Caracterització freqüencial de senyals discrets: la TFSD i les sèries discretes de Fourier

PID_00262128

Jose Antonio Morán Moreno

Temps mínim de dedicació recomanat: 4 hores

Universitat
Oberta
de Catalunya

Jose Antonio Morán Moreno

Índex

Introducció

En el primer mòdul de l'assignatura s'ha vist a fons la transformada *z*. Aquest mòdul pretén iniciar l'anàlisi freqüencial de senyals i sistemes en temps discret, la qual cosa, com és ben sabut, resulta un espai d'anàlisi molt útil en la teoria de senyals i sistemes. Al llarg del mòdul anirem veient que la transformada de Fourier de seqüències discretes (TFSD, com l'anomenarem a partir d'ara) no és res més que una particularització de la transformada *z*. Aquest paral·lelisme es va veure en l'assignatura de Senyals i sistemes I amb la transformada de Laplace i la transformada de Fourier analògica.

El domini transformat facilita enormement l'anàlisi i el disseny de senyals i sistemes, tant en el cas de senyals i sistemes analògics com en el cas de temps discret. El coneixement d'aquestes eines és fonamental per al desenvolupament d'habilitats i competències en el camp del processament de senyal.

Aquest mòdul presentarà les característiques i propietats principals de la TFSD, així com les aplicacions que en podem obtenir en l'àmbit del processament de senyal.

Objectius

Els objectius principals d'aquest mòdul són els següents:

1. Conèixer la definició de la TFSD i la relació que té amb la transformada *z*.

2. Aprendre a calcular la TFSD dels senyals típics aperiòdics més utilitzats en l'àmbit del processament de senyal.

3. Conèixer i aplicar adequadament les principals propietats matemàtiques de la TFSD.

4. Calcular la TFSD de senyals discrets periòdics i estendre l'ús d'aquesta eina de càlcul tan útil.

5. Aplicar els coneixements i les propietats de la TFSD per a la caracterització i el disseny de sistemes LIT digitals.

1. La transformada de Fourier de seqüències discretes (TFSD)

En aquest apartat veurem les característiques principals de la transformada de Fourier en l'espai dels senyals discrets en el temps. Al llarg del mòdul recordarem per què les exponencials complexes o el domini de Fourier són tan interessants en l'estudi dels senyals i dels sistemes. Recordem que les exponencials complexes són autofuncions dels sistemes lineals i invariants en el temps, un factor que s'esdevé tant en el domini analògic com en el domini discret, i que aquesta és la característica principal que justifica la utilitat de l'estudi freqüencial en aquest tipus de sistemes. Aquest fet implica que quan a l'entrada d'un sistema tenim una exponencial complexa determinada, la sortida del sistema (si és lineal i invariant en el temps) serà una exponencial exactament de la mateixa freqüència, però tan sols modificada en amplitud i en fase. El més interessant d'aquest fet és que es produeix en qualsevol tipus de sistema lineal i invariant; de fet, sempre que estudiem aquests sistemes en el domini freqüencial es produirà aquest efecte.

1.1. Relació entre la transformada *z* i la TFSD

En el primer mòdul de l'assignatura es va estudiar a fons la transformada z amb totes les seves propietats i característiques. Abans de començar a detallar la TFSD veurem la relació que hi ha entre cadascuna de les transformades per adonar-nos que la TFSD és una particularitat de la transformada z (TZ) quan es compleixen certes característiques entre els senyals i els sistemes implicats.

Recordem la definició de la TZ:

$$x[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(z) \qquad (1)$$

i l'anàlisi corresponent en el pla complex:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\omega n} \qquad (2)$$

Observem que la TZ efectua una projecció del senyal d'entrada $x[n]$ sobre la totalitat del pla complex z. De totes les circumferències de radi r on es fa la projecció, n'hi ha una que és especialment interessant i que correspon al cercle unitat o $r = 1$. L'estudi de la transformada z i de les seves propietats mostra que l'estabilitat d'un sistema es produeix quan la regió de convergència inclou el cercle unitat, cosa que fa que el cercle unitat sigui un espai d'estudi especialment interessant en l'anàlisi i el disseny de sistemes.

En el cas dels senyals aperiòdics, la TFSD es defineix segons:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \qquad (3)$$

en què s'observa una correspondència entre la TZ i la TFSD quan $r = 1$.

Aquest factor és molt important, ja que el cercle unitat és un espai de gran interès en l'anàlisi del domini transformat z, principalment per la relació que té amb l'estabilitat dels sistemes, així com amb les condicions d'existència de la transformada del senyal $x[n]$.

1.2. Equacions de càlcul de la TFSD

El domini transformat és una eina de treball útil que permet modificar la representació del senyal a la manera més adequada en cada cas. A vegades és interessant visualitzar el senyal en la seva forma temporal, però en alguns casos pot ser més interessant o rellevant fer-ho en el domini freqüencial. Les diferents transformades que s'han anat estudiant en les assignatures de Senyals i sistemes tenen l'objectiu de proporcionar eines de treball per commutar entre dominis quan sigui necessari i facilitar les eines d'anàlisi i disseny dels sistemes lineals.

Perquè les transformades tinguin una utilitat real, cal que hi hagi camins per anar d'un domini a un altre i viceversa, atès que de ben poc serviria una transformada que només permetés la transformació en un sentit. L'existència d'una transformada directa, com també d'una transformada inversa, és necessària per tenir una transformació completa d'utilitat.

Equacions de càlcul de la TFSD directa i inversa

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \qquad (4)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\delta\omega \qquad (5)$$

1.3. Condicions d'existència de la TFSD

En el mòdul de la transformada z es va poder veure que la transformada d'un senyal tenia lloc en allò que s'anomena regió de convergència (ROC, *region of convergence*). L'extensió del pla z en el domini complex fa que, per a un senyal o sistema concret, en algunes zones pugui haver-hi la transformada i en d'altres no es donin les condicions perquè existeixi. Finalment, el cercle unitat, tal com es va analitzar en el mòdul anterior, era una zona d'interès especial en l'aplicació de la transformada *z* sobre senyals i sistemes estables.

En el cas de la TFSD, aquest fet és simplificat, atès que es restringeix el càlcul al cercle unitat i a partir de l'equació es pot determinar que l'existència de la TFSD es produirà quan el senyal d'entrada $x[n]$ sigui absolutament sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \qquad (6)$$

D'aquesta manera, podem afirmar que qualsevol seqüència que sigui absolutament sumable tindrà TFSD, factor que inclou totes les seqüències discretes de durada finita i aquelles que siguin absolutament sumables de durada infinita.

En el camp del processament de senyal estem avesats a treballar amb la funció delta de Dirac. Aquesta funció és molt interessant, ja que permet avaluar les transformades en condicions límit d'existència, però aporta la possibilitat d'incloure en l'estudi funcions que formalment es trobarien al límit de la seva existència. L'ús d'aquesta funció, com podrem comprovar més endavant, permetrà incloure en el càlcul alguns senyals que no compleixen la condició anterior, però que són destacables en el camp de l'anàlisi, com ara els senyals periòdics.

2. La TFSD de senyals discrets típics

L'estudi teòric de sistemes requereix l'ús de senyals típics per caracteritzar-los. La fonamentació teòrica necessita elements matemàtics per a la comprensió, l'anàlisi i el disseny de sistemes discrets que puguin ser d'utilitat en aplicacions reals. La comprensió de la teoria requereix conèixer alguns parells de transformades fonamentals; en aquest apartat n'analitzarem algunes de les més interessants. No es pretén que l'estudiant es perdi en càlculs matemàtics complexos que no porten enlloc, sinó que consolidi els coneixements teòrics principals per comprendre la teoria. Hem de pensar que en les aplicacions reals no ens trobarem senyals tipus com els que presentarem en aquest apartat, sinó més aviat senyals discrets de diferent índole (senyal de veu mostrejat, valors borsaris, temperatura diària, velocitat d'un motor, etc.); en aquest cas, la valoració exacta de la transformada serà impossible de forma teòrica o analítica. Per a això, es faran servir eines de càlcul numèric que veurem en el mòdul següent i que explicaran com cal aplicar de manera pràctica els fonaments estudiats en aquest tema.

2.1. Delta discreta

La delta discreta és el senyal més bàsic que podem trobar en l'espai discret, ja que es tracta d'un senyal de valor 1 en un instant determinat de temps, mentre que val zero per a tots els altres casos.

La principal característica i interès d'aquest senyal és que suposa una base per a la descomposició de qualsevol senyal com a combinació lineal de deltes, de manera que, sigui quin sigui el senyal d'entrada $x[n]$, sempre el podrem descompondre de la manera següent:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \qquad (7)$$

El coneixement de les propietats de la funció delta discreta és interessant per a l'estudi dels senyals i sistemes.

Si particularitzem el cas d'una delta centrada en $n = 0$, obtindrem aquesta equació per al càlcul de la TFSD:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} = 1 \qquad (8)$$

De manera que una funció delta discreta té com a parella transformada una funció constant en freqüència, és a dir, la funció delta discreta conté totes les freqüències per igual en el domini transformat.

Si la funció delta està desplaçada en el temps, la funció transformada quedarà de la manera següent:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0} \qquad (9)$$

En aquest cas s'observa que la transformada correspon a una funció de mòdul constant, és a dir, el senyal conté totes les freqüències de la mateixa manera en el mòdul, però amb una fase lineal de pendent $-n_0$.

2.2. Senyal exponencial decreixent discret orientat a la dreta

En aquest subapartat analitzarem un senyal molt interessant en l'estudi dels senyals discrets, l'exponencial decreixent orientat a la dreta. Aquest senyal es defineix així:

$$x[n] = a^n u[n] \qquad |a| < 1 \qquad (10)$$

Per la definició del senyal observem que, com que és un valor de a amb un mòdul inferior a 1, serà una funció exponencial decreixent amb origen a $n = 0$ i tendirà a zero en l'infinit. Això fa que sigui una funció absolutament sumable i, per tant, hi haurà la TFSD.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad (11)$$

2.3. Pols rectangular centrat a l'origen

El pols rectangular és una altra de les funcions de gran ús en les aplicacions del processament de senyal. La funció de pols rectangular és definida per aquesta expressió:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le N \\ 0 & |n| > N \end{cases} \qquad (12)$$

Aquest senyal correspon a un pols de $2N+1$ mostres centrat a l'origen. Com es pot observar, es tracta d'un pols de durada finita i, d'una manera conseqüent, és absolutament sumable. Per calcular-ne la transformada, tan sols cal aplicar-hi les propietats de suma d'una sèrie geomètrica i simplificar l'expressió utilitzant els operadors matemàtics convencionals.

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-N}^{N} e^{-j\omega n}=\frac{e^{j\omega N}-e^{-j\omega(N+1)}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{\sin\left(\omega\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\frac{(\omega)}{2}} \quad (13)$$

2.4. Senyal constant

Un altre senyal important per a l'estudi dels sistemes és la transformada d'un senyal constant definit segons:

$$x[n]=1 \quad (14)$$

En aquest cas, un raonament ràpid mostra que, com que no és una funció absolutament sumable, la TFSD pròpiament no existeix. Amb tot, en aquest cas es pot deduir la transformada d'aquest senyal a partir del càlcul de la transformada inversa d'una delta de Dirac en l'espai transformat.

En l'apartat de les propietats de la TFSD es veurà que tota TFSD és 2π periòdica, un fet fàcilment demostrable i que es veurà en l'apartat de propietats. A partir d'aquest fet considerem la funció:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-2\pi k) \quad (15)$$

Si calculem la funció de transferència inversa aplicant-hi l'equació adequada:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-2\pi k)\right)e^{j\omega n}d\omega=1 \quad (16)$$

En l'interval de càlcul de la integral només quedaria la delta situada a $\omega = 0$, la qual cosa provoca que el resultat de la integral sigui igual que la funció constant per a tot n. El valor de la TFSD a l'origen serà igual que la suma de tots els valors de la funció. Com que en aquest cas la suma de totes les mostres del senyal d'entrada seria infinita, la funció delta representa aquest càlcul al límit, un valor infinit únicament per a $\omega = 0$ i zero per a tots els altres casos.

No obstant això, les propietats de la funció delta fan que la integral d'una funció multiplicada per la delta sigui el valor de la funció en aquest punt, i això permet que puguem tenir un càlcul útil encara que ens trobem al límit de l'existència de la transformada.

Tot i saber que en fem un ús al límit de les propietats matemàtiques, aquestes s'utilitzen sovint en el camp del processament de senyal, ja que permeten treballar amb funcions importants, com ara la funció constant.

Aquesta reflexió ens permet definir la relació següent:

$$1 \quad \overset{TFSD}{\longleftrightarrow} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - 2\pi k) \qquad (17)$$

2.5. Senyal esglaó unitat

El senyal esglaó unitat també és una d'aquelles funcions utilitzades sovint en l'àmbit de la teoria de senyals, així com en el cas dels sistemes de control digitals. Si imaginem un motor en estat de repòs i l'activem perquè funcioni a una determinada velocitat, provocarem una entrada al sistema en forma d'esglaó unitat (aquesta funció serà molt útil per avaluar-ne els paràmetres de posada en marxa).

La funció esglaó és definida segons:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases} \qquad (18)$$

La TFSD d'aquesta funció es calcula aplicant la funció de càlcul habitual:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n} \qquad (19)$$

Aquí podem observar que sorgeix un dels problemes esmentats anteriorment, que està relacionat amb les propietats de convergència de la transformada al límit. Estrictament parlant, no es podria calcular la TFSD d'aquesta seqüència en no ser absolutament sumable, ja que podem comprovar que el resultat de la suma dels seus valors és infinit.

Per poder fer el càlcul de la transformada s'haurà de recórrer a l'ús d'algunes funcions, com ara la delta de Dirac. Tot i que la transformada es trobarà al límit de l'existència matemàtica, el seu ús és funcional i permet utilitzar-la de manera teòrica.

Si recordem el cas de l'exponencial decreixent, veurem que l'esglaó només és el límit d'aquesta funció quan $a = 1$. Aquest cas, com hem comentat, portaria la transformada al límit de l'existència i sorgiria una irregularitat en $\omega = 0$, que es pot resoldre mitjançant dues expressions:

$$u[n] = 0.5 + 0.5\,\text{signe}[n] \quad \overset{TFSD}{\longleftrightarrow} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \qquad (20)$$

L'esglaó unitat $u[n]$ es pot entendre com una funció de valor constant 0.5 sumada a la funció signe $[n]$. Aquest truc s'utilitza per resoldre l'anomalia que sorgeix en $\omega = 0$, de manera que la transformada es calcula com la transformada del valor mitjà de la funció (0.5) més la transformada per a la resta de les freqüències.

Com s'ha dit, aquesta expressió és al límit i, matemàticament, resulta irregular, però a efectes del processament de senyal permet fer els càlculs amb aquesta funció sense induir a errors.

3. Propietats de la TFSD

El tema de les propietats de la TFSD és similar a les existents en altres tipus de transformades, com passa en la transformada analògica de Fourier, la transformada de Laplace o la transformada z.

L'estudi de les propietats té una funció doble:

1) Comprendre els conceptes teòrics relacionats amb les modificacions de característiques dels senyals en el domini d'origen o en el transformat.

2) Disposar d'eines que permetin facilitar el càlcul de transformades complexes a partir del coneixement de transformades més simples amb les quals hi hagi una certa relació basada en les propietats.

Amb aquests dos objectius presents parlarem de les principals propietats de la TFSD sense detallar les demostracions matemàtiques: més aviat ens centrarem en la comprensió dels aspectes relacionats amb les modificacions dels senyals implicats.

3.1. Periodicitat de la TFSD

Com hem comentat a l'inici del mòdul, aquesta propietat és inherent al fet que les exponencials complexes discretes sempre tenen aquesta periodicitat 2π.

$$\begin{aligned} &X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\ &X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \\ &\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \quad X(e^{j\omega}) \end{aligned} \tag{21}$$

En l'expressió observem que en el domini discret els valors de $e^{j\omega n}$ es van repetint amb una periodicitat 2π, cosa que provoca que tota TFSD mostrarà inevitablement aquesta periodicitat.

3.2. Linealitat de la TFSD

La linealitat de la TFSD és una de les propietats principals d'aquesta transformada i que fa que sigui tan útil en l'estudi dels sistemes lineals. D'aquesta propietat es desprèn que, si tenim un senyal compost per la combinació de dos senyals:

$$\begin{array}{ccc} x_1[n] & \overset{\text{TFSD}}{\longleftrightarrow} & X_1(e^{j\omega}) \\ x_2[n] & \overset{\text{TFSD}}{\longleftrightarrow} & X_2(e^{j\omega}) \\ ax_1[n]+bx_2[n] & \overset{\text{TFSD}}{\longleftrightarrow} & aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega}) \end{array} \qquad (22)$$

Aquesta propietat, de fàcil demostració matemàtica, és senzilla d'entendre. Si tenim un primer senyal amb una distribució freqüencial determinada $X_1(e^{j\omega})$ i un segon senyal amb una distribució freqüencial $X_2(e^{j\omega})$. Quina TFSD tindrà la suma de tots dos senyals? És fàcil pensar que la distribució freqüencial del senyal resultant per a cada freqüència tan sols és la suma de les aportacions a cada freqüència que faci cada senyal; en altres paraules, la transformada resultant serà la suma de transformades. Aquest factor es pot extrapolar a qualsevol combinació lineal entre els dos senyals originals.

A efectes pràctics, aquesta propietat pot ser útil per calcular transformades de senyals a partir de les combinacions lineals de senyals coneguts i, com es veurà al llarg del mòdul, es tracta d'una propietat important.

3.3. Desplaçament en el temps

La propietat de desplaçament en el temps ens permet comprendre els canvis que es produeixen en el domini transformat quan el senyal d'origen es trasllada en el temps:

$$\begin{array}{ccc} x[n] & \overset{\text{TFSD}}{\longleftrightarrow} & X(e^{j\omega}) \\ x[n-n_0] & \overset{\text{TFSD}}{\longleftrightarrow} & e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega}) \end{array} \qquad (23)$$

Per entendre el sentit d'aquesta propietat hem de pensar què passa en termes freqüencials quan es produeix un desplaçament temporal. La TFSD no és res més que la descomposició del senyal original com a suma d'exponencials complexes o, expressat en altres termes, com a combinació de senyals cosinusoidals i sinusoidals. Quan desplacem temporalment una funció sinusoidal, la magnitud d'aquesta funció es manté intacta i el que es produeix és un canvi de fase, un canvi que serà proporcional a la freqüència. Com més gran sigui la freqüència discreta, més desfasament tindrà per a cadascuna de les mostres.

Imaginem dos senyals sinusoidals: l'un amb un període de sis mostres i l'altre amb un període de dotze. Un desplaçament d'una mostra en el primer senyal correspondrà a un desfasament en graus de 360/6. Si en sis mostres recorrem un cicle de 360, en una mostra es produirà un desfasament de 60 graus. En el cas del segon senyal, un desplaçament d'una mostra serà equivalent a 30 graus. Això justifica que, per al mateix desplaçament temporal, el desfasament en graus sigui més gran com més gran sigui la freqüència, i això és justament el que indica el terme $e^{-j\omega n_0}$ de l'equació (23).

La TFSD resultant a un desplaçament temporal serà exactament la mateixa que l'original, però multiplicada per una exponencial complexa que modifica la fase segons el retard que s'hagi produït en el senyal, mentre que el mòdul resultant serà exactament el mateix que el del senyal original. Les freqüències es mantenen intactes, però canvien la seva fase a causa del desplaçament temporal.

3.4. Propietat de modulació o desplaçament en freqüència

La propietat de modulació és una de les propietats de la transformada més importants en el camp dels sistemes de comunicacions. És ben sabut que per portar un determinat senyal a una altra zona de l'espectre haurem de multiplicar-lo per un senyal portador. Aquesta multiplicació produirà un desplaçament de l'espectre del senyal original exactament a la freqüència del portador i és àmpliament utilitzat en la transmissió de senyals. Quan hi hagi la necessitat de desplaçar l'espectre d'un senyal determinat es pot aplicar simplement la propietat de modulació o de desplaçament freqüencial:

$$\begin{aligned} x[n] &\overset{TFSD}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right) \\ e^{j\omega_0 n}x[n] &\overset{TFSD}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) \end{aligned} \qquad (24)$$

en què ω_0 és la pulsació de la portadora.

3.5. Diferenciació en el temps

És evident que la diferenciació en el temps no és un operador que es pugui aplicar, ja que som en el domini dels senyals discrets. Amb tot, l'aproximació numèrica més senzilla d'una derivada en el domini discret és:

$$\frac{x[n]-x[n-1]}{T} \qquad (25)$$

Si considerem que el temps entre mostres és 1, podríem dir que la diferència entre dues mostres consecutives seria una aproximació a la derivada (d'aquí prové el nom d'aquesta propietat per seguir el paral·lelisme amb la seva homòloga en el domini continu):

$$x[n]-x[n-1] \overset{TFSD}{\longleftrightarrow} \left(1-e^{-j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right) \qquad (26)$$

Propietat que resulta fàcilment demostrable aplicant les propietats de linealitat i de desplaçament temporal. Pel que fa a la freqüència observem que la diferenciació temporal és equivalent a filtrar el senyal amb un filtre amb resposta freqüencial $H\left(e^{j\omega}\right)=\left(1-e^{-j\omega}\right)$.

La resposta freqüencial d'aquest filtre és de característiques passaalts, atès que la funció de transferència per a $\omega = 0$ és 0, és a dir, anul·la les baixes freqüències i per a $\omega = \pi$ és 2, la qual cosa vol dir que amplifica les altes freqüències. La derivada pretén quedar-se amb aquelles característiques temporals que indiquen canvis abruptes del senyal, de manera que la resposta del filtre ja és conseqüent amb aquest objectiu.

3.6. Acumulació en el temps

Aquesta propietat podria ser la inversa de l'anterior, ja que la funció d'acumulació en el temps seria:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \qquad (27)$$

Aquesta expressió es pot representar de manera recurrent així:

$$y[n] = x[n] + y[n-1] \qquad (28)$$

Aplicant propietats de linealitat es pot esperar que:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) \qquad (29)$$

De manera que:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} \qquad (30)$$

Però de la mateixa manera que passava anteriorment, aquesta expressió presenta una singularitat en $\omega = 0$, que s'ha de resoldre de la mateixa manera que en la transformada de l'esglaó unitat. En conseqüència, per a l'acumulació en el temps la propietat que en resulta és:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \qquad (31)$$

Hi observem que el primer factor de la propietat serveix per a la integració de totes les freqüències excepte per a $\omega = 0$, mentre que el segon representa la integració del component continu del senyal representat per $X(e^{j0})$.

3.7. Inversió en el temps

En aquest cas concret, la propietat de la inversió en el temps relaciona la transformada d'un senyal qualsevol amb la seva reflexió sobre l'eix temporal, és a dir, per a una $y[n] = x[-n]$.

Per a la demostració d'aquesta propietat farem ús de l'equació de càlcul de la TFSD per calcular la transformada de $y[n]$:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]e^{-j\omega n} \tag{32}$$

En fer un canvi en el subíndex $m = -n$ obtenim aquesta expressió:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[-m]e^{-j(-\omega)m} = X(e^{-j\omega}) \tag{33}$$

3.8. Expansió en el temps

Aquesta propietat és molt útil en aquells processos en què es modifica la freqüència de mostreig de determinats senyals, com, per exemple, en submostrejar un senyal d'àudio o en reescalar una imatge digital. En aquests procediments es produeix una alteració del contingut freqüencial del senyal i convé conèixer la relació de la nova transformada amb la del senyal original.

Aquesta propietat difereix respecte de l'equivalent analògic per la pròpia naturalesa del senyal discret. En el cas d'eliminar mostres, resulta obvi que el senyal resultant perdrà una part de la informació i no té sentit relacionar les transformades, ja que una part de la informació haurà desaparegut. En canvi, en algunes aplicacions convé expandir la informació en el temps, com ara en un reescalat d'una imatge. Imaginem que tenim una imatge determinada i que volem augmentar-ne la mida en un factor K per representar-la en pantalla. El primer que cal fer en aquest cas és generar un nou senyal que insereixi k – 1 zeros entre cada mostra del senyal original:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{Si } n \text{ és un múltiple de } K \\ 0 & \text{resta} \end{cases} \tag{34}$$

Aquest operador generarà una nova seqüència discreta en què les mostres del senyal original estaran expandides en un factor k i hi inserirà k – 1 zeros per generar la nova seqüència expandida. Aquesta seqüència té tota la informació del senyal original, així que és raonable pensar que hi ha d'haver una relació entre les seves transformades.

Per calcular la nova transformada fem el que és habitual:

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\omega n} \tag{35}$$

En aplicar el canvi d'índex $n = rk$ obtenim:

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk]e^{-j\omega rk} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r]e^{-j(\omega k)r}$$
$$= X(e^{jk\omega}) \tag{36}$$

De manera que es pot concloure:

$$x_{(k)}[n] \overset{\text{TFSD}}{\longleftrightarrow} X(e^{jk\omega}) \tag{37}$$

3.9. Diferenciació en freqüència

Aquesta operació, més que tenir una interpretació física, és més aviat la conseqüència de l'aplicació d'un operador matemàtic simple com la diferenciació en freqüència i que permet el càlcul de noves transformades de manera senzilla:

$$\begin{aligned} x[n] &\overset{\text{TFSD}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \\ nx[n] &\overset{\text{TFSD}}{\longleftrightarrow} j\frac{\delta X(e^{j\omega})}{\delta\omega} \end{aligned} \tag{38}$$

Aquesta propietat permet el càlcul simple de la TFSD d'un pendent a partir de la TFSD d'un esglaó unitat. Aplicant recursivament aquesta propietat es poden conèixer les transformades de funcions polinòmiques.

La demostració de la propietat es pot fer de manera senzilla a partir de l'equació de càlcul de la transformada aplicant-hi la propietat de derivació:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{39}$$

$$\frac{\delta X(e^{j\omega})}{\delta\omega} = \frac{\delta\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right)}{\delta\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\frac{\delta e^{-j\omega n}}{\delta\omega} \tag{40}$$

$$\frac{\delta X(e^{j\omega})}{\delta\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jnx[n]e^{-j\omega n} \tag{41}$$

I dividint per $-j$ en tots dos termes de la igualtat obtenim, finalment, la propietat demostrada.

3.10. El teorema de Parseval

El teorema de Parseval és un altre teorema de gran aplicació en l'àmbit del processament del senyal. En determinats casos és necessari calcular alguns paràmetres físics relacionats amb un senyal concret, com ara l'energia que té.

La definició de l'energia d'un senyal discret és definida per aquesta expressió:

$$E[x[n]] = \sum_{\infty}^{n=-\infty} |x[n]|^2 \qquad (42)$$

El teorema de Parseval determina que l'energia d'un senyal es pot calcular des del domini temporal o bé en el domini transformat mitjançant la relació d'igualtat següent:

$$\sum_{\infty}^{n=-\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int 2\pi |X(e^{j\omega})|^2 \delta\omega \qquad (43)$$

3.11. La propietat de la convolució

Si bé totes les propietats són interessants en l'estudi de la teoria de senyals i sistemes, la propietat de la convolució és, probablement, la més important per la transcendència que té en les aplicacions del processament de senyal. La convolució és una operació clau en el tractament de sistemes lineals; per aquest motiu, el coneixement de les propietats d'aquest operador és de gran utilitat.

Considerant la definició de convolució entre dos senyals:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \qquad (44)$$

La TFSD del senyal $y[n]$ es pot expressar en funció de les transformades de $x[n]$ i $h[n]$ de la manera següent:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \right) e^{-j\omega n} \qquad (45)$$

En permutar l'ordre dels sumatoris aplicant-hi la propietat commutativa:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-m] e^{-j\omega n} \qquad (46)$$

En aplicar les propietats de la TFSD observem que el segon terme de l'expressió correspon a un desplaçament temporal de $h[n]$ que tindrà com a transformada $e^{-j\omega m}H(e^{j\omega})$ i en tornar a ordenar els termes del sumatori:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} H(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \qquad (47)$$

Per tant, la TFSD de la convolució de dues seqüències té com a transformada el producte de les TFSD de cada seqüència. La convolució en el domini temporal es tradueix en productes en el domini transformat, una propietat àmpliament coneguda en l'àmbit del processament de senyal.

3.12. Multiplicació en el temps

La dualitat de les transformades fa que les propietats en un domini tinguin la dual conseqüent en el domini transformat. En el subapartat anterior s'ha demostrat que la convolució en el temps es tradueix en una multiplicació en freqüència. En aquest cas veurem què passa quan el que fem és una multiplicació temporal de dues seqüències per determinar quin efecte hi ha en el domini freqüencial.

Considerem una seqüència $y[n]=x_1[n]x_2[n]$ i calculem la TFSD d'aquesta seqüència:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]x_2[n]e^{-j\omega n} \qquad (48)$$

en considerar que $x_1[n]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_1\left(e^{j\theta}\right)e^{j\theta n}\delta\theta$,

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_1\left(e^{j\theta}\right)e^{j\theta n}\delta\theta\right)x_2[n]e^{-j\omega n} \qquad (49)$$

i en aplicar novament la propietat commutativa del producte respecte de la suma:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_1\left(e^{j\theta}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]e^{-j(\omega-\theta)n}\right)\delta\theta \qquad (50)$$

en què veiem que el terme del sumatori correspon a una propietat de modulació i que l'equació queda de la manera següent:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_1\left(e^{j\theta}\right)X_1\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)\delta\theta \qquad (51)$$

la qual cosa correspon a una convolució periòdica sobre qualsevol interval de longitud 2π.

3.13. Propietats de simetria de la TFSD

En aquest subapartat estudiarem les propietats de simetria principals de la TFSD per a senyals reals, atès que en les aplicacions que tractarem en aquesta assignatura es considera que els senyals implicats són gairebé tots senyals reals. La característica de la TFSD en la seva expressió matemàtica és la que determina les propietats de simetria existents, com també la demostració corresponent.

A continuació hi ha una taula que recull les principals propietats de simetria de la TFSD per a senyals reals.

Simetria conjugada per a senyals reals	$x[n]$ és real i parell	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ Re\lvert X(e^{j\omega})\rvert = Re\lvert X(e^{-j\omega})\rvert \\ Im\lvert X(e^{j\omega})\rvert = -Im\lvert X(e^{-j\omega})\rvert \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert \\ \measuredangle\lvert X(e^{j\omega})\rvert = -\measuredangle\lvert X(e^{-j\omega})\rvert \end{cases}$
Simetria per a senyals parells reals	$x[n]$ real i parell	$X(e^{j\omega})$ real i parell
Simetria per a senyals imparells reals	$x[n]$ real i imparell	$X(e^{j\omega})$ purament imaginari i imparell

Quan es tracta de senyals reals, la TFSD és la projecció sobre una part real en forma de cosinus i sobre una imaginària en forma de sinus, ja que $e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\sin(\omega)$. Si el senyal d'entrada és real i parell, només tindrà component sobre la part real de la transformada (el cosinus és un senyal parell). Si el senyal d'entrada és imparell, només tindrà projecció sobre la part imaginària (el sinus és imparell). Amb aquest raonament i aplicant les propietats es poden anar obtenint les diferents relacions de simetria presentades anteriorment.

4. La sèrie discreta de Fourier (SDF)

En aquest apartat es presentarà la descomposició en sèrie de Fourier per a un senyal discret. És ben sabut que els senyals periòdics es poden descompondre com a combinació lineal de senyals periòdics exponencials complexos, en què aquest és un dels principis fonamentals de la teoria de Fourier.

En aquest apartat ens centrarem en l'estudi dels senyals periòdics discrets i els considerarem com aquells que compleixen

$$x[n] = x[n + rN] \qquad (52)$$

en què N és el període fonamental i r qualsevol valor enter.

El primer aspecte diferencial de les sèries periòdiques discretes respecte de les contínues és que per a un senyal discret el nombre d'exponencials complexes que tenen una periodicitat de N mostres és finit:

$$e^{j\frac{k2\pi}{N}n} \qquad k = 0,1,2,..,N-1 \qquad (53)$$

Aquesta és una de les diferències principals respecte de les sèries contínues de Fourier, en què el nombre d'harmònics s'estenia fins a infinit.

Aquest fet provocarà que, per a un senyal periòdic de deu mostres, la descomposició en sèries discretes de Fourier tingui un total de deu coeficients i, per a un de cinc mostres, només cinc coeficients.

4.1. Els coeficients de la sèrie discreta de Fourier

La descomposició en SDF requereix emprar una equació de càlcul per obtenir cadascun dels coeficients de la descomposició. En el cas de les sèries discretes, les equacions de càlcul són les següents:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk(2\pi/N)n} \qquad (54)$$

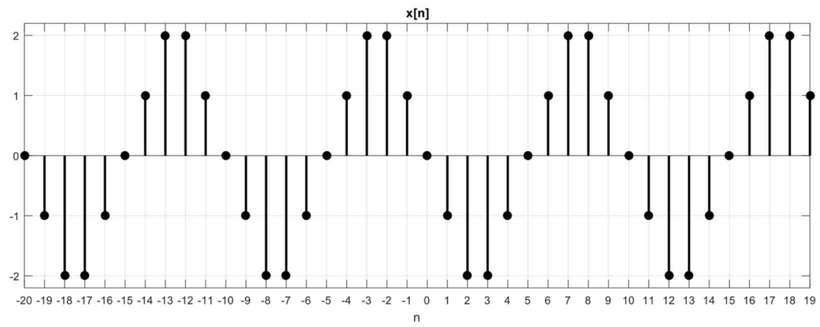
en què

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \qquad (55)$$

és la primera equació de síntesi, que indica com podem generar la seqüència $x[n]$ com a suma de N senyals harmònics de periodicitat N. La segona equació correspon a l'equació d'anàlisi, que indica com podem obtenir el valor de cadascun dels coeficients del senyal a partir de les mostres d'un període bàsic.

Exemple 1

A partir del senyal de temps discret següent:



a) Quin és el seu període?

Observem que es repeteixen els valors cada deu mostres. El senyal és periòdic de període 10.

b) Quin pols fonamental té?

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ rad}\big/\text{s}$$

c) Quants coeficients del desenvolupament en sèries de Fourier poden ser diferents?

En el cas discret hi ha tants coeficients diferents com mostres té un període de la seqüència. Per tant, n'hi ha deu de diferents.

d) Els seus coeficients seran reals, imaginaris purs o imaginaris? Per què?

Els coeficients són imaginaris purs perquè el senyal té simetria imparell.

e) Sense resoldre la sèrie de Fourier, quin és el valor de a_0?

Com que el senyal presenta simetria imparell, podem dir que a_0 ha de ser 0. Si ho calculem, veurem que és així.

$$a_0 = \frac{\sum_{n=0}^{9} x[n]}{10} = 0$$

f) Trobeu els coeficients del desenvolupament en sèries de Fourier, coeficients a_k.

Apliquem l'equació:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

En el nostre cas,

$$a_k = \frac{1}{10} \sum_{n=-5}^{4} x[n] e^{-j\frac{\pi}{5}kn} = = \frac{1}{10}(e^{-j\frac{\pi}{5}k(-4)} + 2e^{-j\frac{\pi}{5}k(-3)} + 2e^{-j\frac{\pi}{5}k(-2)} +$$
$$e^{-j\frac{\pi}{5}k(-1)} - e^{-j\frac{\pi}{5}k(1)} - 2e^{-j\frac{\pi}{5}k(2)} - 2e^{-j\frac{\pi}{5}k(3)} - e^{-j\frac{\pi}{5}k(4)})$$

$$a_k = \frac{1}{10}\left(e^{j\frac{4\pi}{5}k} + 2e^{j\frac{3\pi}{5}k} + 2e^{j\frac{2\pi}{5}k} + e^{j\frac{\pi}{5}k} - e^{-j\frac{\pi}{5}k} - 2e^{-j\frac{2\pi}{5}k} - 2e^{-j\frac{3\pi}{5}k} - e^{-j\frac{4\pi}{5}k}\right)$$

agrupant:

$$a_k = \frac{1}{10}\left(e^{j\frac{4\pi}{5}k} - e^{-j\frac{4\pi}{5}k} + 2e^{j\frac{3\pi}{5}k} - 2e^{-j\frac{3\pi}{5}k} + 2e^{j\frac{2\pi}{5}k} - 2e^{-j\frac{2\pi}{5}k} + e^{j\frac{\pi}{5}k} - e^{-j\frac{\pi}{5}k}\right)$$

amb la qual cosa

$$a_k = \frac{1}{10}\left(2j\sin\left(\frac{4\pi}{5}k\right) + 4j\sin\left(\frac{3\pi}{5}k\right) + 4j\sin\left(\frac{2\pi}{5}k\right) + 2j\sin\left(\frac{\pi}{5}k\right)\right)$$

$$a_k = j\frac{1}{5}\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}k\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{5}k\right) + 2\sin\left(\frac{2\pi}{5}k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}k\right)\right)$$

En què veiem clarament que els coeficients són imaginaris purs.

g) A partir del resultat obtingut, quins serien els coeficients per al senyal $x[n-3]$?

$$b_k = a_k \cdot e^{-j\frac{\pi}{5}k(3)} = a_k \cdot e^{-j\frac{3\pi}{5}k}$$

h) Trobeu els coeficients del senyal $x[n] - x[n-1]$ a partir dels coeficients a_k.

$$b_k = a_k - a_k e^{-j\frac{\pi k}{5}} = a_k\left(1 - e^{-j\frac{\pi k}{5}}\right)$$

A continuació, responeu les qüestions següents i justifiqueu la resposta.

i) Quin és el valor del coeficient a_1?

$$a_1 = j\frac{1}{5}\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

En avaluar $a_1 = 0.9960j$

j) Quin és el valor del coeficient a_{59}?

Com que és periòdic de període 10, hem de $a_{59} = a_{10 \cdot 5+9} = a_9$.

$$a_9 = j\frac{1}{5}\left(\sin\left(\frac{36\pi}{5}\right) + 2\sin\left(\frac{27\pi}{5}\right) + 2\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right)$$

$a_9 = -0.9960\text{j}$

k) Quin és el valor del coeficient a_{24}?

Com que és periòdic de període 10, tenim que $a_{24} = a_{10 \cdot 2+4} = a_4$.

$$a_4 = j\frac{1}{5}\left(\sin\left(\frac{16\pi}{5}\right) + 2\sin\left(\frac{12\pi}{5}\right) + 2\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$$

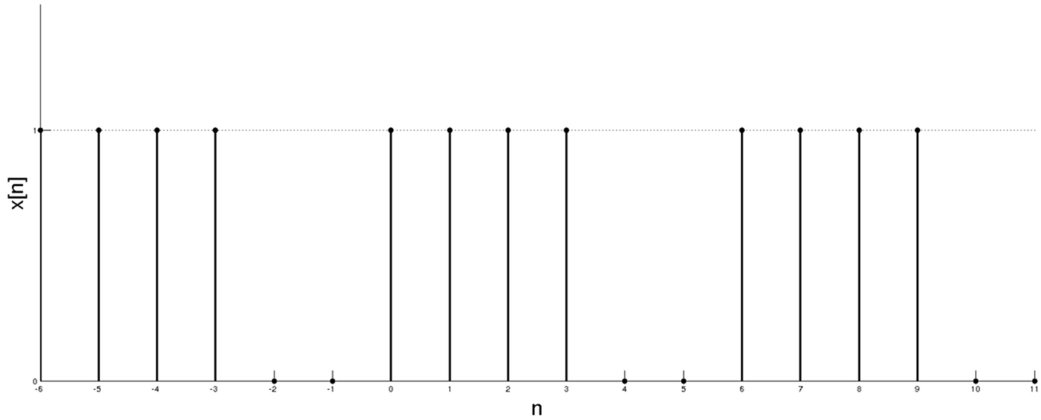
$a_4 = 0$

l) Quin és el valor del coeficient a_{40}?

$a_{40} = 0$, en ser equivalent a a_0.

Exemple 2

A partir del senyal de temps discret següent:



a) Quin és el seu període?

En observar la gràfica veiem que és periòdic de període $N = 6$.

b) Quin pols fonamental té?

El pols fonamental serà donat per:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad \text{rad}\big/\text{s}$$

c) Quants coeficients del desenvolupament en sèries de Fourier poden ser diferents?

Sabem que, en el cas de senyals discrets periòdics, els coeficients del desenvolupament en sèries de Fourier també són periòdics. A més, el període és el mateix que té el senyal en el domini del temps. En conseqüència, hi ha sis coeficients diferents.

d) Els seus coeficients seran reals, imaginaris purs o imaginaris? Per què?

Són imaginaris, és a dir, tindran una part real i una part imaginària. Ho sabem perquè el senyal no presenta cap simetria (no és parell, ni imparell).

e) Sense resoldre la sèrie de Fourier, quin és el valor de a_0?

El valor de a_0, com en el cas de temps continu, representa el valor mitjà. En aquest cas serà un valor positiu, ja que només tenim mostres positives. Per avaluar-lo sumem les mostres en un període i el dividim pel període. Sumem, per exemple, les mostres entre $n = 0$ i $n = 1$.

$$a_0 = \frac{1+1+1+1+0+0}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

f) Trobeu els coeficients del desenvolupament en sèries de Fourier, coeficients a_k.

Avaluem l'expressió general:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

En el nostre cas,

$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{5} x[n] e^{-jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{6}\left(1 + 1\cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}} + 1\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + 1\cdot e^{-jk\pi} + 1\cdot e^{-jk\frac{4\pi}{3}} + 0 + 0\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + e^{-jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + e^{-jk\pi}\right)$$

Avaluem els sis coeficients diferents:

$$a_0 = \frac{1}{6}\left(1 + e^0 + e^0 + e^0\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$ (tal com ja havíem calculat)

$$a_1 = \frac{1}{6}(1 + e^{-j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\pi}) = = \frac{1}{6}(1 + \cos(\tfrac{\pi}{3}) - j\sin(\tfrac{\pi}{3}) + \cos(\tfrac{2\pi}{3}) -$$
$$j\sin(\tfrac{2\pi}{3}) - 1) = = \frac{1}{6}(1 + \tfrac{1}{2} - j\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2} - j\tfrac{\sqrt{3}}{2} - 1) = -j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$a_2 = \frac{1}{6}(1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j2\pi}) = = \frac{1}{6}(1 + \cos(\tfrac{2\pi}{3}) - j\sin(\tfrac{2\pi}{3}) +$$
$$\cos(\tfrac{4\pi}{3}) - j\sin(\tfrac{4\pi}{3}) + 1) = = \frac{1}{6}(1 - \tfrac{1}{2} - j\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2} + j\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1) = \frac{1}{6}$$

$$a_3 = \frac{1}{6}\left(1 + e^{-j\frac{3\pi}{3}} + e^{-j\frac{6\pi}{3}} + e^{-j3\pi}\right) = \frac{1}{6}(1 - 1 + 1 - 1) = 0$$

$$a_4 = \frac{1}{6}(1 + e^{-j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j\frac{8\pi}{3}} + e^{-j4\pi}) = \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + 1) = \frac{1}{6}$$

$$a_5 = \frac{1}{6}(1 + e^{-j\frac{5\pi}{3}} + e^{-j\frac{10\pi}{3}} + e^{-j5\pi}) = \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1) = j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

S'observen valors reals i imaginaris purs, és a dir, són imaginaris, tal com hem comentat al punt *d* (no són tots reals o tots imaginaris purs), però resulta que la part real és zero quan la imaginària no ho és, o viceversa.

g) A partir del resultat obtingut, quins serien els coeficients per al senyal $x[n-4]$?

Tal com indica la propietat del desplaçament, els coeficients seran:

$$b_k = a_k e^{-jk\frac{\pi}{3}4}$$

h) Podem obtenir els coeficients del senyal $x[2n]$ a partir dels coeficients a_k? Per què? I, per exemple, de $x\left[\frac{n}{2}\right]$? Per què?

En el cas discret, comprimir en el temps equival a perdre mostres i, per tant, el senyal pot no tenir res a veure amb l'original. Per això no podem obtenir els coeficients de $x[2n]$ a partir dels coeficients $x[n]$.

Per contra, expandir un senyal en el temps consisteix a intercalar-hi zeros, però les mostres que hi ha en el senyal original ho estan en la versió expandida. El període canvia al doble (en general, *aN*). Els coeficients seran $\frac{a_k}{2}$ i n'hi haurà dotze de diferents.

i) Trobeu els coeficients del senyal $x\left[\frac{n}{2}\right]$ que pugueu de l'apartat *h* a partir dels coeficients a_k. Només ho podem fer de $x\left[\frac{n}{2}\right]$.

Aplicant la propietat d'expansió en el temps:

$$a_0 = \frac{1}{3},\quad a_1 = -j\frac{\sqrt{3}}{6},\quad a_2 = \frac{1}{12},\quad a_3 = 0,\quad a_4 = \frac{1}{12},\quad a_5 = j\frac{\sqrt{3}}{12}$$
$$a_6 = \frac{1}{3},\quad a_7 = -j\frac{\sqrt{3}}{6},\quad a_8 = \frac{1}{12},\quad a_9 = 0,\quad a_{10} = \frac{1}{12},\quad a_{11} = j\frac{\sqrt{3}}{12}$$

Observem que a partir del 6 es tornen a repetir (en passar en són 12 de diferents, però en realitat en són 6).

A continuació, responeu les qüestions següents i justifiqueu la resposta (per al senyal periòdic de període 6).

j) Quin és el valor del coeficient a_{-1}?

$$a_{-1} = a_{-1+6} = a_5 = j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

k) Quin és el valor del coeficient a_{59}?

$$a_{59} = a_{5+6\cdot 9} = a_5 = j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

l) Quin és el valor del coeficient a_{24}?

$$a_{24} = a_{0+6\cdot 4} = a_0 = \frac{2}{3}$$

m) Quin és el valor del coeficient a_{40}?

$$a_{40} = a_{4+6\cdot 6} = a_4 = \frac{1}{6}$$

4.2. Propietats de les SDF

Les SDF, de manera similar a la TFSD, presenten una sèrie de propietats que cal conèixer per poder utilitzar-les en la interpretació teòrica o en el seu càlcul de coeficients, similarment amb les que es van presentar en el cas de la TFSD.

No obstant això, hi ha algunes característiques particulars pròpies de la naturalesa dels senyals implicats. Perquè una propietat pugui considerar-se en el cas de la SDF cal que, després d'aplicar-hi la propietat, el resultat sigui una nova seqüència amb la mateixa periodicitat que la seqüència d'origen, cosa que limita l'ús d'algunes propietats.

Atesa la similitud entre aquestes propietats amb les exposades en l'apartat previ de la TFSD, no les exposarem de manera particularitzada, sinó que només en presentarem la taula de propietats; per tant, en deixarem la demostració per a l'estudi complementari.

Propietat	Senyals implicats	DFS
	Si $x[n]$, $y[n]$ són dues seqüències periòdiques de periodicitat N	Si $\tilde{X}[k]$, $\tilde{Y}[k]$ són els coeficients en desenvolupament de la sèrie discreta de Fourier
Linealitat	$Ax[n] + B \quad y[n]$	$A\tilde{X}[k] + B\tilde{Y}[k]$
Desplaçament en el temps	$x[n - n_0]$	$e^{-jk(2\pi/N)n_0}\tilde{X}[k]$
Modulació o desplaçament en freqüència	$e^{jM(2\pi/N)n}x[n]$	$\tilde{X}[k - M]$
Convolució periòdica	$\sum_{r=0}^{N-1} x[r] \quad y[k-r]$	$N\tilde{X}[k]\tilde{Y}[k]$
Multiplicació	$x[n]\cdot y[n]$	$\sum_{N-1}^{r=0} \tilde{X}[r]\cdot \tilde{Y}[k-r]$
Diferenciació en el temps	$x[n] - \quad x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})\tilde{X}[k]$

Propietat	Senyals implicats	DFS
Teorema de Parseval	$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\lvert x[n]\rvert^2$	$\sum_{k=0}^{N-1}\lvert\tilde{X}[k]\rvert^2$

Hi ha altres propietats que completen les anteriors, però es poden demostrar fàcilment a partir de les que hem vist per al cas de la TFSD o a partir de les equacions de càlcul de la SDF, per la qual cosa no cal que ens estenguem en aquest aspecte. Les propietats comparteixen elements conceptuals i és repetitiu reincidir en les demostracions que presenten.

5. La TFSD de senyals periòdics discrets

El càlcul de la TFSD d'un senyal periòdic pot ser interessant per completar l'extensió del camp d'aplicació de la TFSD sobre aquest tipus de senyals. Tal com s'ha estudiat en el subapartat 1.3, la TFSD requereix unes condicions concretes per poder existir, com ara el fet que la sèrie d'entrada sigui absolutament sumable $\sum_{\infty}^{n=-\infty} |x[n]| < \infty$.

Estrictament parlant, els senyals periòdics no compleixen aquesta condició d'existència, de manera que no es podria fer el càlcul de la TFSD. Amb tot, en el càlcul d'alguns senyals concrets, com ara el senyal constant, s'ha observat que si portem al límit els operadors matemàtics podrem fer el càlcul de les TFSD de senyals interessants com el senyal constant, que, tal com s'ha analitzat en el subapartat 2.4, va portar a obtenir aquest parell transformat:

$$1 \xleftrightarrow{\text{TFSD}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - 2\pi k) \qquad (83)$$

Sobre aquesta equació, i aplicant la propietat de modulació amb una exponencial periòdica del tipus $e^{jk(2\pi/N)n}$, es pot obtenir la transformada següent:

$$e^{jk(2\pi/N)n} \xleftrightarrow{\text{TFSD}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k(2\pi/N) - 2\pi k) \qquad (84)$$

Finalment, tenint en compte que tota seqüència periòdica de període N admet un desenvolupament en DFS del tipus:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk(2\pi/N)n} \qquad (85)$$

i aplicant adequadament la propietat de linealitat es pot arribar a aquesta expressió:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk(2\pi/N)n} \xleftrightarrow{\text{TFSD}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\tilde{X}[k]\delta(\omega - k(2\pi/N)) \qquad (86)$$

Equació que demostra que la TFSD d'un senyal periòdic es pot obtenir directament a partir dels coeficients de la seva SDF.

Exemple 3

Considereu aquest senyal periòdic discret:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}$$

En aplicar directament la propietat de modulació o desplaçament freqüencial per al senyal previ obtenim:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k)$$

Això es tradueix en:

$$X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \pi\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) \qquad - \leq \omega \leq \pi$$

Tenint en compte que qualsevol senyal periòdic discret serà un sumatori d'exponencials complexes, serà fàcil determinar la TFSD de qualsevol senyal periòdic a partir del resultat de l'exemple anterior.

6. Caracterització de sistemes LIT digitals mitjançant la TFSD

La teoria desenvolupada té com a objectiu l'aplicació pràctica sobre l'anàlisi i el disseny de sistemes digitals. Com se sap, en aquesta assignatura es restringeix l'estudi a aquells sistemes que tenen dues propietats específiques, com ara la linealitat i la invariància temporal.

Aquests sistemes ja han estat estudiats en el mòdul de la transformada z i, de fet, les diferents transformades permeten particularitzar aquest estudi per a determinades casuístiques, com també per implementar-les en dispositius de càlcul digital. El fet d'utilitzar una transformada o una altra dependrà de l'objectiu que es busqui en cada cas. La transformada z és de gran utilitat per al disseny de filtres digitals, mentre que en els casos d'anàlisi freqüencial sol ser més comú l'ús de la TFSD.

En aquest apartat es farà un recorregut semblant al del mòdul de la transformada z per a la caracterització de sistemes LIT, però l'estudi se centrarà en la TFSD i les seves propietats i es relacionaran els conceptes amb aquells que s'han vist prèviament en el cas de la transformada z.

6.1. Funció de transferència d'un sistema LIT digital

S és un sistema LIT digital; $x[n]$, el seu senyal d'entrada, $y[n]$, el seu senyal de sortida, i $h[n]$, la seva resposta impulsional. Com sabem, aquests tres senyals estan relacionats per mitjà de l'operació convolució:

$$y[n] = x[n] * h[n] \qquad (89)$$

Aplicant les propietats de la TFSD, tal com s'ha vist en el subapartat 3.11, es pot obtenir la relació següent:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \qquad (90)$$

en què $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ les TFSD de, respectivament, $x[n]$, $y[n]$ i $h[n]$.

Aquest raonament porta fins a la definició de $H(e^{j\omega})$ com la funció de transferència del sistema LIT.

L'observació de l'equació ens permet veure que el sistema LIT exerceix una transformació dels components freqüencials del senyal d'entrada i els altera pel que fa al mòdul i a la fase, de manera que caldrà conèixer la representació de la funció de transferència en mòdul i fase per tal de comprendre l'efecte sobre les freqüències del senyal d'entrada.

L'efecte del sistema en termes d'aquestes dues magnituds ens porta fins a aquestes equacions de relació:

$$\left|Y(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{j\omega})\right| \left|H(e^{j\omega})\right| \qquad (91)$$

$$\sphericalangle\, Y\left(e^{j\omega}\right) = \sphericalangle\, X\left(e^{j\omega}\right) + \sphericalangle\, H\left(e^{j\omega}\right) \qquad (92)$$

La primera equació mostra que els components freqüencials del senyal d'entrada seran amplificats o atenuats en mòdul segons el mòdul de la funció de transferència per a cada freqüència, mentre que la fase resultant per a cada valor ω serà la suma de les fases. Aquest fet és molt important per entendre els efectes d'un sistema *S* sobre el senyal d'entrada, de manera que es pot explicar la transformació que produeix segons aquests dos paràmetres. Això fa que la representació dels sistemes en mòdul i fase sigui molt més utilitzada que en part real o imaginària, atès que té una interpretació física clara sobre l'efecte que produeix sobre el senyal, que serà justament el que es veurà en el subapartat 6.2.

6.2. Representació en mòdul i fase de la TFSD

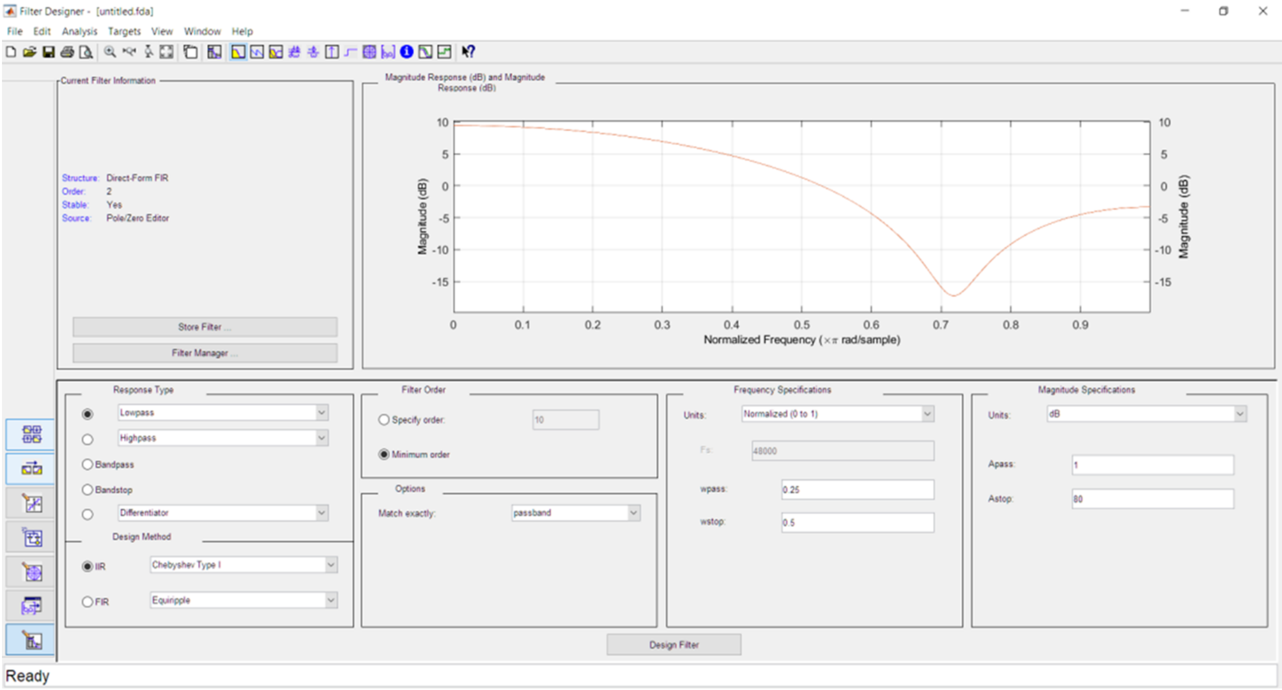
Per saber quins són els efectes d'un sistema LIT sobre un senyal determinat cal conèixer la representació en mòdul i fase del sistema, ja que això ens permetrà veure l'amplificació o atenuació sobre cada freqüència, com també el desfasament que produirà sobre el senyal d'entrada.

Per a l'anàlisi de mòdul i fase treballarem amb l'aplicació MATLAB FilterDesigner, una interfície gràfica potent que permet dissenyar i analitzar filtres.

Per poder treballar amb freqüències normalitzades i tenir una representació de la TFSD, cal modificar algunes característiques del mòdul.

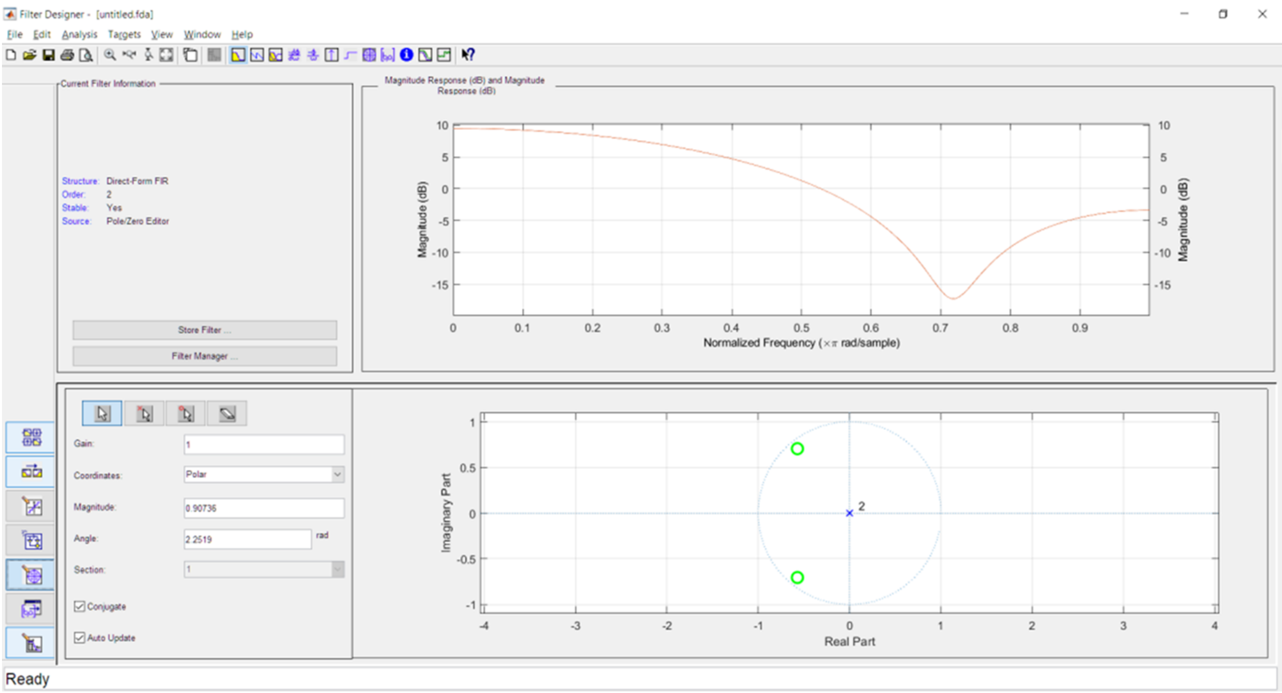
Tal com s'observa a la figura 1, a «Frequency Specifications» s'ha seleccionat l'opció «Normalized». Això permetrà visualitzar l'eix freqüencial normalitzat entre [0..1] o entre [0..π].

Figura 1. Normalització de la freqüència



Atès que el disseny de filtres no és un dels objectius d'estudi, passarem a configurar l'aplicació per poder visualitzar les representacions utilitzant el «Pole/Zero Editor», tal com mostra la figura 2.

Figura 2. Activació de l'anàlisi de pols i zeros



Al marge inferior esquerre s'observa que s'ha activat una visualització que permet treballar directament amb la informació de pols i zeros, la qual cosa facilitarà l'anàlisi de sistemes dissenyats a partir de la seva transformada z o directament en el domini de la TFSD.

6.2.1. El mòdul de la funció de transferència

Considerem una funció de transferència d'un sistema discret caracteritzada de la manera següent:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = G\frac{\prod_{k=1}^{K}\left(e^{j\omega} - c_k\right)}{\prod_{l=1}^{L}\left(e^{j\omega} - p_l\right)} \tag{93}$$

com un sistema amb K zeros, L pols i un guany G. Aplicant les propietats matemàtiques del mòdul de l'expressió anterior s'obté:

$$|H(e^{j\omega})| = |G|\frac{\prod_{k=1}^{K}|e^{j\omega} - c_k|}{\prod_{l=1}^{L}|e^{j\omega} - p_l|} \tag{94}$$

De manera que el mòdul de l'expressió per a una ω determinada serà el producte de mòduls dels vectors $\left(e^{j\omega} - c_k\right)$ dividit entre el producte de mòduls dels vectors $\left(e^{j\omega} - p_l\right)$. Això vol dir que per calcular el guany del filtre haurem de recórrer el cercle unitat per als diferents valors de ω i anar efectuant l'operació matemàtica prèvia. Evidentment, per a l'avaluació de sistemes complexos es recorre a l'ús de programari d'anàlisi, com ara MATLAT, però el més interessant d'aquesta deducció és que quan ens apropem a l'àrea d'influència d'un zero el guany del sistema baixa, i quan ens acostem a la zona d'influència d'un pol el guany del sistema puja, ja que el producte és en el denominador. Això permetrà fer una aproximació al guany del sistema tan sols a partir de la visualització del diagrama de pols i zeros, com veurem en els exemples següents.

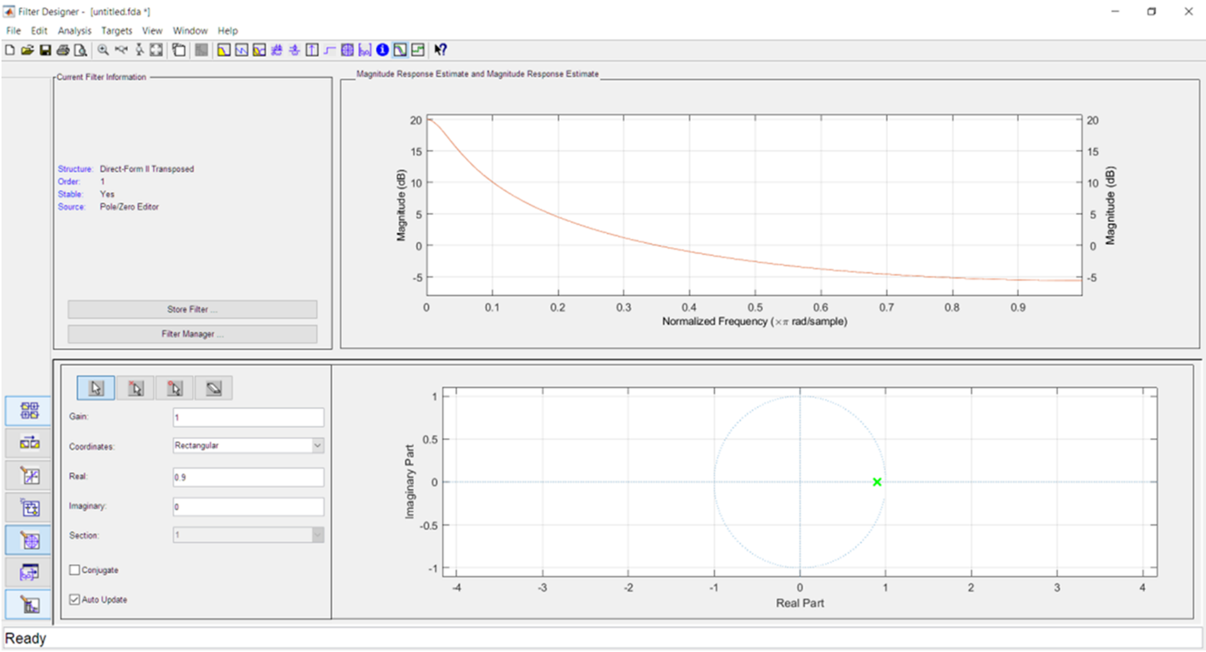
Exemple 4

Calculem ara la representació en mòdul del sistema següent:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{\left(e^{j\omega} - 0.9\right)}$$

El guany d'un sistema en dB es defineix com $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 20\log 10\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right)$ que, en el cas concret de l'exemple, porta a la funció de transferència següent:

Figura 3. Funció de transferència del sistema



Exemple 5

Calculem ara la representació en mòdul del sistema següent:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(e^{j\omega}-a\right)}$$

Representem la funció de transferència per $a = 0.99$, $a = 0.75$ i $a = 0.5$

Figura 4. Pol situat a 0.99

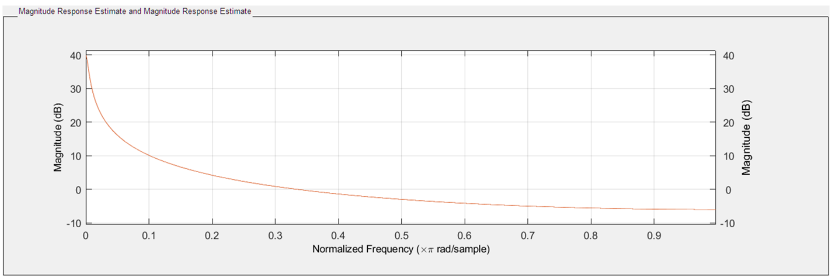


Figura 5. Pol situat a 0.75

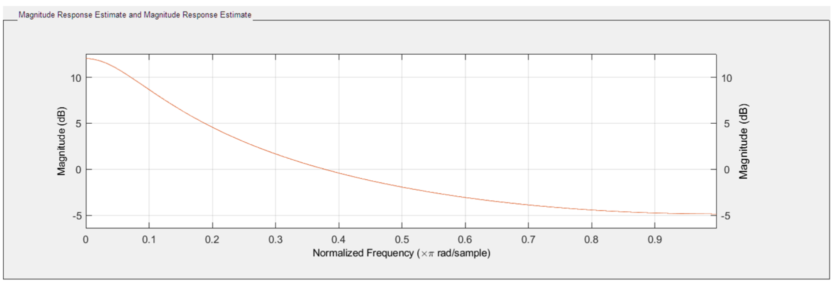
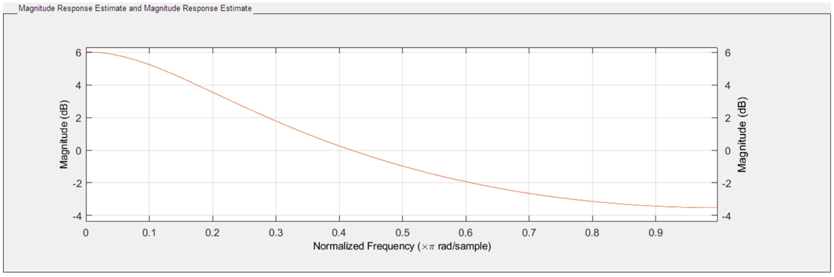


Figura 6. Pol situat a 0.5

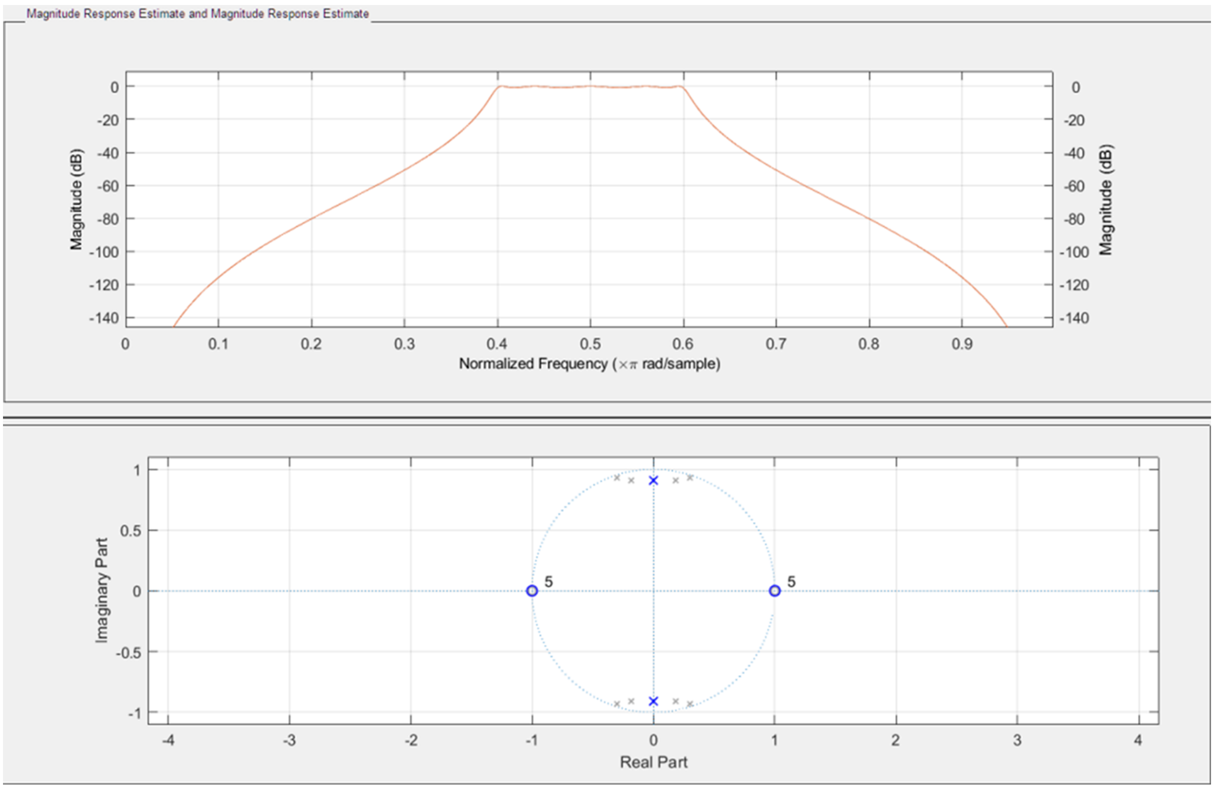


Aquest exemple ens permet observar que com més proper sigui el pol al cercle unitat, més abrupta serà la modificació de la funció de transferència, que, en aquest cas concret, es tradueix amb un filtre més selectiu en freqüència. D'altra banda, a mesura que el pol s'allunya del cercle unitat, ens porta filtres amb un pendent menys abrupte o filtres menys selectius en freqüència.

Exemple 6

En aquest exemple s'analitza el diagrama de pols i zeros d'un filtre dissenyat amb unes característiques de filtre passabanda amb una banda de pas centrada en $\omega = \pi/2$.

Figura 7. Exemple de filtre passabanda



Aquest exemple il·lustra la posició dels pols i els zeros del filtre dissenyat. Com que es tracta d'un filtre passabanda, aquest es dissenya per tenir un guany 0 a ω = 0 i ω = π, tal com s'observa en el posicionament dels zeros del sistema. Els pols són a prop del cercle unitat en posicions al voltant de $e^{j\omega\pi/2}$, i els simètrics conjuntats al voltant de $e^{-j\omega\pi/2}$.

Les tècniques de disseny de filtres són mètodes numèrics que resolen equacions complexes per tal d'aproximar la funció de transferència del sistema a una plantilla ideal. Tot i que no forma part dels objectius d'estudi d'aquesta assignatura, cal entendre la relació entre la funció de transferència i la ubicació dels pols i els zeros del sistema.

L'ordre del filtre serà determinat pel nombre de pols, en el cas que sigui un filtre de resposta impulsional infinita o filtre IIR (en anglès, *infinite impulse response*), o pel nombre de zeros, en el cas que siguin filtres de resposta impulsional finita o filtres FIR (en anglès, *finite impulse response*).

La fase del sistema és el segon aspecte de rellevància en el disseny del filtre i, en condicions de disseny determinades, pot tenir una gran importància.

6.2.2. La fase de la funció de transferència

De manera anàloga a l'estudi del mòdul, podem observar quins efectes té cadascun dels pols i zeros del sistema sobre la funció de transferència.

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \sphericalangle\left(G\frac{\prod_{k=1}^{K}\left(e^{j\omega}-c_k\right)}{\prod_{l=1}^{L}\left(e^{j\omega}-p_l\right)}\right) \qquad (97)$$

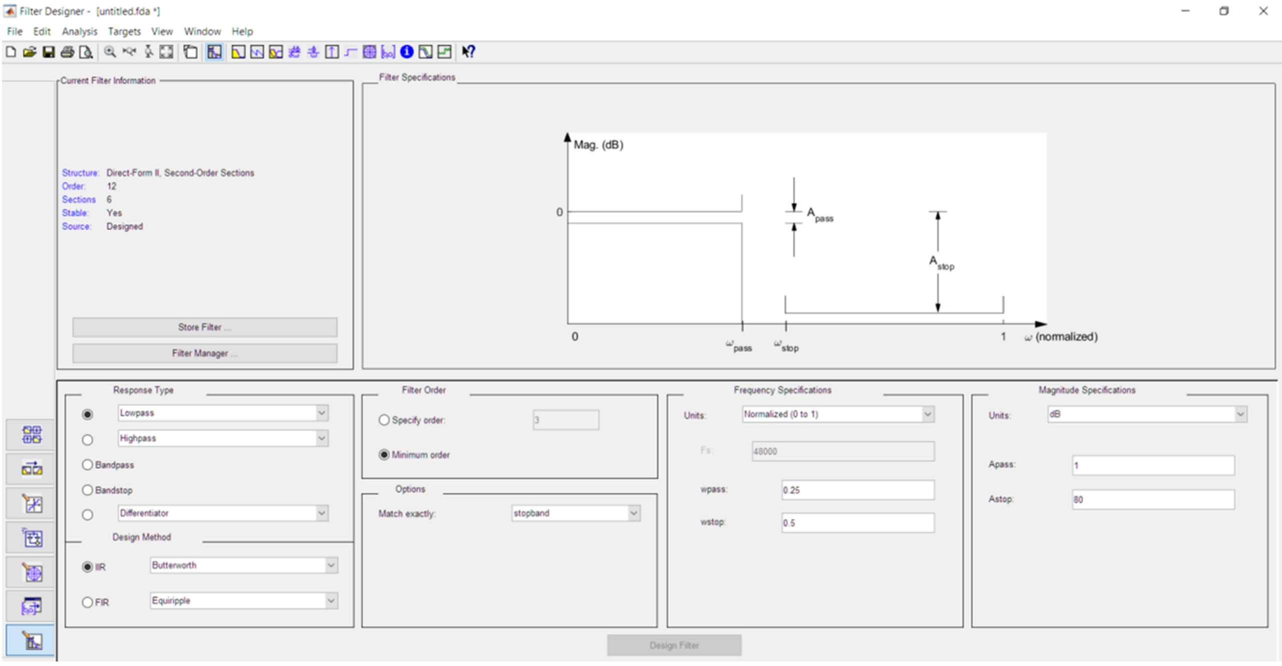
$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \pi\mathrm{sign}(G) + \sum_{k=1}^{K}\sphericalangle\left(\left(e^{j\omega}-c_k\right)\right) - \sum_{l=1}^{L}\sphericalangle\left(e^{j\omega}-p_l\right) \qquad (98)$$

Aquesta expressió aplica la propietat de la fase del producte de complexos, és a dir, la suma de fases de numeradors menys la suma de fases dels denominadors. Hi ha un primer terme que serà zero si G és positiu o π per al cas de guanys negatius.

Aquesta expressió ens fa veure que dissenyar un filtre tenint en compte requeriments de mòdul i fase de manera simultània és una tasca pràcticament impossible. Per això, les tècniques de disseny de filtres normalment treballen a partir de plantilles del mòdul de la funció de transferència, és a dir, determinem quin grup de freqüències volem que passin a la sortida del sistema i quins grups de freqüències volem que desapareguin.

La figura 8 mostra que el disseny del filtre es fa principalment sobre les característiques en mòdul de la funció de transferència.

Figura 8. Exemple d'una plantilla d'especificacions de disseny d'un filtre



El cas de la fase és una característica molt menys manejable en el procés de disseny, de manera que hi ha diferents tècniques de disseny de filtre i cada cas tindrà unes particularitats pel que fa a la fase. Amb tot, en determinades circumstàncies la fase pot ser l'aspecte principal de disseny i pot comportar unes tècniques concretes de disseny de filtres, com veurem a continuació.

Fase lineal i fase no lineal

Els filtres de fase lineal són interessants en algunes aplicacions de l'àmbit del processament de senyal. Imaginem un sistema retardador amb aquesta resposta impulsional:

$$h[n] = \delta[n - n_0] \qquad (99)$$

amb la funció de transferència següent:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \qquad (100)$$

Aquest sistema correspon a un filtre passatot que permet el pas de totes les freqüències per igual i, com veiem, la característica principal del filtre és que la seva fase és lineal. La conclusió que en podem extreure és que quan un filtre té unes característiques de fase lineal, el retard associat per a cadascuna de les freqüències serà el mateix i tots els harmònics a la sortida del sistema tindran el mateix retard.

Quan un sistema no té fase lineal implica que unes freqüències correran més que d'altres en travessar el sistema, i pot haver-hi distorsions en el senyal de sortida per les característiques de la fase.

Els filtres de fase lineal tan sols es poden aconseguir si la resposta impulsional d'aquest compleix condicions de simetria parell o imparell. Aquest fet fa que l'existència de filtres de fase lineal causals només es pugui aconseguir amb filtres FIR, de manera que quan sigui necessari dissenyar un filtre de fase lineal haurem de recórrer a aquest tipus de sistemes.

Retard de grup

El retard de grup d'un sistema es defineix matemàticament així:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\{\sphericalangle H(e^{j\omega})\} \qquad (101)$$

Per al cas d'un sistema de fase lineal com el que hem vist en el subapartat anterior, el retard de grup respondria al valor següent:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\{-j\omega n_0\} = n_0 \qquad (102)$$

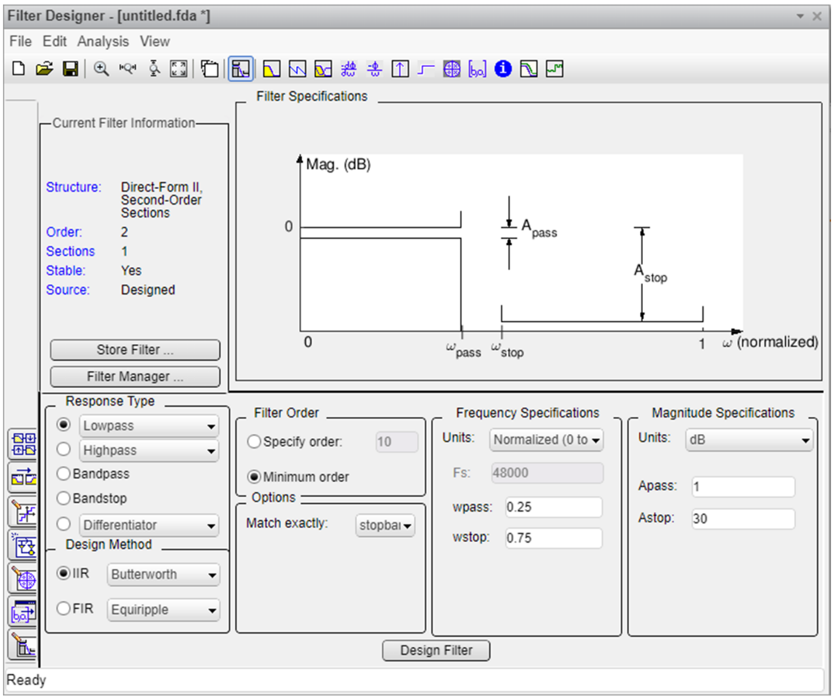
La interpretació física del retard de grup és el nombre de mostres que cadascuna de les freqüències veurà retardada a la sortida del sistema. En el cas d'un filtre de fase lineal s'observa que el retard de grup serà constant, és a dir, totes les freqüències es retarden el mateix nombre de mostres.

En el cas d'un sistema de fase no lineal, el retard de grup variarà en freqüència, de manera que tindrem paquets d'energia que passaran més de pressa a través del filtre i paquets d'energia que aniran més lents. Aquest concepte serà més fàcil d'interpretar si es veuen alguns exemples pràctics.

Exemple 7

Hem de calcular un filtre que compleixi aquestes especificacions de disseny:

Figura 9. Plantilla de disseny d'un filtre passabaix discret



Per fer-ho, s'utilitzaran tres tècniques de disseny i es compararan els resultats en cada cas per poder apreciar les diferències que apareixen quan s'aplica el disseny a partir de diferents tipologies de filtres.

La primera opció correspon a un filtre IIR de Butterworth que presentarà aquest resultat:

Figura 10a. Disseny d'un filtre de Butterworth d'ordre 3

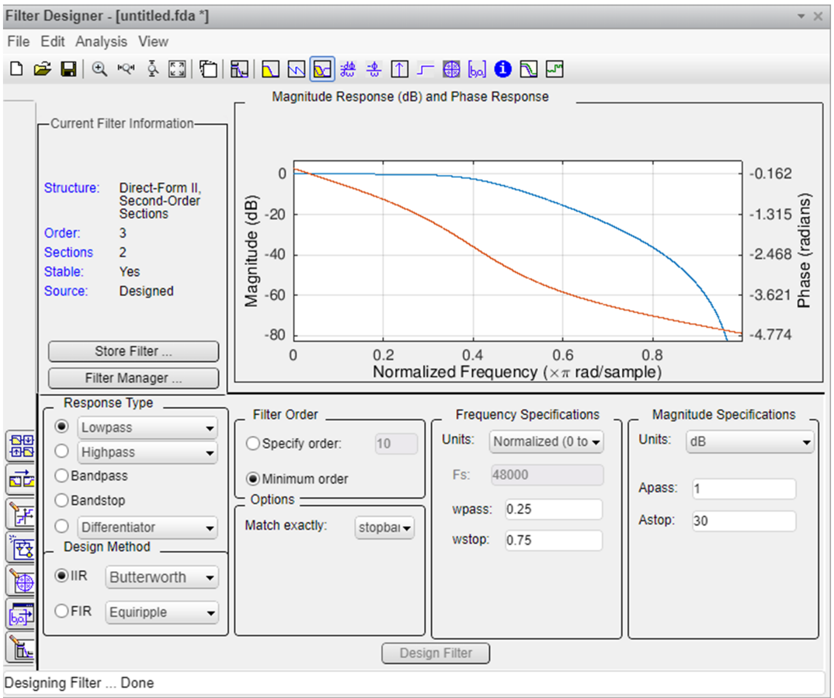
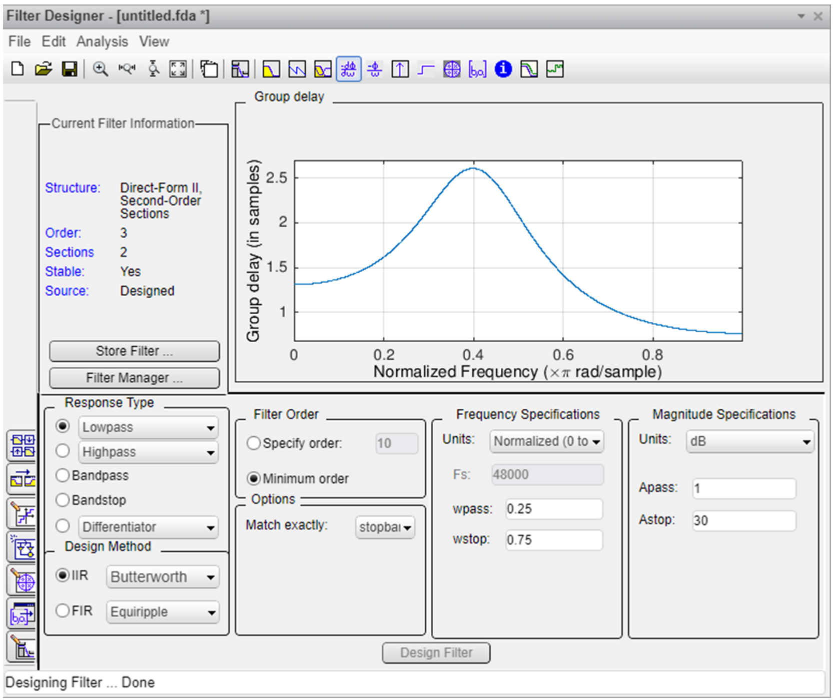


Figura 10b. Disseny d'un filtre de Butterworth d'ordre 3



Arran dels resultats observem que el sistema necessita un ordre 3 per complir amb les especificacions. La representació de la fase ens indica un comportament bastant lineal en la banda de pas, que es tradueix en un retard de grup entre 1.3 i 2 mostres en la banda de pas que s'estén fins a $f = 0.25$.

Es repeteix el procés de disseny, en aquest cas per a un filtre de Txebixev de tipus I, amb la mateixa plantilla d'especificacions i s'obté el resultat següent:

Figura 11a. Disseny d'un filtre de Txebixev de tipus I d'ordre 2

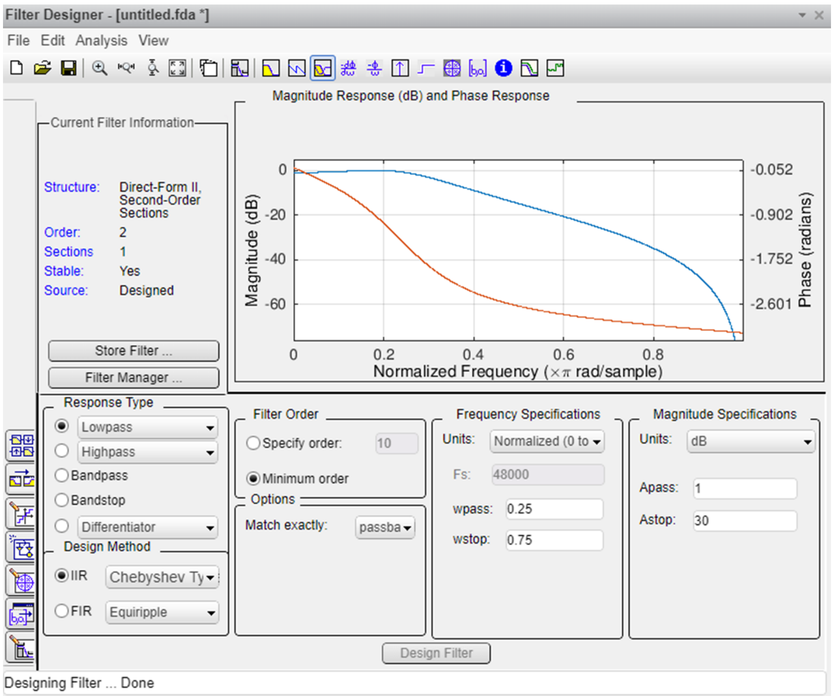
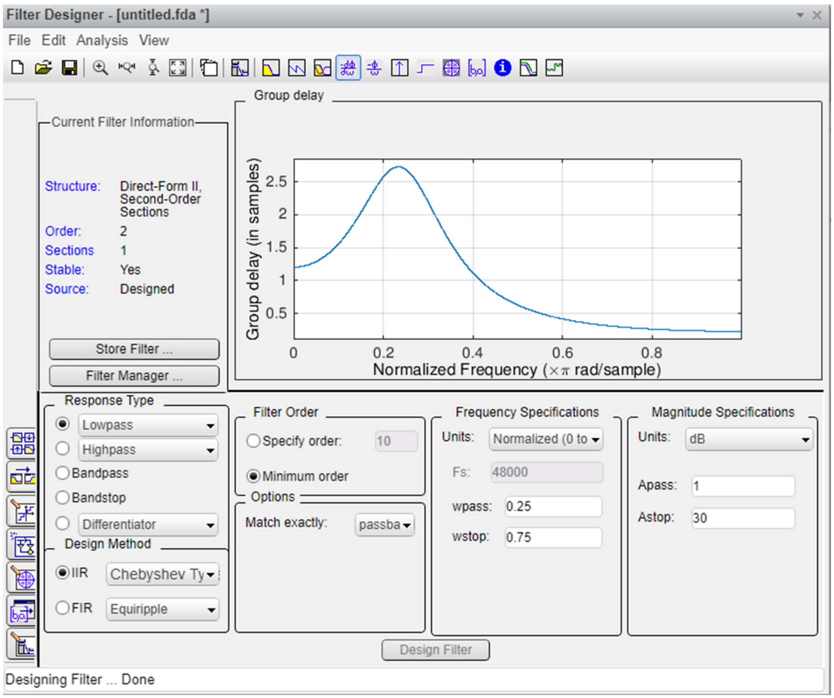


Figura 11b. Disseny d'un filtre de Txebixev de tipus I d'ordre 2



La primera diferència que s'observa és que aquest tipus de filtre necessita un ordre menor per complir amb les especificacions de disseny, cosa que *a priori* pot semblar un avantatge clar. No obstant això, la banda de pas té un petit arrissament en el mòdul i el més significatiu és que el retard de grup en la banda de pas estarà entre 1.3 i 2.7 mostres dins de la banda $f = [0 \cdots 0.25]$.

El filtre de Txebixev de tipus I permet dissenyar amb un ordre menor, a canvi de tenir pitjors característiques pel que fa al retard de grup, la qual cosa provocaria més distorsió de fase del senyal d'entrada.

Segons l'aplicació en la qual s'estigui treballant, la distorsió de fase pot ser molt significativa. Si imaginem el disseny d'un filtre per a un receptor de comunicacions que utilitzi una modulació de fase, serà fàcil entendre que aquest filtre pot provocar una distorsió més gran, que es traduirà en pitjors prestacions del receptor. Per això, l'aplicació serà la que condicionarà en major proporció la tipologia de filtre escollida per al disseny.

Acabarem l'exemple amb el disseny d'un filtre de fase lineal de tipus FIR.

Figura 12a. Disseny d'un filtre FIR Least-Squares

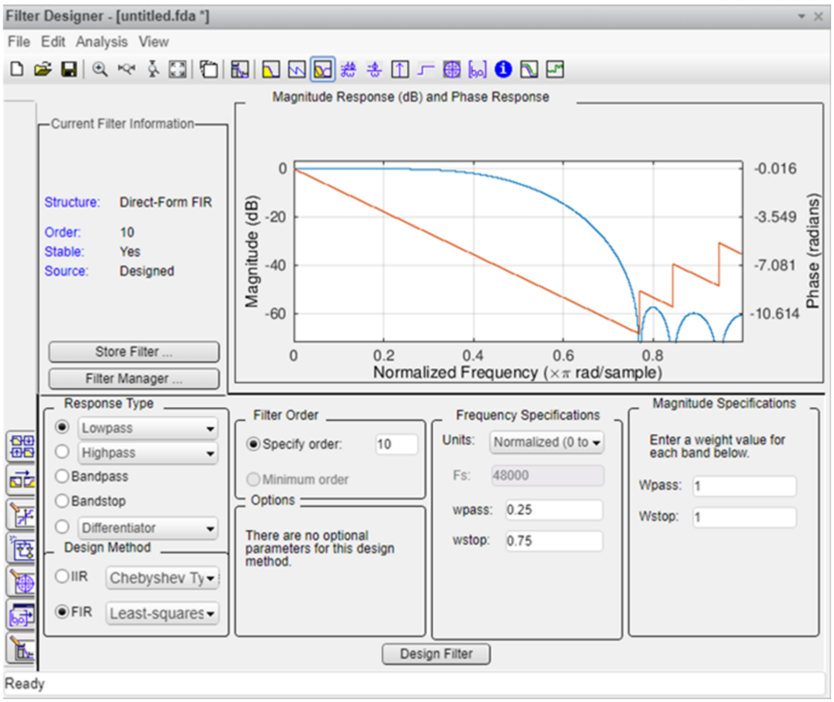
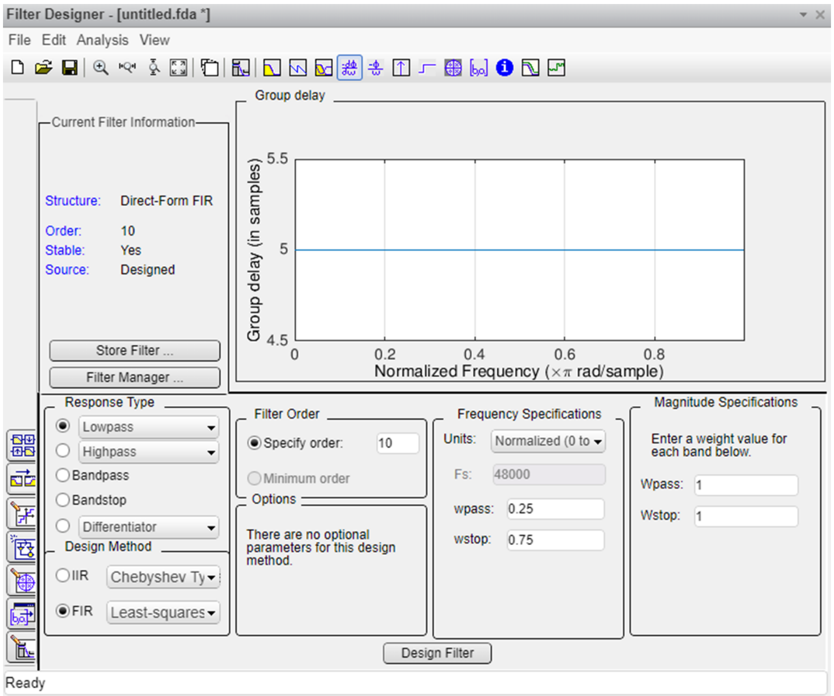
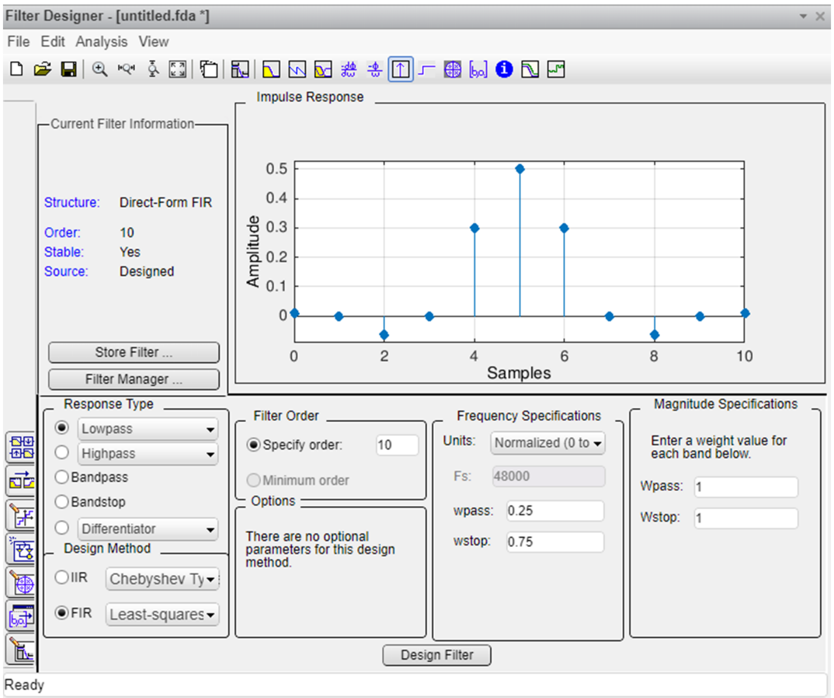


Figura 12b. Disseny d'un filtre FIR Least-Squares



Tal com s'aprecia, la primera gran diferència entre els filtres FIR i els filtres IIR és que per obtenir les mateixes especificacions de disseny es requereix un ordre molt més gran. En aquest últim cas, l'ordre del filtre serà 10. D'altra banda, observem que la banda de transició entre la banda de pas i la banda d'atenuació té una forma diferent dels filtres FIR i amb una atenuació menys abrupta en la transició. Finalment, el retard de grup del filtre en aquest cas és constant a un valor de 5 mostres, com a conseqüència de la fase lineal que presenta el sistema. Per finalitzar l'anàlisi podem observar a la figura 13 la resposta impulsional del sistema FIR:

Figura 13. Resposta impulsional del filtre FIR Least-Squares



La resposta impulsional del filtre mostra que presenta una simetria parell centrada en la mostra 5. Recordem que 5 correspon justament al retard de grup del sistema i és on se centra el pic d'energia de la resposta impulsional.

Finalment, per acabar la comparació es representarà la resposta a l'esglaó dels tres tipus de filtre passabaix dissenyats.

Figura 14a. Comparació de les respostes a l'esglaó dels filtres dissenyats

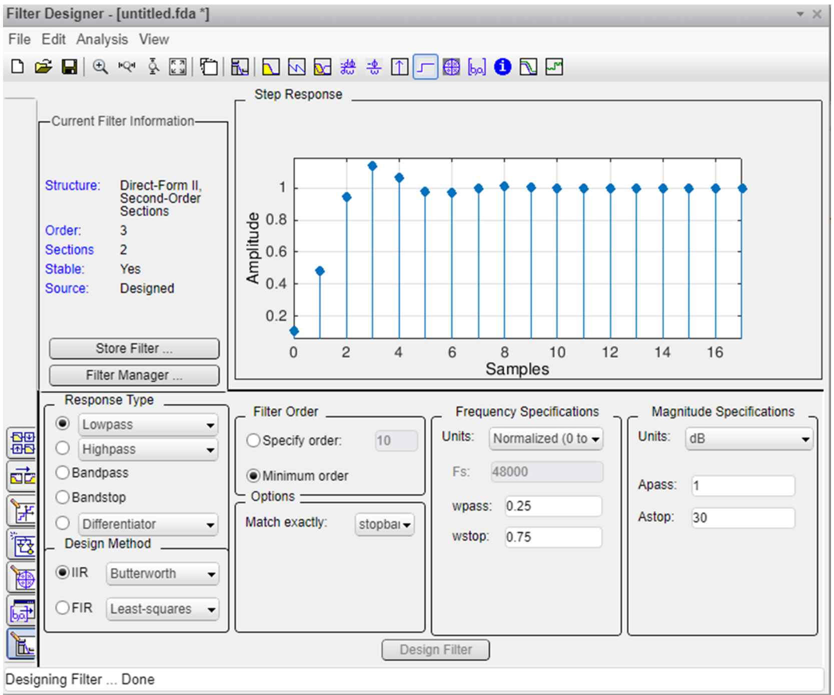


Figura 14b. Comparació de les respostes a l'esglaó dels filtres dissenyats

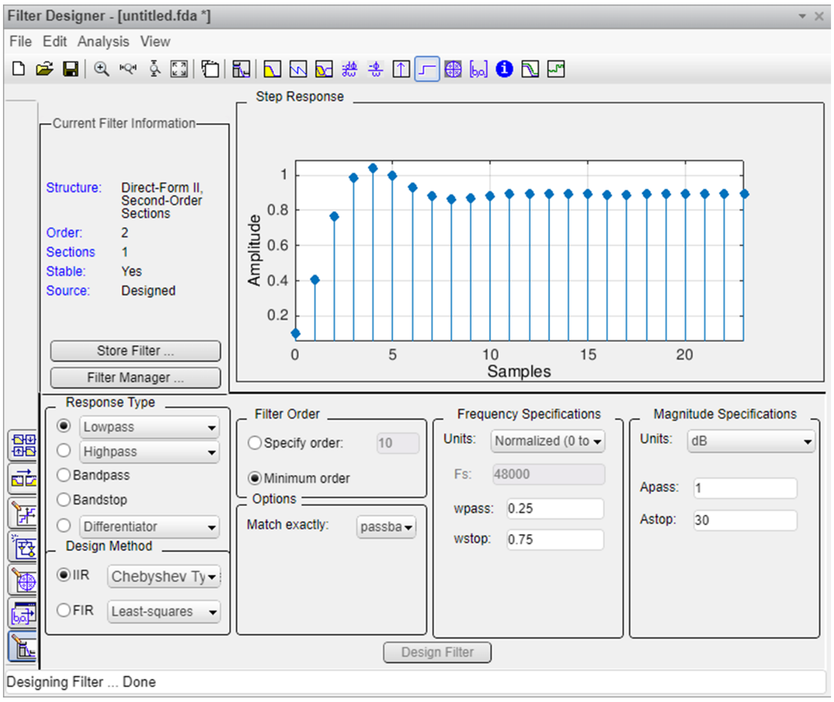
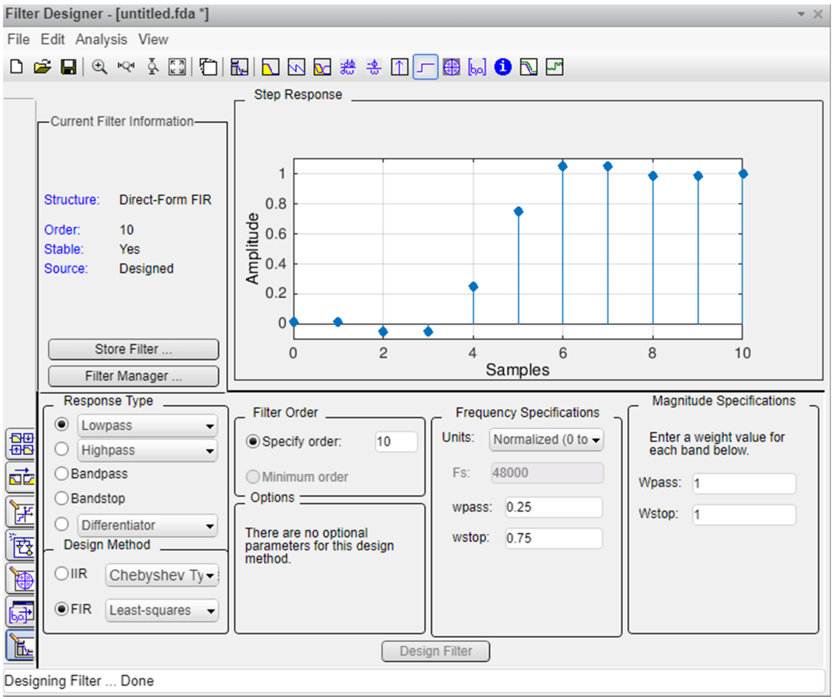


Figura 14c. Comparació de les respostes a l'esglaó dels filtres dissenyats



L'esglaó unitat és una funció que té una transició abrupta de components d'alta freqüència i un valor estacionari de baixa freqüència. El que s'espera dels filtres és que eliminin la transició abrupta i que mantinguin el valor mitjà del senyal d'entrada.

Els tres filtres compleixen aquesta característica, però ho fan de manera diferent. El filtre de Butterworth obté la resposta constant a partir de la segona o tercera mostra (retard de grup) i, després d'una petita oscil·lació, s'estabilitza en el valor constant 1. El filtre de Txebixev de tipus I té una resposta a l'esglaó semblant, però el valor estacionari no s'estabilitza en 1, sinó que ho fa en un valor una mica inferior, fruit de l'arrissament que es comentava en la banda de pas. Finalment, el filtre FIR genera l'aproximació de l'esglaó amb un retard de 5 mostres i estabilitza del tot el senyal després de la mostra 10, que correspon a la longitud de la resposta impulsional. Les tres tipologies pretenen desenvolupar la mateixa funció amb aproximacions numèriques diferents, que seran les que marcaran les diferències entre un filtre o un altre.

El bon coneixement de les característiques de cada filtre serà fonamental perquè el dissenyador esculli la millor opció en les circumstàncies de disseny específiques de l'aplicació.

Resum

En aquest mòdul s'ha estudiat la TFSD com a eina que permet obtenir la representació freqüencial de senyals i sistemes discrets, com també la SDF com a eina per obtenir la descomposició en sèrie per als senyals discrets periòdics.

La TFSD és l'eina clau en l'estudi dels sistemes discrets en el domini de la freqüència, i, tal com s'ha vist en el mòdul, és una particularització de la transformada z en el cercle unitat.

La descomposició en l'espai de Fourier té una rellevància en els sistemes LIT pel fet que les exponencials complexes són autofuncions d'aquests sistemes, és a dir, si a l'entrada posem una exponencial complexa i el sistema és LIT, a la sortida sempre obtindrem una exponencial complexa de la mateixa freqüència afectada en mòdul i desfasada segons l'efecte del sistema a aquesta freqüència. Aquest fet fa que les complexes operacions de convolució en el domini transformat es converteixin en productes, amb la simplificació que això produeix en la teoria de l'anàlisi i el disseny de sistemes.

Els dominis temporal i freqüencial són dues representacions complementàries d'aquest espai i la transformada ens permetrà commutar entre un espai o un altre en funció de les necessitats del moment.

Com passava en el cas de la transformada z, la TFSD presenta una sèrie de propietats que són de gran utilitat (principalment, en dos aspectes). El primer és la interpretació conceptual dels efectes de determinades operacions en els dos dominis, que porta a comprendre propietats vitals com la modulació en el camp de les telecomunicacions. El segon és la simplificació de l'operativa matemàtica en el càlcul de transformades, que, un cop conegudes les transformades d'uns senyals tipus, permet obtenir de manera senzilla i àgil les transformades de senyals relacionades a partir de les propietats.

Finalment, s'estudia la caracterització de sistemes LIT en el domini de la TFSD. Aquest apartat està més orientat a la visió d'un sistema que transforma un determinat senyal d'entrada.