Exercicis d’autoavaluació d'aplicació de les tècniques del càlcul

PID_00255404

Raquel Ferreras
Jordi Sales

Universitat Oberta de Catalunya

Raquel Ferreras

Professora dels Estudis d'Economia i Empresa de la Universitat Oberta de Catalunya. Llicenciada en Administració i Direcció d'Empreses per la Universitat de Barcelona. Doctora en Educació i TIC (*e-learning*) per la Universitat Oberta de Catalunya.

Jordi Sales

Professor de la Facultat de Turisme i Direcció Hotelera Sant Ignasi de la Universitat Ramon Llull. Llicenciat i doctor en Economia per la Universitat de Barcelona. Consultor dels Estudis d'Economia i Empresa de la UOC.

Índex

Introducció

En aquest mòdul finalitzem l'estudi del càlcul estudiant els intervals de creixement i decreixement d'una funció, els punts estacionaris o extrems, els punts d'inflexió, l'elasticitat i, finalment, l'aproximació mitjançant el polinomi de Taylor. Per assolir aquests objectius presentarem un conjunt de preguntes curtes amb les corresponents solucions. Es recomana intentar fer els exercicis i posteriorment revisar les solucions.

Objectius

Els objectius que hauríeu d'assolir una cop fets els exercicis que proposem són:

1. Domini, creixement i decreixement i concavitat i convexitat.

2. Càlcul dels punts estacionaris: òptims locals, òptims globals i teorema de Weierstrass.

3. Càlcul de l'elasticitat.

4. Aproximació de funcions mitjançant el polinomi de Taylor.

1. Enunciats a les preguntes curtes

1.1. Creixement i decreixement

1) Estudieu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = \log(x^2 + 4) - \frac{x}{2}$.

Nota

Quan escrivim "log" ens referim al logaritme neperià.

1.2. Extrems absoluts

1) Determineu els extrems absoluts de la funció $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{4} - x + 5$ en l'interval $\left[-\frac{5}{2},\ 2\right]$.

2) Determineu els extrems absoluts, tant màxims com mínims, de la funció $f(x) = \frac{2}{3}\, x^3 - 4x^2 + 6x - 5$ a l'interval $[0,4]$.

3) Determineu els extrems absoluts, tant màxims com mínims, de la funció $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ a l'interval $[0, 2]$.

4) Determineu els extrems absoluts, tant màxims com mínims, de la funció $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ a l'interval $[0, 3]$.

1.3. Elasticitat

1) Donada la funció $y = 100 - 2kx$, trobeu el valor del paràmetre k que fa que l'elasticitat de la funció en el punt $x = 1$ sigui -1.

2) Donada la funció $f(x) = k\,x^2 - x + 3$ trobeu el valor del paràmetre k per tal que l'elasticitat de la funció en $x = 2$ sigui 1.

3) Sigui $y = x^A(2 + x)^2$, determineu per a quin valor del valor del paràmetre A l'elasticitat en el punt $x = 2$ és 4, és a dir, $\in_{y,x}(2) = 4$.

1.4. Punts d'inflexió

1) Considereu la funció $f(x) = x^4 - 6k^2x^2$ amb $k > 0$. Quin valor ha de prendre k perquè la funció $f(x)$ tingui punts d'inflexió en $x = -3$ i en $x = 3$?

2) Donada la funció $f(x) = ax^3 + \log(x)$, on $a \neq 0$,

a) Determineu el domini de la funció.

b) Quin valor ha de prendre a perquè la funció $f(x)$ tingui un punt d'inflexió en $x = 1$?

3) Donada la funció $f(x) = e^x \cdot (x - a)$, determineu el valor del paràmetre a que fa que la funció tingui un punt d'inflexió en $x = 0$

1.5. Polinomi de Taylor

1) Determineu el polinomi de Taylor de segon grau de la funció $f(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$ en el punt $x = 1$.

2) Determineu el polinomi de Taylor de segon grau de la funció $f(x) = \log(x^2 - 2x - 2)$ en $x = 3$.

3) Determineu el polinomi de Taylor de segon grau de la funció $f(x) = e^{2x^2 - 2}$ en $x = 1$.

2. Solucions a les preguntes curtes

2.1. Creixement i decreixement

1) La funció $f(x)=\log(x^2+4)-\frac{x}{2}$ és contínua i derivable en tots els nombres reals, ja que x^2+4 sempre pren valors positius.

La derivada de $f(x)=\log(x^2+4)-\frac{x}{2}$ es calcula aplicant la regla de la cadena.

$$f'(x)=\left(\log(x^2+4)\right)'-\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{x^2+4}(x^2+4)'-\frac{1}{2}=\frac{2x}{x^2+4}-\frac{1}{2} \qquad 5.1$$

Si $f'(x)=0\Rightarrow \frac{2x}{x^2+4}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow \frac{2x}{x^2+4}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4x=x^2+4\Rightarrow x^2-4x+4=0.$

Resolent l'equació de segon grau s'observa que té una única solució en $x=2$.

Així, els intervals on cal estudiar el creixement i el decreixement de la funció són $(-\infty,\ 2)$ i $(2,\ +\infty)$. Com que la derivada de $f(x)$ és contínua en tots els nombres reals, la derivada tindrà el mateix signe en tots els punts de cada interval.

- $(-\infty,\ 2)$. Agafem per exemple $x=0$, $f'(0)=-\frac{1}{2}<0$. Així, la funció és decreixent en $(-\infty,\ 2)$.
- $(2,\ +\infty)$. Agafem per exemple $x=4$, $f'(4)=\frac{2\cdot 4}{4^2+4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}<0$. Així, la funció és també decreixent en $(2,\ +\infty)$.

Com que la funció és decreixent a esquerra i dreta del punt $x=2$, podem concloure que la funció és decreixent per a tot x.

Nota

Per tant, per determinar els intervals de creixement i decreixement cal identificar els punts que anul·len la primera derivada, els quals delimitaran aquests intervals.

Nota

Recordem també que si la primera derivada és positiva, la funció és creixent. En canvi, si la primera derivada és negativa, la funció és decreixent.

2.2. Extrems absoluts

1) La funció $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{4}-x+5$ és un polinomi de tercer grau i, per tant, és una funció contínua. Com que està definida en un interval compacte (tancat i afitat) $\left[-\frac{5}{2},\ 2\right]$, mitjançant el teorema de Weiertrass podem assegurar l'existència de màxim i mínim absolut. Per a determinar-los hem de calcular els punts estacionaris de la funció proposada. Derivant la funció i factoritzant el polinomi resultant tenim:

$$f'(x) = x^2 + \frac{3x}{2} - 1 = (x+2)\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

D'aquesta manera es verifica que $f'(x) = 0$ si $x = -2$ i $x = \frac{1}{2}$. Per determinar si són extrems absoluts, compararem el valor de la funció en aquests punts estacionaris amb el valor de la funció en els extrems de l'interval $x = -\frac{5}{2}$ i $x = 2$:

$$\begin{aligned} f\left(-\tfrac{5}{2}\right) &= \tfrac{335}{48} = 6{,}98 \\ f(-2) &= \tfrac{352}{48} = 7{,}33 \\ f\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{227}{48} = 4{,}73 \\ f(2) &= \tfrac{416}{48} = 8{,}67 \end{aligned} \qquad 5.2$$

Per tant, la funció assoleix el mínim absolut en el punt $x = \frac{1}{2}$ i el màxim absolut en el punt $x = 2$.

2) La funció $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - 5$ és un polinomi de grau 3 i, en conseqüència, contínua en $[0,4]$. Com que $[0,4]$ és compacte (tancat i afitat), el teorema de Weierstrass ens assegura l'existència d'extrems absoluts. Com que la funció també és derivable en l'obert $(0,4)$, busquem primer els punts estacionaris en aquest interval, és a dir, els valors de x que anul·len la derivada: $f'(x) = 2x^2 - 8x + 6 = 0$.. Les arrels del polinomi de grau 2 són $x_1 = 1, x_2 = 3$. Com que tots dos pertanyen a $(0,4)$ són candidats a òptim de la funció. Finalment, només ens cal comparar els valors de la funció en aquests valors i en els extrems de l'interval $[0,4]$:

$$f(0) = -5,\ f(1) = -\frac{7}{3},\ f(3) = -5,\ f(4) = -\frac{7}{3}.$$

Per tant, la funció assoleix dos mínims absoluts: un en l'extrem $x = 0$ i un altre en el punt $x = 3$. Així mateix, la funció assoleix dos màxims absoluts: un en el punt $x = 1$ i l'altre a l'extrem $x = 4$.

3) La funció $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ és un polinomi de tercer grau i, per tant, és una funció contínua. Com que està definida en un interval compacte $[0,2]$, gràcies al teorema de Weiertrass podem assegurar l'existència de màxim i mínim absolut. Per determinar-los hem de calcular els punts estacionaris de la funció proposada. Derivant la funció i factoritzant el polinomi resultant tenim:

$$f'(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-1)\cdot(x-5). \qquad 5.3$$

D'aquesta manera es verifica que $f'(x) = 0$ si $x = 1$ i $x = 5$. En aquest cas, el punt $x = 5$ queda fora de l'interval i no es té en compte en l'anàlisi.

Per determinar els extrems absoluts, compararem el valor de la funció en el primer dels punts estacionaris, $x = 1$, amb el valor de la funció en els extrems de l'interval $x = 0$ i $x = 2$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ f(1) &= \tfrac{13}{3} = 4,\widehat{3} \\ f(2) &= \tfrac{8}{3} = 2,\widehat{6} \end{aligned} \qquad 5.4$$

Per tant, la funció assoleix el mínim absolut en el punt $x = 0$ i el màxim absolut en el punt $x = 1$.

4) La funció $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ és un polinomi de grau 3 i, en conseqüència, contínua en $[0, 3]$. Com que $[0, 3]$ és compacte (tancat i afitat), el teorema de Weierstrass ens assegura l'existència d'extrems absoluts. Com que la funció també és derivable en l'obert $(0, 3)$, busquem primer els punts estacionaris en aquest interval, és a dir, els valors de x que anul·len la derivada:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12 = 0. \qquad 5.5$$

Les arrels del polinomi de grau 2 són $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. Com que $-\frac{1}{2} \notin (0, 3)$, l'únic candidat a òptim en aquest interval és $x = 2$. Finalment, només ens cal comparar els valors de la funció en aquest valor i en els extrems de l'interval $[0, 3]$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(2) &= -27, \\ f(3) &= -8. \end{aligned} \qquad 5.6$$

Per tant, la funció assoleix el mínim absolut en el punt $x = 2$ i el màxim absolut en l'extrem $x = 0$.

2.3. Elasticitat

1) Calculem la derivada de la funció $y' = \frac{dy}{dx} = -2k$.

Nota

L'elasticitat d'una funció ve donada per $\in_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Aplicant la definició d'elasticitat, obtenim:

$$\in_{y.x} = \frac{x}{100 - 2kx} \cdot (-2k) = \frac{-2kx}{100 - 2kx}. \qquad 5.7$$

Així podem comprovar que, perquè es verifiqui la relació $\in_{y,x} = -1$ en el punt $x = 1$, s'ha de satisfer $\in_{y.1} = \frac{-2k}{100 - 2k} = -1 \Rightarrow -2k = 2k - 100 \Rightarrow k = 25$.

2) L'elasticitat de $f(x) = k\,x^2 - x + 3$ en $x = 2$ ve determinada per $\varepsilon_{f(x),2} = \frac{2}{f(2)} \cdot f'(2)$, on $f(2) = 4k - 2 + 3 = 4k + 1$, $f'(x) = 2k\,x - 1$ i $f'(2) = 4k - 1$. Per trobar el valor del paràmetre k que fa que l'elasticitat de la funció sigui 1 en $x = 2$, hem de resoldre l'equació $\frac{2}{4k+1} \cdot (4k - 1) = 1$. Operant obtenim $4k + 1 = 8k - 2 \rightarrow 4k = 3$, d'on $k = \frac{3}{4}$.

3) Calculem la derivada de la funció $y = x^A(2 + x)^2$

$$y' = \frac{dy}{dx} = Ax^{A-1}(2 + x)^2 + 2x^A(2 + x). \qquad 5.8$$

Aplicant la definició obtenim:

$$\in_{y,x} = \frac{x}{x^A(2+x)^2} \cdot (Ax^{A-1} \cdot (2 + x)^2 + 2x^A \cdot (2 + x)) =$$

$$= \frac{Ax^A(2+x)^2}{x^A(2+x)^2} + \frac{2x^A \cdot x(2+x)}{x^A(2+x)^2} = A + \frac{2 \cdot x}{(2+x)}.$$

Així podem comprovar que perquè es verifiqui la relació $\in_{y,x} = 4$ en el punt $x = 2$ s'ha de satisfer l'equació $A + \frac{2 \cdot 2}{(2+2)} = 4$, d'on s'obté $A + 1 = 4 \rightarrow A = 3$.

2.4. Punts d'inflexió

1) La primera derivada és

$$f'(x) = 4x^3 - 12k^2x \qquad 5.9$$

i la segona derivada

$$f''(x) = 12x^2 - 12k^2. \qquad 5.10$$

Segons l'enunciat hem de trobar els valors de $k > 0$ tals que $f(x)$ tingui punts d'inflexió en $x = -3$ i en $x = 3$. Per tant, $x = -3$ i $x = 3$ han de satisfer l'equació $12x^2 - 12k^2 = 0$, de manera que substituint per a qualsevol dels dos valors s'obté $108 - 12k^2 = 0$.

Resolent, s'obtenen $108 - 12k^2 = 0 \Rightarrow 9 - k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Però com que a l'enunciat s'indica que $k > 0$, només serà vàlid $k = 3$.

Comprovem que aleshores la funció $f(x) = x^4 - 54x^2$ té com a segona derivada

$$f''(x) = 12x^2 - 108 = 12 \cdot (x^2 - 9) = 12 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3). \qquad 5.11$$

Nota

Per trobar els punts d'inflexió d'una funció haurem de trobar primer quins són els valors de x que fan que la segona derivada de la funció sigui zero. Després estudiarem si es produeix realment un canvi de curvatura en aquests punts, és a dir, si el signe de la segona derivada canvia a l'esquerra i la dreta.

Es pot comprovar que $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ (convexa, amb forma de $\cup$) i $f''(x) < 0$ en $(-3, 3)$ (còncava, amb forma de $\cap$). Com que en els punts $x = -3$ i $x = 3$ es produeix un canvi de curvatura, podem garantir que seran punts d'inflexió de $f(x)$ i per tant, el valor $k = 3$ garanteix que es compleixen totes les condicions de l'enunciat.

2)

a) Per a qualsevol valor d'a diferent de 0, la funció és la suma d'un polinomi i d'una logarítmica, de manera que el domini de la funció és $Dom(f) = \{x \in R \mid x > 0\} = (0, +\infty]$.

b) La primera derivada és

$$f'(x) = 3ax^2 + \frac{1}{x} \qquad 5.12$$

i la segona derivada,

$$f''(x) = 6ax - \frac{1}{x^2}. \qquad 5.13$$

Hem de trobar el valor d'a tal que $f(x)$ tingui un punt d'inflexió en $x = 1$. Observem que per a $x = 1$

$$f''(1) = 6a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{6}. \qquad 5.14$$

Llavors, quan $a = \frac{1}{6}$, la derivada segona és $f''(x) = x - \frac{1}{x^2}$.

Com que la funció està definida per a valors estrictament positius i considerant el punt $x = 1$, es divideix la recta real en dos intervals: $(0, 1)$ i $(1, +\infty)$. Estudiem la curvatura de funció a partir del signe de la segona derivada.

Nota

Si la segona derivada és positiva sabem que la funció és convexa (amb forma de $\cup$), mentre que si és negativa la funció és còncava (amb forma de $\cap$).

- $(0, 1)$. Per a $x = \frac{1}{2}$, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{4}} = -\frac{7}{2} < 0$. Així, la funció és còncava en $(0, 1)$.

- $(1, +\infty)$. Per a $x = 2$, $f''(2) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} > 0$. Així, la funció és convexa en $(1, +\infty)$.

Podem concloure que la funció té un punt d'inflexió en $x = 1$, ja que en aquest punt la funció passa de còncava a convexa.

3) La primera derivada és

$$f'(x) = e^x \cdot (x - a) + e^x = e^x \cdot (x - a + 1) \qquad 5.15$$

i la segona derivada

$$f''(x) = e^x \cdot (x - a + 1) + e^x = e^x \cdot (x - a + 2). \qquad 5.16$$

Hem de trobar el valor d'a tal que $f(x)$ tingui un punt d'inflexió en $x = 0$. Observem que per a $x = 0$,

$$f''(0) = e^0 \cdot (0 - a + 2) = 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2. \qquad 5.17$$

Llavors, quan $a = 2$, la derivada segona és $f''(x) = x \cdot e^x$ i sabem que en $x = 0$ val 0, és a dir, la funció pot tenir un punt d'inflexió en aquest punt. Comprovem, a continuació, si realment és així.

Donada la funció i considerant el punt $x = 0$, es divideix la recta real en dos intervals: $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$. Estudiem la curvatura de funció a partir del signe de la segona derivada.

- $(-\infty, 0)$. Per a $x = -1$, $f''(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} = -0.367 < 0$. Així, la funció és còncava en $(-\infty, 0)$.

- $(0, +\infty)$. Per a $x = 1$, $f''(1) = e = 2.718 > 0$. Així, la funció és convexa en $(0, +\infty)$.

Podem concloure que la funció $f(x) = e^x \cdot (x - 2)$ té un punt d'inflexió en $x = 0$, ja que en aquest punt la funció passa de còncava a convexa. Així, el valor del paràmetre a que fa que la funció tingui un punt d'inflexió en $x = 0$ és $a = 2$.

2.5. Polinomi de Taylor

1) Com que $f(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$, tenim que

$$f'(x) = \frac{1}{1/x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = x \cdot -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}. \qquad 5.18$$

Nota

El polinomi de Taylor de grau dos d'una funció en un entorn d'un punt x_0 ve donat per l'expressió $P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$.

En el cas de la segona derivada tenim

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}. \qquad 5.19$$

Prenent $x_0 = 1$, obtenim $f(1) = 0$, $f'(1) = -1$, $f''(1) = 1$, d'on deduïm que

$$P_2(x) = -1 \cdot (x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 = \frac{x^2 - 4x + 3}{2}. \qquad 5.20$$

2) Com que $f(x) = \log(x^2 - 2x - 2)$, tenim que

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-2} \qquad 5.21$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot(x^2-2x-2)-(2x-2)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-4-(4x^2-8x+4)}{(x^2-2x-2)^2} = \frac{-2x^2+4x-8}{(x^2-2x-2)^2}. \qquad 5.22$$

Prenent $x_0 = 3$, obtenim:

$$f(3) = \log(3^2-2\cdot 3-2) = \log(1) = 0 \qquad 5.23$$

$$f'(3) = \frac{2\cdot 3-2}{3^2-2\cdot 3-2} = 4 \qquad 5.24$$

$$f''(3) = \frac{-2\cdot 3^2+4\cdot 3-8}{(3^2-2\cdot 3-2)^2} = -14 \qquad 5.25$$

Per tant,

$$P_2(x) = 0+4\cdot(x-3)+\frac{1}{2}\cdot(-14)\cdot(x-3)^2 = 4x-12-7\,(x^2-6x+9) = -7x^2+46x-75. \qquad 5.26$$

3) Com que $f(x) = e^{2x^2-2}$, tenim:

$f'(x) = 4x\cdot e^{2x^2-2}$ i $f''(x) = 4\cdot e^{2x^2-2}+4x\cdot 4x\cdot e^{2x^2-2} = (4+16x^2)\cdot e^{2x^2-2}$.

Prenent $x_0 = 1$, obtenim $f(1) = e^0 = 1$, $f'(1) = 4\cdot e^0 = 4$ i $f''(1) = (4+16)\cdot e^0 = 20$, d’on deduïm que

$$P_2(x) = 1+4\,(x-1)+\frac{20}{2}(x-1)^2 = 10x^2-16x+7. \qquad 5.27$$