en el punt $x = -1$ és 0.

Nota

Quan escrivim "log" ens referim al logaritme neperià.

2) Determineu quin ha de ser el valor del paràmetre a, de manera que les derivades de les funcions $f(x) = log(ax^2+2)$ i $g(x) = \sqrt{2x}$ coincideixin per a $x = 2$.

3) Determineu per a quin valor del paràmetre a les derivades de les funcions $f(x) = log((a \cdot x)^2)$ i $g(x) = ax \cdot e^{(x^2-1)}$ coincideixen en el punt $x = 1$.

1.3. Càlcul d'integrals

1) Calculeu les següents integrals definides:

a) $\int_0^4 \left(e^{2x} - 2\sqrt{x}\right) dx$

b) $\int_1^e \left(\frac{(\log(x))^2}{x} + \frac{x+1}{x}\right)$

2) Aplicant la regla d'integració per parts, calculeu la integral indefinida $\int (x+5) \cdot e^{2x}\, dx$.

3) Calculeu la següent integral indefinida mitjançant el mètode d'integració per parts (apliqueu aquest mètode tantes vegades com sigui necessari fins a arribar a resoldre la integral):

$$\int (\log x)^3 dx \qquad 4.1$$

1.4. Enunciats econòmics

1) El cost marginal d'una empresa ve donat per la funció $CMg(q) = q^2 - 20q + 110$, i el seu ingrés total, per la funció $I(q) = -10q^2 + 231q$, on q són les unitats anuals produïdes.

a) Trobeu la funció de beneficis de l'empresa, sabent que el cost fix és $CF = 10$.

b) Comproveu que per a la quantitat q, on la derivada de la funció de beneficis és igual a zero, el valor del cost marginal i de l'ingrés marginal coincideixen.

2) L'ingrés marginal d'una empresa ve donat per la funció $I'(q) = -10q + 310$, i el seu cost total, per la funció $CT(q) = q^3 - 5q^2 + 10q + 15$, on q són les unitats anuals produïdes.

a) Trobeu la funció de beneficis de l'empresa.

b) Comproveu que per a la quantitat q, on la derivada de la funció de beneficis és igual a zero, el valor del cost marginal i de l'ingrés marginal coincideixen.

2. Solucions a les preguntes curtes

2.1. Límits i continuïtat

1)

a) En primer lloc, substituïm la variable x per ∞:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-2} = \infty - \infty. \text{ Indeterminació.}$$

Hem de multiplicar i dividir pel conjugat de l'expressió inicial i aplicar la diferència de quadrats:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-2}\right)\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)-(x^2-2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-2}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x+3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \qquad 4.2$$

.

Com que tenim una nova indeterminació, haurem de dividir numerador i denominador per la màxima potència de x. Fixeu-vos que la x^2 de dintre l'arrel compta com a x, i per tant en aquest cas la màxima potència de x és x^2 (del numerador):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x+3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}+\frac{\sqrt{x^2-2}}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{\frac{x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^4}-\frac{2}{x^4}}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^4}}} = \frac{-1}{0} = -\infty. \qquad 4.3$$

b) En primer lloc substituïm la variable x per ∞:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+2x-4} - 2x = \infty - \infty. \text{ Indeterminació.}$$

Hem de multiplicar i dividir pel conjugat de l'expressió inicial i aplicar la diferència de quadrats:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+2x-4} - 2x = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+2x-4} - 2x)\frac{\sqrt{4x^2+2x-4}+2x}{\sqrt{4x^2+2x-4}+2x} =$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(4x^2+2x-4)-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x-4}+2x} = \frac{2x-4}{\sqrt{4x^2+2x-4}+2x} = \frac{+\infty}{+\infty}. \qquad 4.4$$

Com que tenim una nova indeterminació, haurem de dividir numerador i denominador per la màxima potència de x. Fixeu-vos que la x^2 de dintre l'arrel compta com a x, i per tant en aquest cas la màxima potència de x és x:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{4x^2+2x-4}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2+2x-4}}{x}+\frac{2x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{4}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}+2} = \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2}. \qquad 4.5$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+3} = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+2x)-(x^2+3)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \qquad 4.6$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}+\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \frac{2}{2} = 1.$$

2)

a) En primer lloc substituïm la variable x per 3:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-8x^2+16x-3}{x^2-8x+15} = \frac{0}{0}.$$ Hi ha una indeterminació.

Com que el numerador i denominador són polinomis i $x = 3$ és una arrel comú a tots dos, podem escriure:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-8x^2+16x-3}{x^2-8x+15} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\cdot(x^2-5x+1)}{(x-3)\cdot(x-5)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+1}{x-5} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

Nota

Podem obtenir la descomposició del polinomi del numerador aplicant Ruffini.

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

c) En primer lloc substituïm la variable x per $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-4x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{-\infty}{\infty}.$$ Hi ha una indeterminació.

En aquest cas, haurem de dividir numerador i denominador per la màxima potència de x, que és x^4, ja que si desenvolupem el denominador en resulta $(x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1$. Així,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x^4}{(x^2+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x^4}{x^4+2x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^4}-\frac{4x^4}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-4}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\frac{0-4}{1+0+0}=-4 \qquad 4.8$$

3)

a) La funció és contínua en $x=3$ si es compleix el següent:

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^+}f(x)=f(3)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-m)=9-m\\ \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(3m\cdot e^{x-3}+1)=3m+1\\ f(3)=9-m\end{array}\right\}\Rightarrow 9-m=3m+1. \qquad 4.9$$

Així, la funció és contínua en $x=3$ si $4m=8\Rightarrow m=2$.

b) Si $m=1$, en el punt $x=3$ la funció no és contínua i, per tant, en el punt $x=3$ la funció $f(x)$ no és derivable.

2.2. Càlcul de derivades

1) Per al càlcul de la derivada de la funció $f(x)=(ax^3+2ax+5)^2$ aplicarem la regla de la cadena i obtenim:

$$f'(x)=2(ax^3+2ax+5)(3ax^2+2a). \qquad 4.10$$

Si l'avaluem a $x=-1$, obtenim $f'(-1)=2(-a-2a+5)(3a+2a)=-30a^2+50a$. Aleshores cal trobar el valor d'a tal que

$$-30a^2+50a=0\Rightarrow 10a(-3a+5)=0\Rightarrow a=0, a=\frac{5}{3}. \qquad 4.11$$

Per tant, la derivada de $f(x)$ en el punt $x=-1$ és 0, si $a=0$ o bé $a=\frac{5}{3}$.

2) Calculem primer les corresponents derivades:

$$f'(x)=\frac{1}{ax^2+2}(2ax)=\frac{2ax}{ax^2+2}. \qquad 4.12$$

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x}}2=\frac{1}{\sqrt{2x}}. \qquad 4.13$$

A continuació les avaluem en el punt $x=2$

$$f'(2)=\frac{2\cdot a\cdot 2}{a\cdot 2^2+2}=\frac{4a}{4a+2}. \qquad 4.14$$

$$g'(2)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{1}{2}. \qquad 4.15$$

I ara solucionem l'equació $\frac{4a}{4a+2}=\frac{1}{2}$, o equivalentment $8a=4a+2$, que té com a solució $a=\frac{1}{2}$. Així, per a $a=\frac{1}{2}$ es compleix que $f'(2)=g'(2)$.

3) Calculem primer les derivades corresponents:

$$f'(x)=\frac{1}{(a\cdot x)^2}(2(a\cdot x)\cdot(a))=\frac{2a^2\cdot x}{a^2\cdot x^2}=\frac{2}{x}. \qquad 4.16$$

$$g'(x)=a\cdot e^{(x^2-1)}+ax\cdot e^{(x^2-1)}(2x)=(a+2ax^2)\cdot e^{(x^2-1)}. \qquad 4.17$$

I a continuació les avaluem en el punt $x=1$.

$$f'(1)=\frac{2}{1}=2. \qquad 4.18$$

$$g'(1)=(a+2a\cdot 1^2)\cdot e^{(1^2-1)}=3a. \qquad 4.19$$

I ara solucionem l'equació $2=3a$, que té com a solució $a=\frac{2}{3}$. Així, per a $a=\frac{2}{3}$ es compleix que $f'(1)=g'(1)$.

2.3. Càlcul d'integrals

1)

a) Es tracta d'una integral definida. Així, en primer lloc, calculem la primitiva F(x) de la funció:

$$\int(e^{2x}-2\sqrt{x})\,dx=\int(e^{2x})\,dx-\int(2\sqrt{x})\,dx=\frac{1}{2}\int 2(e^{2x})\,dx-2\int(x)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}-2\frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+C. \qquad 4.20$$

I a continuació apliquem la regla de Barrow:

$$\int_0^4(e^{2x}-2\sqrt{x})\,dx=[F(x)]_0^4=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 4}-\frac{4}{3}4^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 0}-\frac{4}{3}\cdot 0\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^8-\frac{4}{3}8\right)-\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{e^8}{2}-\frac{32}{3}-\frac{1}{2}=1.479{,}31. \qquad 4.21$$

b) Es tracta d'una integral definida. Així, en primer lloc, calculem la primitiva F(x) de la funció:

$$\int\left(\frac{(\log(x))^2}{x}+\frac{x+1}{x}\right)dx=\int\left(\frac{(\log(x))^2}{x}\right)dx+\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=$$
$$=\int\left((\log(x))^2\cdot\frac{1}{x}\right)dx+\int 1\,dx+\int\frac{1}{x}\,dx=\frac{(\log(x))^3}{3}+x+\log(x)+C \quad 4.22$$

I a continuació apliquem la regla de Barrow:

$$\int_1^e\left(\frac{(\log(x))^2}{x}+\frac{x+1}{x}\right)dx=[F(x)]_1^e=\left[\frac{(\log(x))^3}{3}+\log(x)+x\right]_1^e=$$
$$\left(\frac{(\log(e))^3}{3}+\log(e)+e\right)-\left(\frac{(\log(1))^3}{3}+\log(1)+1\right)=\left(\frac{1^3}{3}+1+e\right)-\left(\frac{0}{3}+0+1\right)=4{,}051-1=3{,}051. \quad 4.23$$

2) Com es tracta d'una integral d'un producte entre un polinomi i una exponencial, apliquem la regla d'integració per parts: $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)\,dx$. Prenent $f(x)=x+5$ i $g'(x)=e^{2x}\,dx$, obtenim $f'(x)=1\,dx$ i $g(x)=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}$. Per tant,

$$\int(x+5)\cdot e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}(x+5)e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}\,dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)e^{2x}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C=$$
$$=e^{2x}\left(\frac{x}{2}+\frac{9}{4}\right)+C. \quad 4.24$$

$$\int(\log x)^3dx=\begin{bmatrix}u=(\log x)^3\to du=3(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}dx\\ dv=dx\to v=x\end{bmatrix}=x\cdot(\log x)^3-\int x\cdot 3(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}dx=$$

3) $=x\cdot(\log x)^3-3\int(\log x)^2dx=\begin{bmatrix}u=(\log x)^2\to du=2(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx\\ dv=dx\to v=x\end{bmatrix}=x\cdot(\log x)^3-3x(\log x)^2+$

$$+6\int\log x\,dx=\begin{bmatrix}u=\log x\to du=\frac{1}{x}dx\\ dv=dx\to v=x\end{bmatrix}=x\cdot(\log x)^3-3x(\log x)^2+6x\log x-6x+C.$$

2.4. Enunciats econòmics

1)

a) Per a obtenir la funció de cost total, $C(q)$, integrem la funció de cost marginal. En conseqüència, resolem:

$$C(q)=\int CMg(q)\,dq=\int(q^2-20q+110)\,dq=$$
$$=\int q^2\,dq-\int 20q\,dq+\int 110\,dq=\frac{q^3}{3}-20\frac{q^2}{2}+110q+C. \quad 4.25$$

Hem de tenir en compte, però, que el cost fix, o el cost quan la producció és $q=0$, és $CF=10$, i, per tant, podem assimilar la constant d'integració al valor del cost fix. D'aquesta manera la funció de cost total és:

$$C(q) = \frac{q^3}{3} - 10q^2 + 110q + 10. \qquad 4.26$$

Així, els beneficis són:

$$B(q) = I(q) - C(q) = (-10q^2 + 231q) - \left(\frac{q^3}{3} - 10q^2 + 110q + 10\right) = -\frac{q^3}{3} + 121q - 10.$$

Nota

Per obtenir la funció de beneficis de l'empresa, $B(q)$, tan sols hem de restar el cost total a l'ingrés total.

b) Ara hem de trobar aquella producció tal que $B'(q) = 0$. Si derivem la funció de beneficis obtenim:

$$B'(q) = -q^2 + 121. \qquad 4.28$$

I si resolem l'equació $-q^2 + 121 = 0$, obtenim que per a $q = 11$ (no considerem $q = -11$ perquè no té sentit econòmic) la derivada dels beneficis és igual a zero. Ara tan sols queda comprovar que $IMg(11) = CMg(11)$. Primer trobem la funció d'ingrés marginal, que és la derivada de la funció d'ingrés total:

$$IMg(q) = I'(q) = -20q + \qquad 4.29$$

I a continuació verifiquem que $IMg(11) = CMg(11)$:

$$\begin{aligned} IMg(11) &= -20 \cdot 11 + 231 = 11, \\ CMg(11) &= 11^2 - 20 \cdot 11 + 110 = 11. \end{aligned} \qquad 4.30$$

2)

a) Per a obtenir la funció d'ingrés total, $I(q)$, integrem la funció d'ingrés marginal. En conseqüència, resolem:

$$I(q) = \int I'(q)\, dq = \int (-10q + 310)\, dq = \int -10q\, dq + \int 310\, dq = -5q^2 + 310q + C. \qquad 4.31$$

Hem de tenir en compte, però, que l'ingrés, quan la producció és $q = 0$, és també zero, i per tant podem assimilar la constant d'integració a zero. D'aquesta manera la funció de ingrés total és:

$$I(q) = -5q^2 + 310q. \qquad 4.32$$

A continuació, i per obtenir la funció de beneficis de l'empresa, $B(q)$, tan sols hem de restar el cost total de l'ingrés total.

$$B(q) = I(q) - C(q) = (-5q^2 + 310q) - (q^3 - 5q^2 + 10q + 15) = -q^3 + 300q - 15. \qquad 4.33$$

b) Ara hem de trobar aquella producció tal que $B'(q) = 0$. Si derivem la funció de beneficis obtenim:

$$B'(q) = -3q^2 + 300. \qquad 4.34$$

I si resolem l'equació $-3q^2+300=0$, obtenim que per a $q=10$ (no considerem $q=-10$ perquè no té sentit econòmic) la derivada dels beneficis és igual a zero. Ara tan sols queda comprovar que $I'(10)=CMg(10)$. Primer trobem la funció de cost marginal, que és la derivada de la funció de cost total:

$$CMg(q) = CT'(q) = 3q^2 - 10q + 10. \qquad 4.35$$

I a continuació verifiquem que $I'(10)=CMg(10)$:

$$\begin{aligned} I'(10) &= -10 \cdot 10 + 310 = 210, \\ CMg(10) &= 3 \cdot 10^2 - 10 \cdot 10 + 10 = 210. \end{aligned} \qquad 4.36$$