La transformada z

Caracterització de senyals digitals en el domini z, caracterització de sistemes LIT digitals mitjançant la seva funció de transferència

PID_00262127

Germán Cobo Rodríguez

Temps mínim de dedicació recomanat: 8 hores

Universitat Oberta de Catalunya

Germán Cobo Rodríguez

L'encàrrec i la creació d'aquest recurs d'aprenentatge UOC han estat coordinats pel professor: José Antonio Morán Moreno (2019)

Primera edició: febrer 2019

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Disseny: Manel Andreu
Realització editorial: Oberta UOC Publishing, SL

Índex

Introducció

Partint del teorema de les autofuncions dels sistemes LIT digitals, en aquesta assignatura es presenta l'eina matemàtica coneguda com a transformada z, que permet caracteritzar senyals digitals i sistemes LIT digitals fora del domini del temps.

En general, aquesta assignatura se centra en l'aplicació més rellevant de la transformada z en la teoria de senyals i sistemes: proporcionar un mètode de caracterització dels sistemes LIT digitals més senzill, tant en termes conceptuals com matemàtics, que el basat en la caracterització temporal corresponent. Per aquesta raó, la teoria que es desenvolupa en aquesta assignatura està destinada exclusivament a poder resoldre aquelles qüestions que la caracterització temporal d'aquests sistemes deixa obertes.

La teoria sobre la transformada z és molt més àmplia que la que veurem aquí i, en tot cas, els estudiants que estiguin interessats a ampliar aquests continguts tenen a l'abast literatura especialitzada sobre el tema molt extensa i ben documentada, amb desenvolupaments teòrics molt complets i exercicis pràctics variats (Oppenheim, Willsky, Nawab, 1996, pàg. 741-815; Oppenheim, Schafer, Buck, 1999, pàg. 94-139; Proakis, Manolakis, 2007, pàg. 147-223; Ogata, 1996).

A continuació introduirem les eines conceptuals i matemàtiques necessàries per poder fer les dues coses següents:

- Evitar la caracterització temporal dels sistemes LIT digitals sempre que sigui insuficient o, sobretot, complicada, tal com veurem en l'apartat 5 d'aquest mòdul.

- Introduir la transformada de Fourier de senyals digitals, que, tot i que només és una particularització de la transformada z, té una gran importància i utilitat en la teoria de senyals i sistemes.

Amb aquest objectiu, l'apartat 1 introdueix la transformada z com a eina de caracterització de senyals digitals; en l'apartat 2, es presenten les transformades z de tot un conjunt de senyals bàsics; en l'apartat 3, es descriuen les principals propietats de la transformada z, i en l'apartat 4, es tracta el problema del càlcul de la transformada z inversa. Combinant les eines presentades en aquests quatre primers apartats ja podrem veure, en l'apartat 5, com es caracteritzen els sistemes LIT digitals mitjançant l'ús de la transformada z.

A més, amb la intenció que aquesta assignatura tingui la mínima càrrega matemàtica possible, s'hi aniran introduint algunes eines de MATLAB que són molt útils a l'hora de fer els càlculs que requereix l'ús de la transformada *Z*.

Objectius

Els objectius principals d'aquest mòdul són els següents:

1. Conèixer les equacions d'anàlisi i de síntesi de la transformada *z* i entendre'n el significat.

2. Entendre que la transformada *z* d'un senyal digital és un senyal analògic (de variable complexa).

3. Reconèixer la regió de convergència de la transformada *z*, conèixer-ne les propietats i saber aplicar-les tant en el càlcul de la transformada directa com en el de la transformada inversa.

4. Entendre què és el diagrama de pols i zeros d'una transformada *z*, interpretar-ne el significat i saber representar-lo gràficament.

5. Comprendre com la transformada *z* està íntimament relacionada amb la transformada de Laplace mitjançant el mostratge amb tren de deltes del senyal temporal analògic.

6. Conèixer les transformades *z* dels senyals més típics en la pràctica.

7. Reconèixer les propietats de la transformada *z* i saber aplicar-les en combinació amb les transformades conegudes de senyals bàsics per calcular les transformades de senyals més complexos.

8. Conèixer i saber aplicar estratègies que permeten resoldre fàcilment problemes de càlcul de la transformada *z* inversa.

9. Saber què és la funció de transferència d'un sistema LIT digital i entendre'n el significat i la utilitat pràctica.

10. Saber caracteritzar sistemes LIT digitals mitjançant la seva funció de transferència, com també les associacions entre sistemes LIT digitals.

11. Saber com solucionar equacions en diferències lineals de coeficients constants mitjançant la transformada *z* i saber com aplicar aquesta solució per obtenir la resposta impulsional de sistemes LIT digitals a partir de la seva relació entrada-sortida.

12. Conèixer i saber aplicar les eines que proporciona MATLAB per tal de simplificar els càlculs requerits en la caracterització de sistemes LIT digitals mitjançant la transformada z.

1. Caracterització de senyals digitals en el domini *z*

En aquest primer apartat, es presenten i s'interpreten les equacions que permeten calcular la transformada de z d'un senyal digital i, en sentit oposat, obtenir l'expressió temporal d'un senyal digital a partir de la seva transformada z (subapartat 1.1).

A continuació s'introdueix el concepte de *regió de convergència* d'una transformada z, de gran importància a l'hora de passar del domini temporal al domini transformat z i viceversa (subapartat 1.2). I, tot seguit, s'introdueix també el concepte de *diagrama de pols i zeros* d'una transformada z, que és molt útil en aplicacions tant d'anàlisi com de disseny de sistemes LIT digitals i que constitueix l'única representació gràfica de senyals que ens interessarà fer en el domini transformat z (subapartat 1.3).

Finalment, l'apartat acaba amb la demostració de la relació que hi ha entre la transformada z i la transformada de Laplace (subapartat 1.4).

1.1. La transformada *z* de senyals digitals

$x[n]$ és un senyal digital qualsevol. La **transformada de z de $x[n]$** és un senyal que denotarem com a $X(z)$. La notació més utilitzada per expressar la relació entre tots dos senyals és la següent:

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) \qquad (1)$$

en què la lletra Z simbolitza la transformada de z.

L'**equació d'anàlisi de la transformada** z és l'operació que permet calcular la **transformada z directa**, és a dir, és l'operació que permet **obtenir $X(z)$ a partir de $x[n]$**:

$$\boxed{X(z) = Z\{x[n]\} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}} \qquad (2)$$

en què z és la variable complexa ($z \in C$) i en què $X(z)$ és un senyal complex de variable complexa ($X(z_i) \in C, \quad \forall\, z_i \in C$).

En primer lloc, cal destacar una cosa que, d'entrada, pot semblar estranya o, en el millor dels casos, pot no ser gaire intuïtiva: $X(z)$ **és un senyal analògic**; és a dir, el senyal $x[n]$, que és digital (o sigui, de variable entera: $n \in Z$), es converteix, en ser transformada en $X(z)$, en un senyal analògic de variable complexa.

En segon lloc, és molt important tenir sempre present que, com que és complexa, la variable z pot ser descomposta en dues variables més, corresponents al seu mòdul i a la seva fase:

$$z = |z| e^{j \mathrm{Arg}(z)} = r e^{j\omega} \quad \begin{cases} |z| = r \\ \mathrm{Arg}(z) = \omega, \end{cases} \qquad (3)$$

en què r i ω són dues variables reals ($r, \omega \in R$).

Aleshores observem (2) que la transformada z directa implica el càlcul de productes escalars infinits entre $x[n]$ i cadascun dels senyals exponencials complexos de la família z^n. Així, doncs, $X(z)$ està constituïda pels resultats d'aquests productes escalars infinits:

$$X(z_i) = \sum_{+\infty}^{n=-\infty} x[n] z_i^{-n} \qquad (4)$$

en què $X(z_i)$ **és el resultat del producte escalar entre $x[n]$ i z_i^n**.

Per tant, $X(z_i)$ ens dona una mesura de la semblança de $x[n]$, i z_i^n ens diu la quantitat de z_i^n que hi ha en $x[n]$. I ho fa de la mateixa manera que el producte escalar entre dos vectors ens diu quant hi ha d'un en l'altre, ja que, interpretat en termes geomètrics, ens dona una mesura de la magnitud de la projecció d'un vector sobre l'altre.

Si ens fixem, per exemple, en el producte escalar entre $x[n]$ i un senyal delta:

$$x[n_i] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta[n - n_i] \qquad (5)$$

veiem que el significat de l'operació és exactament el mateix: $x[n_i]$ és l'amplitud de $x[n]$ a $n = n_i$, i precisament aquesta és la mesura de la quantitat de $\delta[n - n_i]$ que hi ha en $x[n]$, ja que tota la informació continguda en $\delta[n - n_i]$ està concentrada a l'instant $n = n_i$.

Així, doncs, com que la família dels senyals delta forma una base generadora de l'espai dels senyals digitals, els productes escalars infinits entre $x[n]$ i cadascun dels membres d'aquesta família de senyals ens permeten, com ja sabem, expressar el senyal $x[n]$ com el resultat d'una combinació lineal de senyals delta:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m] \qquad (6)$$

En aquest cas, la família de senyals delta és la base canònica de l'espai dels senyals digitals, ja que els coeficients de $x[n]$ expressada en aquesta base coincideixen directament amb els seus valors d'amplitud; és a dir, que $x[m] = x[n]$.

Com ja sabem pel teorema de les autofuncions, els senyals exponencials complexos també formen una base generadora de l'espai dels senyals digitals. Per tant, també és possible expressar $x[n]$ com el resultat d'una combinació lineal de senyals exponencials complexos, ja que en cada cas són multiplicats en aquesta combinació lineal pel valor corresponent del senyal $X(z)$:

L'**equació de síntesi de la transformada *z*** és l'operació que permet calcular la **transformada *z* inversa**, és a dir, és l'operació que permet **obtenir $x[n]$ a partir de $X(z)$**:

$$\boxed{x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} \triangleq \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r_0} X(z) z^{n-1} dz} \qquad (7)$$

en què Z^{-1} denota la transformada *z* inversa.

Respecte d'aquesta equació de síntesi de la transformada *z*, només ens interessa saber interpretar el seu significat: permet expressar un senyal digital ($x[n]$) com el resultat d'una combinació lineal d'exponencials complexos (z^n) ponderats pels valors de la transformada *z* d'aquest senyal ($X(z)$). És fàcil veure que, en la seva interpretació algebraica, el significat de les equacions (6) i (7) és exactament el mateix, amb l'única alteració de la base de senyals utilitzada en cada cas: senyals delta a (6) i senyals exponencials complexos a (7).

A més, aquesta equació (7) també ens mostra que la **transformada *z* és una operació reversible**, és a dir, que no es perd informació en passar de $x[n]$ a $X(z)$, ja que, si es perdés, no seria possible reconstruir $x[n]$ a partir de $X(z)$, que és justament el que es fa a (7). Per tant, això ens permet concloure el següent:

Un senyal $x[n]$ i la seva transformada z $X(z)$ són representats com dos senyals diferents, però, en realitat, n'és un i la mateixa cosa. Es podria dir, fins i tot, que els dos senyals són el mateix senyal, en la mesura que tots dos contenen exactament la mateixa informació, però representada en dominis diferents.

En aquest sentit, calcular la transformada d'un senyal és el mateix que aplicar un canvi de base a un vector: canvia la base de representació i, per tant, els coeficients del vector, però la informació que contenen és la mateixa (és a dir, el vector continua essent el mateix).

Es tracta d'una cosa semblant –si es vol dir així– al que passa entre la relació entrada-sortida d'un sistema LIT i la seva resposta impulsional; en certa manera, són una única i mateixa cosa, ja que contenen la mateixa informació representada d'una manera diferent.

Dit això, el nostre interès per l'equació (7) acaba aquí. Ens estalviarem els detalls de saber per què la integral és una integral de línia al llarg d'una circumferència de radi r_0, quin és l'origen del factor $1/2\pi j$ que multiplica la integral o per quin motiu l'exponent del senyal exponencial és al lloc de n. En tenim prou de saber que es tracta d'una integral que permet calcular una suma al llarg de la variable z, que és el que es requereix per construir una combinació lineal de senyals pertanyents a la família dels exponencials complexos de la forma z^n: z_1^n, z_2^n, z_3^n, etc.

Com veurem en els subapartats i apartats següents, en la pràctica no farem servir mai l'equació (7) per fer cap càlcul. En aquest sentit, la nostra estratègia consistirà a agafar resultats coneguts de transformades z de senyals bàsics (vegeu l'apartat 2 d'aquest mòdul) i, mitjançant l'aplicació de les propietats de la transformada z (vegeu l'apartat 3 d'aquest mòdul), calcular les transformades directes i inverses de senyals més complexos.

1.2. Regió de convergència de la transformada *z*

Analògament al que succeeix en el cas dels senyals analògics i la transformada de Laplace, no tots els senyals digitals tenen transformada z. Això és degut al fet que en l'equació d'anàlisi de la transformada z es calcula un sumatori definit entre $n \to -\infty$ i $n \to +\infty$ que no ha de convergir necessàriament. Per tant, hi ha senyals $x[n]$ per als quals aquest sumatori no convergeix. Aquests senyals no tenen transformada z, és a dir, no són expressables com el resultat d'una combinació lineal d'exponencials complexos de la forma z^n. Certament, en aquest sentit la base formada pels senyals delta té més potència expressiva que la formada per senyals exponencials complexos.

Però si parlem dels senyals que tenen transformada *z* ens adonarem que, en realitat, la convergència del sumatori de l'equació (2) no és «binària». És a dir, no es tracta de si la suma convergeix o no (o sigui, de si la transformada *z* del senyal existeix o no), sinó de saber **per a quins valors de *z* convergeix la suma** (és a dir, **per a quins valors de *z* és definida la transformada *z* del senyal**):

> Partim d'un senyal digital $x[n]$ i la seva transformada *z* $X(z)$. S'anomena **regió de convergència** (ROC, de l'anglès *region of convergence*) de la transformada *z* de $x[n]$ **els valors de *z* per als quals $X(z)$ és definida**; és a dir, el conjunt de valors de *z* per als quals convergeix la suma de l'equació d'anàlisi de la transformada *z* aplicada a $x[n]$.

Per tant, en primer lloc, mai és correcte afirmar que «la transformada *z* de $x[n]$ és $X(z)$», sinó que «la transformada *z* de $x[n]$ és $X(z)$ amb una ROC R»:

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad R \qquad (8)$$

en què R és la ROC de $X(z)$.

En segon lloc, i molt important, **la convergència de l'equació d'anàlisi de la transformada *z* depèn sempre de $x[n]$ i de $|z|$**, però mai de $\mathrm{Arg}(z)$, ja que és el mòdul dels senyals implicats en la suma allò que determina si aquesta suma (que, com sabem, és una suma al llarg de n) convergeix o no i, com també sabem, el mòdul d'un exponencial complex de la forma $e^{j\omega n}$ és sempre igual a 1.

Per veure això amb més detalls, recuperem la notació establerta a (3), per la qual $z = re^{j\omega}$, i l'apliquem a l'equació (2):

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\omega n} \qquad (9)$$

en què $r = |z|$ i $\omega = \mathrm{Arg}(z)$.

Així doncs, el fet d'avaluar si la suma convergeix consisteix a determinar si el mòdul de $X(z)$ és o no és acotat en amplitud. Per establir una cota d'aquest, només cal aplicar la desigualtat triangular:

$$|X(z)| = \left|\sum_{+\infty}^{n=-\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{+\infty}^{n=-\infty} \left|x[n] r^{-n} e^{-j\omega n}\right| = \sum_{+\infty}^{n=-\infty} |x[n]| r^{-n} \qquad (10)$$

ja que $r = |z|$ i que, com ja hem comentat abans, $|e^{-j\omega n}| = 1$.

Veiem, per tant, que la ROC de $X(z)$ serà sempre determinada per r; és a dir, per $|z|$. Per tant, $X(z)$ existirà per a alguns valors de $|z|$ i no per a d'altres. Aquests valors dependran de $x[n]$. En concret, **en funció de la naturalesa de $x[n]$, la ROC de $X(z)$ serà d'un tipus o d'un altre**.

Per exemple, si considerem el cas en què $x[n]$ és un senyal de longitud finita (que comença per $n = n_1$ i acaba en $n = n_2$; per tant, amb $n_1 \leq n_2$) i absolutament sumable, la ROC de $X(z)$ abastarà qualsevol valor possible de z (és a dir, $X(z)$ serà definida per a qualsevol valor de z), ja que, en aplicar això a (10):

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| < \infty \Rightarrow \quad |X(z)| \leq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| r^{-n} \qquad (11)$$

1) Si $r \geq 1$, llavors:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| r^{-n} \leq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| r^{-n_1} = r^{-n_1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| < \infty \qquad (12)$$

2) Si $r < 1$, llavors:

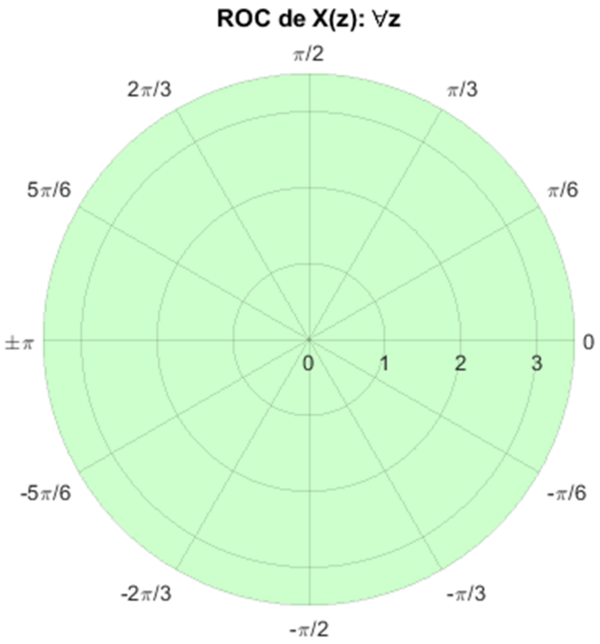
$$|X(z)| \leq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| r^{-n} \leq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| r^{-n_2} = r^{-n_2} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]| < \infty \qquad (13)$$

Per tant, si $x[n]$ és un senyal de longitud finita i absolutament sumable:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \qquad \forall\, z \qquad (14)$$

En general, **la ROC es representa gràficament sobre el pla complex (el pla z)**. Així doncs, **si $x[n]$ és de longitud finita i absolutament sumable, la ROC de $X(z)$ és tot el pla z**:

Figura 1. Representació gràfica de la ROC de *X*(*z*): *x*[*n*] és de longitud finita i absolutament sumable.



Alguns comentaris sobre la representació gràfica de la ROC, il·lustrada a la figura 1:

- La ROC és la regió representada en verd, que comprèn tot el pla *z*.

- Les circumferències concèntriques centrades en l'origen del pla *z* (el punt $z = 0$) són el lloc geomètric dels valors de *z* amb mòdul constant: $|z| = 1$, $|z| = 2$, $|z| = 3$, etc.

- Les rectes que neixen a $z = 0$ i s'estenen cap a l'infinit són el lloc geomètric dels valors de *z* amb fase constant: $\mathrm{Arg}(z) = 0$ rad, $\mathrm{Arg}(z) = \pi/6$ rad, $\mathrm{Arg}(z) = 2\pi/6$ rad, etc.

- Per la periodicitat 2π de la fase d'un nombre complex, qualsevol valor de fase es pot indicar tant amb signe positiu com amb signe negatiu: $-5\pi/6$ rad $= 7\pi/6$ rad, $-2\pi/3$ rad $= 4\pi/3$ rad, etc. Per això també és indiferent indicar π rad o $-\pi$ rad, ja que π rad $= -\pi$ rad.

Amb tot, en el cas en què *x*[*n*] no sigui un senyal de longitud finita, la definició de la ROC de *X*(*z*) ja no és tan senzilla. A continuació, a manera d'exemple, proposem un breu exercici perquè us ajudi a entendre millor quina relació hi ha entre la ROC i la naturalesa de *x*[*n*].

Exemple 1

Cal calcular la transformada *z* d'aquests senyals digitals:

$$x_1[n] = a^n u[n] \qquad (15)$$

$$x_2[n] = a^{-n} u[-n-1] \qquad (16)$$

$$x_3[n] = a^{|n|} \qquad (17)$$

en què *a* és una constant, en general, complexa ($a \in C$).

Solució

a) D'entrada, veiem que $x_1[n]$ **és un senyal infinit orientat a la dreta**. En calculem la transformada *z* aplicant directament l'equació d'anàlisi i resolent la sèrie geomètrica resultant:

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a^n u[n]}_{x_1[n]} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n \qquad (18)$$

S'observa que es tracta d'una sèrie geomètrica infinita (fins a $n = +\infty$), la convergència de la qual només queda garantida si la raó de la sèrie (az^{-1}) és de mòdul inferior a 1; és a dir, si $|az^{-1}| < 1$; o sigui, si $|a|/|z| < 1$.

D'aquesta manera passa el següent:

- Si $|z| > |a|$, llavors $|az^{-1}| < 1$ i la sèrie convergeix.
- Si $|z| \le |a|$, llavors $|az^{-1}| \ge 1$ i la sèrie divergeix.

Per tant, si $|z| > |a|$:

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^{\infty}(az^{-1})}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad (19)$$

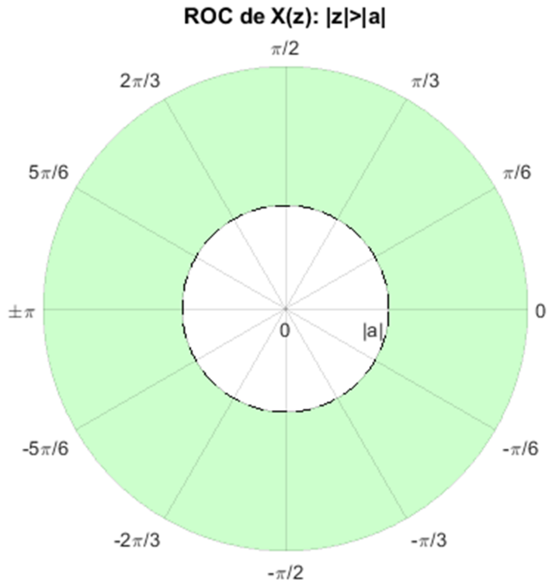
ja que, com que $|az^{-1}| < 1$, aleshores $(az^{-1})^{\infty} = 0$.

Per tant, la ROC de $X_1(z)$ és $|z| > |a|$ i podem concloure que:

$$\boxed{a^n u[n] \quad \xleftrightarrow{Z} \quad \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| > |a|} \qquad (20)$$

Així doncs, tal com il·lustra la figura 2, **la ROC de $X_1(z)$ pot representar-se gràficament en el pla complex (el pla *z*): és la regió del pla *z* que queda fora de la circumferència de radi $|a|$ centrada en l'origen; o sigui, és l'exterior de la circumferència $|z| = |a|$.**

Figura 2. Representació gràfica de la ROC de $X_1(z)$: $x_1[n]$ és un senyal infinit orientat a la dreta.



b) Ara, veiem que $x_2[n]$ **és un senyal infinit orientat a l'esquerra**. Anàlogament, calculem la seva transformada *z*:

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a^{-n}u[-n-1]}_{x_2[n]} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (a^{-1}z^{-1})^n \qquad (21)$$

S'observa que, en aquest cas, la raó de la sèrie geomètrica és $a^{-1}z^{-1}$. No obstant això, com que $n = -\infty$ és l'exponent crític, la condició de convergència és que la raó de la sèrie sigui de mòdul superior a 1; és a dir, que $|a^{-1}z^{-1}| > 1$; o sigui, que $|a|\,|z| < 1$.

Així doncs:

- Si $|z| < 1/|a|$, llavors $|a^{-1}z^{-1}| > 1$ i la sèrie convergeix.
- Si $|z| \geq 1/|a|$, llavors $|a^{-1}z^{-1}| \leq 1$ i la sèrie divergeix.

Per tant, si $|z| < 1/|a|$:

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (a^{-1}z^{-1})^n = \frac{(a^{-1}z^{-1})^{-\infty} - (a^{-1}z^{-1})^{-1}(a^{-1}z^{-1})}{1 - a^{-1}z^{-1}} = \frac{-1}{1 - a^{-1}z^{-1}} \qquad (22)$$

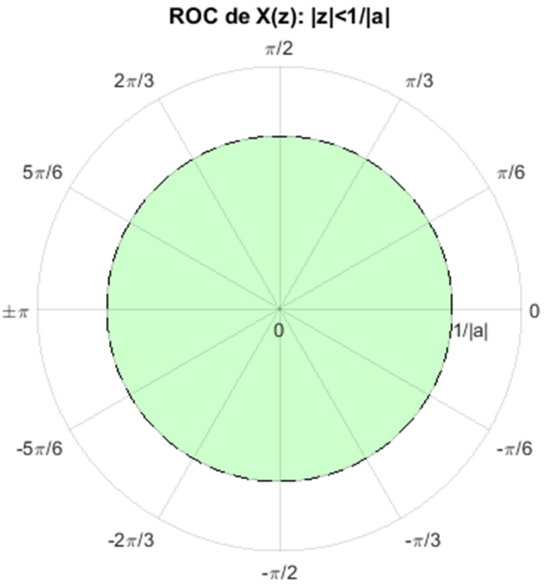
ja que, com que $|a^{-1}z^{-1}| > 1$, aleshores $(a^{-1}z^{-1})^{-\infty} = 0$.

Per tant, la ROC de $X_2(z)$ és $|z| < 1/|a|$ i podem concloure que:

$$a^{-n}u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{-1}{1 - a^{-1}z^{-1}}, \qquad |z| < \frac{1}{|a|} \qquad (23)$$

Així, tal com mostra la figura 3, veiem que **la** ROC **de $X_2(z)$ és la regió del pla *z* que queda dins la circumferència de radi $1/|a|$ centrada en l'origen; o sigui, és l'interior de la circumferència $|z| = 1/|a|$.**

Figura 3. Representació gràfica de la ROC de $X_2(z)$: $x_2[n]$ és un senyal infinit orientat a l'esquerra.



c) En aquest cas, s'observa que $x_3[n]$ **és un senyal infinit orientat a banda i banda**. A més, podem aprofitar hàbilment els resultats de $X_1(z)$ i $X_2(z)$ per simplificar el càlcul de $X_3(z)$:

$$X_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a^{|n|}}_{x_3[n]} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n} z^{-n} =$$
$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(a^{-1}z^{-1}\right)^{n}}_{X_2(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(az^{-1}\right)^{n}}_{X_1(z)} = X_1(z) + X_2(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}} = \tag{24}$$
$$\frac{1-a^{-1}z^{-1}-1+az^{-1}}{1-az^{-1}-a^{-1}z^{-1}+z^{-2}} = \frac{(a^2-1)a^{-1}z^{-1}}{1-(a^2+1)a^{-1}z^{-1}+z^{-2}}$$

Amb tot, en aquest càlcul de $X_3(z)$ s'han aprofitat els resultats prèviament coneguts de $X_1(z)$ i $X_2(z)$, de manera que la ROC de $X_3(z)$ ha d'incloure la intersecció de les ROC de $X_1(z)$ i $X_2(z)$.

Dit d'una altra manera: $X_3(z)$ **és definida per a aquells valors de** z **per als quals són definides simultàniament** $X_1(z)$ **i** $X_2(z)$. Així doncs, si R_1, R_2 i R_3, respectivament, són les ROC de $X_1(z)$, $X_2(z)$ i $X_3(z)$, ens adonarem que:

$$R_3 = R_1 \cap R_2 = \{|z| > |a|\} \cap \left\{|z| < \frac{1}{|a|}\right\} = |a| < |z| < \frac{1}{|a|} \tag{25}$$

Per tant, com a conclusió, tenim dos escenaris possibles:

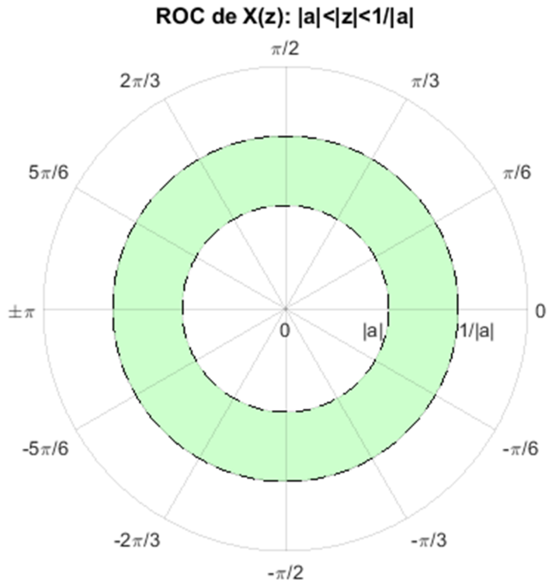
1) Si $|a| < 1$, aleshores $X_3(z)$ existeix i la seva ROC és $|a| < |z| < 1/|a|$:

$$a^{|n|}, \quad \forall\, |a| < 1 \quad \xleftrightarrow{Z} \quad \frac{(a^2-1)a^{-1}z^{-1}}{1-(a^2+1)a^{-1}z^{-1}+z^{-2}}, \quad |a| < |z| < \frac{1}{|a|} \tag{26}$$

En aquest escenari, **la ROC de $X_3(z)$ és la regió del pla *z* que queda compresa entre les circumferències $|z| = |a|$ i $|z| = 1/|a|$; o sigui, és l'interior d'un anell de radi interior $|a|$ i radi exterior $1/|a|$**, tal com mostra la figura 4.

2) Si $|a| \geq 1$, aleshores $X_3(z)$ no existeix, ja que $R_1 \cap R_2 = \varnothing$.

Figura 4. Representació gràfica de la ROC de $X_3(z)$: $x_3[n]$ és un senyal infinit orientat a banda i banda.



En realitat, els resultats obtinguts en l'exemple 1 ja permeten abraçar, juntament amb la transformada *z* del senyal finit calculat abans, tota la casuística de possibles tipus de ROC i, per tant, il·lustren molt bé les conclusions generals següents sobre la relació entre la naturalesa de *x*[*n*] i el tipus de ROC de *X*(*z*):

Suposem que $x[n]$ és un senyal digital; si existeix, $X(z)$ és la transformada z de $x[n]$, i si a i b són dues constants complexes arbitràries ($a, b \in C$) tals que $|a| < |b|$.

Només pot produir-se un d'aquests casos:

1) El senyal $x[n]$ **no té transformada** z; és a dir, $X(z)$ no existeix per a cap valor de z.

2) El senyal $x[n]$ és **finit** i la ROC de $X(z)$ és **tot el pla** z:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \forall z \tag{27}$$

3) El senyal $x[n]$ és **infinit orientat a la dreta** i la ROC de $X(z)$ és l'**exterior d'una circumferència centrada en l'origen del pla** z:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad |z| > |a| \tag{28}$$

4) El senyal $x[n]$ és **infinit orientat a l'esquerra** i la ROC de $X(z)$ és l'**interior d'una circumferència centrada en l'origen del pla** z:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(s), \quad |z| < |a| \tag{29}$$

5) El senyal $x[n]$ és **infinit orientat a banda i banda** i la ROC de $X(z)$ és **l'interior d'un anell centrat en l'origen del pla** z:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad |a| < |z| < |b| \tag{30}$$

1.3. Diagrama de pols i zeros de la transformada *z*

En general, no ens aturarem a comentar com cal representar gràficament senyals en el domini transformat z, perquè no ho necessitarem en cap cas. En tenim prou de tenir clar que $X(z)$ és un senyal complex de variable complexa i que, per tant, la seva representació gràfica donaria lloc a dues gràfiques tridimensionals de dos senyals reals representats sobre el pla complex, el pla z:

- Una gràfica per al seu senyal mòdul $|X(z)|$, que és un senyal real de variable complexa: $|X(z)| \in R, \forall z_i \in C$.

- I una altra gràfica per al seu senyal fase $\mathrm{Arg}(X(z))$, que també és un senyal real de variable complexa: $\mathrm{Arg}(X(z)) \in R, \forall z_i \in C$.

Amb tot, ja hem vist que la representació gràfica de la ROC de $X(z)$ té el seu interès. En aquest sentit, hi ha un altre aspecte de la naturalesa de $X(z)$ que està molt relacionat amb la ROC i la representació gràfica del qual és molt útil: el diagrama de pols i zeros de $X(z)$.

Suposem que $x[n]$ és un senyal analògic i $X(z)$ és la seva transformada z.

Un **zero** de $X(z)$ és **qualsevol valor de z per al qual l'expressió de $X(z)$ és igual que 0**:

$$\text{Zeros de } X(z) = \{c_i : \ \forall\, c_i \in \mathbb{C}, \quad X(c_i) = 0\} \qquad (31)$$

en què c_i és el zero i–èsim de $X(z)$.

Un **pol** de $X(z)$ és **qualsevol valor de z per al qual l'expressió de $X(z)$ tendeix a infinit**:

$$\text{Pols de } X(z) = \{p_i : \ \forall\, p_i \in \mathbb{C}, \quad X(p_i) \rightarrow \infty\} \qquad (32)$$

en què p_i és el pol i–èsim de $X(z)$.

El **diagrama de pols i zeros** de $X(z)$ és una **representació gràfica sobre el pla z dels pols i dels zeros de $X(z)$**, en la qual:

- **La ubicació d'un zero en el pla z se simbolitza amb un cercle** ($\bigcirc$).
- La coincidència de dos o més zeros a la mateixa ubicació ($c_i = c_j$, amb $i \neq j$) se simbolitza mitjançant un superíndex afegit al cercle ($\bigcirc^2$, $\bigcirc^3$, ..., $\bigcirc^N$).
- **La ubicació d'un pol en el pla z se simbolitza mitjançant una creu** ($\times$).
- La coincidència de dos o més zeros a la mateixa ubicació ($p_i = p_j$, amb $i \neq j$) se simbolitza mitjançant un superíndex afegit a la creu ($\times^2$, $\times^3$, ..., $\times^N$).

Per il·lustrar més adequadament aquesta qüestió, agafem, per exemple, la transformada z obtinguda en l'equació (20) de l'exemple 1, en calculem els zeros i els pols i representem gràficament el seu diagrama de pols i zeros:

$$a^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a| \qquad (33)$$

Com que es tracta d'un senyal racional (és a dir, constituït pel quocient entre un numerador i un denominador), el càlcul dels pols i zeros de $X(z)$ inclou avaluar els valors de z que anul·len o fan tendir a infinit el numerador, d'una banda, i el denominador, de l'altra (vegeu més detalls sobre aquesta qüestió en l'apartat 4 d'aquest mòdul).

Així doncs:

- Un zero d'una $X(z)$ racional es correspon amb un zero del numerador o bé amb un valor de z per al qual el denominador tendeixi a infinit.

- Un pol d'una $X(z)$ racional es correspon amb un zero del denominador o bé amb un valor de z per al qual el numerador tendeixi a infinit.

Llavors, en el cas de la transformada z de l'equació (33), tot i que no hi ha cap valor de z que anul·li el numerador, $X(z)$ sí que presenta un zero i és ubicat l'origen (si $z = 0$, aleshores el denominador tendeix a infinit i, per tant, $X(0) = 0$):

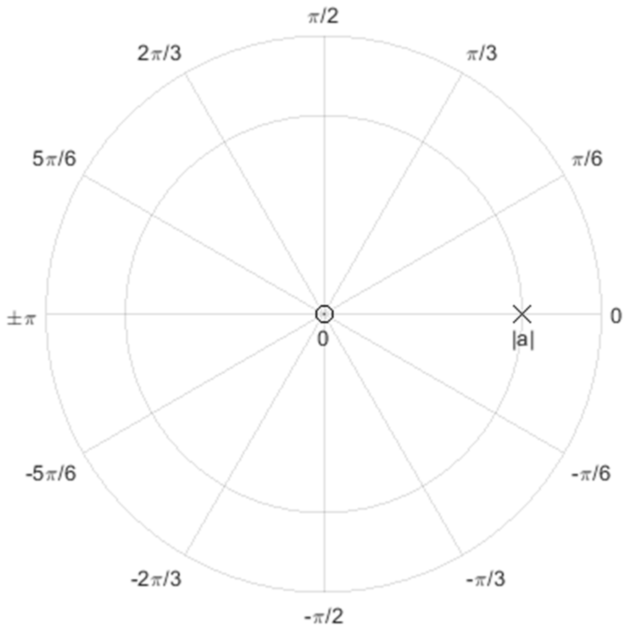
$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad z^{-1} \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - az^{-1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \qquad (34)$$

I, respecte dels pols, veiem que $X(z)$ presenta un únic pol a $z = a$ (per a aquest valor, el denominador s'anul·la i, per tant, $X(a) \to 0$), el qual **està justament situat sobre la circumferència frontera que delimita la ROC de $X(z)$**:

$$z = a \quad \Rightarrow \quad az^{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - az^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - az^{-1}} \to \infty \quad \Rightarrow \quad p_1 = a \qquad (35)$$

Per tant, el diagrama de pols i zeros de $X(z)$ inclou un zero a $z = 0$ i un pol a $z = a$ (per a la representació gràfica, s'assumeix arbitràriament que $a \in R$ amb $a > 0$; o sigui, s'assumeix una constant real positiva, de manera que $|a| = a$ i $\text{Arg}(a) = 0$):

Figura 5. Diagrama de pols i zeros amb un zero a $z = 0$ i un pol a $z = a$ (en què $a \in R$, amb $a > 0$)



Calculem ara, també a tall d'exemple, la transformada *z* del senyal resultant del producte d'un senyal cosinus per un esglaó unitat:

$$
\begin{aligned}
&X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 n) u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\omega_0 n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} z^{-n} \\
&\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{j\omega_0} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-j\omega_0} z^{-1}\right)^n \right) \underbrace{=}_{\text{si } |z|>1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right) = \\
&\frac{1}{2} \frac{1-e^{-j\omega_0} z^{-1} + 1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}{\left(1-e^{j\omega_0} z^{-1}\right)\left(1-e^{-j\omega_0} z^{-1}\right)} = \frac{1}{2} \frac{2-\left(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0}\right) z^{-1}}{1-\left(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0}\right) z^{-1} + z^{-2}} = \\
&\frac{1-\cos(\omega_0) z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Per tant, la ROC de $X_2(z)$ és $|z| > 1$ i podem concloure que:

$$
\cos(\omega_0 n) u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1-\cos(\omega_0) z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}, \qquad |z| > 1 \tag{37}
$$

En aquest cas, veiem que $X(z)$ presenta un zero a $z = \cos(\omega_0)$, que és l'únic valor de *z* que anul·la el numerador:

$$
z = \cos(\omega_0) \Rightarrow \cos(\omega_0) z^{-1} = 0 \Rightarrow \frac{1-\cos(\omega_0) z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}} = 0 \Rightarrow c_1 = \cos(\omega_0) \tag{38}
$$

A més, $X(z)$ presenta un altre zero ubicat a l'origen. S'observa que, per a $z = 0$, tendeixen a infinit tant el numerador com el denominador:

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad z^{-1} \to \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 - \cos(\omega_0) z^{-1} = 0 \\ \qquad 1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2} = 0 \end{cases} \tag{39}$$

No obstant això, el numerador (com que és un polinomi d'ordre 1) provocaria un pol de $X(z)$ a $z = 0$, mentre que el denominador (com que és un polinomi d'ordre 2) provocaria dos zeros de $X(z)$ a $z = 0$ (ja que tant el factor $1 - e^{j\omega_0} z^{-1}$ com el factor $1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}$ tendeixen a infinit per a $z = 0$). D'aquesta manera, el pol provocat pel numerador a $z = 0$ s'anul·la amb un dels dos zeros provocats pel denominador també a $z = 0$. I així, com a conclusió, queda un únic zero de $X(z)$ a $z = 0$:

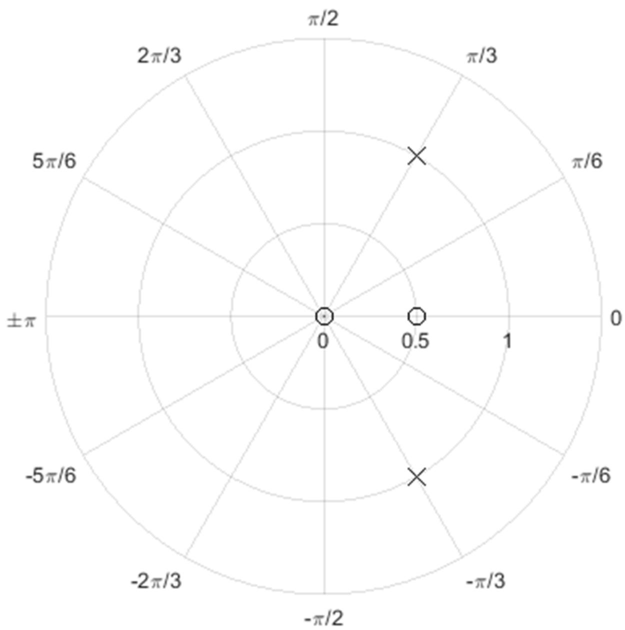
$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad z^{-1} \to \infty \Rightarrow \quad \frac{1 - \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \tag{40}$$

I, respecte als pols, veiem que $X(z)$ presenta dos pols ubicats a $z = e^{j\omega_0}$ i $z = e^{-j\omega_0}$ (que són els valors de z per als quals s'anul·la el denominador), els quals, de nou, **són justament situats sobre la recta frontera que delimita la ROC**:

$$z = e^{\pm j\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} 1 - e^{j\omega_0} z^{-1} = 0 \\ 1 - e^{-j\omega_0} z^{-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1 - \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}} \to \infty \Rightarrow \begin{cases} p_1 = e^{j\omega_0} \\ p_2 = e^{-j\omega_0} \end{cases} \tag{41}$$

Per tant, el diagrama de pols i zeros de $X(z)$ és el següent (per a la representació gràfica s'assumeix arbitràriament que $\omega_0 = \pi / 3$):

Figura 6. Diagrama de pols i zeros amb dos zeros a $z = 0$ i $z = 1/2$ i dos pols a $z = e^{j\pi/3}$ i $z = e^{-j\pi/3}$



Així doncs, és important tenir sempre molt present que la ROC d'una transformada z i els zeros i els pols corresponents són dues coses molt relacionades entre si, ja que, en general, allò veritablement interessant és elaborar **la representació gràfica conjunta del diagrama de pols i zeros i la ROC**. D'aquesta manera, tota la informació rellevant sobre les condicions d'existència de la transformada i dels seus valors singulars de l'expressió queda representada de manera compacta i en una sola gràfica.

En aquest sentit, les figures 7 i 8 mostren les ROC de les transformades z que acabem de calcular a (33) i (37), juntament amb els seus zeros i els seus pols, respectivament.

Figura 7. ROC de la transformada z d'un senyal infinit orientat a la dreta que presenta un zero a $z = 0$ i un pol a $z = a$ (en què $a \in R$, amb $a > 0$)

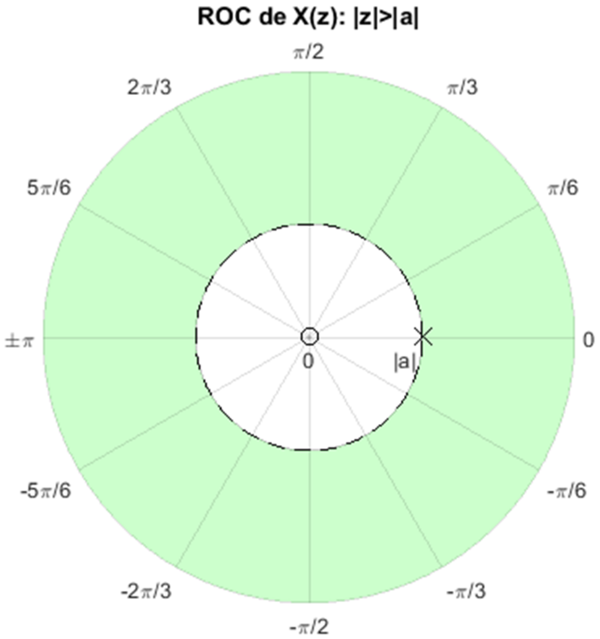
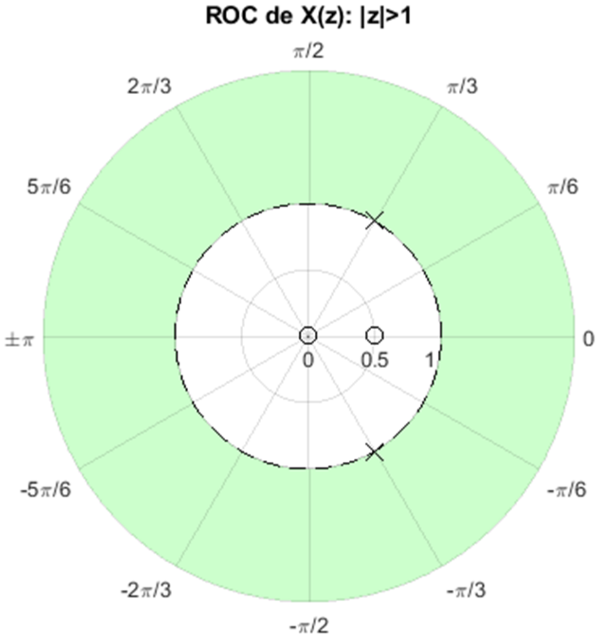


Figura 8. ROC de la transformada *z* d'un senyal infinit orientat a la dreta que presenta dos zeros a $z = 0$ i $z = 1/2$ i dos pols a $z = e^{j\pi/3}$ i $z = e^{-j\pi/3}$



Aquests dos exemples que acabem de veure il·lustren bé alguns conceptes que cal tenir en compte sempre que es calcula una transformada *z*:

- **Que un zero sigui un punt en què l'expressió de la transformada sigui igual a 0 no vol dir que els zeros d'una transformada pertanyin a la seva ROC** (com es pot veure clarament a la figura 8).

- Molt possiblement, hi haurà un o més pols situats a les circumferències frontera que delimiten la ROC. En tot cas, **segur que no hi haurà mai pols a l'interior de la ROC**, ja que, per definició, un pol és un punt en què l'expressió de la transformada tendeix a infinit (és a dir, en què la transformada no convergeix).

- En general, un cop calculada la transformada, **sempre cal comprovar si els valors particulars $z = 0$ i $z \to \infty$ pertanyen o no (típicament, com a pols) a la ROC.**

1.4. Relació entre la transformada *z* i la transformada de Laplace

Si $x[n]$ és un senyal digital arbitrari resultant del mostratge uniforme d'un senyal analògic $x(t)$:

$$x[n] = x(nT_m) \qquad (42)$$

en què T_m és el període de mostratge expressat en segons.

La transformada z de $x[n]$ no és res més que la transformada de Laplace del senyal resultant del mostratge de $x(t)$ mitjançant un tren de deltes de període T_m (vegeu la demostració 1):

$$Z\left\{x[n]\right\} = L\left\{x(t)\cdot\sum_{+\infty}^{n=-\infty}\delta(t-mT_m)\right\} \qquad (43)$$

en què la relació entre les variables s i z és també determinada pel període de mostratge:

$$z = e^{sT_m} \qquad (44)$$

Així doncs, la ROC de $Z\{x[n]\}$ deriva també de la ROC de $L\left\{x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT_m)\right\}$, a partir d'un mapatge entre els plans s i z regit per la relació establerta entre les dues variables a (44).

Demostració 1

Calculem directament la transformada de Laplace del mostratge de $x(t)$ pel tren de deltes i, en desenvolupar la integral resultant i en identificar termes aplicant les equacions (42) i (44), veiem que ja és directament igual a la transformada z de $x[n]$:

$$\begin{aligned}
&L\left\{x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT_m)\right\} = L\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-nT_m)\right\} = \\
&L\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT_m)\delta(t-nT_m)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT_m)\delta(t-nT_m)\right)e^{-st}dt = \\
&\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT_m)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-st}\delta(t-nT_m)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT_m)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-snT_m}\delta(t-nT_m)dt = \\
&\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{x(nT_m)}_{x[n]}\underbrace{e^{-snT_m}}_{z^{-n}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_m)dt}_{1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n} = Z\{x[n]\}
\end{aligned} \qquad (45)$$

2. Transformades z de senyals analògics típics

En aquest apartat proporcionem les transformades z de tot un conjunt de senyals típics, molt bàsics i, en general, d'ús molt habitual en la pràctica. A més de servir per conèixer tot un seguit de senyals transformats elementals, en realitat es tracta de poder fer servir, sense més ni més, sense haver de tornar a calcular-les, totes aquestes transformades bàsiques per calcular transformades z, tant directes com inverses, de senyals de més complexitat que puguin ser descompostos combinant aquests senyals més bàsics que aquí es presenten (vegeu els apartats 4 i 5 d'aquest mòdul).

Amb aquest objectiu, al final d'aquest apartat (en el subapartat 2.7), es proporciona una taula que resumeix totes aquestes transformades, per poder consultar-la ràpidament quan calgui.

2.1. Delta discreta

La delta discreta és un senyal finit, de manera que la ROC de la seva transformada z serà tot el pla z ($\forall\, z$). A partir de l'equació d'anàlisi definida a (2), ens adonarem que:

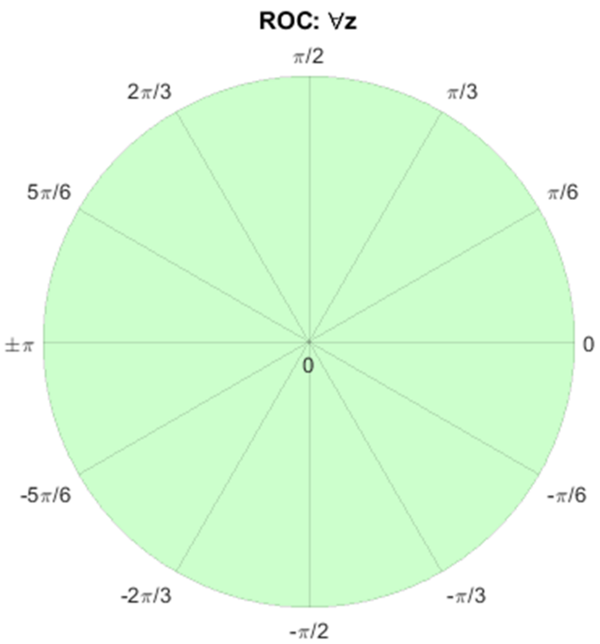
$$Z\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1 \qquad (46)$$

Per tant:

La transformada z de la delta discreta és un senyal constant d'amplitud 1, la ROC del qual comprèn tot el pla z:

$$\boxed{\delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1, \quad \forall\, z} \qquad (47)$$

Figura 9. ROC de $Z\{\delta[n]\}$



És interessant afegir a aquest resultat el de la transformada z de la delta discreta desplaçada n_0 mostres, que, de fet, és com una generalització del resultat anterior, ja que $\delta[n-n_0]=\delta[n]$ per a $n_0=0$:

$$Z\{\delta[n-n_0]\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-n_0]z^{-n}=z^{-n_0}\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-n_0]}_{1}=z^{-n_0} \qquad (48)$$

en què $n_0 \in Z$.

S'observa que, com que $\delta[n-n_0]$ és un senyal finit, la ROC de la seva transformada z inclou tot el pla z, llevat d'una excepció important:

- Si $n_0=0$, aleshores $z^{-n_0}=1$ i, com ja s'ha vist a (47), la ROC és tot el pla z.
- Si $n_0>0$, aleshores z^{-n_0} tendeix a infinit per a $z = 0$, de manera que $z = 0$ queda fora de la ROC: la transformada presenta n_0 pols a $z = 0$ (i n_0 zeros a $z\to\infty$).
- Si $n_0<0$, aleshores z^{-n_0} tendeix a infinit per a $z\to\infty$, de manera que $z\to\infty$ queda fora de la ROC: la transformada presenta n_0 pols a $z\to\infty$ (i n_0 zeros a $z = 0$).

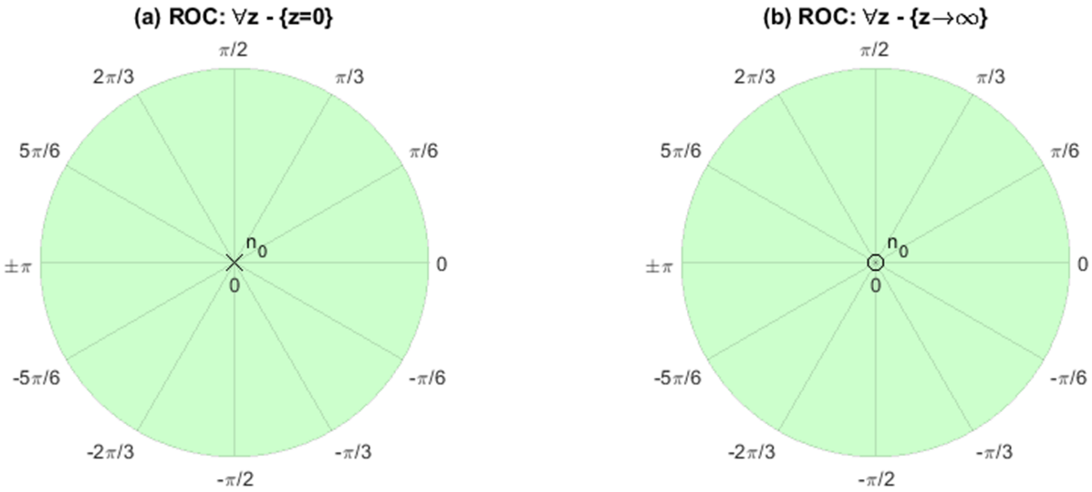
Per tant:

La transformada *z* de la delta discreta desplaçada *m* mostres és z^{-n_0}, la ROC de la qual comprèn tot el pla *z*, llevat de $z = 0$ o $z \to \infty$, segons si el valor de n_0 és positiu (delta discreta endarrerida n_0 mostres) o negatiu (delta discreta avançada n_0 mostres), respectivament:

$$\boxed{\delta[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}, \qquad \forall\, z - \begin{Bmatrix} z=0 & \text{si} & n_0>0 \\ z\to\infty & \text{si} & n_0<0 \end{Bmatrix}} \tag{49}$$

en què $m \in Z$.

Figura 10. (a) ROC de $Z\{\delta[n-n_0]\}$, si $n_0 > 0$. (b) ROC de $Z\{\delta[n-n_0]\}$, si $n_0 < 0$. La primera transformada té n_0 pols a $z = 0$ (i n_0 zeros a $z \to \infty$) i la segona té n_0 zeros a $z = 0$ (i n_0 pols a $z \to \infty$).



2.2. Esglaó unitat

L'esglaó unitat és un senyal infinit orientat a la dreta, de manera que la ROC de la seva transformada *z* és l'exterior de la circumferència $|z| = 1$:

$$Z\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(z^{-1}\right)^n = \frac{\overbrace{1-0}^{\text{si } |z|>1}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} \tag{50}$$

A continuació, s'observa el següent: l'expressió del senyal resultant de la transformada *z* de $u[n]$ és la mateixa que la de $-u[-n-1]$. La diferència entre totes dues es troba a la ROC, ja que, com que és un senyal infinit orientat a l'esquerra, la ROC de la transformada *z* de $-u[-n-1]$ és l'interior de la circumferència $|z| = 1$:

$$Z\{-u[-n-1]\} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(z^{-1}\right)^n = -\frac{\overbrace{0 - z \cdot z^{-1}}^{\text{si } |z|<1}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} \tag{51}$$

Per tant:

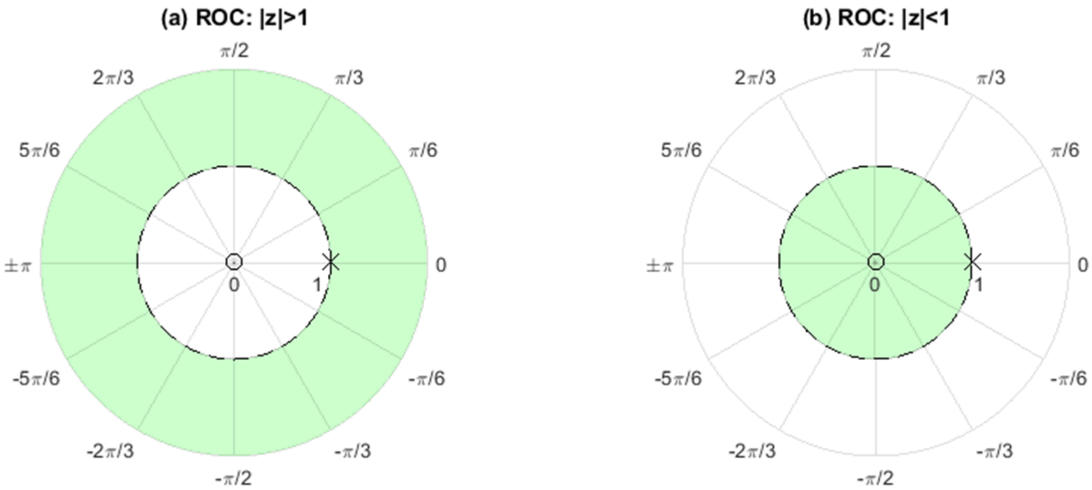
La transformada z de l'esglaó unitat és l'invers de $1-z^{-1}$ i la seva ROC inclou els valors de z de mòdul superior a 1:

$$\boxed{u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z|>1} \qquad (52)$$

La transformada z de l'esglaó unitat reflectit horitzontalment, avançat una mostra i canviat de signe, és l'invers de $1-z^{-1}$ i la seva ROC inclou els valors de z de mòdul inferior a 1:

$$\boxed{-u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z|<1} \qquad (53)$$

Figura 11. (a) ROC de $Z\{u[n]\}$. (b) ROC de $Z\{-u[-n-1]\}$. Totes dues tenen un pol a z = 1 i un zero a z = 0.



2.3. Producte de senyal exponencial per esglaó unitat

Partim ara d'un senyal de la forma esglaó unitat multiplicat per un exponencial:

$$x[n] = a^n u[n] \qquad (54)$$

en què a és una constant, en general, complexa ($a \in C$).

De fet, la transformada z d'aquest senyal ja la coneixem; en concret, la tenim calculada en les equacions (18)-(20) de l'exemple 1 del subapartat 1.2 d'aquest mòdul:

$$Z\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad (55)$$

en què la ROC del senyal transformat és $|z| > |a|$.

I ara, com en l'apartat anterior, considerem també la versió orientada a l'esquerra, desplaçada una mostra i canviada de signe del senyal definit a (54):

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \qquad (56)$$

De nou veiem que l'expressió de la transformada *z* resultant és la mateixa i que l'única diferència entre totes dues rau en la ROC:

$$Z\{-a^n u[-n-1]\} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(az^{-1}\right)^n = \\ -\frac{\overbrace{0-a^{-1}z\cdot az^{-1}}^{\text{si } |z|<|a|}}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad (57)$$

Per tant:

La transformada *z* del producte de a^n per un esglaó unitat és l'invers de $1-az^{-1}$ i la seva ROC inclou els valors de *z* de mòdul superior a $|a|$:

$$\boxed{a^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|} \qquad (58)$$

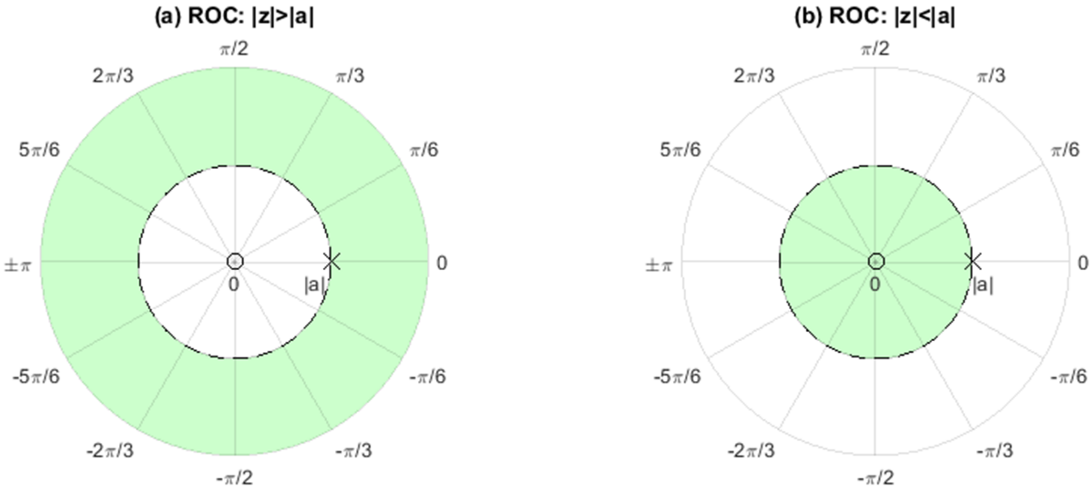
en què $a \in R$.

La transformada *z* del producte de a^n per un esglaó unitat, reflectit horitzontalment, avançat una mostra i canviat de signe, és l'invers de $1-az^{-1}$ i la seva ROC inclou els valors de *z* de mòdul inferior a $|a|$:

$$\boxed{-a^n u[-n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < |a|} \qquad (59)$$

en què $a \in R$.

Figura 12. (a) ROC de $L\{a^n u[n]\}$. (b) ROC de $L\{-a^n u[-n-1]\}$. Totes dues tenen un pol a $z = a$ (en representar el pol, s'ha assumit arbitràriament una constant real positiva: $|a| = a$ i $\mathrm{Arg}(a) = 0$) i un zero a $z = 0$.



2.4. Producte de polinomi per senyal exponencial per esglaó unitat

Multipliquem ara els senyals definits a (54) i (56) per un polinomi en n d'ordre p:

$$x_1[n] = \binom{n+p}{p} a^n u[n] \qquad (60)$$

$$x_2[n] = -\binom{n+p}{p} a^n u[-n-1] \qquad (61)$$

en què $a \in C$ i en què p és una constant entera positiva ($p \in Z$, amb $p \geq 1$). Cal destacar que el coeficient binomial de $n + p$ sobre p origina un polinomi d'ordre p:

$$\binom{n+p}{p} = \frac{(n+p)!}{p!n!} = \frac{1}{p!}(n+p)(n+p-1)(n+p-1)\cdots(n+2)(n+1) \qquad (62)$$

de manera que els senyals definits a (60) i (61) queden així:

1) Si $p = 1$:

$$x_1[n] = (n+1)a^n u[n] \qquad (63)$$

$$x_2[n] = -(n+1)a^n u[-n-1] \qquad (64)$$

2) Si $p = 2$:

$$x_1[n] = \frac{1}{2!}(n+2)(n+1)a^n u[n] = \frac{1}{2}(n^2+3n+2)a^n u[n] \qquad (65)$$

$$x_2[n] = -\frac{1}{2!}(n+2)(n+1)a^n u[-n-1] = -\frac{1}{2}(n^2+3n+2)a^n u[n] \qquad (66)$$

3) Si $p = 3$:

$$x_1[n] = \frac{1}{6}(n^3+6n^2+11n+6)a^n u[n] \qquad (67)$$

$$x_2[n] = -\frac{1}{6}(n^3+6n^2+11n+6)a^n u[n] \qquad (68)$$

i així successivament.

Aleshores, en comptes d'emprendre directament el càlcul de l'expressió genèrica (és a dir, en funció de *z*) de la transformada *z* dels senyals definits a (60) i (61), el que farem serà demostrar-ho per inducció. Per fer-ho, seguirem aquests tres passos:

1) Calculem la transformada *z* per al cas inicial $p = 1$.

2) Establim la hipòtesi d'inducció per al cas genèric en funció de *p*, tot generalitzant el resultat obtingut al pas 1.

3) En acceptar la hipòtesi d'inducció per a *p* establerta al pas 2, calculem la transformada *z* per a $p + 1$: si el resultat obtingut encaixa amb la hipòtesi d'inducció, el resultat genèric en funció de *p* establert en el pas 2 quedarà demostrat.

Així doncs, en primer lloc, per al cas inicial ($p = 1$) del senyal definit a (60), calculem la transformada *z* del senyal de l'equació (63):

$$Z\{(n+1)a^n u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n+1)a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(az^{-1})^n = S \qquad (69)$$

A continuació, a partir de (69), desenvolupem la sèrie *S* i també la sèrie $(az^{-1})S$:

$$\begin{aligned} S &= (az^{-1})^0 + 2(az^{-1})^1 + 3(az^{-1})^2 + 4(az^{-1})^3 + 5(az^{-1})^4 + \ldots \\ (az^{-1})S &= (az^{-1})^1 + 2(az^{-1})^2 + 3(az^{-1})^3 + 4(az^{-1})^4 + 5(az^{-1})^5 + \ldots \end{aligned} \qquad (70)$$

I després restem les dues sèries, de manera que obtenim una fórmula de càlcul de $Z\{(n+1)a^n u[n]\}$ en funció de les sèries *S* i $(az^{-1})S$ desenvolupades a (70):

$$S - (az^{-1})S = (1 - az^{-1})S \quad \Rightarrow \quad S = \frac{S - (az^{-1})S}{1 - az^{-1}} = Z\{(n+1)a^n u[n]\} \qquad (71)$$

I, per acabar el càlcul, obtenim l'expressió final de la transformada:

$$Z\{(n+1)a^n u[n]\} = \frac{(az-1)^0+(az-1)^1+(az-1)^2+(az-1)^3+(az-1)^4+\ldots}{1-az-1} = \qquad (72)$$
$$\frac{1+az-1+(az-1)^2+(az-1)^3+(az-1)^4+\ldots}{1-az-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}\right)\frac{1}{1-az-1} =$$
$$\overbrace{\frac{1}{1-az-1}}^{\text{si } |z|>|a|}\frac{1}{1-az-1} = \frac{1}{(1-az-1)^2}$$

Per tant, la transformada *z* per al cas inicial $p = 1$ és la següent:

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \qquad |z|>|a| \qquad (73)$$

En segon lloc, establim la hipòtesi d'inducció, generalitzant aquest resultat obtingut en el cas inicial per al cas genèric en funció de *p*:

$$\binom{n+p}{p} a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}}, \qquad |z|>|a| \qquad (74)$$

Finalment, en tercer lloc calculem la transformada *z* per a $p + 1$, assumint que la hipòtesi d'inducció establerta a (74) és certa:

$$Z\left\{\binom{n+p+1}{p+1} a^n u[n]\right\} = Z\left\{\frac{n+p+1}{p+1}\underbrace{\binom{n+p}{p} a^n u[n]}_{x_1[n]}\right\} = Z\left\{\frac{n+p+1}{p+1}x_1[n]\right\} = \qquad (75)$$
$$\frac{1}{p+1}\left(Z\{nx_1[n]\} + Z\{px_1[n]\} + Z\{x_1[n]\}\right)$$

Llavors, la transformada $Z\{x_1[n]\}$ és justament la hipòtesi d'inducció definida a (74):

$$Z\{x_1[n]\} = Z\left\{\binom{n+p}{p} a^n u[n]\right\} = \frac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}} \qquad (76)$$

la ROC associada de la qual és $|z|>|a|$ (condició de convergència de la hipòtesi d'inducció).

La transformada $Z\{px_1[n]\}$ s'obté trivialment aplicant també la hipòtesi d'inducció:

$$Z\{px_1[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} px_1[n]z^{-n} = p\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]z^{-n}}_{Z\{x_1[n]\}} = \frac{p}{(1-az^{-1})^{p+1}} \qquad (77)$$

la ROC associada de la qual és $|z| > |a|$ (condició de convergència de la hipòtesi d'inducció).

I la transformada $Z\{nx_1[n]\}$ s'obté una mica més laboriosament, aplicant també la hipòtesi d'inducció:

$$\begin{aligned}
&Z\{nx_1[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx_1[n]z^{-n} = -z\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n](-nz^{-n-1}) = -z\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]\frac{dz^{-n}}{dz} = \\
&-z\frac{d}{dz}\Bigg(\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]z^{-n}}_{Z\{x_1[n]\}}\Bigg) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}}\right) = -z\frac{-(p+1)az^{-2}}{(1-az^{-1})^{p+2}} = \\
&\frac{(p+1)az^{-1}}{(1-az^{-1})^{p+2}}
\end{aligned} \tag{78}$$

la ROC associada de la qual és $|z| > |a|$ (condició de convergència de la hipòtesi d'inducció).

Finalment, tornem a (75) i apliquem els resultats obtinguts a (76)-(78):

$$\begin{aligned}
&Z\left\{\binom{n+p+1}{p+1}a^n u[n]\right\} = \frac{1}{p+1}\left(Z\{nx_1[n]\} + Z\{px_1[n]\} + Z\{x_1[n]\}\right) = \\
&\frac{1}{p+1}\left(\frac{(p+1)az^{-1}}{(1-az^{-1})^{p+2}} + \frac{p}{(1-az^{-1})^{p+1}} + \frac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}}\right) = \\
&\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{p+2}} + \frac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}} = \frac{az^{-1}+1-az^{-1}}{(1-az^{-1})^{p+2}} = \frac{1}{(1-az^{-1})^{p+2}}
\end{aligned} \tag{79}$$

la ROC associada de la qual és $|z| > |a|$, ja que és l'única condició de convergència a la qual ens hem hagut de restringir durant tot el càlcul.

S'observa, doncs, que el resultat obtingut per al cas p + 1 a (79) encaixa amb la hipòtesi d'inducció establerta a (74), la qual cosa demostra que aquesta hipòtesi és certa i, per tant, ens permet afirmar que la transformada *z* definida a (74) és correcta.

Ara, respecte del senyal definit a (61), veiem que, en la mateixa línia que en apartats anteriors, només és la versió orientada a l'esquerra, desplaçada una mostra i canviada de signe del senyal definit a (60). Per tant, el càlcul de la seva transformada *z* és totalment anàleg al que acabem de fer aquí per inducció: el resultat és el mateix, amb l'única diferència que la ROC és $|z| < |a|$. Per tant:

La transformada z del producte de $\binom{n+p}{p}$ per a^n i per un esglaó unitat és l'invers de $(1-az^{-1})^{p+1}$ i la seva ROC inclou els valors de z de mòdul superior a $|a|$:

$$\boxed{\binom{n+p}{p}a^n u[n] \;\overset{Z}{\longleftrightarrow}\; \frac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}}, \qquad |z|>|a|} \tag{80}$$

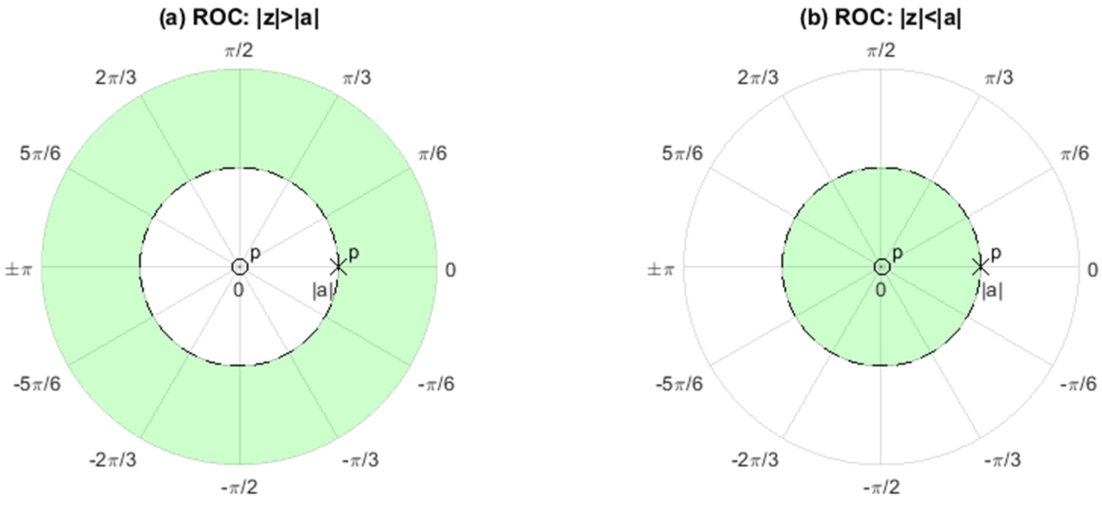
en què $a \in C$ i $p \in Z$, amb $p \geq 1$.

La transformada z del producte de $\binom{n+p}{p}$ per a^n i per un esglaó unitat reflectit horitzontalment, avançat una mostra i canviat de signe, és l'invers de $(1-az^{-1})^{p+1}$ i la seva ROC inclou els valors de z de mòdul inferior a $|a|$:

$$\boxed{-\binom{n+p}{p}a^n u[-n-1] \;\overset{Z}{\longleftrightarrow}\; \frac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}}, \qquad |z|<|a|} \tag{81}$$

en què $a \in C$ i $p \in Z$, amb $p \geq 1$.

Figura 13. (a) ROC de $L\left\{\binom{n+p}{p}a^n u[n]\right\}$. (b) ROC de $L\left\{-\binom{n+p}{p}a^n u[-n-1]\right\}$. Totes dues tenen p pols a $z = a$ (en representar els pols, s'ha assumit arbitràriament que $a \in R$, amb $a > 0$, de manera que $|a| = a$ i $\mathrm{Arg}(a) = 0$) i p zeros a $z = 0$.



2.5. Producte de senyal sinusoidal per esglaó unitat

Considerem ara el producte d'un senyal sinusoidal per un esglaó unitat:

$$x_1[n] = \cos(\omega_0 n)u[n] \tag{82}$$

$$x_2[n] = \sin(\omega_0 n)u[n] \qquad (83)$$

en què ω_0 és una constant real positiva ($\omega_0 \in R$, amb $\omega_0 > 0$).

La transformada *z* del senyal definit a (82) ja està calculada en les equacions (36) i (37) del subapartat 1.3 d'aquest mòdul, en les quals ja hem vist que la seva ROC és $|z| > 1$:

$$Z\{\cos(\omega_0 n)u[n]\} = \frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}} \qquad (84)$$

Respecte del càlcul de la transformada *z* del senyal definit a (83), veiem que és anàleg al que s'ha dut a terme a (36) i que la ROC resultant també és $|z| > 1$:

$$\begin{aligned}
&Z\{\sin(\omega_0 n)u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin(\omega_0 n)u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\omega_0 n)z^{-n} = \\
&\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j} z^{-n} = \frac{1}{2j}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{j\omega_0}z^{-1}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-j\omega_0}z^{-1}\right)^n\right) \underbrace{=}_{\text{si } |z|>1} \\
&\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right) = \frac{1}{2j}\frac{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}-1+e^{j\omega_0}z^{-1}}{(1-e^{j\omega_0}z^{-1})(1-e^{-j\omega_0}z^{-1})} = \\
&\frac{1}{2j}\frac{(e^{j\omega_0}-e^{-j\omega_0})z^{-1}}{1-(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0})z^{-1}+z^{-2}} = \frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}
\end{aligned} \qquad (85)$$

Per tant:

La transformada *z* del producte de $\cos(\omega_0 n)$ per un esglaó unitat és el quocient entre $1 - \cos(\omega_0)z^{-1}$ i $1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}$ i la seva ROC inclou els valors de *z* de mòdul superior a 1:

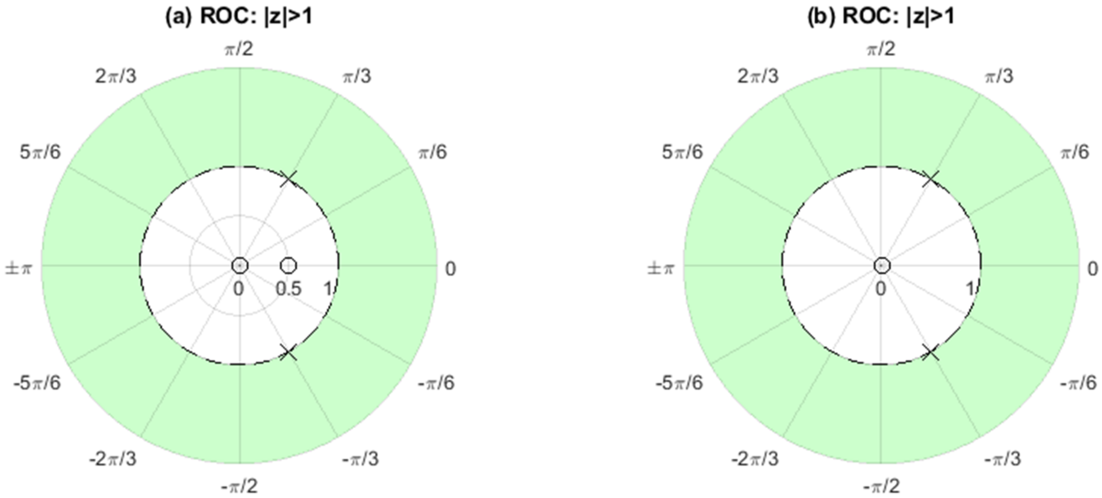
$$\cos(\omega_0 n)u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}, \qquad |z| > 1 \qquad (86)$$

La transformada *z* del producte de $\sin(\omega_0 n)$ per un esglaó unitat és el quocient entre $\sin(\omega_0)z^{-1}$ i $1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}$ i la seva ROC inclou els valors de *z* de mòdul superior a 1:

$$\sin(\omega_0 n)u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}, \qquad |z| > 1 \qquad (87)$$

en què $\omega_0 \in R$, amb $\omega_0 > 0$.

Figura 14. (a) ROC de $L\{\cos(\omega_0 n)u[n]\}$. (b) ROC de $L\{\sin(\omega_0 n)u[n]\}$. Totes dues tenen dos pols a $z = e^{\pm j\omega_0}$ (en representar els pols, s'ha assumit arbitràriament que $\omega_0 = \pi/3$) i un zero a z = 0; a més, la primera presenta un altre zero a $z = \cos(\omega_0)$ (i la segona a $z \to \infty$).



2.6. Producte de senyal exponencial per sinusoidal per esglaó unitat

Finalment, considerarem el resultat de multiplicar els senyals definits a (82) i (83) per un senyal exponencial:

$$x_1[n] = a^n \cos(\omega_0 n) u[n] \qquad (88)$$

$$x_2[n] = a^n \sin(\omega_0 n) u[n] \qquad (89)$$

En aquest cas, el procediment de càlcul és exactament el mateix que l'aplicat a (36) i (85). L'única diferència és que les exponencials a^n i z^{-n} s'uneixen per generar l'exponencial $\left(az^{-1}\right)^n$, la qual cosa té conseqüències tant en la forma final del senyal transformat com en la definició de la ROC.

Per a la transformada *z* del senyal definit a (88):

$$\begin{aligned}
&Z\{a^n \cos(\omega_0 n) u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cos(\omega_0 n) u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(\omega_0 n) z^{-n} = \\
&\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} z^{-n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{j\omega_0} a z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-j\omega_0} a z^{-1}\right)^n\right) \underbrace{=}_{\text{si } |z|>|a|} \\
&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega_0} a z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\omega_0} a z^{-1}}\right) = \frac{1}{2} \frac{1-e^{-j\omega_0} a z^{-1} + 1 - e^{j\omega_0} a z^{-1}}{\left(1-e^{j\omega_0} a z^{-1}\right)\left(1-e^{-j\omega_0} a z^{-1}\right)} = \\
&\frac{1}{2} \frac{2-a\left(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0}\right) z^{-1}}{1-a\left(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0}\right) z^{-1} + a^2 z^{-2}} = \frac{1-a\cos(\omega_0) z^{-1}}{1-2a\cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}}
\end{aligned} \qquad (90)$$

Òbviament, per a la transformada z del senyal definit a (89), el càlcul és anàleg al desenvolupat a (90). L'única diferència rau en el numerador del senyal resultant, que en aquest cas és $a\sin(\omega_0)z^{-1}$. I, pel que fa a la ROC, no hi ha canvis, ja que les dues sèries geomètriques que es calculen són les mateixes que a (90), les quals convergeixen si $|z| > |a|$.

Per tant:

La transformada z del producte de a^n per $\cos(\omega_0 n)$ i per un esglaó unitat és el quocient entre $1 - a\cos(\omega_0)z^{-1}$ i $1 - 2a\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}$ i la seva ROC inclou els valors de z de mòdul superior a $|a|$:

$$\boxed{a^n\cos(\omega_0 n)u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1 - a\cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2a\cos(\omega_0)z^{-1} + a^2 z^{-2}}, \quad |z| > |a|} \tag{91}$$

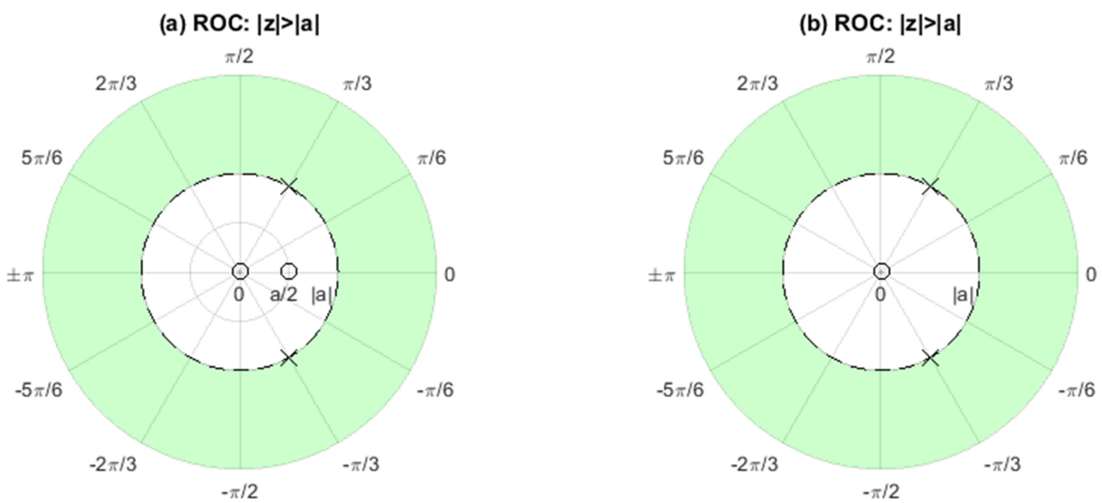
en què $a \in C$ i $\omega_0 \in R$, amb $\omega_0 > 0$.

La transformada z del producte de a^n per $\sin(\omega_0 n)$ i per un esglaó unitat és el quocient entre $a\sin(\omega_0)z^{-1}$ i $1 - 2a\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}$ i la seva ROC inclou els valors de z de mòdul superior a $|a|$:

$$\boxed{a^n\sin(\omega_0 n)u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{a\sin(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2a\cos(\omega_0)z^{-1} + a^2 z^{-2}}, \quad |z| > |a|} \tag{92}$$

en què $a \in C$ i $\omega_0 \in R$, amb $\omega_0 > 0$.

Figura 15. (a) ROC de $L\{a^n\cos(\omega_0 n)u[n]\}$. (b) ROC de $L\{a^n\sin(\omega_0 n)u[n]\}$. Totes dues tenen dos pols a $z = ae^{\pm j\omega_0}$ (en representar els pols, s'ha assumit arbitràriament que $a \in R$, amb $a > 0$, i que $\omega_0 = \pi/3$) i un zero a $z = 0$; a més, la primera presenta un altre zero a $z = a\cos(\omega_0)$ (i la segona a $z \to \infty$).



2.7. Taula resum de transformades z de senyals típics

La taula 1 conté un resum de les transformades z típiques més rellevants per a la teoria de senyals i sistemes. En la notació emprada a la taula s'assumeix en tot moment que:

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z), \quad \text{ROC} \qquad (93)$$

i que a, ω_0, n_0 i p són constants, en què $a \in C$; $\omega_0 \in R$, amb $\omega_0 > 0$; i n_0, $p \in Z$, amb $p \geq 1$:

Taula 1. Transformades z de senyals típics

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	$\forall\, z$
$\delta[n-n_0]$	z^{-n_0}	$\forall\, z - \begin{Bmatrix} z=0 & \text{si} & n_0>0 \\ z\to\infty & \text{si} & n_0<0 \end{Bmatrix}$
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\binom{n+p}{p} a^n u[n]$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-\binom{n+p}{p} a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^{p+1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-a\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2a\cos(\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{a\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2a\cos(\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Cal destacar que aquests resultats il·lustren bé un fet singularment important: **els senyals temporals diferents poden tenir associats senyals transformats l'expressió dels quals sigui la mateixa i que només es diferenciïn per la ROC**. Es poden comparar, per exemple, les transformades *z* de $u[n]$ i $-u[-n-1]$ o les de $a^n u[n]$ i $-a^n u[-n-1]$.

3. Propietats de la transformada *z*

En aquest apartat es proporcionen les propietats fonamentals de la transformada *z*. D'acord amb l'apartat anterior, l'objectiu és poder aplicar aquestes propietats, en combinació amb les transformades conegudes de senyals bàsics, per calcular transformades *z*, tant directes com inverses, de senyals de més complexitat.

A més, diverses d'aquestes propietats desenvolupen un paper crucial en la caracterització dels sistemes LIT digitals en el domini transformat *z*, com veurem en l'apartat 5 d'aquest mòdul. A causa d'això, en el subapartat 3.7 es proporciona una taula resum de totes aquestes propietats per poder consultar-la ràpidament quan sigui necessari.

3.1. Linealitat

Suposem que $x_1[n]$ i $x_2[n]$ són dos senyals digitals tals que:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z), \qquad R_1 \qquad (94)$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z), \qquad R_2 \qquad (95)$$

La transformada *z* de qualsevol combinació lineal de $x_1[n]$ i $x_2[n]$ és igual que aquesta mateixa combinació lineal de $X_1(z)$ i $X_2(z)$ (vegeu la demostració 2):

$$\boxed{\alpha x_1[n]+\beta x_2[n] \xleftrightarrow{Z} \alpha X_1(z)+\beta X_2(z), \qquad R} \qquad (96)$$

en què α i β són constants, en general, complexes ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) i en què la ROC de $\alpha X_1(z)+\beta X_2(z)$ conté, almenys, la intersecció de R_1 i R_2; és a dir, $R_1 \cap R_2 \subseteq R$.

En tot cas, **si $R_1 \cap R_2 = \varnothing$, aleshores $R = \varnothing$ i el senyal $\alpha X_1(z)+\beta X_2(z)$ no existeix**.

Demostració 2

Calculem directament la transformada *z* de $\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]$:

$$
\begin{aligned}
& Z\{\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]) z^{-n} = \\
& \alpha \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] z^{-n}}_{X_1(z)} + \beta \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] z^{-n}}_{X_2(z)} = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)
\end{aligned} \tag{97}
$$

Pel que fa a la ROC del senyal $\alpha X_1(z)+\beta X_2(z)$, necessàriament ha de contenir la intersecció de les ROC dels senyals $X_1(z)$ i $X_2(z)$, ja que és necessari que hi hagi $X_1(z)$ i $X_2(z)$ perquè hi hagi $\alpha X_1(z)+\beta X_2(z)$.

D'això s'infereix que, si $R_1 \cap R_2 = \varnothing$, aleshores $R = \varnothing$ i el senyal $\alpha X_1(z)+\beta X_2(z)$ no existeix, ja que, en aquest cas, no hi hauria cap valor de z per al qual estiguessin simultàniament definides $X_1(z)$ i $X_2(z)$.

No obstant això, no és correcte afirmar que $R = R_1 \cap R_2$, ja que pot succeir que R sigui més gran que la intersecció de R_1 i R_2. Per demostrar-ho, considerem aquest cas particular: $x_1[n] = -x_2[n] + x_3[n]$, en què $x_3[n]$ és un senyal de longitud finita, i $\alpha = \beta = 1$. En aquest cas, $\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] = x_3[n]$ i, pel fet que $x_3[n]$ és un senyal finit, la ROC abraça tot el pla z; per tant, $R = \forall z$ (amb l'excepció, potser, de $z = 0$ o $z \to \infty$). Com que $x_1[n]$ i $x_2[n]$ no necessàriament han de ser senyals finits, la intersecció de R_1 i R_2 no ha d'incloure tot el pla z ($R_1 \cap R_2 \neq \forall z$); per tant, $R \neq R_1 \cap R_2$.

Així, el màxim que es pot dir de la ROC de $\alpha X_1(z)+\beta X_2(z)$ és que conté, almenys, les ROC de $X_1(z)$ i $X_2(z)$; o sigui que $R_1 \cap R_2$ és un subconjunt de R ($R_1 \cap R_2 \subseteq R$).

En general, per a tota constant N entera més gran o igual que 2 ($N \in Z$, en què $N \geq 2$):

$$
\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i[n] \xleftrightarrow{L} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i(z), \qquad R \tag{98}
$$

en què totes les α_i són constants, en general, complexes ($\alpha_i \in C, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, N\}$) i en què $R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_N \subseteq R$.

3.2. Desplaçament en el domini temporal

Suposem que $x[n]$ és un senyal digital tal que:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad R \qquad (99)$$

La transformada de Laplace de $x[n]$ sotmesa a un desplaçament horitzontal arbitrari de n_0 mostres és igual al producte de $X(z)$ per l'exponencial complexa z^{-n_0} (vegeu la demostració 3):

$$\boxed{x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}X(z), \quad R'} \qquad (100)$$

en què n_0 és una constant entera ($n_0 \in Z$) i en què $R' = R$, **excepte per la possible addició o sostracció dels valors $z = 0$ o $z \to \infty$.**

Demostració 3

Calculem directament la transformada z de $x[n-n_0]$:

$$Z\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_0]z^{-n} = \left\{ \begin{array}{c} (m = n - n_0) \\ n = m + n_0 \\ n \to \pm\infty \Rightarrow m \to \pm\infty \end{array} \right\} =$$
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]z^{-(m+n_0)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]z^{-m}z^{-n_0} = z^{-n_0}\underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]z^{-m}}_{X(z)} = z^{-n_0}X(z) \qquad (101)$$

Pel que fa a la ROC de $z^{-n_0}X(z)$, s'observa que, com a mínim, ha d'incloure a la ROC del senyal $X(z)$, com a conseqüència del fet que $z^{-n_0}X(z)$ inclou $X(z)$. No obstant això, si $n_0 > 0$, el valor de z^{-n_0} tendeix a infinit per a $z = 0$; i, si $n_0 < 0$, el valor de z^{-n_0} tendeix a infinit per a $z \to \infty$. Per tant, podria ser que algun d'aquests dos valors de z ($z = 0$ o $z \to \infty$) quedés exclòs de la ROC de $z^{-n_0}X(z)$ o que hi quedés inclòs, o bé que succeïssin totes dues coses.

Això es veu molt clar en l'exemple següent: assumim que $x[n] = \delta[n-1]$ i que $n_0 = -2$, de manera que $x[n-n_0] = \delta[n+1]$. Aquí, $Z\{x[n]\} = z^{-1}$ i la seva ROC és tot el pla z (incloent-hi $z \to \infty$, on hi ha un zero), excepte $z = 0$, on hi ha un pol (valor exclòs de la ROC). No obstant això, $Z\{x[n-n_0]\} = z^2z^{-1} = z$, de manera que la seva ROC és tot el pla z (incloent-hi $z = 0$, on hi ha un zero), excepte $z \to \infty$, on hi ha un pol (valor exclòs de la ROC). Per tant, en aplicar un desplaçament temporal $x[n]$, hem provocat que $z = 0$ passi a ser inclòs a la ROC i que $z \to \infty$ deixi de ser-hi.

Per tant, la ROC de $z^{-n_0}X(z)$ és igual a la ROC de $X(z)$, excepte per la possible addició o sostracció dels valors $z = 0$ o $z \to \infty$.

3.3. Escalat de la variable del domini transformat

Si $x[n]$ és un senyal analògic tal que:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \qquad R \qquad (102)$$

Multiplicar $x[n]$ per un senyal exponencial complex de la forma a^n implica escalar la variable independent de $X(z)$ en un factor a^{-1} (vegeu la demostració 4):

$$\boxed{a^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X(a^{-1}z), \qquad |a|R} \qquad (103)$$

en què a és una constant complexa ($a \in C$) i en què **la ROC de $X(a^{-1}z)$ és una versió escalada horitzontalment en un factor $|a|$ de la ROC de $X(z)$** (és a dir, de R).

Pel que fa a la ROC de $X(a^{-1}z)$, fixeu-vos que si, per exemple, $X(z)$ té un pol a $z = z_0$, aleshores $X(a^{-1}z)$ té un pol a $a^{-1}z = z_0$; és a dir, a $z = az_0$: el mòdul d'aquest pol és $|a|\,|z_0|$ i la seva fase és $\mathrm{Arg}(a) + \mathrm{Arg}(z_0)$. Així doncs, com que els límits de la ROC són sempre circumferències de radi igual al mòdul d'un pol, **la ROC de $X(a^{-1}z)$ és igual que la ROC de $X(z)$ sotmesa a un escalat de magnitud $|a|$ respecte dels radis de les circumferències que limiten la ROC**:

- Si $|a| > 1$, aleshores la ROC de $X(a^{-1}z)$ és una versió «comprimida» de la ROC de $X(z)$ en un factor $|a|$.

- Si $|a| > 1$, aleshores la ROC de $X(a^{-1}z)$ és una versió «expandida» de la ROC de $X(z)$ en un factor $|a|$.

Demostració 4

Calculem directament la transformada *z* de $a^n x[n]$:

$$\begin{aligned} Z\{a^n x[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \left(a^{-1}z\right)^{-n} = \{v = a^{-1}z\} = \\ &\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] v^{-n}}_{X(v)} = X(v) \underbrace{=}_{v=a^{-1}z} X(a^{-1}z) \end{aligned} \qquad (104)$$

Observem que si la ROC de $X(z)$, que anomenem R, és, en general, $|z_1| < |z| < |z_2|$, aleshores el conjunt de valors de v per al qual el càlcul de $X(v)$ convergeix és, en general, $|z_1| < |v| < |z_2|$. Així doncs, en desfer el canvi de variable $v = a^{-1}z$ el conjunt de valors de z per al qual el càlcul de $X(a^{-1}z)$ convergeix és:

$$|z_1| < |a^{-1}z| < |z_2| \;\Rightarrow\; |z_1| < |z|/|a| < |z_2| \;\Rightarrow\; |a||z_1| < |z| < |a||z_2| \qquad (105)$$

Per tant, aquesta seria la ROC de $X(a^{-1}z)$, que anomenem R', de manera que $R' = |a|R$.

3.4. Conjugació complexa

Suposem que $x[n]$ és un senyal digital tal que:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad R \qquad (106)$$

La transformada *z* del complex conjugat de $x[n]$ és igual al complex conjugat de $X(z)$ després d'haver aplicat el complex conjugat a la variable *z* (vegeu la demostració 5):

$$\boxed{x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*), \quad R} \qquad (107)$$

Un corol·lari important d'aquesta propietat és que **la transformada *z* de qualsevol senyal real és igual que el complex conjugat de si mateix després d'haver-hi aplicat el conjugat de *z***:

$$\boxed{x[n] \in R \;\Rightarrow\; x[n] = x^*[n] \;\Rightarrow\; X(s) = X^*(s^*)} \qquad (108)$$

Per tant, sempre que $x[n]$ sigui un senyal real, qualsevol zero o pol no reals de $X(z)$ seran acompanyats, respectivament, d'un altre zero o pol en el punt conjugat: si $X(z)$ presenta un zero o un pol a $z = z_0$, també presentarà un zero o un pol a $z = z_0^*$. És a dir, **si $x[n]$ és real, tot zero o pol de $X(z)$ no situat en l'eix d'abscisses del pla *z* (és a dir, tot zero o pol no real) tindrà una parella conjugada** (les parelles de pols de la figura 8, la figura 14 o la figura 15 en són un bon exemple).

Demostració 5

Recordem que el complex conjugat d'un nombre complex es calcula indistintament canviant el signe de la seva part imaginària o canviant el signe de la seva fase:

$$\alpha = Re(\alpha) + j\,Im(\alpha) = |\alpha| e^{j\mathrm{Arg}(\alpha)} \;\Rightarrow\; \alpha^* = Re(\alpha) - j\,Im(\alpha) = |\alpha| e^{-j\mathrm{Arg}(\alpha)} \qquad (109)$$

En aquesta demostració conjugarem tant la variable *z* com els senyals $x[n]$ i $X(z)$ canviant el signe a la fase corresponent:

$$z^* = |z| e^{-j\mathrm{Arg}(z)} \qquad (110)$$

$$x^*[n] = |x[n]| e^{-j\mathrm{Arg}(x[n])} \qquad (111)$$

$$X^*(z) = |X(z)| e^{-j\mathrm{Arg}(X(z))} \;\Rightarrow X^*(z^*) = |X(z^*)| e^{-j\mathrm{Arg}(X(z^*))} \qquad (112)$$

D'altra banda, el complex conjugat de la suma de dos o més nombres complexos es pot obtenir directament conjugant cadascun dels sumands:

$$\left(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N\right)^* = |\alpha_1|e^{-j\mathrm{Arg}(\alpha_1)}+|\alpha_2|e^{-j\mathrm{Arg}(\alpha_2)}+\cdots+|\alpha_N|e^{-j\mathrm{Arg}(\alpha_N)} \qquad (113)$$

Això es demostra molt fàcilment comparant la suma de dos nombres complexos amb la suma dels seus complexos conjugats:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1+\alpha_2=\underbrace{\left(Re(\alpha_1)+Re(\alpha_2)\right)}_{A}+j\underbrace{\left(Im(\alpha_1)+Im(\alpha_2)\right)}_{B}=A+jB\\
&\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^*=A-jB \qquad (114)\\
&\alpha_1^*+\alpha_2^*=\underbrace{\left(Re(\alpha_1)+Re(\alpha_2)\right)}_{A}+j\underbrace{\left(-Im(\alpha_1)-Im(\alpha_2)\right)}_{-B}=A-jB=\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^*
\end{aligned}$$

Un cop aclarit tot això, plantegem, primer, la transformada *z* de $x^*[n]$ aplicant (111):

$$\begin{aligned}
&Z\{x^*[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^*[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|e^{-j\mathrm{Arg}(x[n])}\left(|z|e^{j\mathrm{Arg}(z)}\right)^{-n}= \qquad (115)\\
&\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]||z|^{-n}e^{-j\mathrm{Arg}(x[n])}e^{-j\mathrm{Arg}(z)n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]||z|^{-n}e^{-j(\mathrm{Arg}(x[n])+\mathrm{Arg}(z)n)}
\end{aligned}$$

Fixeu-vos que a (115) està separada la informació de mòdul ($|x[n]|\,|z|^{-n}$) de la informació de fase ($e^{-j(\mathrm{Arg}(x[n])+\mathrm{Arg}(z)n)}$), ja que $|z|^{-n}$ tan sols és $1/|z|^n$.

Ara, anàlogament, plantejarem la transformada *z* de $x[n]$:

$$\begin{aligned}
&X(z)=Z\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|e^{j\mathrm{Arg}(x[n])}\left(|z|e^{j\mathrm{Arg}(z)}\right)^{-n}= \qquad (116)\\
&\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]||z|^{-n}e^{j\mathrm{Arg}(x[n])}e^{-j\mathrm{Arg}(z)n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]||z|^{-n}e^{j(\mathrm{Arg}(x[n])-\mathrm{Arg}(z)n)}
\end{aligned}$$

S'observa que les úniques diferències entre l'expressió obtinguda a (115) per a $Z\{x^*[n]\}$ i l'expressió obtinguda a (116) per a $X(z)$ es troben en la informació sobre la fase (concretament, en els signes de l'exponencial de base *e*).

Llavors, conjugar la variable *z* a (116) implica, en aplicar (110), canviar el signe a $\mathrm{Arg}(z)$:

$$X(z^*)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]||z|^{-n}e^{j(\mathrm{Arg}(x[n])+\mathrm{Arg}(z)n)} \qquad (117)$$

Finalment, conjugar el senyal $X(z^*)$ a (117) implica, en aplicar (112) i (113), canviar el signe de l'exponent de l'exponencial de base *e* (i es conjuga, així, cadascun dels sumands inclosos en el sumatori a *n*). En fer-ho, obtenim justament l'expressió de l'equació (115):

$$X^*(z^*)=\underbrace{\sum_{+\infty}^{n=-\infty}|x[n]|\,|z|^{-n}e^{-j(\mathrm{Arg}(x[n])+\mathrm{Arg}(z)n)}}_{Z\{x^*[n]\}}=Z\{x^*[n]\} \qquad (118)$$

Pel que fa a la ROC de $X^*(z^*)$, s'observen dues coses:

- Conjugar la variable *z* implica canviar el signe de la fase dels zeros i els pols de $X(z)$, de manera que els mòduls dels zeros i els pols de $X(z^*)$ són els mateixos que els dels zeros i els pols de $X(z)$.

- I, després, conjugar el senyal $X(z^*)$ implica canviar de nou el signe de la fase dels zeros i els pols de $X(z^*)$, de manera que els zeros i els pols de $X^*(z^*)$ són els mateixos que els de $X(z)$.

Com que els pols de $X^*(z^*)$ i $X(z)$ són els mateixos, la ROC de $X^*(z^*)$ i la de $X(z)$ són la mateixa.

3.5. Convolució en el domini temporal

Suposem que $x_1[n]$ i $x_2[n]$ són dos senyals analògics tals que:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z), \quad R_1 \tag{119}$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z), \quad R_2 \tag{120}$$

La transformada z de la convolució entre $x_1[n]$ i $x_2[n]$ és igual al producte de $X_1(z)$ per $X_2(z)$ (vegeu la demostració 6):

$$\boxed{x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z), \quad R} \tag{121}$$

en què la ROC de $X_1(z)X_2(z)$ conté, almenys, la intersecció de R_1 i R_2; és a dir, $R_1 \cap R_2 \subseteq R$.

En tot cas, **si $R_1 \cap R_2 = \varnothing$, aleshores $R = \varnothing$ i el senyal $X_1(z)X_2(z)$ no existeix.**

Demostració 6

Calculem directament el resultat de l'equació d'anàlisi de la transformada z per al sumatori de convolució entre $x_1[n]$ i $x_2[n]$:

$$\begin{gathered} Z\{x_1[n] * x_2[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]x_2[n-m]\right)z^{-n} = \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n-m]z^{-n}\right)}_{Z\{x_2[n-m]\}=z^{-m}X_2(z)}x_1[m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} z^{-m}X_2(z)x_1[m] = \\ \underbrace{\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]z^{-m}\right)}_{X_1(z)}X_2(z) = X_1(z)X_2(z) \end{gathered} \tag{122}$$

S'observa l'aplicació de la propietat de desplaçament temporal de la transformada z per obtenir que $Z\{x_2[n-m]\} = z^{-m}X_2(z)$.

Pel que fa a la ROC de $X_1(z)X_2(z)$, i de la mateixa manera que en la demostració 2, aquí també succeeix que si $R_1 \cap R_2 = \varnothing$, aleshores $R = \varnothing$ i el senyal $X_1(z)X_2(z)$ no existeix. I, a més, pot ser que en el producte $X_1(z)X_2(z)$ es cancel·li algun pol de $X_1(z)$, $X_2(z)$ o tots dos (per exemple, si $X_1(z)$ presenta un zero en què $X_2(z)$ presenta un pol, aquell zero i aquell pol es cancel·len a $X_1(z)X_2(z)$) i que, per tant, la ROC de $X_1(z)X_2(z)$ sigui més àmplia que el resultat de $R_1 \cap R_2$.

Per tant, el màxim que podem dir és que $R_1 \cap R_2 \subseteq R$.

En general, per a tota constant N entera més gran o igual que 2 ($N \in Z$, en què $N \geq 2$):

$$x_1[n] * x_2[n] * \ldots * x_N[n] \quad \xleftrightarrow{Z} \prod_{i=1}^{N} X_i(z) = X_1(z) X_2(z) \ldots X_N(z), \qquad R \qquad (123)$$

en què $R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_N \subseteq R$.

3.6. Derivació en el domini transformat

Suposem que $x[n]$ és un senyal analògic tal que:

$$x[n] \quad \xleftrightarrow{Z} \quad X(z), \qquad R \qquad (124)$$

La transformada z del producte de z per $x[n]$ és igual al producte de $-z$ per la derivada de $X(z)$ respecte de z (vegeu la demostració 7):

$$\boxed{nx[n] \quad \xleftrightarrow{Z} -z\frac{dX(z)}{dz}, \qquad R'} \qquad (125)$$

en què $R' = R$, **excepte per la possible addició o sostracció dels valors $z = 0$ o $z \to \infty$.**

Demostració 7

Calculem directament la transformada z de $nx[n]$:

$$\begin{aligned} Z\{nx[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n]z^{-n} \quad - z\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(-nz^{-n-1}\right) = \\ -z\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\frac{dz^{-n}}{dz} = -z\frac{d}{dz}\underbrace{\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}\right)}_{X(z)} = -z\frac{dX(z)}{dz} \end{aligned} \qquad (126)$$

Atès que $dX(z)/dz$ implica l'existència de $X(z)$, la ROC de $dX(z)/dz$ és la mateixa que la de $X(z)$. No obstant això, derivar $X(z)$ pot provocar que $z = 0$ o $z \to \infty$ passin a ser inclosos a la ROC o deixin de ser-hi: considereu, per exemple, la derivada de z^{-1}. I es pot dir el mateix de l'efecte de multiplicar $dX(z)/dz$ per $-z$. Per tant, la ROC de $-z(dX(z)/dz)$ és igual que la ROC de $X(z)$, excepte per la possible addició o sostracció dels valors $z = 0$ o $z \to \infty$.

3.7. Taula resum de les propietats de la transformada *z*

La taula 2 conté un resum de les propietats fonamentals de la transformada *z* més rellevants per a la teoria de senyals i sistemes, més l'anomenat *teorema del valor inicial* de la transformada *z* (que surten al final de la taula). En la notació emprada en la taula, α, β, a i n_0 són constants tals que $\alpha, \beta, a \in C$, i $n_0 \in Z$:

Taula 2. Propietats fonamentals de la transformada *z*

Propietat	Senyal temporal	Transformada *z*	ROC
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	R R_1 R_2
Linealitat	$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$	$\alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$	Almenys, $R_1 \cap R_2$
Desplaçament temporal	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	R, amb la possible addició o sostracció de $z = 0$ o $z \to \infty$
Escalat de la variable *z*	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	$\lvert a \rvert R$
Conjugació complexa	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Convolució temporal	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Almenys, $R_1 \cap R_2$
Derivació en el domini *z*	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	R, amb la possible addició o sostracció de $z = 0$ o $z \to \infty$
Teorema del valor inicial	Si $x[n] = 0$ per a $n < 0$, llavors: $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$		

4. Càlcul de la transformada *z* inversa

En aquest apartat analitzarem el problema del càlcul de la transformada *z* inversa. En primer lloc, s'introdueix la forma genèrica que, en general, adopta tot senyal transformat en el domini *z* (senyal racional en forma de quocient de polinomis) i se n'estudien les característiques principals (subapartat 4.1).

A continuació, i treballant amb un exemple senzill per proporcionar un fil narratiu que faciliti la comprensió dels conceptes importants, es plantegen les diferents propietats de la ROC i la seva relació amb la forma del senyal temporal associat al senyal transformat (subapartat 4.2).

Finalment, l'apartat acaba amb l'exposició d'una estratègia general de càlcul de la transformada *z* inversa que, a partir del que s'ha vist en els dos apartats anteriors i basant-se en l'aplicació d'algunes de les transformades típiques i de les propietats de la transformada *z* ja estudiades en els apartats 2 i 3, respectivament, permet evitar haver de treballar directament amb l'equació de síntesi de la transformada *z* (subapartat 4.3).

4.1. Factorització de senyals racionals

D'entrada, per les propietats del senyal delta sabem que qualsevol senyal digital $x[n]$ pot expressar-se com el resultat d'una combinació lineal de deltes discretes (una expressió que, com també sabem, és equivalent a la suma de convolució entre $x[n]$ i $\delta[n]$):

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m] = \\ &\cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[m]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots \end{aligned} \tag{127}$$

de manera que el senyal delta *z*-èsim de la combinació lineal ($\delta[n-m]$) és multiplicada per $x[m]$, és a dir, el valor d'amplitud de $x[n]$ a la mostra $n = m$.

Si ara calculem la transformada *z* de $x[n]$ a partir de la combinació lineal de senyals delta definida a (127), obtenim, aplicant les propietats de linealitat i desplaçament temporal de la transformada *z* juntament amb el resultat de la transformada *z* de $\delta[n-n_0]$ (vegeu els subapartats 3.1 i 3.2 i 2.1 d'aquest mateix mòdul, respectivament), la sèrie de potències següent:

$$X(z)=Z\{x[n]\}=Z\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\delta[n-m]\right\}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\underbrace{Z\{\delta[n-m]\}}_{z^{-m}}=$$
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]z^{-m}=\cdots+x[-2]z^{2}+x[m]z+x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots \tag{128}$$

S'observa que aquesta sèrie de potències dona lloc a un polinomi a z, en general, compost per infinits monomis (ja que, en general, la longitud de la sèrie és infinita). De fet, si $x[n]$ és un senyal infinit, efectivament, el polinomi resultant estarà format per infinits monomis. I, només si $x[n]$ és un senyal finit, el polinomi resultant serà també de longitud finita.

En qualsevol cas, el que és rellevant és que (128) demostra el següent:

> Si $x[n]$ és un senyal digital qualsevol. **La transformada z de $x[n]$ sempre pot expressar-se com un senyal $X(z)$ en forma de polinomi a z, en què el coeficient del monomi de grau m és el valor d'amplitud de $x[n]$ a la mostra $n = m$.**

No obstant això, en la pràctica, aquest fet només té utilitat real si $x[n]$ és un senyal de longitud finita i acotada en amplitud, ja que, en aquest cas, el càlcul de la seva transformada z és immediat i dona lloc a un polinomi a z de longitud finita:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}x[n]=0, \forall\, n\notin\{n_1,\ \ldots,\ n_2\}\\ \quad |x[n]|<A,\ \forall\, n\in Z\end{array}\right\}\Leftrightarrow X(z)=\sum_{m=n_1}^{n_2}x[m]z^{-m}=x[n_1]z^{-n_1}+\cdots+x[n_2]z^{-n_2}} \tag{129}$$

en què A és una cota d'amplitud finita arbitrària ($A\in R$, amb $A<\infty$); en què $n_1, n_2\in Z$, en què $n_1\leq n_2$; i en què la ROC de $X(z)$ inclou tot el pla z, amb les possibles excepcions dels valors $z = 0$ i $z\to\infty$:

$$\boxed{x[n]\ \overset{Z}{\longleftrightarrow}\ X(z),\qquad \forall\, z-\left\{\begin{array}{lllll}z=0 & \text{si} & x[n]\neq 0 & \text{per a alguna} & n>0\\ z\to\infty & \text{si} & x[n]\neq 0 & \text{per a alguna} & n<0\end{array}\right\}} \tag{130}$$

Si, en canvi, $x[n]$ és un senyal de longitud infinita, el resultat obtingut a (128) continua essent cert, però poc útil en la pràctica, ja que el càlcul de la seva transformada z implicaria treballar amb una sèrie infinita de potències de z (és a dir, amb un polinomi a z compost d'infinits monomis). En aquest cas, és interessant restringir l'àmbit de treball a **sèries infinites de potències de z que puguin ser expressades de manera compacta en forma de quocient de dos polinomis a z finits**. I, en aquest punt, convé aclarir que tots els senyals digitals en el domini del temps amb què es treballa en la teoria de senyals i sistemes compleixen aquesta condició (la seva transformada *z* és expressable en forma de quocient de dos polinomis finits), de manera que podem assumir-la sense cap problema.

Per tant, i sense pèrdua de generalitat, podem afirmar que l'ús que farem de la transformada *z* per caracteritzar senyals digitals i, sobretot, sistemes LIT digitals quedarà sempre restringit a **senyals transformats racionals en què la forma és la d'un quocient de polinomis** (de fet, si ens hi fixem bé, tots els senyals transformats calculats fins a aquest punt en els apartats anteriors d'aquest mateix mòdul són d'aquesta manera).

És a dir, en el marc de la teoria de senyals i sistemes, qualsevol senyal $X(z)$ serà sempre així:

$$\boxed{X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_{M-1} z^{-(M-1)}+b_M z^{-M}}{a_0+a_1 z^{-1}+\cdots+a_{N-1} z^{-(N-1)}+a_N z^{-N}}} \quad (131)$$

en què el numerador $B(z)$ és un polinomi d'ordre M amb coeficients b_i ($\forall\, i \in \{0,\ldots,M\}$), i el denominador $A(z)$, un polinomi d'ordre N amb coeficients a_i ($\forall\, i \in \{0,\ldots,M\}$).

A partir d'aquesta forma general observem que **calcular els zeros i els pols de $X(z)$ sempre consistirà a factoritzar $B(z)$ i $A(z)$**, de manera que l'expressió de $X(z)$ es transformi en el següent:

$$\boxed{X(z)=G\frac{\prod_{i=1}^{M}\left(1-c_i z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(1-p_i z^{-1}\right)}=G\frac{\left(1-c_1 z^{-1}\right)\left(1-c_2 z^{-1}\right)\cdots\left(1-c_M z^{-1}\right)}{\left(1-p_1 z^{-1}\right)\left(1-p_2 z^{-1}\right)\cdots\left(1-p_N z^{-1}\right)}} \tag{132}$$

en què:

1) G és un valor constant (independent de z) anomenat **factor de guany** de $X(z)$, tal que:

$$G=\frac{b_M}{a_N} \tag{133}$$

2) Els coeficients c_i ($\forall\, i\in\{1,\ldots,M\}$) són **zeros de $X(z)$ que coincideixen amb els zeros del polinomi $B(z)$**.

3) Els coeficients p_i ($\forall\, i\in\{1,\ldots,N\}$) són **pols de $X(z)$ que coincideixen amb els zeros del polinomi $X(z)$**.

4) Es compleix sempre que:

$$\prod_{i=1}^{M} c_i=\frac{b_0}{b_M} \quad \text{i} \quad \prod_{i=1}^{N} p_i=\frac{a_0}{a_M} \tag{134}$$

5) Si $M > N$, aleshores $X(z)$ presenta, a més, **$M - N$ pols a $z = 0$**.

6) Si $M < N$, aleshores $X(z)$ presenta, a més, **$N - M$ zeros a $z = 0$**.

Podria succeir perfectament que algun zero de $B(z)$ i algun zero de $A(z)$ coincidissin; és a dir, que $c_i = p_j$. En general, per a cada parella $c_i = p_j$, els factors respectius $\left(1-c_i z^{-1}\right)$ i $\left(1-p_j z^{-1}\right)$ s'anul·larien i, per tant, els ordres del numerador i el denominador de $X(z)$ a (132) tindrien un decrement en una unitat.

Per facilitar la comprensió de les particularitats d'aquesta expressió genèrica en forma de senyal racional (quocient de polinomis), posem ara un exemple arbitrari de senyal $X(z)$:

$$X(z)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}}{1-\frac{7}{12}z^{-1}-\frac{11}{12}z^{-2}+\frac{7}{12}z^{-3}-\frac{1}{12}z^{-4}} \tag{135}$$

Ara, per expressar aquesta $X(z)$ segons la forma definida a (132), la factoritzarem. Per estalviar-nos els càlculs, podem fer ús de **la funció `tf2zpk` de MATLAB**, la qual, precisament, **calcula els valors dels c_i, p_i i G a partir dels coeficients b_i i a_i** (per a més detalls, consulteu l'apartat `help` de la funció):

```
>> B = [1/2 -1/3 -1/2 1/3]; % Vector fila: coeficients del numerador
>> A = [1 -7/12 -11/12 7/12 -1/12]; % Vector fila: denominador
>> [c,p,G] = tf2zpk(B,A)
c =
        0
  -1.0000
   1.0000
   0.6667
p =
  -1.0000
   1.0000
   0.3333
   0.2500
G =
   0.5000
```

Així, la factorització de $X(z)$ dona lloc a l'expressió següent:

$$X(z)=\frac{1}{2}\frac{\left(1+z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} \qquad (136)$$

Observem que els valors $z=\pm 1$ són zeros tant del numerador com del denominador de $X(z)$. Per tant, els factors respectius són simplificables, de manera que:

$$X(z)=\frac{1}{2}\frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} \qquad (137)$$

Un cop simplificada, si es vol tornar a recuperar l'expressió de $X(s)$ en la forma no factoritzada, tan sols cal desenvolupar els productes dels seus factors tant en el numerador com en el denominador. Anàlogament, **la funció `zp2tf` de MATLAB** permet estalviar-se aquests càlculs, ja que **calcula els valors dels coeficients b_i i a_i a partir dels zeros, els pols i el factor de guany** (per a més detalls, consulteu l'apartat `help` de la funció):

```
>> B = [1/2 -1/3 -1/2 1/3]; % Vector fila: coeficients del numerador
>> A = [1 -7/12 -11/12 7/12 -1/12]; % Vector fila: denominador
>> [c,p,G] = tf2zpk(B,A)
c =
        0
  -1.0000
```

```
    1.0000
    0.6667
p =
   -1.0000
    1.0000
    0.3333
    0.2500
G =
    0.5000
```

Per tant:

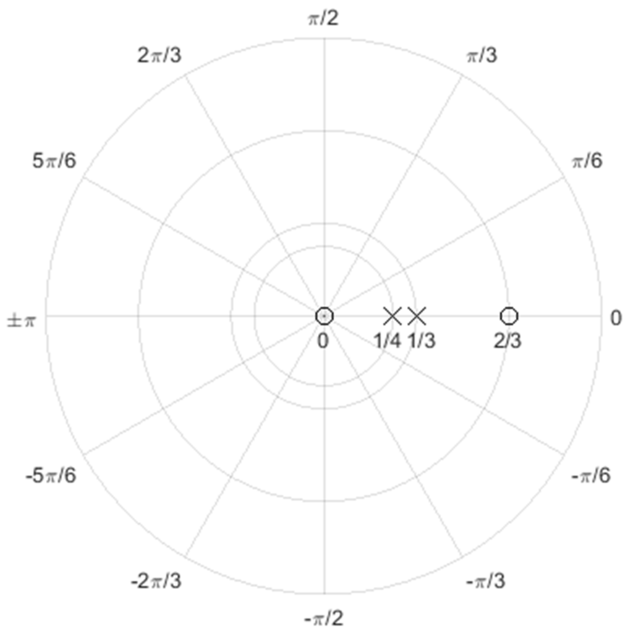
$$X(z)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{7}{12}z^{-1}+\frac{1}{12}z^{-2}} \qquad (138)$$

En qualsevol cas, si ens fixem en l'expressió factoritzada de (137), observem que:

- El factor de guany de $X(z)$ és igual a 1/2.
- Els zeros de $X(z)$ són: $c_1 = 2/3$ i $c_2 = 0$ (aquest últim és degut al fet que l'ordre del denominador és superior en una unitat al del numerador).
- Els pols de $X(z)$ són: $p_1 = 1/3$ i $p_2 = 1/4$.

Per tant, el diagrama de pols i zeros de $X(z)$ és el següent:

Figura 16. Diagrama de pols i zeros amb dos zeros a $z = 2/3$ i $z = 0$ i dos pols a $z = 1/3$ i $z = 1/4$



4.2. Propietats de la ROC

Si continuem observant l'exemple iniciat en l'equació (135) de l'apartat anterior, és interessant veure que hem partit directament d'una expressió donada per $X(z)$. I d'això deriva una cosa important: d'entrada, no sabem quina és la ROC de $X(z)$, ja que no hem partit de cap $x[n]$ i, per tant, no hem hagut de resoldre el sumatori de l'equació d'anàlisi de la transformada z per obtenir $X(z)$. En no haver calculat el sumatori, desconeixem les seves condicions de convergència, que són precisament el que determina la ROC de $X(z)$.

Aquest fet comporta, a més, una altra conseqüència interessant: sense conèixer la ROC de $X(z)$ no és possible calcular la transformada inversa i obtenir $x[n]$, ja que, recordem-ho, la transformada z d'un senyal no consisteix només en l'expressió de $X(z)$, sinó en l'expressió $X(z)$ i la seva ROC. Així doncs, desconèixer la ROC de $X(z)$ és desconèixer una part de la informació continguda a $x[n]$.

Com que els senyals exponencials complexos són base generadora de l'espai dels senyals analògics, la transformada z és reversible: a partir d'un senyal temporal $x[n]$, la seva transformada z directa, si en té, dona lloc de manera unívoca al seu senyal $X(z)$ associat; i, en sentit oposat, a partir d'una $X(z)$, la seva transformada z inversa dona lloc de manera unívoca al seu senyal $x[n]$ associat. És a dir, **els senyals temporals diferents donen lloc a senyals transformats diferents i viceversa**.

Ara bé, **un senyal transformat $X(z)$ és la seva expressió algebraica més la seva ROC**. Per tant, les transformades z de dos senyals diferents $x_1[n]$ i $x_2[n]$ són sempre dos senyals transformats diferents, però és perfectament possible que les expressions algebraiques de $X_1(z)$ i $X_2(z)$ siguin exactament iguals ($X_1(z) = X_2(z) = X(z)$) i que l'única cosa en què es diferenciïn sigui en les ROC corresponents ($R_1 \neq R_2$):

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad R_1 \tag{139}$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad R_2 \tag{140}$$

Per tant, **una mateixa expressió algebraica de $X(z)$ pot donar lloc a diferents senyals temporals en funció de quina en sigui la ROC**.

Amb tot, la veritat és que **el diagrama de pols i zeros de $X(z)$ ja indica com podria ser la ROC de $X(z)$ i, per tant, quins senyals $x[n]$ podrien ser-ne la transformada inversa**. Així, si agafem de la figura 16 el diagrama de pols i zeros del senyal $X(z)$ expressat a (138) i ens preguntem quin podria ser el senyal temporal $x[n]$ resultant de la seva transformada z inversa, ens adonarem que:

1) El senyal $x[n]$ no podria ser de longitud finita, ja que la ROC de la seva $X(z)$ seria tot el pla z i això és impossible en aquest cas, ja que $X(z)$ té dos pols i, com sabem, no és possible que un pol sigui inclòs a l'interior d'una ROC.

2) El senyal $x[n]$ podria ser infinit orientat a la dreta, ja que la ROC de $X(z)$ podria ser l'exterior de la circumferència $|z| = 1/3$, tal com mostra la figura 17a:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \qquad |z| > 1/3 \qquad (141)$$

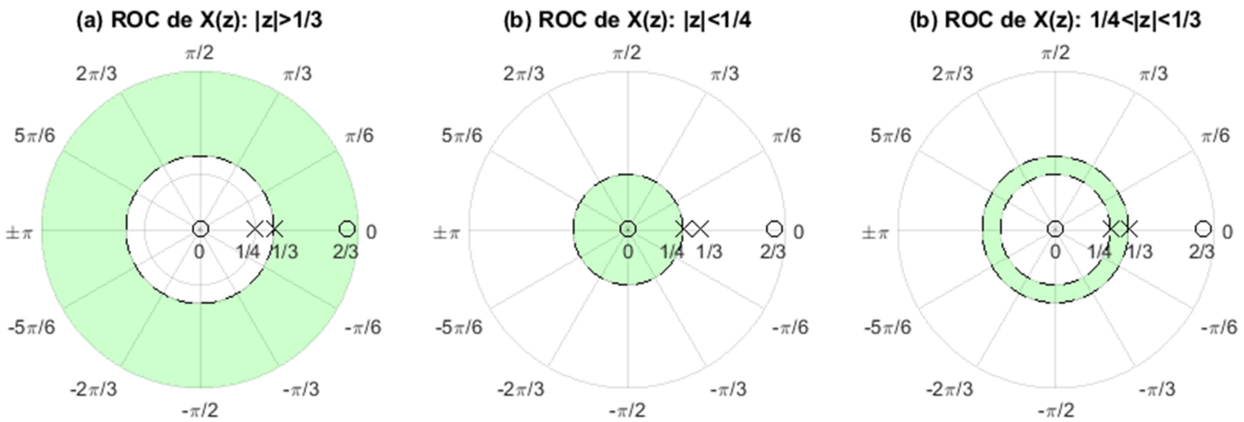
3) El senyal $x[n]$ podria ser infinit orientat a l'esquerra, ja que la ROC de $X(z)$ podria ser l'interior de la circumferència $|z| = 1/4$, tal com mostra la figura 17b:

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \qquad |z| < 1/4 \qquad (142)$$

4) El senyal $x[n]$ podria ser infinit orientat a banda i banda, ja que la ROC de $X(z)$ podria ser l'anell comprès entre les circumferències $|z| = 1/4$ i $|z| = 1/3$, tal com mostra la figura 17c:

$$x_3[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \qquad 1/4 < |z| < 1/3 \qquad (143)$$

Figura 17. Possibles ROC d'una $X(z)$ amb dos pols a z = 1/3 i z = 1/4



(a) $x[n]$ és infinita orientada a la dreta. (b) $x[n]$ és infinita orientada a l'esquerra. (c) $x[n]$ és infinita orientada a banda i banda.

Aquestes consideracions, fetes a partir d'un exemple concret, serveixen per il·lustrar aquests postulats generals:

Propietats generals de la ROC d'un senyal $X(z)$ racional

Suposem que $x[n]$ és un senyal digital la transformada z del qual, $X(z)$, és un senyal racional.

Atès que, per definició, una ROC no pot contenir cap pol, **la ROC de $X(z)$ està limitada per pols de $X(z)$ o comprèn tot el pla** z (amb les possibles excepcions dels valors $z = 0$ i $z \to \infty$), per tant:

- Si $x[n]$ és un senyal **finit**, $X(z)$ no té pols i la seva ROC és **tot el pla** z (amb les possibles excepcions dels valors $z = 0$ i $z \to \infty$).

- Si $x[n]$ és un senyal **infinit orientat a la dreta, la ROC de $X(z)$ és l'exterior de la circumferència de radi igual al mòdul del pol de $X(z)$ de mòdul més gran** (un pol de $X(z)$ el mòdul del qual és més gran o igual que el mòdul de qualsevol altre pol); o sigui, un pol de $X(z)$ amb una distància a l'origen de coordenades del pla z més gran o igual que la de qualsevol altre pol.

- Si $x[n]$ és un senyal **infinit orientat a l'esquerra, la ROC de $X(z)$ és l'interior de la circumferència de radi igual al mòdul del pol de $X(z)$ de mòdul més petit** (un pol de $X(z)$ el mòdul del qual és més petit o igual que el mòdul de qualsevol altre pol); o sigui, un pol de $X(z)$ amb una distància a l'origen de coordenades del pla z més petita o igual que la de qualsevol altre pol.

- Si $x[n]$ és un senyal **infinit orientat a banda i banda, la ROC de $X(z)$ és l'anell comprès entre dues circumferències de radis respectivament iguals als mòduls de dos pols consecutius de $X(z)$** (dos pols de $X(z)$ amb uns mòduls que són simultàniament més grans o simultàniament més petits que el mòdul de qualsevol altre pol); o sigui, dos pols de $X(z)$ en els quals cap dels pols té un mòdul que sigui, alhora, més gran que el d'un d'aquests i més petit que el de l'altre.

4.3. Estratègia de càlcul de la transformada *z* inversa

Un cop hem arribat a aquest punt, ja podem concretar el procediment de càlcul de la transformada z inversa, de manera que ens eviti haver de resoldre la integral de l'equació de síntesi de la transformada z. Així doncs, per calcular la transformada inversa d'una $X(z)$ determinada, seguirem aquesta estratègia, la qual és aplicable, en general, al càlcul de qualsevol transformada z inversa de qualsevol $X(z)$ racional (quocient de polinomis):

Estratègia de càlcul de la transformada *z* inversa d'una *X*(*z*) racional

1) S'obté l'**expressió factoritzada simplificada de *X*(*z*)**:

$$X(z) = G\frac{\prod_{i=1}^{M}\left(1-c_i z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(1-p_i z^{-1}\right)} = G\frac{\left(1-c_1 z^{-1}\right)\cdots\left(1-c_M z^{-1}\right)}{\left(1-p_1 z^{-1}\right)\cdots\left(1-p_N z^{-1}\right)} \qquad (144)$$

2) Es descompon aquesta expressió en ***L*** **fraccions simples**:

$$X(z) = \sum_{i=0}^{N} X_i(z) = X_1(z) + X_2(z) + \ \dots\ + X_L(z) \qquad (145)$$

3) Es determina **una ROC per a cada fracció simple per separat, de manera que la intersecció de totes no sigui el conjunt buit**:

$$\left.\begin{array}{ll} X_1(z), & R_1 \\ X_2(z), & R_2 \\ \vdots & \\ X_L(z), & R_L \end{array}\right\} \Rightarrow \ R = R_1 \cap R_2 \cap \ \dots\ \cap R_L \neq \varnothing \qquad (146)$$

en què, per la propietat de linealitat, ***R*** **és la ROC de *X*(*z*)**.

4) Es calcula la **transformada *z* inversa de cada fracció simple per separat**:

$$\begin{array}{c} x_1[n] = Z^{-1}\{X_1(z), R_1\} \\ x_2[n] = Z^{-1}\{X_2(z), R_2\} \\ \vdots \\ x_L[n] = Z^{-1}\{X_L(z), R_L\} \end{array} \qquad (147)$$

5) Finalment, per la propietat de linealitat, **la transformada *z* inversa de *X*(*z*) és el resultat de la suma de les transformades inverses de cada fracció simple**:

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z), R\} = x_1[n] + x_2[n] + \ \dots\ + x_L[n] \qquad (148)$$

La clau d'aquesta estratègia és realment en el pas 2, ja que, com que *X*(*z*) és un senyal racional de la forma expressada a (144), **les fraccions simples $X_1(z)$, $X_2(z)$, etc. són sempre transformades *z* conegudes de senyals bàsics**, identificables, per tant, a la taula 1 que hi ha en el subapartat 2.7 d'aquest mòdul. Gràcies a això, **no cal calcular les transformades inverses del pas 4**, ja que són transformades conegudes de senyals coneguts.

L'únic punt crític es troba en el pas 3, a causa de la **naturalesa de les ROC de les fraccions simples de determinar la forma de $x[n]$**. Tant és així que, si no fos possible definir R_1, R_2, etc. de manera que la seva intersecció no sigui un conjunt buit, aleshores $x[n]$ no existiria (no hi hauria cap senyal temporal $x[n]$ en què la transformada *z* fos $X(z)$).

Llavors, respecte del pas 2, és a dir, respecte de la descomposició de $X(z)$ en fraccions simples, a continuació assumirem l'escenari més senzill possible, en el qual es produeixen aquestes dues circumstàncies:

- L'ordre del polinomi del denominador de $X(z)$ és més gran que l'ordre del polinomi del numerador; és a dir, que $N > M$.
- Tots els pols de $X(z)$ són de multiplicitat 1; és a dir, que $p_i \neq p_j, \forall\, i \neq j$.

Si no es compleixen aquestes dues circumstàncies, el càlcul de la descomposició de $X(z)$ en fraccions simples és més laboriós, però l'estratègia general que plantegem aquí no queda afectada.

Vegeu també

Al final d'aquest apartat, en el subapartat 4.3.1, es detalla el procediment de descomposició en fraccions simples més general possible (és a dir, sense assumir aquestes dues restriccions) i s'explica com és possible resoldre tot el càlcul de cop mitjançant la funció «residuez» de MATLAB.

Així doncs, **si $N > M$ i si $p_i \neq p_j, \forall\, i \neq j$, succeeix que hi ha tantes fraccions simples com pols té $X(z)$ (és a dir, que $L = N$)**, i cadascuna d'elles és de la manera següent:

$$X_i(z) = \frac{A_i}{1 - p_i z^{-1}}, \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, L\} \tag{149}$$

en què $X_i(z)$ és la fracció simple ***i***-èsima en què es descompon $X(z)$ i en què la constant A_i és el resultat d'avaluar a $z = p_i$ el producte de $X(z)$ pel factor $\left(1 - p_i z^{-1}\right)$:

$$A_i = \left[\left(1 - p_i z^{-1}\right) X(z)\right]_{z=p_i}, \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, L\} \tag{150}$$

Per tant, en aplicar (149) a (145), la descomposició en fraccions simples de $X(z)$ és:

$$X(z) = \sum_{i=0}^{N} \frac{A_i}{1 - p_i z^{-1}} = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \ldots + \frac{A_L}{1 - p_L z^{-1}} \tag{151}$$

Finalment, la forma de la transformada *z* inversa de cadascuna de les fraccions simples de (151) dependrà de com es defineixi la seva ROC. Si atenem a les transformades típiques de la taula 1 (subapartat 2.7 d'aquest mòdul) i a les propietats de la ROC de senyals racionals (al final del subapartat 4.2, en aquest apartat), ens adonem que:

Si R_i **és** $|z| > |p_i|$ (o sigui, l'exterior de la circumferència de radi $|p_i|$), aleshores:

$$x_i[n] = Z^{-1}\{X_i(z), R_i\} = A_i p_i^n u[n] \qquad (152)$$

Si R_i **és** $|z| < |p_i|$ (o sigui, l'interior de la circumferència de radi $|p_i|$), aleshores:

$$x_i[n] = Z^{-1}\{X_i(z), R_i\} = -A_i p_i^n u[-n-1] \qquad (153)$$

Per tant, si tornem ara a l'equació (137) i recuperem el senyal $X(z)$ de l'exemple que hem fet servir en els dos apartats anteriors, veurem que podem descompondre-la en dues fraccions simples, d'acord amb el que s'indica a (151):

$$X(z) = \frac{A_1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad (154)$$

A continuació, utilitzant l'expressió de $X(z)$ de l'equació (137), calculem els valors de A_1 i A_2 segons (150):

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[\left(1-\tfrac{1}{3}z^{-1}\right)\tfrac{1}{2}\frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right]_{z=\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right]_{z=\frac{1}{3}} = \\ &\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{2}{3}3}{1-\frac{1}{4}3}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{-1}{\frac{1}{4}}\right) = -2 \end{aligned} \qquad (155)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \left[\left(1-\tfrac{1}{4}z^{-1}\right)\tfrac{1}{2}\frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right]_{z=\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right]_{z=\frac{1}{4}} = \\ &\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{2}{3}4}{1-\frac{1}{3}4}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}}\right) = \tfrac{5}{2} \end{aligned} \qquad (156)$$

Per tant:

$$X(z) = \underbrace{-2\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}_{X_1(z)} + \underbrace{\frac{5}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}_{X_2(z)} \qquad (157)$$

Si R_1, R_2 i R són les ROC de $X_1(z)$, $X_2(z)$ i $X(z)$, respectivament, veiem que hi ha tres possibilitats a l'hora de garantir que $R = R_1 \cap R_2 \neq \varnothing$ (és a dir, perquè existeixi la transformada z inversa de $X(z)$), les quals corresponen, respectivament, als tres escenaris plantejats en les equacions (141), (142) i (143).

En primer lloc, podem determinar que R_1 sigui $|z| > 1/3$ i R_2 sigui $|z| > 1/4$; en aquest cas, la ROC de $X(z)$ seria la que recull la figura 17a:

$$R = R_1 \cap R_2 = \left\{|z| > \frac{1}{3}\right\} \cap \left\{|z| > \frac{1}{4}\right\} = \left\{|z| > \frac{1}{3}\right\} \qquad (158)$$

Així, les transformades inverses de $X_1(z)$ i $X_2(z)$ serien, d'acord amb (152):

$$x_1[n] = Z^{-1}\left\{-2\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{3}\right\} = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \qquad (159)$$

$$x_2[n] = Z^{-1}\left\{\frac{5}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{4}\right\} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \qquad (160)$$

Per tant, d'acord amb (148), la transformada inversa de $X(z)$ seria un senyal infinit orientat a la dreta:

$$\boxed{x[n] = Z^{-1}\left\{X(z), |z| > \frac{1}{3}\right\} = \left(\frac{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)u[n]} \qquad (161)$$

En segon lloc, podem determinar que R_1 sigui $|z| < 1/3$ i R_2 sigui $|z| < 1/4$; en aquest cas, la ROC de $X(z)$ seria la que recull la figura 17b:

$$R = R_1 \cap R_2 = \left\{|z| < \frac{1}{3}\right\} \cap \left\{|z| < \frac{1}{4}\right\} = \left\{|z| < \frac{1}{4}\right\} \qquad (162)$$

Així, les transformades inverses de $X_1(z)$ i $X_2(z)$ serien, d'acord amb (153):

$$x_1[n] = Z^{-1}\left\{-2\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{3}\right\} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \qquad (163)$$

$$x_2[n] = Z^{-1}\left\{\frac{5}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{4}\right\} = -\frac{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] \qquad (164)$$

Per tant, la transformada inversa de $X(z)$ seria un senyal infinit orientat a l'esquerra:

$$\boxed{x[n] = Z^{-1}\left\{X(z), \quad |z| < \frac{1}{4}\right\} = \left(2\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u[n]} \qquad (165)$$

I, en tercer lloc, podem determinar que R_1 sigui $|z| < 1/3$ i R_2 sigui $|z| > 1/4$; en aquest cas, la ROC de $X(z)$ seria la que recull la figura 17c:

$$R = R_1 \cap R_2 = \left\{|z| < \frac{1}{3}\right\} \cap \left\{|z| > \frac{1}{4}\right\} = \left\{\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}\right\} \qquad (166)$$

Així, les transformades inverses de $X_1(z)$ i $X_2(z)$ serien, segons (153) i (152), respectivament:

$$x_1[n] = Z^{-1}\left\{-2\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{3}\right\} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \qquad (167)$$

$$x_2[n] = Z^{-1}\left\{\frac{5}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{4}\right\} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \qquad (168)$$

Per tant, la transformada inversa de $X(z)$ seria un senyal infinit orientat a banda i banda:

$$\boxed{x[n] = Z^{-1}\left\{X(z), \quad \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}\right\} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]} \qquad (169)$$

4.3.1. Generalització de la descomposició en fraccions simples

La forma general de l'equació (145), sense assumir cap restricció respecte dels valors de M i N, ni respecte de la multiplicitat dels pols de $X(z)$, és la següent:

$$X(z) = \sum_{i=0}^{M-N} d_i z^{-i} + \sum_{i \notin S} \frac{A_i}{1-p_i z^{-1}} + \sum_{j=s_1}^{s_K} \sum_{i=1}^{m_j} \frac{C_i}{\left(1-p_j z^{-1}\right)^i} \qquad (170)$$

El primer terme de (170) és **el quocient de la divisió entre els polinomis $B(z)$ i $A(z)$** (el numerador i el denominador de $X(z)$). Es tracta d'un polinomi a z format per $M - N + 1$ monomis de coeficients d_i ($\forall\ i \in \{0, \ldots, M\}$):

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = D(z) + \frac{R(z)}{A(z)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D(z) = \sum_{i=0}^{M-N} d_i z^{-i}} \qquad (171)$$

Aquest polinomi $D(z)$ **només existeix si $M \geq N$, és a dir, si l'ordre del denominador de $X(z)$ no és superior al del numerador**. En aquest cas, es calcula la divisió entre $B(z)$ i $A(z)$ fins a obtenir una resta $R(z)$ que sigui d'ordre inferior a $A(z)$, la qual cosa garanteix que a $R(z)/A(z)$ es complirà sempre la restricció que l'ordre del denominador sigui superior al del numerador. Així, doncs, $D(z)$ és el quocient resultant d'aquesta divisió i els coeficients d_i del primer terme de (170) són els coeficients del polinomi $D(z)$, l'ordre del qual és $M - N + 1$.

El segon terme de (170) conté **les fraccions simples corresponents als pols de $X(z)$ de multiplicitat 1**. S'observa que els índexs d'aquest sumatori estan restringits a $i \notin S$. El conjunt S conté els índexs (s_1, …, s_K) dels K pols de $X(z)$

amb una multiplicitat més gran que 1 (la multiplicitat indica quants pols de $X(z)$ coincideixen per a un mateix valor de z). Així, com que aquest sumatori només indexa els pols de $X(z)$ els índexs dels quals no pertanyen a S, cadascuna d'aquestes fraccions simples es correspon amb un pol de $X(z)$ de multiplicitat 1. A més, els coeficients A_i es calculen sense més ni més, segons (150).

En general, el valor de K sempre estarà comprès entre $K = 0$ (tots pols de $X(z)$ són de multiplicitat 1) i $K = N$ (tots els pols de $X(z)$ són de multiplicitat més gran que 1), de manera que el segon terme de (170) sempre contindrà $N - K$ fraccions simples.

I, finalment, el tercer terme de (170) conté **les fraccions simples corresponents als pols de $X(z)$, la multiplicitat dels quals és més gran que 1**. El sumatori a j recorre els índexs d'aquests pols (o sigui, els índexs $s_1, \ldots, s_K$ continguts en el conjunt S) i, per a cada pol p_j, el sumatori a i incorpora m_j fraccions simples, en quèm_j **és la multiplicitat del pol** p_j ($m_j > 1, \forall\, j \in S$). S'observa que l'exponent al qual està elevat el denominador de les fraccions simples associades a cada pol p_j es va incrementant des d'1 fins a m_j:

$$\sum_{i=1}^{m_j} \frac{C_i}{\left(1 - p_j z^{-1}\right)^i} = \frac{C_1}{1 - p_j z^{-1}} + \frac{C_2}{\left(1 - p_j z^{-1}\right)^2} + \cdots + \frac{C_{m_j}}{\left(1 - p_j z^{-1}\right)^{m_j}} \qquad (172)$$

A més, els coeficients C_i corresponents a les m_j fraccions simples associades a cada pol p_j es calculen d'acord amb aquesta expressió:

$$\boxed{C_i = \frac{1}{(m_j - i)!(-p_j)^{m_j - i}} \left[\frac{d^{m_j - i}}{d\omega^{m_j - i}} \left((1 - p_j z^{-1})^{m_j} X(\omega^{-1}) \right) \right]_{\omega = p_j^{-1}}} \qquad (173)$$

És a dir, per calcular el coeficient C_i del pol p_j: s'avalua $X\left(z = \omega^{-1}\right)$, es multiplica per $\left(1 - p_j z^{-1}\right)^{m_j}$, es deriva $m_j - i$ vegades respecte de ω, es calcula el valor del senyal resultant per $\omega = p_j^{-1}$ i es divideix entre $\left(m_j - i\right)!\left(-p_j\right)^{m_j - i}$.

Així doncs, el tercer terme de (170) inclou un total de $\prod_{j=s_1}^{s_K} m_j$ fraccions simples.

Llavors, un cop calculats els coeficients d_i, A_i i C_i de l'equació (170), s'ha completat el pas 2 de l'estratègia de càlcul de la transformada z inversa de $X(z)$. La resta dels passos (del 3 al 5) es porten a terme exactament igual que en el cas simple (en què es compleixen les restriccions que $M > N$ i que tots els pols són de multiplicitat 1):

En primer lloc, la transformada *z* inversa de $D(z)$ no presenta cap dificultat, ja que es tracta d'un polinomi finit com el que s'especifica a (129). Així, en aplicar (128):

$$d[n] = Z^{-1}\{D(z)\} = Z^{-1}\left\{\sum_{i=0}^{M-N} d_i z^{-i}\right\} = \sum_{i=0}^{M-N} d_i \delta[n-i] \qquad (174)$$

En segon lloc, la transformada *z* inversa de cada fracció simple del segon terme de (170) es calcula segons el que estableixen (152) i (153).

I, en tercer lloc, la transformada *z* inversa de cada fracció simple del tercer terme de (170) es calcula de manera anàloga al que estableixen (152) i (153), és a dir, a partir de cada fracció simple de la forma:

$$X_i(z) = \frac{C_i}{\left(1 - p_j z^{-1}\right)^i} \qquad (175)$$

a la qual s'associa una ROC R_i i la seva transformada *z* inversa s'obté segons el criteri següent:

Si $\boldsymbol{R_i}$ **és** $|z| > |p_i|$ (o sigui, l'exterior de la circumferència de radi $|p_i|$), aleshores:

$$x_i[n] = Z^{-1}\{X_i(z), R_i\} = C_i\binom{n+i}{i}p_j^n u[n] \qquad (176)$$

Si $\boldsymbol{R_i}$ **és** $|z| < |p_i|$ (o sigui, l'interior de la circumferència de radi $|p_i|$), aleshores:

$$x_i[n] = Z^{-1}\{X_i(z), R_i\} = -C_i\binom{n+i}{i}p_j^n u[-n-1] \qquad (177)$$

I fins aquí arriba l'explicació completa de la generalització del procés de descomposició en fraccions simples de $X(z)$. Un cop sabem tot això, obtenir la transformada *z* inversa de qualsevol senyal racional $X(z)$ consisteix a aplicar l'estratègia que hem descrit i fer els càlculs que corresponguin. Certament, fer tots aquests càlculs a mà pot ser molt laboriós –sobretot els relacionats amb els coeficients de les fraccions simples que es calculen en el pas 2.

En aquest sentit, té molta utilitat la **funció `residuez` de MATLAB**, la qual, a partir dels coeficients b_i i a_i dels polinomis del numerador i denominador de $X(z)$, respectivament, calcula d'un sol cop:

- Els valors dels pols de $X(z)$: p_i.
- Els valors dels coeficients d_i, A_i i C_i de l'equació (170).

És a dir, la funció `residuez` implementa en un únic comandament els passos 1 (factorització de $X(z)$) i 2 (descomposició en fraccions simples) de la nostra estratègia de càlcul de la transformada *z* inversa. Després d'aplicar aquesta funció, només cal assignar la ROC de cada fracció simple (pas 3), obtenir la transformada *z* inversa de cada fracció simple (pas 4) i construir $x[n]$ sumant els senyals individuals obtinguts en el pas anterior (pas 5).

A continuació plantegem un petit exercici com a exemple per il·lustrar tant el cas general de descomposició en fraccions simples de $X(z)$ com l'ús de la funció `residuez` per facilitar el càlcul de la transformada *z* inversa (en tot cas, es recomana consultar l'apartat `help` de la funció per a una explicació més detallada).

Exemple 2

A partir del senyal:

$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}+z^{-3}+\frac{1}{16}z^{-4}-\frac{1}{8}z^{-5}}{1-z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}} \qquad (178)$$

Sabem que $X(z)=Z\{x[n]\}$ i que $x[n]=0, \quad \forall\ n<0$. Es demana obtenir $x[n]$.

Solució

Com que $x[n]=0, \forall\ n<0$, queda clar que $x[n]$ no pot ser ni un senyal infinit orientat a l'esquerra ni un senyal infinit orientat a banda i banda. Així doncs, pot ser un senyal finit o un senyal infinit orientat a la dreta. Aprofitarem aquesta informació quan calgui en el procés de càlcul de la transformada *z* inversa de $X(z)$, ja que:

$$x[n]=Z^{-1}\{X(z),\text{ROC}\} \qquad (179)$$

Llavors, com que $X(z)$ és un senyal racional amb la forma d'un quocient de polinomis, el càlcul de (179) consisteix a aplicar l'estratègia descrita en el subapartat 4.3 d'aquest apartat. A més, s'observa que el numerador de $X(z)$ és d'ordre $M=5$, mentre que el numerador és d'ordre $N=3$. Per tant, caldrà aplicar la versió general de la descomposició en fraccions simples de $X(z)$ (no sabem encara si hi haurà algun pol de multiplicitat més gran que 1, però sí que $M \geq N$).

Així doncs, apliquem la funció `residuez` per factoritzar $X(z)$ i descompondre-la en fraccions simples:

```
>> B = [1 -2 -1/2 1 1/16 -1/8]; % Vector fila: numerador de X(z)
>> A = [1 -1 -1 1]; % Vector fila: denominador de X(z)
>> [AC,p,d] = residuez(B,A)
AC =
    0.0469
   -0.2813
    0.4219
```

```
p =
    1.0000
    1.0000
   -1.0000
d =
    0.8125   -0.0625   -0.1250
```

S'observa el següent:

- Els valors dels pols de $X(z)$ són els indicats en el vector `p`. Per tant, hi ha un pol amb multiplicitat 1 a $z = -1$ i un pol amb multiplicitat 2 (o sigui, dos pols) a $z = 1$.
- Els valors dels coeficients d_i són els indicats en el vector `d`. Per tant, $d_1 = 0.8125 = 13/16$, $d_2 = -0.0625 = -1/16$ i $d_3 = -0.125 = -1/8$.
- Els valors dels coeficients A_i i C_i són els indicats en el vector `AC`, en correspondència amb l'ordre dels pols a `p`. Per tant, $C_1 = 0.0469 = 3/64$, $C_2 = -0.2813 = -9/32$ i $A_1 = 0.4219 = 27/64$.

Així doncs, la descomposició en fraccions simples de $X(z)$ és la següent:

$$X(z) = \frac{13}{16} - \frac{1}{16}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{27}{64}\frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{3}{64}\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{9}{32}\frac{1}{(1-z^{-1})^2} \tag{180}$$

I ara és el moment d'assignar la ROC de cadascuna de les tres fraccions simples obtingudes. Com hem comentat al principi, sabem que $x[n]$ és un senyal finit o un senyal infinit orientat a la dreta, de manera que, atès que $X(z)$ presenta tres pols en llocs diferents a $z = 0$ o $z \to \infty$, ja veiem que $x[n]$ no pot ser finit, ja que això implicaria que la ROC de $X(z)$ abracés tot el pla z, cosa impossible amb aquests tres pols.

Per tant, $x[n]$ **és un senyal infinit orientat a la dreta i la ROC de $X(z)$ és l'exterior de la circumferència de radi igual al pol de $X(z)$ de mòdul més gran; o sigui, la ROC de $X(z)$ és $|z| > 1$.** D'aquesta manera, les ROC de les tres fraccions simples en les quals està descomposta $X(z)$ seran totes $|z| > 1$:

$$Z^{-1}\left\{\frac{27}{64}\frac{1}{1+z^{-1}}, |z| > 1\right\} = \frac{27}{64}(-1)^n u[n] \tag{181}$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{3}{64}\frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1\right\} = \frac{3}{64}u[n] \tag{182}$$

$$Z^{-1}\left\{-\frac{9}{32}\frac{1}{(1-z^{-1})^2}, |z| > 1\right\} = -\frac{9}{32}(n+1)u[n] \tag{183}$$

Així, finalment, completem la transformada z inversa de $X(z)$ i obtenim $x[n]$:

$$\begin{gathered} x[n] = Z^{-1}\{X(z), |z| > 1\} = \\ \frac{1}{16}(13\delta[n] - \delta[n-1] - 2\delta[n-2]) + \frac{1}{32}\left(\frac{3}{2} + \frac{27}{2}(-1)^n - 9(n+1)\right)u[n] \end{gathered} \tag{184}$$

5. Caracterització de sistemes LIT digitals mitjançant la transformada *z*

Un cop presentades totes les eines de càlcul i de representació gràfica necessàries per a la caracterització de senyals analògics en el domini transformat *z*, en aquest últim apartat del mòdul estudiarem com cal aplicar totes aquestes eines per caracteritzar els sistemes LIT digitals en aquest domini.

Com sabem, tot sistema LIT és completament definit en la seva resposta impulsional. Així, la caracterització d'un sistema LIT digital en el domini *z* estarà sempre basada en la funció de transferència del sistema, la qual definirem en el subapartat 5.1 com la transformada *z* de la seva resposta impulsional.

A partir d'aquí, la funció de transferència servirà per calcular, en el subapartat 5.2, la sortida del sistema davant de qualsevol entrada, conèixer les propietats del sistema i caracteritzar els sistemes globals resultants de l'associació de diversos sistemes LIT digitals.

Finalment, en el subapartat 5.3, s'estudia la caracterització en el domini transformat *z* dels sistemes LIT digitals regits per una relació entrada-sortida amb la forma d'equació en diferències lineals de coeficients constants, la seva relació amb la funció de transferència del sistema i, sobretot, com aquesta relació serveix per obtenir la resposta impulsional del sistema a partir de la seva relació entrada-sortida.

5.1. Funció de transferència d'un sistema LIT digital

S correspon a un sistema LIT digital; $x[n]$, al seu senyal d'entrada; $y[n]$, al seu senyal de sortida, i $h[n]$, a la seva resposta impulsional. Com sabem, aquests tres senyals estan relacionats mitjançant l'operació convolució:

$$y[n] = x[n] * h[n] \qquad (185)$$

Si apliquem la transformada *z* a cada costat de la igualtat en l'equació (185), obtindrem el següent:

$$Z\{y[n]\} = Z\{x[n] * h[n]\} \qquad (186)$$

Per la propietat de la convolució temporal de la transformada *z* definida en l'equació (121), de (186) es desprèn que:

$$\underbrace{Z\{y[n]\}}_{Y(z)} = \underbrace{Z\{x[n]\}}_{X(z)}\underbrace{Z\{h[n]\}}_{H(z)} \qquad (187)$$

$$\boxed{Y(z) = X(z)H(z)} \qquad (188)$$

en què $X(z)$, $Y(z)$ i $H(z)$ són les transformades z de, respectivament, $x[n]$, $y[n]$ i $h[n]$.

La transformada *z* de la resposta impulsional *h*[*n*] d'un sistema LIT digital *S* és l'anomenada funció de transferència del sistema *S* i se simbolitza com a *H*(*z*):

$$\boxed{H(z) \triangleq Z\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}} \qquad (189)$$

Com que $h[n]$ caracteritza totalment S i la transformada z és una operació reversible, tota la informació continguda en $h[n]$ també és en $H(z)$, de manera que **la funció de transferència d'un sistema LIT digital és un senyal que caracteritza completament el sistema**, de la mateixa manera que ho fa la seva resposta impulsional.

S'observa que de l'equació (188) ja es poden extreure algunes conclusions interessants. D'entrada, veiem que el que en el domini temporal és una operació més o menys complicada (la convolució entre dos senyals), en el domini transformat z es converteix en una operació molt més simple (un producte de dos senyals).

I d'això s'infereix directament que, a diferència del que passa en el domini temporal, **$H(z)$ es pot obtenir molt fàcilment a partir de $X(z)$ i $Y(z)$:**

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}} \qquad (190)$$

Així, si anomenem R_X, R_y i R_H les ROC de, respectivament, $X(z)$, $Y(z)$ i $H(z)$:

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z), \quad R_X \qquad (191)$$

$$y[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} Y(z), \quad R_Y \qquad (192)$$

$$h[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} H(z), \quad R_H \qquad (193)$$

sabem que $R_X \cap R_H \subseteq R_Y$, com ja hem vist en la demostració 6 del subapartat 3.5 d'aquest mòdul. Per tant, $Y(z)$ **existirà ($R_Y \neq \varnothing$) sempre que hi hagi** $X(z)$ **i** $H(z)$ **($R_X \neq \varnothing$, $R_H \neq \varnothing$) i que la intersecció de les seves ROC no sigui buida** ($R_X \cap R_H \neq \varnothing$).

Una conseqüència molt important d'això és que, **en conèixer tan sols una parella senyal d'entrada - senyal de sortida d'un sistema LIT, ja som capaços d'obtenir-ne la resposta impulsional**: calculem les transformades *z* dels dos senyals, les dividim per obtenir la funció de transferència del sistema i n'obtenim la resposta impulsional com el resultat de la transformada *z* inversa de la seva funció de transferència. Això és una cosa que no podem fer treballant en el domini del temps, ja que la convolució no té operació inversa; però, en el domini transformat *z* sí que és possible, ja que el producte de dos senyals pot invertir-se fàcilment calculant-ne la divisió.

Per acabar aquest apartat, es proposa un petit exercici que il·lustra aquesta darrera qüestió.

Exemple 3

Volem obtenir la resposta impulsional d'un sistema LIT digital *S* del qual només sabem que:

$$y[n] = T_S\{x[n] = u[n]\} = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n] \tag{194}$$

Solució

Com que *S* és un sistema LIT, en traiem la resposta impulsional mitjançant la seva funció de transferència:

$$h[n] = Z^{-1}\{H(z),\quad R_H\} = Z^{-1}\left\{\frac{Y(z)}{X(z)},\quad R_H\right\} \tag{195}$$

A partir de la taula 1 sabem que:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = Z\{u[n]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{196}$$

$$Y(z) = Z\{y[n]\} = Z\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]\right\} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}}{1 - \sqrt{2}\,z^{-1} + z^{-2}} \tag{197}$$

en què R_X i R_Y, és a dir, les ROC de $X(s)$ i $Y(s)$ són iguals a $|z| > 1$.

Llavors, com que $R_Y \neq \varnothing$ i que $R_X \cap R_H \subseteq R_Y$, ja sabem que $R_H \neq \varnothing$ i que, per tant, $H(z)$ existeix. Ara, aplicant l'equació (190), obtenim $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1}}{1-\sqrt{2}\,z^{-1}+z^{-2}}}{\dfrac{1}{1-z^{-1}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-2}}{1 - \sqrt{2}\,z^{-1} + z^{-2}} \tag{198}$$

Ara descomponem $H(z)$ en fraccions simples:

```
>> B = [0 sqrt(2)/2 -sqrt(2)/2]; % Vector fila: numerador de H(z)
>> A = [1 -sqrt(2)/2 1]; % Vector fila: denominador de H(z)
>> [AC,p,d] = residuez(B,A)
AC =
    0.3536 - 0.2443i
    0.3536 + 0.2443i
p =
    0.3536 + 0.9354i
    0.3536 - 0.9354i
d =
    -0.7071
>> [abs(AC) angle(AC)]
ans =
    0.4298   -0.6047
    0.4298    0.6047
>> [abs(p) angle(p)]
ans =
    1.0000    1.2094
    1.0000   -1.2094
```

S'observa el següent:

- Pols de $H(z)$: $p_1 \cong e^{j1.21}$, $p_2 \cong e^{-j1.21}$.
- Coeficients d_i: $d_1 = -0.7071 \cong -\sqrt{2}/2$.
- Coeficients A_i y C_i: $A_1 \cong 0.43e^{-j0.605}$, $A_2 \cong 0.43e^{j0.605}$.

Així doncs, la descomposició en fraccions simples de $H(z)$ és la següent:

$$H(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{0.43e^{-j0.605}}{1 - e^{j1.21}z^{-1}} + \frac{0.43e^{j0.605}}{1 - e^{-j1.21}z^{-1}} \qquad (199)$$

Aleshores, com que R_X i R_Y són iguals a $|z| > 1$ i que $R_X \cap R_H \subseteq R_Y$, veiem que, com a mínim, ha de succeir que R_H inclogui $|z| > 1$. Atesa la descomposició obtinguda a (199), s'observa que R_H només pot ser $|z| > 1$, ja que els seus dos pols són de mòdul 1 ($|p_1| = |p_2| = 1$).

Ja sabem, per tant, que $h[n]$ és un senyal infinit orientat a la dreta, ja que la ROC de $H(s)$ és l'exterior de la circumferència $|z| = 1$.

Finalment, ja podem tornar a (195) i obtenir $h[n]$:

$$\begin{aligned} &h[n] = Z^{-1}\{H(z), \quad |z| > 1\} = \\ &\frac{\sqrt{2}}{2}\delta[n] + 0.43e^{-j0.605}e^{j1.21n}u[n] + 0.43e^{j0.605}e^{j-1.21n}u[n] = \\ &\frac{\sqrt{2}}{2}\delta[n] + 0.43\left(e^{-j(0.605-1.21n)} + e^{j(0.605-1.21n)}\right)u[n] = \\ &\frac{\sqrt{2}}{2}\delta[n] + 0.86\cos(0.605 - 1.21n)u[n] \end{aligned} \qquad (200)$$

5.2. Caracterització de sistemes LIT digitals mitjançant la seva funció de transferència

Com ja hem vist en l'apartat anterior, la funció de transferència d'un sistema LIT digital permet caracteritzar del tot el sistema. A continuació, procedirem sistemàticament i veurem com cal utilitzar la funció de transferència per:

- Calcular la sortida d'un sistema LIT digital davant de qualsevol senyal d'entrada, en el subapartat 5.2.1.
- Conèixer les propietats d'un sistema LIT digital, en el subapartat 5.2.2.

- Caracteritzar el sistema LIT digital global resultant de l'associació de sistemes LIT digitals, en el subapartat 5.2.3.

5.2.1. Càlcul de la sortida en sistemes LIT digitals

Per l'equació (188), sabem que la transformada *z* del senyal de sortida de tot sistema LIT digital és igual al resultat del producte de la transformada *z* del senyal d'entrada per la funció de transferència del sistema.

D'aquesta manera, ja veiem com calcular la sortida en sistemes LIT digitals mitjançant l'ús de la seva funció de transferència: calculant la transformada *z* del senyal d'entrada, multiplicant-la per la funció de transferència per obtenir la transformada *z* del senyal de sortida i calculant la transformada *z* inversa d'aquesta per obtenir el senyal de sortida en el domini temporal.

A continuació es proposa un exercici per il·lustrar aquest procediment.

Exemple 4

De dos sistemes LIT digitals S_1 i S_2 coneixem, respectivament, la seva relació entrada-sortida i la seva funció de transferència:

$$y_1[n] = T_{S_1}\{x_1[n]\} = \frac{1}{2}x_1[n] + \frac{1}{2}x_1[n-1] \qquad (201)$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad (202)$$

Hem de calcular les sortides de S_1 i S_2 davant el senyal d'entrada $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

Solució

a) Veiem que S_1 calcula la mitjana de la mostra actual amb la mostra anterior. En substituir $x_1[n] = \delta[n]$ a (201), obtenim la seva resposta impulsional:

$$h_1[n] = T_{S_1}\{x_1[n] = \delta[n]\} = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] \qquad (203)$$

Gràcies a (128) sabem que la funció de transferència de S_1 és la següent:

$$\begin{aligned} H_1(s) &= Z\{h_1[n]\} = Z\left\{\tfrac{1}{2}\delta[n] + \tfrac{1}{2}\delta[n-1]\right\} = \\ &\tfrac{1}{2}Z\{\delta[n]\} + \tfrac{1}{2}Z\{\delta[n-1]\} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}z^{-1} \end{aligned} \qquad (204)$$

Veiem que $H_1(s)$ presenta un guany de 1/2, un zero a $z = -1$ i un pol a $z = 0$ i que, com que $h_1[n]$ és un senyal finit, la seva ROC (R_{H1}) inclou tot el pla *z* i és igual a $\forall\ z - \{z = 0\}$.

D'altra banda, obtenim la transformada *z* del senyal d'entrada consultant la taula 1:

$$X_1(z) = Z\left\{x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad (205)$$

S'observa que $X_1(z)$ presenta un guany 1, un pol a $z = 1/2$ i un zero a $z = 0$. Com que $x_1[n]$ és un senyal infinit orientat a la dreta, la ROC de $X_1(z)$ (R_{X1}) és l'exterior de la circumferència de radi 1/2, és a dir, $|z| > 1/2$.

Així doncs, el producte de $X_1(z)$ per $H_1(z)$ ens permet obtenir $Y_1(z)$, és a dir, la transformada *z* de $y_1[n]$, el senyal de sortida de S_1:

$$Y_1(z) = X_1(z)H_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^{-1}\right) = \frac{1}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad (206)$$

Ara, mitjançant la funció `residuez`, descomponem $Y_1(z)$ en fraccions simples:

```
>> B = (1/2)*[1 1]; % Vector fila: numerador de Y1(z)
>> A = [1 -1/2]; % Vector fila: denominador de Y1(z)
>> [AC,p,d] = residuez(B,A)
AC =
    1.5000
p =
    0.5000
d =
    -1
```

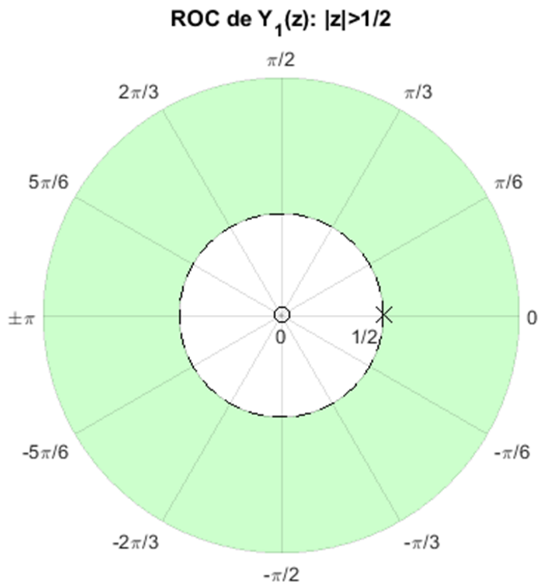
Així doncs, la descomposició en fraccions simples de $Y_1(z)$ és la següent:

$$Y_1(z) = -1 + \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad (207)$$

Llavors, per mitjà de la propietat de convolució de la transformada *z* sabem que R_{Y1}, la ROC de $Y_1(z)$, és tal que $R_{X1} \cap R_{H1} \subseteq R_{Y1}$. Com que $R_{H1} = \forall s - \{z = 0\}$ i que R_{X1} és $|z| > 1/2$ (z = 0 també s'exclou de R_{X1}), succeeix que $R_{X1} \cap R_{H1} = R_{X1}$. Per tant, $R_{X1} \subseteq R_{Y1}$; és a dir, l'exterior de la circumferència de radi 1/2 és inclòs a R_{Y1}.

Com que $Y_1(z)$ presenta un pol a $z = 1/2$, $y_1[n]$ no serà un senyal finit i R_{Y1} no podrà abastar tot el pla *z*. Per tant, l'única possibilitat és que $R_{Y1} = R_{X1}$, és a dir, que la ROC de $Y_1(z)$ sigui $|z| > 1/2$, tal com mostra la figura 18:

Figura 18. Representació gràfica conjunta del diagrama de pols i zeros i de la ROC de $Y_1(z)$



I ara ja estem en condicions de calcular la transformada *z* inversa de $Y_1(z)$ i obtenir, finalment, $y_1[n]$:

$$y_1[n] = Z^{-1}\left\{Y_1(s),\quad R_{Y1}\right\} = Z^{-1}\left\{-1 + \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\quad R_{Y1}\right\} =$$
$$-Z^{-1}\left\{1,\ \forall z\right\} + \frac{3}{2}Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\quad |z| > 1/2\right\} = -\delta[n] + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{208}$$

b) Per les transformades típiques de la taula 1, veiem que R_{H2} (la ROC de la funció de transferència del sistema S_2) presenta un pol a $z = 1$ i un zero a $z = 0$. El que no podem saber amb la informació de què disposem és si R_{H2} és l'exterior de la circumferència de radi 1 centrada en l'origen del pla *z* ($|z| > 1$) o si és l'exterior d'aquesta circumferència ($|z| < 1$). Per tant, només podem treballar amb les dues hipòtesis.

La transformada *z* del senyal d'entrada ja la coneixem de (205), de manera que:

$$Y_2(z) = X_2(z)H_2(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} \tag{209}$$

Ara, mitjançant la funció `residuez`, descomponem $Y_2(z)$ en fraccions simples:

```
>> B = 1; % Vector fila: numerador de Y2(z)
>> A = [1 -3/2 1/2]; % Vector fila: denominador de Y2(z)
>> [AC,p,d] = residuez(B,A)
AC =
     2
    -1
p =
    1.0000
    0.5000
d =
    []
```

Així doncs, la descomposició en fraccions simples de $Y_2(z)$ és la següent:

$$Y_2(z) = \frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \tag{210}$$

I arribats a aquest punt, hi ha dues possibles solucions a aquest problema. Si s'assumeix que R_{H2} és $|z| > 1$, aleshores R_{Y2} només pot ser $|z| > 1$, ja que $R_{X2} \cap R_{H2} \subseteq R_{Y2}$ i R_{X2} és $|z| > 1/2$ (el senyal d'entrada és infinit orientat a la dreta). En aquest cas:

$$y_2[n] = Z^{-1}\left\{Y_2(s),\quad R_{Y2}\right\} =$$
$$2Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z| > 1/2\right\} - Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\quad |z| > 1/2\right\} = \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)u[n] \tag{211}$$

Però si s'assumeix que R_{H2} és $|z| < 1$, llavors, per la mateixa raó que abans, R_{Y2} només pot ser $1/2 < |z| < 1$, i en aquest cas:

$$y_2[n] = 2Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z| < 1\right\} - Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\quad |z| > 1/2\right\} =$$
$$-2u[-n-1] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{212}$$

5.2.2. Propietats dels sistemes LIT digitals

A continuació estudiem la relació que hi ha entre les característiques de la funció de transferència d'un sistema LIT digital i les propietats del sistema.

Causalitat

Sabem que un sistema LIT digital S és causal si i només si la seva resposta impulsional $h[n]$ és igual a zero per a $n < 0$:

$$S \text{ és causal } \Leftrightarrow \quad h[n] = 0, \ \ \forall\, n < 0 \qquad (213)$$

Per tant, és segur que la resposta impulsional d'un sistema LIT digital causal no serà mai ni un senyal infinit orientat a l'esquerra ni un senyal infinit orientat a banda i banda. En qualsevol cas:

- Si S és un sistema causal FIR, $h[n]$ serà un senyal finit que compleixi amb (213).
- Si S és un sistema causal IIR, $h[n]$ serà un senyal infinit orientat a la dreta que compleixi amb (213).

Així doncs, ja podem establir una primera conclusió:

Un sistema LIT digital pot ser causal només si la ROC de la seva funció de transferència no és:

- **L'interior d'una circumferència centrada en l'origen**, ja que, en aquest cas, la seva resposta impulsional serà un senyal infinit orientat a l'esquerra.

- **Un anell comprès entre dues circumferències centrades en l'origen**, ja que, en aquest cas, la seva resposta impulsional serà un senyal infinit orientat a banda i banda.

Anomenem R_H la ROC de la funció de transferència $H(z)$ del sistema LIT digital S. Convé notar que el fet que R_H abasti tot el pla z, és a dir, l'exterior d'una circumferència centrada en l'origen, no garanteix que S sigui causal, ja que no n'hi ha prou que $h[n]$ sigui finita o infinita orientada a la dreta, sinó que, a més, ha de complir la condició expressada a (213).

Podem il·lustrar-ho amb dos exemples molt simples:

- Si $h[n] = \delta[n+1]$, $R_H = \forall\, z - \{z \to \infty\}$, en què S és un sistema FIR no causal.

- Si $h[n] = u[n+1]$, $R_H = \{|z| > 1\} - \{z \to \infty\}$, en què S és un sistema IIR no causal.

La clau d'aquest fet és en la propietat de desplaçament temporal de la transformada z (vegeu el subapartat 3.2 d'aquest mòdul). Entre altres coses, aquesta propietat ens indica que **un desplaçament horitzontal arbitrari aplicat a un senyal temporal només modifica la ROC de la seva transformada z per la possible inclusió o exclusió de $z = 0$ o** $z \to \infty$, a causa del factor z^{-n_0} que apareix en el domini z com a conseqüència del desplaçament:

- Si el desplaçament és un avançament del senyal, llavors $n_0 < 0$ i el factor z^{-n_0} exclou $z \to \infty$ de la ROC.

- Si el desplaçament és un endarreriment del senyal, llavors $n_0 > 0$ i el factor z^{-n_0} exclou $z = 0$ de la ROC.

Com que la forma general dels senyals transformats definida a (131) no inclou monomis amb potències positives de z, l'avançament del senyal (desplaçament cap a valors negatius de n) és l'únic d'entre els dos tipus de desplaçament horitzontal que pot posar en perill la condició de causalitat de (213).

Per tant, el quid és en la inclusió o exclusió de $z \to \infty$ a la ROC:

Un sistema LIT digital FIR és causal si i només si $z \to \infty$ és inclòs en la ROC de la seva funció de transferència.

Un sistema LIT digital IIR és causal si i només si la ROC de la seva funció de transferència és l'exterior de la circumferència de radi igual al mòdul del pol de mòdul més gran i $z \to \infty$ és inclòs en aquesta ROC.

És a dir:

$$S \text{ és causal} \Leftrightarrow \begin{cases} R_H = \forall\, z + \{z \to \infty\} \\ \text{o} \\ R_H = \{|z| > |p|\} + \{z \to \infty\} \end{cases} \tag{214}$$

en què $|p|$ el mòdul del pol de mòdul més gran de $H(z)$.

Estabilitat

Sabem que un sistema LIT digital S és estable si i només si la seva resposta impulsional $h[n]$ és absolutament sumable:

$$S \text{ és estable} \Leftrightarrow \sum_{+\infty}^{n=-\infty} |h[n]| < \infty \tag{215}$$

Ja vam veure a (10) que la convergència de la transformada z de $h[n]$ no depèn de la fase de z:

$$\left|H(z)\right| = \left|\sum_{+\infty}^{n=-\infty} h[n] r^{-n} e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{+\infty}^{n=-\infty} \left|h[n] r^{-n} e^{-j\omega n}\right| = \sum_{+\infty}^{n=-\infty} \left|h[n]\right| r^{-n} \qquad (216)$$

en què $r = |z|$, $\omega = \mathrm{Arg}(z)$ i en què $H(z)$ és la funció de transferència de S.

Si avaluem (216) per a $r = 1$, és a dir, per a $z = e^{j\omega}$, veiem que l'absoluta sumabilitat de $h[n]$ és cota superior de $\left|H(e^{j\omega})\right|$:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| \leq \sum_{+\infty}^{n=-\infty} \left|h[n]\right| 1^{-n} = \sum_{+\infty}^{n=-\infty} \left|h[n]\right| \qquad (217)$$

Si es compara (215) amb (217), s'observa que la condició d'estabilitat de S és equivalent al fet que $\left|H(e^{j\omega})\right|$ sigui un valor finit. I que $\left|H(e^{j\omega})\right|$ sigui un valor finit implica que la ROC de $H(z)$, R_H, inclogui la circumferència unitat del pla z (és a dir, circumferència de radi 1).

Per tant, podem concloure que:

Un sistema LIT digital és estable si i només si la circumferència unitat del pla *z* és inclosa en la ROC de la seva funció de transferència:

$$S \text{ és estable} \quad \Leftrightarrow \quad \{|z| = 1\} \subseteq R_H \qquad (218)$$

D'això inferim, com ja sabem, que tot sistema LIT digital FIR és estable.

Si, a més, ens atenim a senyals transformats racionals de la forma definida en l'equació (131), podem concretar també una conclusió important sobre la doble condició de causalitat i estabilitat de sistemes LIT digitals:

Un sistema LIT digital FIR en què la seva funció de transferència inclogui $z \to \infty$ en la seva ROC és sempre causal i estable.

Un sistema LIT digital IIR en què la seva funció de transferència tingui una ROC que sigui l'exterior de la circumferència de radi igual al mòdul del pol de mòdul més gran i que inclogui $z \to \infty$ és causal i estable si i només si tots els pols de la seva funció de transferència tenen mòdul més petit que 1 (o sigui, si estan ubicats a l'interior de la circumferència unitat del pla *z*).

És a dir:

$$S \quad \text{és causal i estable} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} R_H = \forall\, z + \{z \to \infty\} \\ o \\ R_H = \{|z| > |p|\} + \{z \to \infty\} \quad \text{i} \quad |p_i| < 1, \forall\, i \end{cases} \qquad (219)$$

els p_i són els pols de $H(z)$ i $|p|$ el mòdul del pol de mòdul més gran de $H(z)$.

Memòria

Sabem que un sistema LIT digital *S* té memòria si i només si la seva resposta impulsional $h[n]$ és diferent de 0 per a algun valor positiu de la variable independent:

$$S \quad \text{té memòria} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, n_0 > 0: \quad h[n_0] \neq 0 \qquad (220)$$

en què n_0 un valor enter ($n_0 \in Z$). A més, la memòria de *S* es mesura en mostres i és igual al màxim valor positiu n_0 per al qual $h[n]$ és diferent de 0.

En general, respecte de la memòria dels sistemes LIT digitals, podem dir el següent:

Si $H(z)$ és la funció de transferència d'un sistema LIT digital S i R_H és la ROC de $H(z)$. Només pot tenir lloc un dels escenaris següents:

1) Si $\boldsymbol{R_H}$ **és** $\forall\, z$, el sistema S és FIR i $h[n]$ és un senyal de longitud finita:

- Si $\boldsymbol{R_H}$ **no inclou** $\boldsymbol{z = 0}$, a $H(z)$ hi ha alguna potència negativa de z. Si z^{-n_0} la potència més negativa de z a $H(z)$ ($n_0 > 0$), $\boldsymbol{S}$ **té una memòria de** $\boldsymbol{n_0}$ **mostres**.

- Si $\boldsymbol{R_H}$ **inclou** $\boldsymbol{z = 0}$, a $H(z)$ no hi ha cap potència negativa de z i $\boldsymbol{S}$ **no té memòria**.

2) Si $\boldsymbol{R_H}$ **és l'exterior d'una circumferència**, el sistema S és IIR i $h[n]$ és un senyal infinit orientat a la dreta; per tant, **la memòria de** $\boldsymbol{S}$ **és infinita**.

3) Si $\boldsymbol{R_H}$ **és l'interior d'una circumferència**, el sistema S és IIR i $h[n]$ és un senyal infinit orientat a l'esquerra. Si M i N són els ordres del numerador i el denominador de $H(z)$:

- Si $M \geq N$, aleshores R_H no inclou $z = 0$ i $\boldsymbol{S}$ **té una memòria de** $M - N$ **mostres**.
- Si $M < N$, aleshores R_H inclou $z = 0$ i $\boldsymbol{S}$ **no té memòria**.

4) Si $\boldsymbol{R_H}$ **és un anell**, el sistema S és IIR i $h[n]$ és un senyal infinit orientat a banda i banda; per tant, **la memòria de** $\boldsymbol{S}$ **és infinita**.

Invertibilitat

Sabem que un sistema LIT digital S_1 de resposta impulsional $h_1[n]$ és invertible si i només si hi ha un altre sistema LIT digital S_2 de resposta impulsional $h_2[n]$ tal que la convolució entre $h_1[n]$ i $h_2[n]$ és igual que una delta discreta:

$$S_1 \text{ i } S_2 \text{ són inversos} \quad \Leftrightarrow \quad h_1[n] * h_2[n] = \delta[n] \qquad (221)$$

En aplicar la propietat de convolució de la transformada z a (221), obtenim la condició d'invertibilitat en termes de les funcions de transferència $H_1(z)$ i $H_2(z)$:

$$Z\{h_1[n] * h_2[n]\} = \underbrace{Z\{h_1[n]\}}_{H_1(z)}\underbrace{Z\{h_2[n]\}}_{H_2(z)} = \underbrace{Z\{\delta[n]\}}_{1} \quad \Rightarrow \quad H_1(z)H_2(z) = 1 \qquad (222)$$

Per tant, podem concloure que:

Dos sistemes LIT digitals són invertibles si i només si la funció de transferència d'un és la inversa de la de l'altre:

$$\boxed{S_1 \ \text{ i } \ S_2 \ \text{ són inversos } \Leftrightarrow \ H_1(z) = \frac{1}{H_2(z)}} \qquad (223)$$

Observem, per tant, que caracteritzar el sistema invers d'un sistema LIT digital és molt senzill treballant en el domini transformat z: coneguda $h_1[n]$, calculem $H_1(z)$ mitjançant la transformada z directa, obtenim $H_2(z)$ invertint $H_1(z)$, tal com s'indica a (223), i finalment obtenim $h_2[n]$ com a resultat de la transformada z inversa de $H_2(z)$.

A més, això permet obtenir un criteri més sobre la invertibilitat en sistemes LIT digitals: S_1 **i** S_2 **són invertibles si existeixen** $H_1(z)$ **i** $H_2(z)$**, és a dir, si les ROC de** $H_1(z)$ **i** $H_2(z)$ **són diferents del buit (**$R_{H1} \neq \varnothing, R_{H2} \neq \varnothing$**).**

Finalment, si ens centrem en senyals transformats racionals de la forma definida en l'equació (131), podem assenyalar conclusions importants sobre la invertibilitat de sistemes LIT digitals:

Un sistema LIT digital amb una funció de transferència racional és sempre invertible, ja que la funció de transferència del seu sistema invers és una altra funció racional els zeros de la qual són els pols d'aquella i els pols de la qual són els zeros d'aquella:

$$\boxed{H_1(z) = G\frac{\prod_{i=1}^{M}\left(1-c_i z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(1-p_i z^{-1}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad H_2(z) = \frac{1}{G}\frac{\prod_{i=1}^{M}\left(1-p_i z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(1-c_i z^{-1}\right)}} \qquad (224)$$

en què $H_1(z) = 1/H_2(z)$ i en què:

- G és el factor de guany de $H_1(z)$ i 1 /G és el factor de guany de $H_2(z)$.
- Els coeficients p_i són els pols de $H_1(z)$ i els zeros de $H_2(z)$.
- Els coeficients c_i són els zeros de $H_1(z)$ i els pols de $H_2(z)$.

Així doncs, s'anomena **sistema de fase mínima** aquell **sistema LIT amb funció de transferència racional els pols i zeros de la qual tenen mòdul inferior a 1** (és a dir, els pols i els zeros són a l'interior de la circumferència unitat del pla *z*). De (224) s'infereix que tots els pols i zeros del sistema invers d'un sistema de fase mínima també tenen part real negativa.

Per tant, tot sistema de fase mínima és causal i estable i té un sistema invers que també és causal i estable (que, per tant, també és de fase mínima).

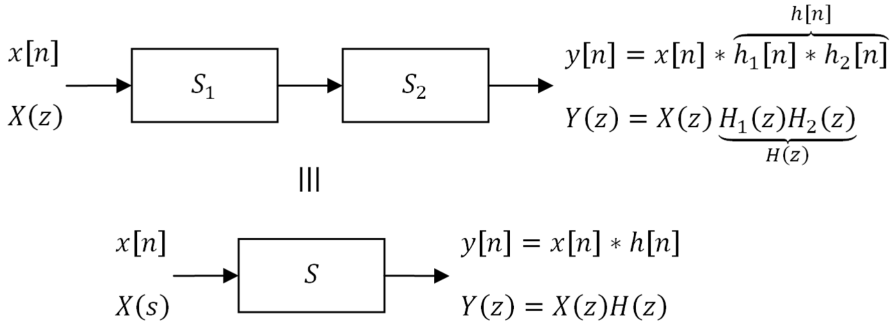
5.2.3. Associació de sistemes LIT digitals

A continuació presentem com es caracteritza la funció de transferència del sistema LIT digital global resultant de l'associació de sistemes LIT digitals.

Associació en sèrie

Partim de dos sistemes LIT digitals, S_1 i S_2, les respostes impulsionals dels quals són $h_1[n]$ i $h_2[n]$, i les funcions de transferència dels quals són $H_1(z)$ i $H_2(z)$. L'associació en sèrie de S_1 i S_2 es caracteritza de la manera següent:

Figura 19. Funció de transferència de l'associació en sèrie de sistemes LIT digitals



Per tant, la funció de transferència $H(z)$ del sistema LIT digital global resultant de l'associació en sèrie de S_1 i S_2 és tal que:

$$\boxed{H(z) = H_1(z)H_2(z)} \qquad (225)$$

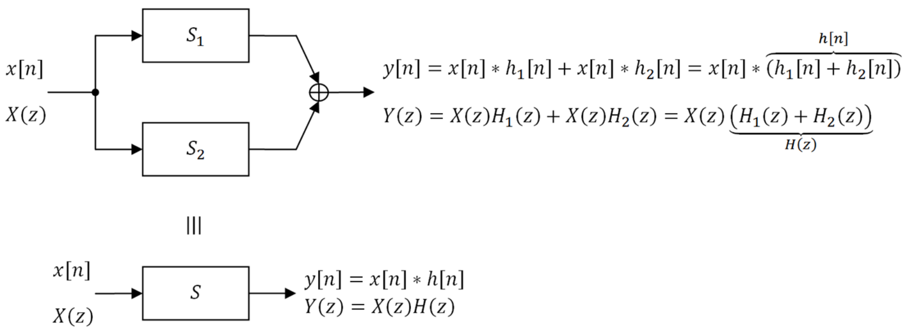
En general, per a tota associació en sèrie de N sistemes LIT digitals, la funció de transferència del sistema global resultant és la següent:

$$H(z) = \prod_{i=1}^{N} H_i(z) \qquad (226)$$

Associació en paral·lel

Partim de dos sistemes LIT digitals, S_1 i S_2, les respostes impulsionals dels quals són $h_1[n]$ i $h_2[n]$ i les funcions de transferència dels quals són $H_1(z)$ i $H_2(z)$. L'associació en paral·lel de S_1 i S_2 es caracteritza de la manera següent:

Figura 20. Funció de transferència de l'associació en paral·lel de sistemes LIT digitals



Per tant, la funció de transferència $H(z)$ del sistema LIT digital global resultant de l'associació en paral·lel de S_1 i S_2 és tal que:

$$\boxed{H(z) = H_1(z) + H_2(z)} \qquad (227)$$

En general, per a tota associació en sèrie de N sistemes LIT digitals, la funció de transferència del sistema global resultant és la següent:

$$H(s) = \sum_{i=1}^{N} H_i(z) \qquad (228)$$

Associació en llaç de realimentació

Partim de dos sistemes LIT digitals, S_1 i S_2, les respostes impulsionals dels quals són $h_1[n]$ i $h_2[n]$ i les funcions de transferència dels quals són $H_1(z)$ i $H_2(z)$.

Recordem que la resposta impulsional $h[n]$ del sistema global S resultant i l'associació en llaç de realimentació de S_1 i S_2 és igual a la convolució entre $h_1[n]$ i un senyal $h_3[n]$:

$$h[n] = h_1[n] * h_3[n] \qquad (229)$$

en què $h_3[n]$ és tal que:

$$h_3[n] * \left(\delta[n] - h_1[n] * h_2[n]\right) = \delta[n] \qquad (230)$$

Si apliquem a (230) les propietats de linealitat i convolució temporal de la transformada z, obtindrem el següent:

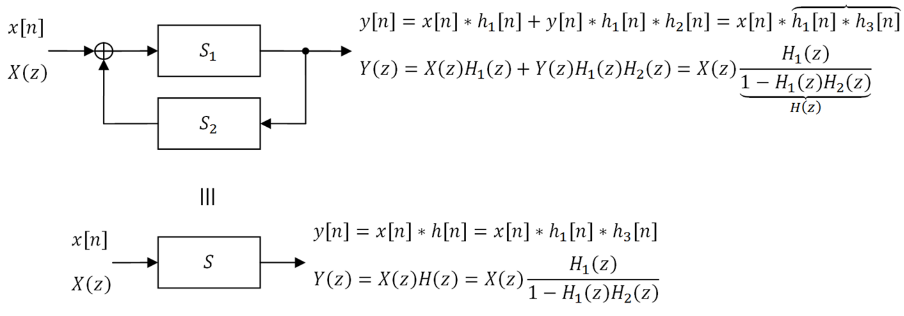
$$H_3(z)\left(1 - H_1(z)H_2(z)\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad H_3(z) = \frac{1}{1 - H_1(z)H_2(z)} \qquad (231)$$

En fer el que calgui a (229) i en substituir el resultat obtingut a (231), es conclou el següent:

$$H(z) = H_1(z)H_3(z) = H_1(z)\frac{1}{1 - H_1(z)H_2(z)} \qquad (232)$$

Així doncs, l'associació en llaç de realimentació de S_1 i S_2 es caracteritza de la manera següent:

Figura 21. Funció de transferència de l'associació en llaç de realimentació de sistemes LIT digitals



I, per tant, la funció de transferència $H(z)$ del sistema LIT digital global resultant de l'associació en llaç de realimentació de S_1 i S_2 és tal que:

$$\boxed{H(z)=\frac{H_1(z)}{1-H_1(z)H_2(z)}} \qquad (233)$$

S'observa, doncs, que la caracterització de l'associació en llaç de realimentació de sistemes LIT digitals és més satisfactòria treballant des del domini transformat z que des del domini temporal, ja que el càlcul de $h_3[n]$ sempre és problemàtic, mentre que $H(z)$ s'obté operant directament amb $H_1(z)$ i $H_2(z)$.

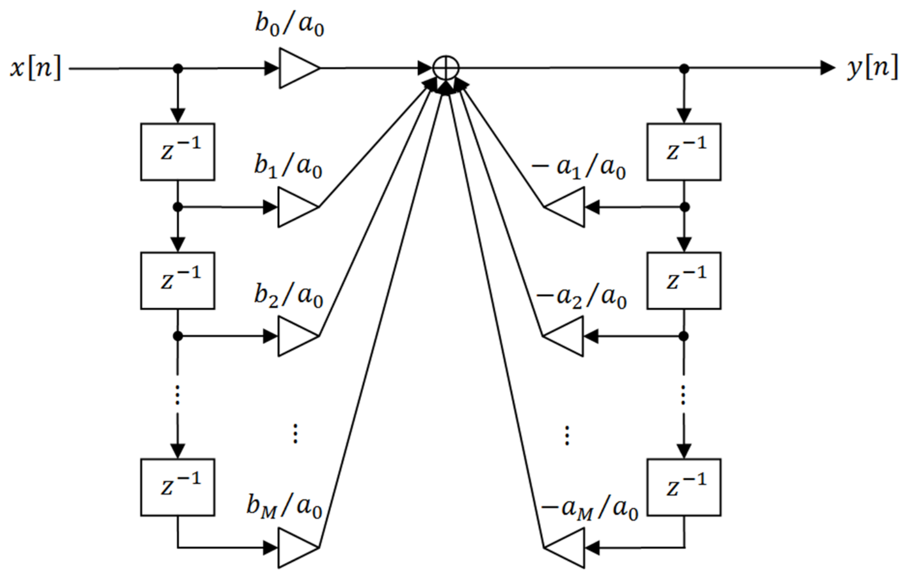
5.3. Resolució d'equacions en diferències lineals de coeficients constants en el domini transformat *z*

Partim d'un sistema LIT digital S amb resposta impulsional $h[n]$ i amb una relació entrada-sortida que és una equació diferencial lineal de coeficients constants d'ordre N de la forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (234)$$

Així mateix, sabem que aquest sistema S pot ser representat mitjançant aquest diagrama de blocs:

Figura 22. Possible implementació del diagrama de blocs del sistema *S*



Convé recordar, també, que **S és un sistema LIT sempre que les sortides dels blocs de retard del sistema valguin 0 en l'instant inicial en què el sistema es posa en funcionament.** D'ara endavant, doncs, assumirem que la posada en condicions inicials de S ha estat exactament aquesta i no una altra. En cas contrari, *S* no seria un sistema LIT i, per tant, no compliria el teorema de les autofuncions, de manera que caracteritzar-ne els senyals d'entrada i de sortida i la resposta impulsional en el domini transformat *z* no tindria cap sentit.

Així doncs, l'objectiu és obtenir $h[n]$ a partir de la relació entrada-sortida de *S*. Amb aquest objectiu comencem a aplicar la transformada *z* a banda i banda de la igualtat a (234):

$$Z\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} = Z\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\} \qquad (235)$$

En aplicar la propietat de linealitat de la transformada *z* a (235), obtindrem el següent:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Z\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{M} b_k Z\{x[n-k]\} \qquad (236)$$

Si $X(z) = Z\{x[n]\}$ i $Y(z) = Z\{y[n]\}$, podem aplicar la propietat de derivació en el temps de la transformada *z* a (236) i obtenir el següent:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) \qquad (237)$$

Així, si traiem $X(z)$ i $Y(z)$ fora dels sumatoris (ja que són independents de *k*) a (237), les agrupem a un costat de la igualtat i deixem els sumatoris a l'altre, arribem a l'expressió següent:

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \qquad (238)$$

Observem, doncs, que, **si partim de la relació entrada-sortida del sistema *S* i hi apliquem la transformada *z*, obtindrem la funció de transferència de *S***:

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}} \qquad (239)$$

Per tant, podem extreure'n una conclusió important:

La funció de transferència d'un sistema LIT digital és l'element de connexió entre la relació entrada-sortida del sistema amb la resposta impulsional del sistema:

- Per obtenir $h[n]$ a partir de la relació entrada-sortida, obtenim primer $H(z)$ a partir de la relació entrada-sortida mitjançant l'aplicació de les propietats de la transformada z i, a continuació, obtenim la resposta impulsional calculant $h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}$.

- Per obtenir la relació entrada-sortida a partir de $h[n]$, obtenim primer la funció de transferència calculant $H(z)=Z\{h[n]\}$ i, a continuació, obtenim la relació entrada-sortida a partir de $H(z)$ mitjançant l'aplicació de les propietats de la transformada z.

Així mateix, s'observa que l'expressió de $H(z)$ obtinguda a (239) és exactament igual que la forma del senyal transformat racional definit a (131):

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_{M-1}z^{-(M-1)}+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_{N-1}z^{-(N-1)}+a_Nz^{-N}} \tag{240}$$

en què $Y(z)$ i $X(z)$ els polinomis del numerador i del denominador de $H(z)$, respectivament.

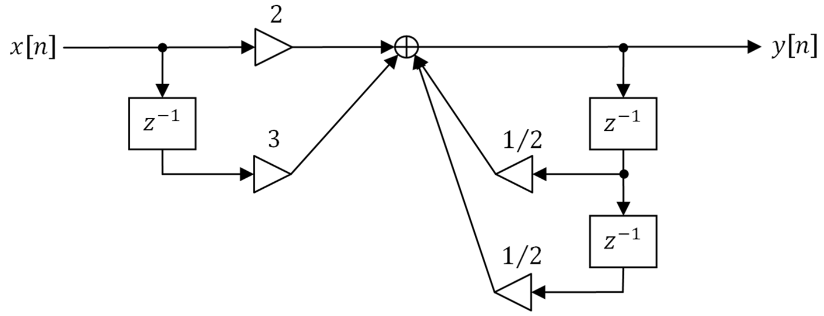
Per tant, com que només queda calcular $h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}$, veiem que, **un cop obtinguda $H(z)$, simplement cal aplicar-hi l'estratègia de càlcul de la transformada z inversa desenvolupada en l'apartat 4 d'aquest mòdul i obtenir $h[n]$.**

Amb aquest objectiu, i per cloure aquest apartat, a continuació es planteja un exercici d'aplicació de tota aquesta estratègia.

Exemple 5

Partim d'un sistema LIT digital *S* caracteritzat pel diagrama de blocs següent:

Figura 23. Diagrama de blocs del sistema *S*



Hem de calcular la resposta impulsional de *S*.

Solució

En primer lloc, atès el diagrama de blocs del sistema, queda clar que la relació entrada-sortida de *S* és una equació en diferències lineal de coeficients constants de la forma expressada a (234). Així doncs, la relació entrada-sortida de *S* s'obté directament a partir del diagrama:

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]-\frac{1}{2}y[n-2]=2x[n]+3x[n-1] \tag{241}$$

Tant en el seu diagrama de blocs com en la relació entrada-sortida observem que *S* és un sistema LIT causal, ja que el càlcul de $y[n]$ només depèn de $x[n]$ i de diverses versions retardades de $x[n]$ i $y[n]$.

En segon lloc, com que sabem que la funció de transferència associada a un sistema d'aquest tipus és de la forma expressada a (239), també podem obtenir directament $H(z)$:

$$H(z)=\frac{2+3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}} \tag{242}$$

A continuació, descomponem $H(z)$ en fraccions simples. Amb aquesta finalitat i per estalviar-nos els càlculs, fem servir la funció `residuez` de MATLAB:

```
>> B = [2 3]; % Vector fila: numerador de H(z)
>> A = [1 -1/2 -1/2]; % Vector fila: denominador de H(z)
>> [AC,p,d] = residuez(B,A)
AC =
    3.3333
   -1.3333
p =
    1.0000
   -0.5000
d =
    []
```

Veiem que:

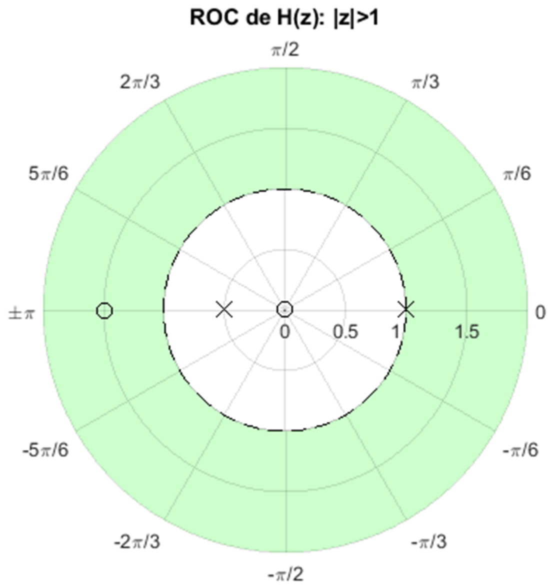
- Pols de $H(z)$: $p_1=1$, $p_2=-1/2$.
- Coeficients A_i: $A_1=10/3$, $A_2=-4/3$.

Així doncs, la descomposició en fraccions simples de $H(z)$ és la següent:

$$H(z)=\frac{10}{3}\underbrace{\frac{1}{1-z^{-1}}}_{H_1(z)}-\frac{4}{3}\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}}_{H_2(z)}=\frac{10}{3}H_1(z)-\frac{4}{3}H_2(z) \tag{243}$$

Llavors, ja que, com ja hem vist, *S* és un sistema causal, la ROC d'aquesta $H(z)$ és necessàriament l'exterior d'una circumferència centrada en l'origen del pla z. Hi ha dos candidats possibles, que es corresponen amb els mòduls dels pols de $H(z)$. Atès que la ROC, per definició, no pot contenir cap pol, és el pol de mòdul més gran el que en marca el límit. Per tant, la ROC d'aquesta $H(z)$ és $|z| > 1$, tal com mostra la figura 24:

Figura 24. Representació gràfica conjunta del diagrama de pols i zeros i de la ROC de *H*(*z*)



S'observa, a més, que ***S* és un sistema LIT, causal i inestable, ja que la circumferència unitat ($|z| = 1$) no és inclosa en la ROC de la seva funció de transferència**.

Així doncs, les ROC associades a les dues fraccions simples de (243) són, respectivament, $|z| > 1$ i $|z| > 1/2$ i, d'aquesta manera, les transformades *z* inverses de totes dues fraccions simples donaran lloc a dos senyals infinits orientats a la dreta. Per tant, segons la taula 1:

$$h_1[n] = Z^{-1}\{H_1(z), \quad |z| > 1\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1\right\} = u[n] \tag{244}$$

$$h_2[n] = Z^{-1}\left\{H_2(z), \quad |z| > \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}\right\} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{245}$$

I, finalment, obtenim la resposta impulsional de *S*:

$$h[n] = \frac{10}{3}h_1[n] - \frac{4}{3}h_2[n] = \frac{10}{3}u[n] - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] = \left(\frac{10}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)u[n] \tag{246}$$

Per tant:

$$\boxed{h[n] = \frac{1}{3}(10 - (-2)^{-n+2})u[n]} \tag{247}$$

Resum

En aquest mòdul hem estudiat la transformada *z* com a eina que permet caracteritzar els sistemes LIT digitals per complementar-ne així la caracterització en el domini del temps.

En primer lloc, hem vist les equacions de càlcul de la transformada *z* (l'equació d'anàlisi i l'equació de síntesi) com el resultat de l'aplicació dels postulats del teorema de les autofuncions dels sistemes LIT digitals. Així, la transformada *z* és l'eina que ens permet expressar senyals digitals com el resultat d'una combinació lineal d'exponencials complexos. A més, hem estudiat els conceptes de regió de convergència (ROC) i de diagrama de pols i zeros: tots dos són fonamentals per representar els senyals i treballar-hi en el domini transformat *z*.

En segon lloc, hem calculat les transformades *z* de tot un conjunt de senyals bàsics i, així mateix, les propietats fonamentals de la transformada *z*. El principal objectiu de tots aquests resultats, pel que fa a la teoria de senyals i sistemes que estem estudiant, és permetre'ns representar senyals complexos en el domini transformat *z* sense que suposi un increment en la dificultat dels càlculs matemàtics associats. En aquest sentit, hem vist una estratègia de càlcul molt interessant per a nosaltres: la que ens permet obtenir la transformada *z* inversa d'un senyal racional (quocient de polinomis). A més, algunes de les propietats de la transformada *z* ens permeten obtenir conclusions molt rellevants i interessants: per exemple, la naturalesa de la transformada *z* de qualsevol senyal real (propietat de conjugació complexa) o la transformació del càlcul de la convolució temporal en un producte de senyals en el domini transformat *z* (propietat de convolució temporal).

Finalment, com a objectiu primordial del mòdul, hem introduït el concepte de *funció de transferència* d'un sistema LIT digital (és a dir, la transformada *z* de la seva resposta impulsional) i hem estudiat com, mitjançant aquesta funció de transferència, és possible caracteritzar els sistemes LIT digitals: calcular-ne la sortida, conèixer-ne les propietats, caracteritzar associacions entre diferents sistemes i poder relacionar fàcilment la seva relació entrada-sortida amb la seva resposta impulsional.

Exercicis d'autoavaluació

1. A partir del senyal $x[n] = u[n] - u[n - N]$, en què $N \in Z$, amb $N \geq 1$, i $X(z)$ és l'expressió resultant de la seva transformada *z*. Quina de les afirmacions següents és correcta?

a) $X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-N+2} + z^{-N+1}$ i la seva ROC és $|z| > 1$.
b) $X(z) = \dfrac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$ i la seva ROC és $\forall\ z - \{z = 0\}$.
c) $X(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}} - \dfrac{z^{-N}}{1 - z^{-1}}$ i la seva ROC és $|z| > 1$.
d) $X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-N+2} + z^{-N+1}$ i la seva ROC és $\forall\ z$.

2. A partir del senyal $x[n] = a^n$ per a $0 \leq n \leq N - 1$, i $x[n] = 0$ per a la resta, en què $N \in Z$, amb $N \geq 1$, i $X(z)$ és l'expressió resultant de la seva transformada *z*. Quina de les afirmacions següents és correcta?

a) $X(z) = \dfrac{1 - a^{-N} z^{N}}{1 - az^{-1}}$ i la seva ROC és $\forall\ z$.
b) $X(z) = \dfrac{1 - a^{N} z^{-N}}{1 - az^{-1}}$ i la seva ROC és $\forall\ z$.
c) $X(z) = \dfrac{1 - a^{-N} z^{N}}{1 - az^{-1}}$ i la seva ROC és $\forall\ z - \{z = 0\}$.
d) $X(z) = \dfrac{1 - a^{N} z^{-N}}{1 - az^{-1}}$ i la seva ROC és $\forall\ z - \{z = 0\}$.

3. A partir del senyal $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi}{4} n\right)$ i de $X(z)$ com a expressió resultant de la seva transformada *z*. Quina de les afirmacions següents és correcta?

a) $X(z) = \dfrac{\sqrt{3/2}}{1 + (1/2)z^{-1} + z^{-2}}$ i la seva ROC és $|z| > 1$.
b) $X(z) = \dfrac{1 - (1/2)z^{-1}}{1 + (1/2)z^{-1} + z^{-2}}$ i la seva ROC és $|z| > 1$.
c) $X(z) = \dfrac{1 - (\sqrt{3/2})z^{-1}}{1 + (1/2)z^{-1} + z^{-2}}$ i la seva ROC és $|z| > 1$.
d) $X(z)$ no existeix.

4. A partir del senyal $x[n] = 2^{-n} u[-n - 1] - 3^{-n} u[n]$ i de $X(z)$ com a expressió resultant de la seva transformada *z*. Quina de les afirmacions següents és correcta?

a) $X(s) = \dfrac{1 - (5/12)z^{-1}}{1 - (5/6)z^{-1} + (1/6)z^{-2}}$ i la seva ROC és $|z| > \frac{1}{2}$.
b) $X(s) = 2\dfrac{1 - (5/12)z^{-1}}{1 - (5/6)z^{-1} + (1/6)z^{-2}}$ i la seva ROC és $|z| < \frac{1}{3}$.
c) $X(s) = -2\dfrac{1 - (5/12)z^{-1}}{1 - (5/6)z^{-1} + (1/6)z^{-2}}$ i la seva ROC és $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$.
d) $X(z)$ no existeix.

5. Si $y[n - 1] - 3y[n] = x[n]$ és la relació entrada-sortida d'un sistema LIT digital causal. Quina és la seva resposta impulsional?

a) $h(t) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} u[n]$
b) $h(t) = -3^{n+1} u[n]$
c) $h(t) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n} u[n]$
d) $h(t) = (-3)^{n} u[n]$

6. D'un sistema LIT digital només se sap que, davant el senyal d'entrada $x[n]=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$, el seu senyal de sortida és $y[n]=3(-1)^n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)u[n]$. Quina és la seva relació entrada-sortida?

a) $y[n-2]+3y[n-1]+2y[n]=x[n]$
b) $y[n-2]+3y[n-1]+2y[n]=x[n-1]+3x[n]$
c) $x[n-2]+3x[n-1]+2x[n]=y[n-1]+3y[n]$
d) $x[n-2]+3x[n-1]+2x[n]=y[n]$

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. b

2. c

3. d

4. c

5. a

6. b

Bibliografia

Ogata, K. (1996). *Sistemas de control en tiempo discreto* (2a. ed.). A: J. G. Aranda Pérez; F. Rodríguez Ramírez; G. Sánchez García (trad.). Pearson, Prentice Hall (capítol 2 i apèndix B).

Oppenheim, A. V.; Schafer, R. W.; Buck, J. R. (1999). *Discrete-Time Signal Processing* (2a. ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series (capítols 3 i 5).

Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S.; Nawab, S. H. (1996). *Signals & Systems* (2a. ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series (capítol 10 i apèndix).

Palm III, W. J. (2010). *Introduction to MATLAB for Engineers* (3a. ed.). McGraw-Hill.

Proakis, J. G.; Manolakis, D. G. (2007). *Digital Signal Processing* (4a. ed.). Prentice Hall (capítol 3).