
La transformada discreta de Fourier

Anàlisi de seqüències de durada finita, propietats, mostratge en freqüència de la TFSD, convolució circular

PID_00262130

Gonzalo Seco Granados

Temps mínim de dedicació recomanat: 4 hores



Gonzalo Seco Granados

L'encàrrec i la creació d'aquest recurs d'aprenentatge UOC han estat coordinats pel professor: José Antonio Morán Moreno (2019)

Primera edició: febrer 2019
© Gonzalo Seco Granados
Tots els drets reservats
© d'aquesta edició, FUOC, 2019
Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Disseny: Manel Andreu
Realització editorial: Oberta UOC Publishing, SL

Cap part d'aquesta publicació, incloent-hi el disseny general i la coberta, no pot ser copiada, reproduïda, emmagatzemada o transmesa de cap manera ni per cap mitjà, tant si és elèctric com químic, mecànic, òptic, de gravació, de fotocòpia o per altres mètodes, sense l'autorització prèvia per escrit dels titulars dels drets.

Índex

Introducció	5
Objectius	6
1. Definició de la transformada discreta de Fourier i interpretacions	7
1.1. Definició de la DFT i de la IDFT	7
1.2. Relació entre la DFT i la TFSD	10
1.3. Relació entre la DFT i la sèrie discreta de Fourier	11
1.4. Representació matricial de la DFT	12
2. Mostratge en freqüència de la TFSD	16
3. Propietats de la DFT	20
3.1. Linealitat	20
3.2. Desplaçament circular	20
3.3. Dualitat	22
3.4. Propietats de simetria	23
3.5. Modulació	25
3.6. Convolució circular	26
3.7. Producte (o enfinestrament) de seqüències	31
3.8. Igualtat de Parseval	31
3.9. Resum de les propietats de la DFT	31
4. Convolució lineal mitjançant la DFT	33
5. Càlcul de la DFT	36
Exercicis d'autoavaluació	41
Solucionari	43
Bibliografia	44

Introducció

En aquest mòdul estudiarem la transformada discreta de Fourier (en anglès, *discrete Fourier transform*, DFT), que és la transformació més característica en l'àmbit del processament de senyals en temps discret. Les transformades estudiades fins ara, la TFSD i la TZ, són eines molt útils per a l'anàlisi de senyals i sistemes en temps discret, però tant la TFSD com la TZ són funcions d'una variable contínua i, per tant, no es poden calcular o representar o emmagatzemar fàcilment en dispositius de processament de senyal com FPGA, DSP o processadors de propòsit general, ni faciliten que aquests dispositius facin operacions al senyal directament en el domini transformat. No obstant això, la DFT supera aquestes limitacions perquè permet representar una seqüència de longitud finita mitjançant una altra seqüència de longitud finita en el domini de la freqüència. Per tant, la DFT manté tots els avantatges i la rellevància de la representació freqüencial dels senyals i, a més, afegeix el fet que aquesta representació sigui tan sols un vector de nombres, de manera que es pot emmagatzemar i operar-hi fàcilment en dispositius de processament de senyal. Per aquest motiu diem que la DFT és la transformació més característica en l'àmbit del processament de senyals en temps discret, perquè tant en el domini temporal com en el freqüencial es treballa amb seqüències de nombres i es posa de manifest de la manera més clara possible la dualitat entre tots dos. Hi ha, a més, algorismes computacionalment molt eficients per calcular la DFT. Aquest fet ha facilitat que la DFT sigui una eina utilitzada de manera extraordinàriament àmplia. Les seves aplicacions no es limiten a l'anàlisi de senyals, sinó que és l'element clau en la implementació de les modulacions multiporadores. Aquestes modulacions faciliten l'aprofitament òptim de la cadena i s'han pogut utilitzar la majoria dels sistemes moderns de telecomunicacions gràcies a l'existència d'algorismes eficients per al càlcul de la IDFT.

En aquest mòdul presentarem la DFT i la seva transformada inversa, així com la relació amb altres transformacions; enunciarem i demostrarem les principals propietats de la DFT; farem un èmfasi especial en una nova operació entre seqüències anomenada *convolució circular*; analitzarem el concepte de mostratge en freqüència, que sorgeix de manera natural amb la DFT i que en certa manera és dual del mostratge en temps que és a l'origen del processament digital. Com a introducció a temes que s'estendran, en el mòdul següent presentarem de quina manera la DFT permet la implementació de sistemes lineals i invariants en el temps, és a dir, com permet calcular la convolució lineal.

Objectius

Els objectius d'aquest mòdul són els següents:

1. Conèixer la definició de la DFT i de la DFT inversa.
2. Assimilar la relació de la DFT amb la TFSD i amb la sèrie de Fourier.
3. Comprendre el concepte de mostratge en freqüència.
4. Expressar de diverses maneres equivalents l'extensió periòdica d'un senyal.
5. Relacionar els efectes del mostratge en freqüència amb la circularitat que sorgeix en nombroses operacions, com ara el desplaçament circular o la convolució circular.
6. Calcular la convolució circular de dues seqüències.
7. Enumerar i demostrar les principals propietats de la DFT.
8. Familiaritzar-se amb la diferència entre convolució lineal i circular, a més de saber obtenir la convolució lineal de dues seqüències utilitzant de manera adequada només la DFT.
9. Entendre la propietat en què es basen molts algorismes de càlcul eficient de la DFT.

1. Definició de la transformada discreta de Fourier i interpretacions

1.1. Definició de la DFT i de la IDFT

En el cas de senyals analògics, tant el mateix senyal com la seva transformada de Fourier són funcions d'una variable real; en el cas del senyal és el temps, i en el cas de la transformada de Fourier, la freqüència analògica (F) o la pulsació analògica (Ω). En canvi, això no passa en fer la transformada de Fourier d'un senyal discret: mentre que el senyal discret és una seqüència de nombres, la seva transformada de Fourier (TFSD) és una funció d'una variable real de la freqüència discreta (f) o de la pulsació discreta (ω). Aquesta manca de dualitat per als senyals discrets entre el domini temporal i el domini freqüencial fa que els avantatges que aporta la TFSD en l'anàlisi de senyals i sistemes discrets siguin reduïts pel fet que la manipulació numèrica de funcions d'una variable real és més complexa que la manipulació de seqüències de nombres.

La facilitat d'emmagatzemar, transformar, etc. seqüències de nombres en lloc de funcions és una de les raons primordials de l'interès en el processament de senyals discrets. De manera natural sorgeix la necessitat d'establir una transformació que, tot conservant la rellevància conceptual de la transformada de Fourier, generi una seqüència en el domini transformat; aquests interessos els satisfà la transformada discreta de Fourier, que abreujadament sol anomenar-se DFT, d'acord amb la sigla de la seva denominació anglesa, *discrete Fourier transform*. En definitiva, la DFT ens permetrà transformar una seqüència de durada finita de nombres en una altra seqüència de durada finita en el domini transformat, mentre que la TFSD ens hauria proporcionat una funció d'una variable real.

Considerem una seqüència $x[n]$ de longitud finita, concretament de longitud N mostres, cosa que significa que $x[n]=0$ fora de l'interval $0 \leq n \leq N-1$. En molts casos, ens pot interessar assumir que la seqüència té longitud N fins i tot si la seva longitud és $M \leq N$. En aquests casos, simplement assumirem que les últimes $(N-M)$ mostres són zero.

La transformada discreta de Fourier o DFT de la seqüència $x[n]$ es defineix així:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1)$$

A vegades es fa explícit el valor de N mitjançant la denominació DFT de N punts (en anglès, N -point DFT). Cal observar que la DFT també és una seqüència de N mostres. La seqüència temporal es pot recuperar a partir dels valors $X[k]$ mitjançant la transformada discreta de Fourier inversa o IDFT, que és donada per:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2)$$

Per fer explícit el valor de N s'utilitza la denominació IDFT de N punts (en anglès, N -point IDFT). Per comprovar que podem recuperar la seqüència temporal, substituïrem l'expressió de la DFT a (2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} km} e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{j \frac{2\pi}{N} k(n-m)} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k(n-m)} \end{aligned} \quad (3)$$

L'últim sumatori de (3) només és diferent de zero quan $n-m$ és zero o un múltiple de N , i en aquest cas val 1. Per tant, aquest terme es pot escriure així:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k(n-m)} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n+rN-m] \quad (4)$$

Podem definir el tren periòdic d'impulsos:

$$t[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n+rN] \quad (5)$$

cosa que ens permet reescriure (3) així:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] t[n-m] = x[n] * t[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN] \quad (6)$$

a partir de la qual definim l'extensió periòdica de la seqüència $x[n]$ amb període N mostres:

$$\bar{x}[n] \triangleq \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN] \quad (7)$$

El resultat a (6) demostra que si l'expressió de la IDFT a (2) s'avalua per a valors de $n = 0, \dots, N-1$, es recupera justament la seqüència $x[n]$, mentre que també es pot avaluar per a qualsevol valor de n ; en aquest cas s'obté l'extensió periòdica

de $x[n]$. Passa el mateix per a l'expressió de la DFT a (1): si s'avalua per a qual-sevol valor de k , també s'obté una seqüència periòdica, ja que les exponencials presents a (1) compleixen:

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+rN)n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \forall r \quad (8)$$

La relació entre les seqüències $x[n]$ i $X[k]$ donades per les expressions (1) i (2) se sol expressar a vegades de manera compacta de la següent manera (en què el valor de N es pot ometre si queda clar pel context):

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}_N} X[k] \quad (9)$$

o d'una manera equivalent:

$$x[n] = \text{DFT}_N\{X[k]\} \quad (10)$$

$$X[k] = \text{IDFT}_N\{x[n]\} \quad (11)$$

Implícitament s'entén que tant n com k s'avaluen només en l'interval $[0, N-1]$ i que, per tant, $x[n]=0$ fora de $0 \leq n \leq N-1$ i $X[k]=0$ fora de $0 \leq k \leq N-1$. Això és una manera de dir que estem interessats en els valors de $x[n]$ només en l'interval $0 \leq n \leq N-1$, perquè $x[n]=0$ és realment zero fora d'aquest interval, i estem interessats en els valors de $X[k]$ només en l'interval $0 \leq k \leq N-1$, perquè són els únics que es necessiten en l'expressió de IDFT a (2). No obstant això, si les expressions (1) i (2) s'avaluen per a valors de n i k fora d'aquest interval, s'obtenen seqüències periòdiques de període N . Aquesta periodicitat inherent sempre hi és present. Algunes vegades causa dificultats i d'altres pot ser profitosa, però no es pot ignorar.

Abans de continuar definirem una notació que s'utilitzarà més endavant. Mitjançant $(n)_N$ expressem l'operació n mòdul N :

$$(n)_N = n \bmod N \quad (12)$$

Per exemple, $(14)_5 = 4$ perquè $14 = 4 + 5 \times 2$, i $(-25)_9 = 2$ perquè $-25 = 2 + 9 \times (-3)$. L'expressió $(n)_N$ sempre torna un nombre en l'interval $[0, N-1]$. Amb aquesta notació, l'extensió periòdica d'un senyal $x[n]$ de durada N també es pot expressar així:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN] = x[(n)_N] \quad (13)$$

Fixeu-vos que aquesta expressió no seria vàlida si la longitud de $x[n]$ fos N mostres més gran i es produís encavalcament entre les diferents rèpliques en el sumatori.

1.2. Relació entre la DFT i la TFSD

Recordem l'expressió genèrica de la TFSD presentada en el mòdul 2:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (14)$$

Ara la particularitzarem per a un senyal $x[n]$ de durada N , el que sempre s'entén, si no es diu el contrari, com que el senyal és zero fora de l'interval $0 \leq n \leq N-1$. En aquest cas, la TFSD es pot escriure així:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} \quad (15)$$

Si es comparen les expressions (1) i (15), la relació següent entre la DFT i la TFSD és evident:

$$X[k] = X(e^{j\omega})_{\omega=2\pi\frac{k}{N}} \quad (16)$$

És a dir, la DFT coincideix amb les mostres de la TFSD a les pulsacions $\omega = 2\pi\frac{k}{N}$.

És molt important destacar que aquesta igualtat es produeix quan el nombre de punts de la DFT és igual o superior a la longitud del senyal $x[n]$. Per aprofundir-hi, imaginem el cas contrari, és a dir, que $x[n]$ té longitud M , en què $M > N$. En aquest cas, les mostres no nul·les de $x[n]$ sobrepassen l'interval $[0, \dots, N-1]$ i, en calcular la DFT de N punts segons (1), s'estan descartant mostres de $x[n]$. Realment s'està calculant la DFT del senyal $x[n]$ enfinestrada per una finestra rectangular $p_N[n]$ de N mostres:

$$v[n] = x[n]p_N[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{per a un altre } n \end{cases} \quad (17)$$

en què:

$$p_N[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{per a un altre } n \end{cases} \quad (18)$$

La TFSD de $v[n]$ és:

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\theta}) P_N(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (19)$$

en què:

$$P_N(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (20)$$

Finalment, podem expressar mitjançant fórmules que, en aquest cas particular que estem considerant, la DFT són les mostres de la TFSD del senyal enfinestrat:

$$X[k] = V(e^{j\omega})_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} \quad (21)$$

És evident que quan la longitud M del senyal $x[n]$ no supera el nombre de punts N de la DFT, aleshores estem en les condicions de partida per a les quals s'ha definit la DFT en el subapartat 1.1 i l'enfinestrament no té cap efecte, de manera que es recupera l'expressió (16).

En l'apartat 2 analitzarem una situació que seria, fins a un cert punt, la recíproca a la plantejada en aquest exemple. Ara hem vist que si fem la DFT amb menys punts que la longitud del senyal, el resultat coincideix amb les mostres de la TFSD del senyal enfinestrat. La situació recíproca té lloc quan es prenen mostres de la TFSD del senyal original, és a dir, de $X(e^{j\omega})$, i es fa la IDFT corresponent. És a dir, en el primer cas es farà la DFT i després es mirarà amb què coincideix el resultat; en canvi, en l'apartat 2 primer realitzarem la TFSD, en farem el mostratge, farem la IDFT i llavors mirarem amb què coincideix el resultat.

1.3. Relació entre la DFT i la sèrie discreta de Fourier

Com vam veure en el mòdul 2, qualsevol senyal periòdic es pot expressar amb la sèrie discreta de Fourier corresponent (SDF, coneguda també per la sigla DFS, del nom en anglès *discrete Fourier series*). Suposem que $z[n]$ és un senyal discret periòdic de període N , és a dir, $z[n] = z[n+rN]$, $\forall r$, llavors la seva expressió en SDF és:

$$z[n] = \sum_{k=0}^{N-1} z_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (22)$$

en què els coeficients de la SDF són:

$$z_k = \text{SDF}\{z[n]\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (23)$$

Imaginem que com a senyal periòdic agafem l'extensió periòdica que hem presentat anteriorment, $\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN]$, i calculem els coeficients de la seva SDF mitjançant (22), que anomenem x_k . Per simple observació de (22) i de la definició de la DFT a (1), és evident que la relació entre la SDF i la DFT és:

$$x_k = \frac{1}{N} X[k] \quad (24)$$

o el mateix, expressat mitjançant una altra notació:

$$\text{SDF}\left\{\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN]\right\} = \frac{1}{N} \text{DFT}_N\{x[n]\} \quad (25)$$

En utilitzar (16) i (25) també podem escriure:

$$\text{SDF}\left\{\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN]\right\} = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})_{\omega=2\pi\frac{k}{N}} \quad (26)$$

Fixeu-vos que (16), (24) i (25) es compleixen si i només si $x[n]$ és una seqüència de longitud igual o inferior a N . En canvi, encara que sembli sorprenent ara mateix, (26) es compleix sempre, independentment de si la longitud de $x[n]$ és més petita, igual o més gran que N . Això es demostrarà en l'apartat 2.

1.4. Representació matricial de la DFT

Si tornem a suposar que $x[n]$ és una seqüència de longitud N , podem organitzar-ne les mostres en un vector columna de dimensions $N \times 1$:

$$x = [x[0] \ x[1] \ \dots \ x[N-2] \ x[N-1]]^T \quad (27)$$

El superíndex T indica l'operació de transposar (és a dir, canviar files per columnes) i, com és habitual, els vectors i les matrius es denoten en negreta. De manera similar, podem ordenar els valors de la DFT en un altre vector:

$$X = [X[0] \ X[1] \ \dots \ X[N-2] \ X[N-1]]^T \quad (28)$$

Definim aquesta matriu de mida $N \times N$, que s'anomena *matriu de la DFT*. A MATLAB es pot obtenir mitjançant la funció `dfmtx(N)`.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (29)$$

És una matriu simètrica i ortogonal (és a dir, qualsevol fila és ortogonal a totes les altres, i passa el mateix per a les columnes) i la seva inversa compleix:

$$\begin{aligned} F^{-1} &= \frac{1}{N} F^* \\ FF^* &= NI \end{aligned} \quad (30)$$

en què I és la matriu identitat i el superíndex $*$ indica el complex conjugat.

A partir d'aquestes definicions i de la simple observació de (1) i (2), es pot escriure directament la DFT, es pot calcular de manera matricial així:

$$X = FX \quad (31)$$

i la IDFT com:

$$x = \frac{1}{N} F^* X \quad (32)$$

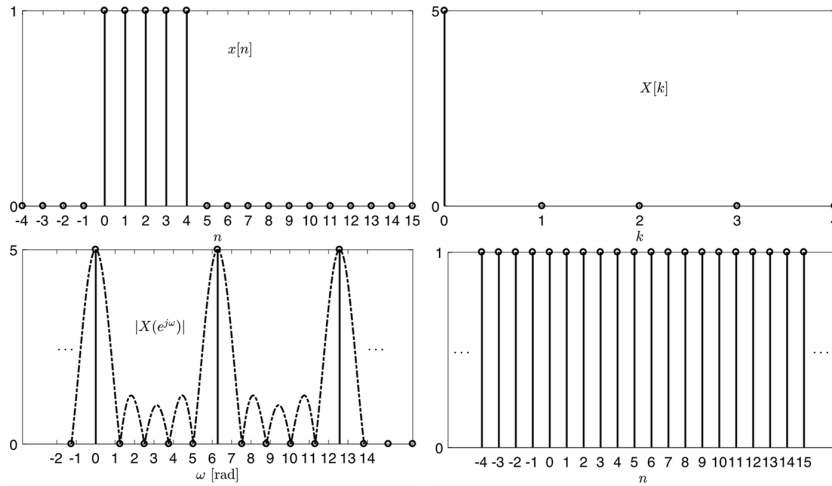
Exemple 1. DFT d'un pols rectangular

Per il·lustrar el càlcul de la DFT d'una seqüència de durada finita, considerem la $x[n]$ que mostra la figura 1a. Es tracta d'un pols rectangular de 5 mostres, així que podem considerar que longitud és qualsevol valor igual o superior a 5. Triem en primer lloc un valor $N = 5$. La DFT, que surt a la figura 1b, val:

$$X[k] = \sum_{n=0}^4 e^{-j\frac{2\pi}{5}kn} = \begin{cases} 5, & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (33)$$

A la figura 1c es comprova que la DFT coincideix amb les mostres de $X(e^{j\omega})$ preses en les pulsacions $\omega = \frac{2\pi}{5}k$. El fet que la DFT només tingui una mostra per a $k = 0$ és coherent amb el fet que l'extensió periòdica de $x[n]$ amb període 5 mostres, anomenada $\tilde{x}[n]$, és una seqüència constant, com es pot observar a la figura 1d. En el desenvolupament en sèrie de Fourier d'una seqüència constant, l'únic coeficient diferent de zero és el primer, ja que correspon a la freqüència zero. A partir de la relació entre la DFT i la SDF, és lògic que només el primer coeficient de la DFT pugui ser diferent de zero.

Figura 1. Exemple de càlcul de la DFT



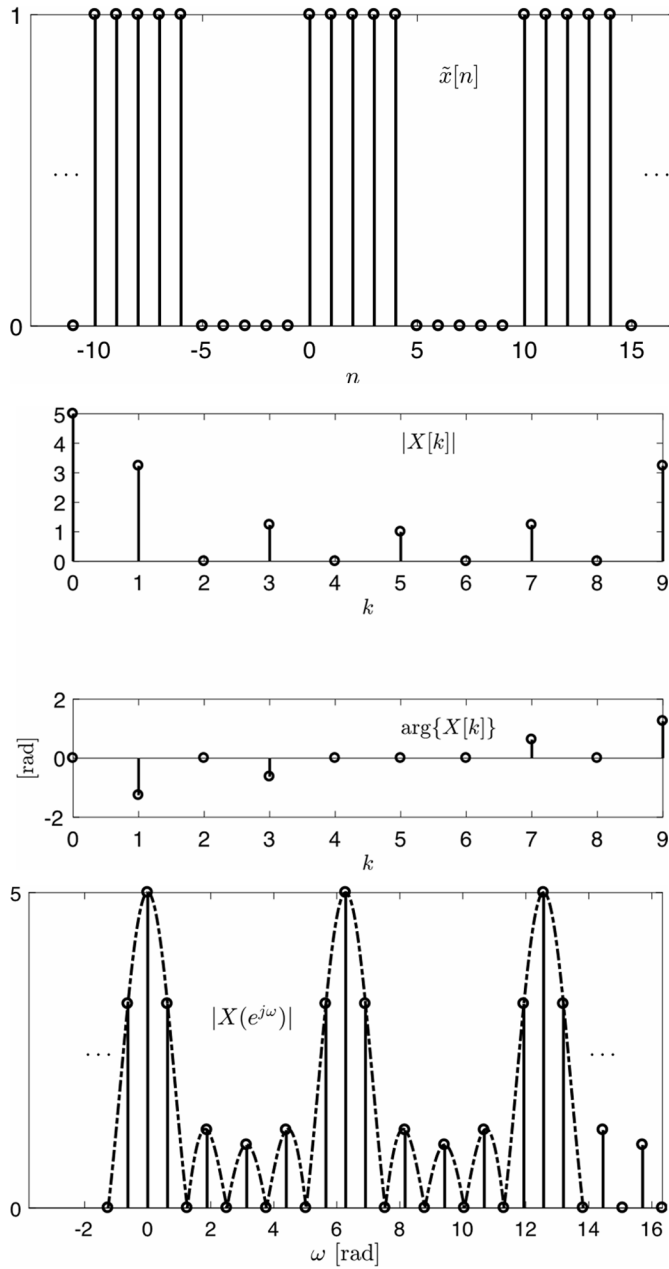
(a) Pols rectangular $x[n]$. (b) DFT de $x[n]$ per a $N = 5$. (c) Mostratge en freqüència de $X(e^{j\omega})$. (d) Extensió periòdica $\tilde{x}[n]$ per a $N = 5$.

En segon lloc, vam triar un valor $N = 10$. En aquest cas, l'extensió periòdica, que es mostra a la figura 2a, ja no és un senyal continu. Per tant, la DFT ja no podrà ser no nul·la només en el cas de $k = 0$. Concretament, els valors de la DFT són:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k5}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k}} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{5}k}} \quad (34)$$

Es tracta de valors complexos en general, el mòdul i la fase dels quals apareixen a la figura 2b. Com en el cas anterior, els valors de la DFT es poden obtenir com les mostres de $X(e^{j\omega})$. Cal destacar que el valor de $X(e^{j\omega})$ no ha canviat; és la TFSD d'un pols de 5 mostres, independentment del valor de N , que és un paràmetre necessari per a la DFT, però no per a la TFSD. El que sí que han canviat són els punts de mostratge en freqüència, que en aquest cas són $\omega = \frac{2\pi}{5}k$.

Figura 2. Exemple de càlcul de la DFT



(a) Extensió periòdica $\tilde{x}[n]$ per a $N = 10$. (b) DFT de $\tilde{x}[n]$ per a $N = 10$. (c) Mostratge en freqüència de $X(e^{j\omega})$.

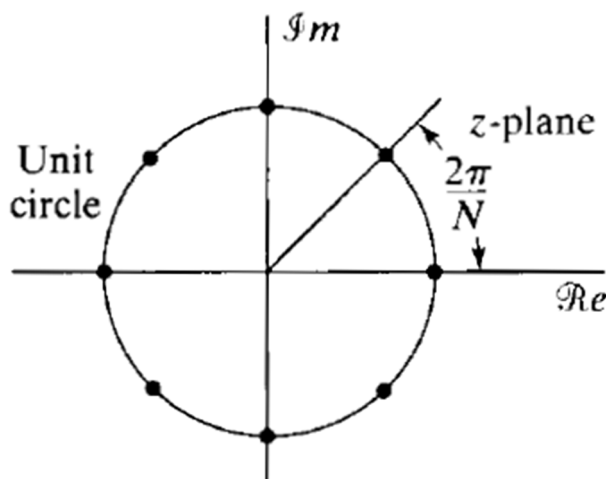
2. Mostatge en freqüència de la TFSD

En aquest apartat discutirem de manera general la relació entre una seqüència qualsevol $y[n]$ amb transformada de Fourier $Y(e^{j\omega})$ i la seqüència obtinguda en aplicar la IDFT a mostres equiespaiades en freqüència de $Y(e^{j\omega})$. Com que en principi el senyal de partida és absolutament general i ni tan sols ha de ser de longitud finita, hem preferit anomenar-lo $y[n]$, en comptes de $x[n]$, per evitar confusions.

Suposem que $\tilde{Y}[k]$ és la seqüència obtinguda de fer el mostatge de la TFSD de $y[n]$ a les pulsacions $\omega_k = 2\pi k / N$, tal com es representa a la figura 3.

$$\tilde{Y}[k] = Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} \quad (35)$$

Figura 3. Punts del cercle unitat en què es mostreja la TFSD ($N = 8$)



Ara calculem la IDFT de N punts de $\tilde{Y}[k]$:

$$\tilde{y}[n] = \text{IDFT}_N\{\tilde{Y}[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Y}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (36)$$

Atès que no hem fet cap suposició sobre $y[n]$, la seva TFSD es pot expressar així:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j\omega n} \quad (37)$$

Substituïm (37) a (35) i el resultat, al seu torn, el substituïm a (36), amb la qual cosa queda:

$$\tilde{y}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m] e^{-j2\pi \frac{k}{N} m} e^{j2\pi \frac{k}{N} kn} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k}{N} k(n-m)} \quad (38)$$

en què hem intercanviat l'ordre dels sumatoris en l'últim pas. L'últim sumatori que surt a (38) ja fou avaluat arran de l'equació (3) i, per tant, ja podem escriure directament:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m] \delta[n-m] = y[n] * \delta[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} y[n+rN] \quad (39)$$

que vol dir que obtenim l'extensió periòdica de $y[n]$. Això vol dir que si fem la IDFT de N punts de N mostres equiespaiades en freqüència de $Y(e^{j\omega})$ obtindrem l'extensió periòdica de $y[n]$, que està formada per la suma d'infinites rèpliques de $y[n]$ desplaçades a tots els múltiples de N .

Aquest resultat també el podem escriure així:

$$\text{IDFT}_N \left\{ Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} \right\} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} y[n+rN] \quad (40)$$

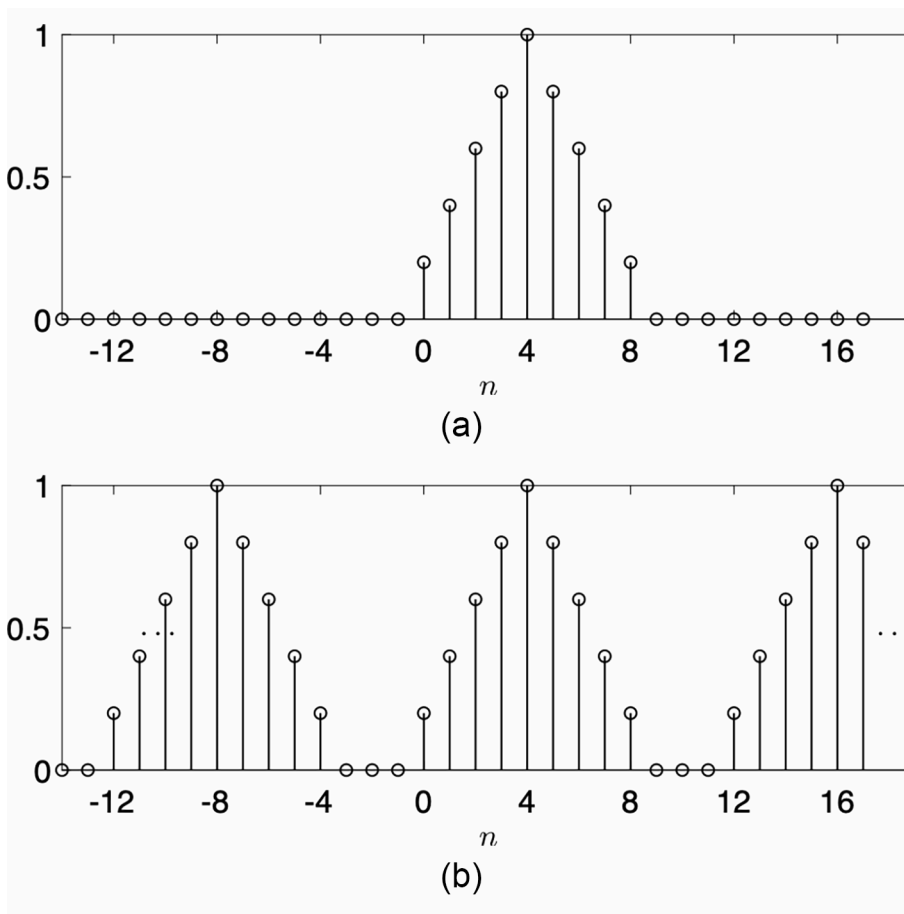
Podem distingir dues situacions:

Cas 1. La longitud de $y[n]$ és més petita o igual que N . Aquest cas correspon al plantejament fet en els subapartats 1.1 i 1.2. En l'extensió periòdica

$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} y[n+rN]$ no hi ha encavalcament entre rèpliques i, en fer la IDFT de les mostres de la TFSD, recuperem les mostres del senyal original, tal com es representa en l'exemple de la figura 4. A partir d'un període de l'extensió periòdica recuperem el senyal original, la qual cosa equival a dir que a partir de les mostres $Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}}$ de la TFSD podem recuperar la $Y(e^{j\omega})$ completament.

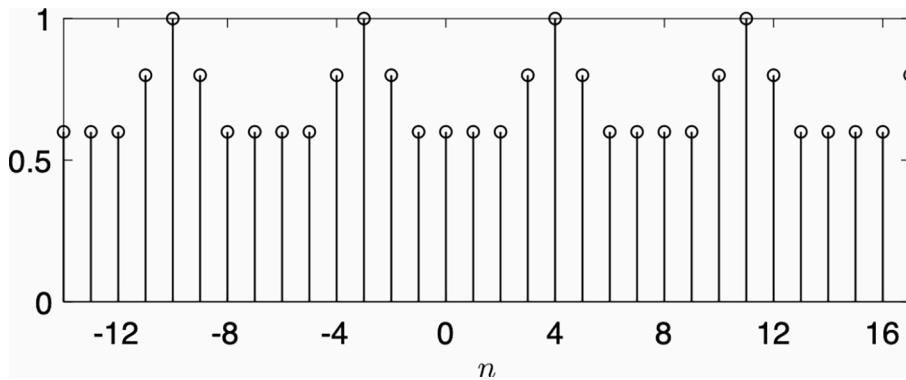
Això és bastant lògic perquè el senyal $y[n]$ té una longitud de $M=9$ mostres i hem pres dotze mostres en freqüència, que són suficients per representar el senyal original. Es pot plantejar la interpolació de $Y(e^{j\omega})$ a partir de les seves mostres, però això no forma part dels objectius del curs.

Figura 4. (a) Senyal $y[n]$ de longitud 9 mostres. (b) Extensió periòdica de $y[n]$, obtinguda en mostrejar la TFSD a $N = 12$ punts i fer la IDFT



Cas 2. La longitud de $y[n]$ és més gran que N . En aquest cas hi ha encavalca-

ment entre les rèpliques $\sum_{r=-\infty}^{+\infty} y[n+rN]$ i, en fer la IDFT de les mostres de la TFSD, no recuperem les mostres del senyal original, tal com es representa en l'exemple de la figura 5. En aquest cas, un període de l'extensió periòdica de $y[n]$ no coincideix amb $y[n]$. Equivalentment, això vol dir que en el domini de la freqüència a partir de 7 mostres $Y(e^{j\omega})_{\omega=2\pi\frac{k}{N}}$ no podem recuperar $Y(e^{j\omega})$ completament. No hem pogut representar un senyal de longitud 9 mostres mitjançant únicament 7 mostres en freqüència. En intentar fer-ho, s'ha produït un efecte d'aliàsing temporal, que és el dual a l'efecte d'aliàsing en freqüència quan es mostra un senyal analògic a una freqüència massa baixa.

Figura 5. Extensió periòdica de $y[n]$, obtinguda en mostrejar la TFSD a $N = 7$ punts i fer la IDFT

Aquests dos casos revelen que per representar una seqüència de longitud M calen, almenys, $N \geq M$ mostres de la seva TFSD. Si s'utilitzen menys mostres freqüencials es produirà encavalcament temporal; però si s'utilitzen M o més mostres freqüencials, sí que es pot recuperar la seqüència original sense haver de conèixer-ne o emmagatzemar-ne la TFSD per a tots els valors de freqüència. Això és justament el que fa la DFT i on rau el seu gran potencial, ja que permet representar un vector de valors en el domini del temps mitjançant un altre vector de valors en el domini de la freqüència.

3. Propietats de la DFT

En aquest apartat es presentaran les principals propietats de la DFT de seqüències de durada finita (com no pot ser d'una altra manera, perquè la DFT només és definida per seqüències de durada finita). Algunes de les propietats tenen un paral·lelisme total amb les propietats de la TFSD, com és lògic, atès que, en certes condicions i com s'ha explicat en el subapartat 1.2, la DFT coincideix amb mostres de la TFSD; en aquest cas, la presentació de la propietat corresponent es farà de manera concisa, ja que tan sols es farà èmfasi en els aspectes diferencials de la DFT pel que fa a la TFSD. D'altra banda, les propietats específiques de la DFT, que no tenen un paral·lelisme directe amb la TFSD, es presentaran detalladament.

3.1. Linealitat

Suposem que $x_1[n]$ i $x_2[n]$ són seqüències de longituds N_1 i N_2 , respectivament. La combinació lineal d'aquestes seqüències és:

$$x_3[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \quad (41)$$

Si triem un valor de N tal que $N \geq \max\{N_1, N_2\}$, aleshores es compleix el següent:

$$x_3[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}_N} a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k] \quad (42)$$

en què:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\xleftrightarrow{\text{DFT}_N} X_1[k] \\ x_2[n] &\xleftrightarrow{\text{DFT}_N} X_2[k] \end{aligned} \quad (43)$$

3.2. Desplaçament circular

Recordem, en primer lloc, la propietat de desplaçament de la TFSD. Si $X(e^{j\omega})$ és la TFSD de la seqüència $x[n]$, aleshores $X(e^{j\omega})e^{-j\omega m}$ és la TFSD de la seqüència desplaçada m mostres, $x[n-m]$. Aquesta propietat no es pot aplicar directament a la DFT perquè, en aplicar un desplaçament de m mostres, el suport de la $x[n-m]$ deixa de ser $0 \leq n \leq N-1$, tot i que aquest sigui el suport de la seqüència $x[n]$. Això faria que quedessin mostres de $x[n-m]$ fora de la finestra de la DFT en aplicar aquesta transformada directament a $x[n-m]$. En el cas de

la DFT, hi ha una propietat similar a la propietat de desplaçament de la TFSD si utilitzem el desplaçament circular (a vegades anomenat *cíclic*). Podem enunciar la propietat de la manera següent:

$$\begin{aligned} x[n] &\xleftrightarrow{DFT_N} X[k] \\ x[(n-m)_N] &\xleftrightarrow{DFT_N} X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \end{aligned} \quad (44)$$

La demostració és senzilla a partir de resultats que ja s'han presentat. Atès que $X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$ són les mostres en freqüència de $X(e^{j\omega})e^{-j\omega m}$, la TFSD inversa de les quals és $x[n-m]$, aleshores, utilitzant la propietat de mostratge freqüencial (40), podem escriure:

$$\text{IDFT}_N\{X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\} = \text{IDFT}_N\left\{X(e^{j\omega})e^{-j\omega m}\right\}_{\omega=2\pi\frac{k}{N}} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-m+rN] \quad (45)$$

Finalment, recordant la notació de (12) i (13) per expressar l'operació mòdul, l'últim terme de (45) es pot expressar com es reproduïx a continuació i, d'aquesta manera, obtenim el resultat que volíem demostrar:

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-m+rN] = x[(n-m)_N] \quad (46)$$

En definitiva, la multiplicació de la DFT pel factor $e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$ es tradueix en un desplaçament de m mostres de l'extensió periòdica de la seqüència $x[n]$, que equival a un desplaçament circular de $x[n]$.

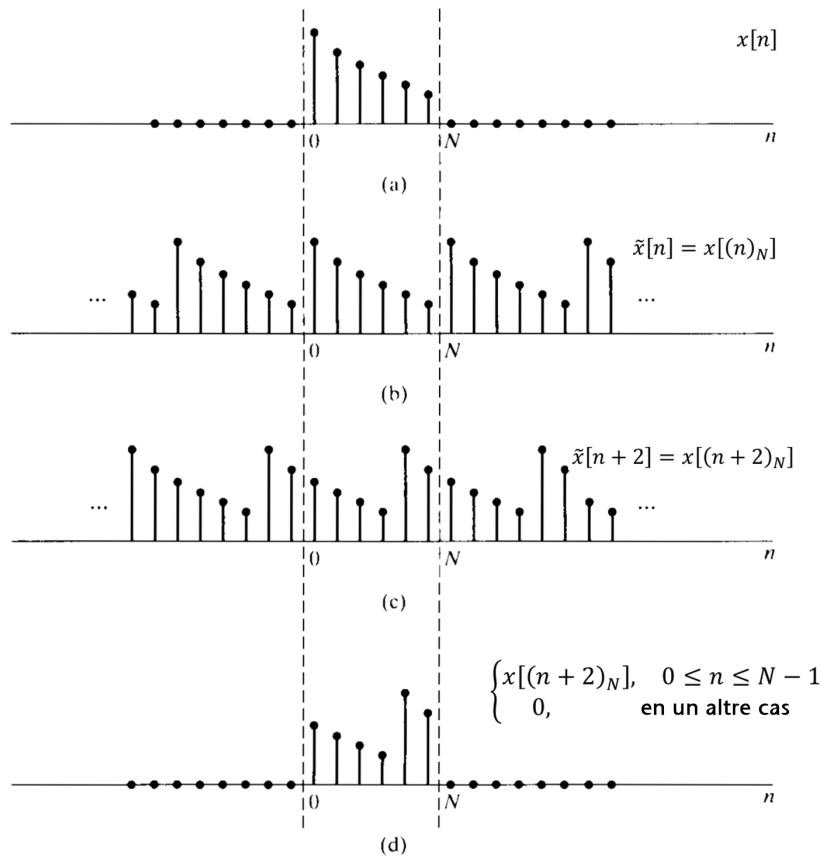
També és habitual anomenar l'operació de desplaçament circular *rotació*.

Exemple 2. Desplaçament circular d'una seqüència

El procediment del desplaçament circular s'il·lustra gràficament a la figura 6 per al cas de $m = -2$ i $N = 6$. A la figura 6a es mostra el senyal original $x[n]$ i es vol calcular $x[(n+2)_6]$, el senyal que té com a DFT $X[k]e^{-j\frac{2\pi}{3}k}$. A la figura 6b es mostra l'extensió periòdica de $x[n]$, mentre que a la figura 6c es dibuixa aquesta extensió periòdica avançada 2 mostres, i que un cop restringida de nou a l'interval $0 \leq n \leq 5$ resulta en la figura 6d. En comparar la figura 6a i la figura 6d resulta evident que aquesta última no és el resultat d'aplicar un desplaçament lineal a la primera, sinó que les mostres que «surten» per un extrem de l'interval $[0, N-1]$ s'introdueixen per l'altre costat de l'interval.

Una altra observació interessant que es pot fer és que el resultat seria el mateix si s'hagués considerat $m = 4$, ja que el fet de desplaçar circularment la seqüència 2 mostres en un sentit és equivalent a desplaçar-la circularment 4 mostres cap a l'altre. En el domini de la DFT, això s'obté perquè $e^{-j\frac{2\pi}{6}k(-2)} = e^{-j\frac{2\pi}{6}k(6-2)} = e^{-j\frac{2\pi}{6}k4}$.

Figura 6. Desplaçament circular d'una seqüència; efecte en el domini temporal de la multiplicació de la DFT per un factor de fase lineal



3.3. Dualitat

Atesa la similitud entre les expressions de la DFT (1) i de la IDFT (2), que només es diferencien en el factor N i en el signe de l'exponencial, és natural que la DFT mostri dualitat, com passa en el cas de la SDF. Recordem, però, que la TFSD no té la propietat de dualitat; en canvi, sí que es presentava en la transformada de Fourier de senyals analògics.

La propietat de dualitat de la DFT es pot expressar així:

$$\begin{aligned} x[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X[k] \\ X[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} Nx[(-k)_N], \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (47)$$

Es pot demostrar de la manera següent:

$$DFT_N\{X[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} X[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = N \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right) = N \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X[l]e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)l} \right) \quad (48)$$

en què l'últim terme entre parèntesi de l'expressió anterior és igual a la IDFT de $X[l]$, és a dir, la seqüència original, però avaluada en la mostra 0 per a $k = 0$ i en la mostra $N - k$ per a $k = 1, \dots, N - 1$.

Exemple 3. Dualitat

Suposem que $x[n]$ és una seqüència de longitud N , per a la qual en calcula la DFT i el resultat l'anomena $y[k]$. Tot seguit, fa la DFT de $y[n]$, i el resultat l'anomena $z[n]$. A MATLAB®, això seria tan senzill com fer: $z = \text{fft}(\text{fft}(x))$.

L'aplicació directa de la propietat (47) permet escriure:

$$\begin{aligned} z[0] &= Nx[0] \\ z[1] &= Nx[N-1] \\ z[2] &= Nx[N-2] \\ &\vdots \\ z[N-2] &= Nx[2] \\ z[N-1] &= Nx[1] \end{aligned} \quad (49)$$

Si $x[n] = \{1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, 0\}$ i $N = 10$, aleshores $z[n] = \{10, 0, 0, 0, 0, 0, 50, 40, 30, 20\}$.

3.4. Propietats de simetria

Considerem, en primer lloc, les dues propietats següents:

$$\begin{aligned} x[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X[k] \\ x^*[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X^*[-k]_N, \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} x[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X[k] \\ x^*[-n]_N, \quad 0 \leq n \leq N-1 &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X^*[k] \end{aligned} \quad (51)$$

Totes dues es poden obtenir fàcilment a partir de la corresponent propietat de la TFSD i de la relació entre la DFT i les mostres de la TFSD presentada en el subapartat 1.2. Això ho deixem com a exercici de l'estudiant i aquí presentarem la demostració directa. Per demostrar (50) podem escriure:

$$\text{DFT}_N\{x^*[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right)^* = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n} \right)^* \quad (52)$$

en què el darrer terme dins dels parèntesis és la DFT de $x[n]$ avaluada en la mostra 0 per a $k = 0$ i en la mostra $N - k$ per a $k = 1, \dots, N - 1$.

Podem demostrar (51) mitjançant aquesta successió d'igualtats, en què tots els passos trivials són manipulacions algebraïques trivials:

$$\begin{aligned}
 DFT_N \left\{ x^*[-n]_N \right\} &= x^*[0] + \sum_{n=1}^{N-1} x^*[N-n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \\
 &= x^*[0] + \sum_{l=1}^{N-1} x^*[l] e^{-j \frac{2\pi}{N} k(N-l)} = \sum_{l=1}^{N-1} x^*[l] e^{j \frac{2\pi}{N} kl} = \left(\sum_{l=1}^{N-1} x^*[l] e^{-j \frac{2\pi}{N} kl} \right)^* \quad (53)
 \end{aligned}$$

En combinar (50) i (51), és immediat comprovar que:

$$x[-n]_N, \quad 0 \leq n \leq N-1 \xleftrightarrow{DFT_N} X[-k]_N, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (54)$$

A partir de (50), també és directe obtenir que si $x[n]$ és una seqüència real, aleshores:

$$X[k] = X^*[-k]_N, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (55)$$

que és una propietat anàloga a la simetria hermítica de la TFSD de seqüències reals.

Utilitzant aquestes propietats de dualitat (47) i la simetria (54), podem observar que la IDFT es pot implementar mitjançant la DFT. Imaginem que tenim els valors de $X[k]$ i volem calcular-ne la IDFT, però només disposem d'una funció que ens permet calcular la DFT. Una manera de solucionar-ho és aprofitar que:

$$\frac{1}{N} DFT_N \left\{ X[-n]_N \right\} = x[k] \quad (56)$$

Es pot comprovar aquest resultat amb MATLAB®. En primer lloc, s'ha de calcular la DFT de $x[n]$ i el resultat s'anomena $i[n]$, és a dir, $y = \text{fft}(x)$. Si ara es vol recuperar el valor de x a partir de i , es pot dur a terme, evidentment, fent $\text{ifft}(y)$, però si per algun motiu el programari no disposés de la funció $\text{ifft}()$, s'obtidria el mateix resultat fent $1/N * \text{fft}(y([0 \ N-1:-1:1]))$.

Per presentar un segon conjunt de propietats passem a definir dues seqüències:

1) component periòdica hermítica de $x[n]$, anomenada $x_{ep}[n]$.

$$x_{ph}[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x^*[-n]_N) = \begin{cases} \text{Re}\{x[0]\}, & n=0 \\ \frac{1}{2} (x[n] + x^*[N-n]), & 1 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{altres } n \end{cases} \quad (57)$$

2) component periòdica antihermítica de $x[n]$, anomenada $x_{pa}[n]$.

$$x_{pa}[n] = \frac{1}{2} \left(x[n] - x^*[-n]_N \right) = \begin{cases} j \operatorname{Im}\{x[0]\}, & n=0 \\ \frac{1}{2}(x[n] - x^*[N-n]), & 1 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{altres } n \end{cases} \quad (58)$$

Si $x_{ph}[n]$ o $x_{pa}[n]$ són seqüències reals, s'anomenen component periòdica parell o component periòdica imparell, respectivament.

En utilitzar (51) s'obté directament:

$$\begin{aligned} x_{ph}[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} \operatorname{Re}\{X[k]\} \\ x_{pa}[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} \operatorname{Im}\{X[k]\} \end{aligned} \quad (59)$$

En utilitzar (50) es poden escriure aquests parells de transformades:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{x[n]\} &= \frac{1}{2}(x[n] + x^*[n]) \stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_{ph}[k] \\ \operatorname{Im}\{x[n]\} &= \frac{1}{2}(x[n] - x^*[n]) \stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_{pa}[k] \end{aligned} \quad (60)$$

en què les components periòdiques conjugades simètrica i antisimètrica de la transformada es defineixen de manera anàloga a (57) i (58), és a dir, $X_{ph}[k] = \frac{1}{2}(X[k] + X[-k]_N)$ i $X_{pa}[k] = \frac{1}{2}(X[k] - X[-k]_N)$.

Per acabar, només cal assenyalar que $x_{ph}[n]$ i $x_{pa}[n]$ no són el mateix que les components hermítica i antihermítica de $x[n]$ definides en estudiar les propietats de la TFSD. Aquestes components hermítica i antihermítica es defineixen així:

$$\begin{aligned} x_h[n] &= \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) \\ x_a[n] &= \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) \end{aligned} \quad (61)$$

i la seva relació amb les components definides abans és:

$$\begin{aligned} x_{ph}[n] &= x_h[n] + x_h^*[n-N], & 0 \leq n \leq N-1 \\ x_{pa}[n] &= x_a[n] + x_a^*[n-N], & 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad (62)$$

3.5. Modulació

Com passa en el cas de la TFSD, el fet de multiplicar el senyal en el domini temporal per una exponencial complexa es tradueix en un desplaçament freqüencial. Amb tot, en treballar amb la DFT això no passa per a qualsevol

frequència de modulació, sinó únicament quan la freqüència de modulació coincideix amb alguns dels punts en els quals la DFT mostreja el domini de la freqüència, és a dir, per a $\omega_l = \frac{2\pi}{N}l$.

Per tant, la propietat de modulació es pot enunciar de la manera següent:

$$\begin{aligned} x[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X[k] \\ x[n]e^{j\frac{2\pi}{N}ln} &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X[(k-l)_N], \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (63)$$

Aquesta propietat es pot establir aplicant la propietat desplaçament circular (44) a la relació dual expressada a (47).

Per a altres freqüències de modulació, no hi ha cap expressió senzilla que relacioni la DFT de la seqüència modulada amb la DFT de la seqüència original. En aquests casos, únicament es pot dir que la DFT de la seqüència modulada són les mostres de la TFSD d'aquesta seqüència, i aquesta TFSD sí que s'obté desplaçant la TFSD de la seqüència original.

3.6. Convulsió circular

Sabem que la TFSD de la convulsió (a vegades anomenada *convulsió lineal*, per distingir-la de la que veurem a continuació) de dues seqüències és el producte de les TFSD. Ara volem obtenir una propietat similar per al cas de la DFT. Per fer-ho, considerem dues seqüències $x_1[n]$ i $x_2[n]$ de longitud N , amb les DFT corresponents. Recordem que:

$$x_1[n] * x_2[n] \stackrel{TFSD}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) \quad (64)$$

Volem determinar la seqüència que té la DFT igual a $X_1[k]X_2[k]$. Atès que $X_1[k]X_2[k]$ són les mostres en freqüència de $X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$, en utilitzar els resultats de l'apartat 2 sabem que la IDFT de $X_1[k]X_2[k]$ és igual a l'extensió periòdica de $\tilde{c}[n] = x_1[n] * x_2[n]$. Utilitzem la titlla per denotar l'extensió periòdica, i aleshores:

$$\tilde{c}[n], \quad 0 \leq n \leq N-1 \stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_1[k]X_2[k] \quad (65)$$

Ara recuperem les diferents maneres d'escriure l'extensió periòdica introduïdes en el subapartat 1.1 per poder expressar:

$$\check{c}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c[n+rN] = c[n] * t[n] = x_1[n] * x_2[n] * t[n] \quad (66)$$

Com que la convolució compleix les propietats commutativa i associativa, $\check{c}[n]$ es pot escriure de dues maneres equivalents:

$$\begin{aligned} \check{c}[n] &= (x_1[n] * t[n]) * x_2[n] = \tilde{x}_1[n] * x_2[n] \\ \check{c}[n] &= x_1[n] * (x_2[n] * t[n]) = x_1[n] * \tilde{x}_2[n] \end{aligned} \quad (67)$$

que es tracta de la convolució d'una de les seqüències amb l'extensió periòdica de l'altra (que no és la convolució de les dues extensions periòdiques). L'operació resultant de calcular les mostres de $\check{c}[n]$ en l'interval $0 \leq n \leq N-1$ s'anomena *convolució circular* (o *cíclica*) de N punts i es denota com $x_1[n] \otimes x_2[n]$.

Finalment, podem enunciar el teorema de convolució circular així:

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}_N} X_1[k] X_2[k] \quad (68)$$

Expressions explícites de la convolució circular són:

$$\begin{aligned} x_1[n] \otimes x_2[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \tilde{x}_2[n-m] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n-m] x_2[m] = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[(n-m)_N] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[(n-m)_N] x_2[m] \end{aligned} \quad (69)$$

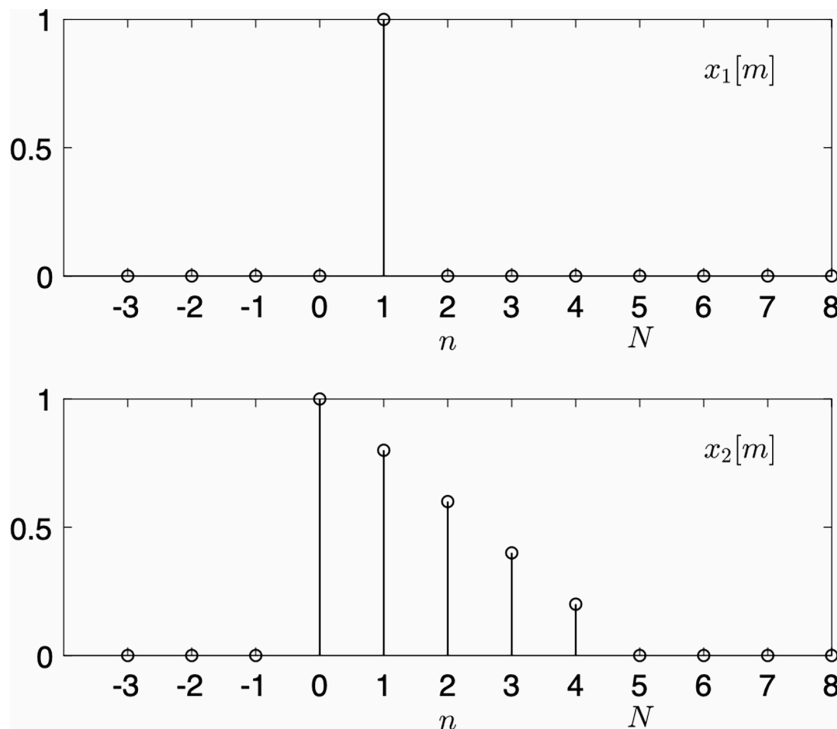
a partir de les quals queda clarament justificat el seu nom. Mentre que la convolució lineal es calcula multiplicant una seqüència per una versió invertida en temps i successivament desplaçada de l'altra seqüència, la convolució circular s'obté multiplicant una seqüència per una versió circularment invertida en temps i circularment desplaçada de l'altra seqüència. Aquesta interpretació permet visualitzar fàcilment la convolució circular de manera gràfica, com veurem en els exemples següents.

És evident que la convolució circular, igual que la convolució lineal, satisfà la propietat commutativa. Però a diferència de la convolució lineal, el resultat de la qual depèn únicament de les seqüències, el resultat de la convolució circular depèn del valor de N . En parlar de la convolució circular ha de quedar clar quin valor de N s'està utilitzant; sense el valor de N la convolució circular no està definida.

Exemple 4. Convulsió circular amb un impuls retardat

Suposem que $x_1[n] = \delta[n-1]$ i $x_2[n]$ són dues seqüències, tal com mostra la figura 7. Efectivament, el valor de $N = 5$ és igual o més gran que la longitud de les dues seqüències.

Figura 7. Representació gràfica dels senyals de l'exemple



A la figura 8 es pot observar l'aspecte de $x_2[(n-m)_N]$ per a dos valors de n . Aquesta seqüència és la que s'ha de multiplicar, mostra a mostra, per $x_1[m]$ per obtenir la convulsió circular, segons (69), i que apareix a la figura 9. El resultat coincideix amb un desplaçament circular d'una mostra a la dreta del senyal $x_2[n]$.

Aquest mateix resultat es podria haver obtingut de manera més senzilla mitjançant el teorema de la convulsió circular i la propietat del desplaçament circular de la DFT. El producte de $X_2[k]$ per $X_1[k] = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ és justament $e^{j\frac{2\pi}{N}k}X_2[k]$, i aplicant (44) s'obté directament que la IDFT és $x_2[(n-1)_N]$.

Figura 8. Efecte d'invertir circularment en temps i desplaçar circularment la seqüència x_2

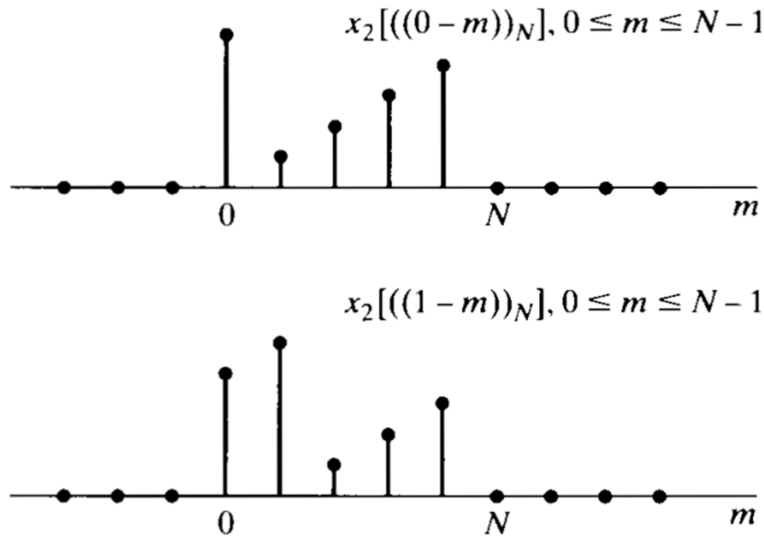
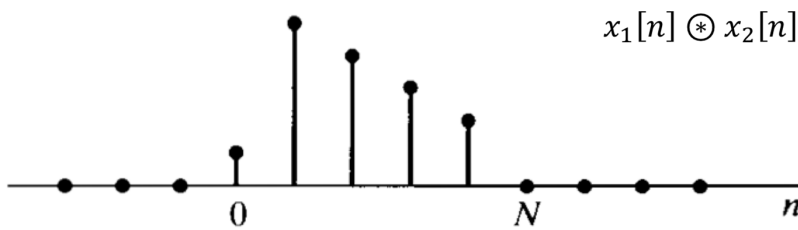


Figura 9. Resultat de la convolució circular



Exemple 5. Convolució circular de dos polsos rectangulars

Ara farem la convolució de dos polsos rectangulars (vegeu la figura 10) de longitud $L = 6$ mostres. En aquest cas es compleix que $x_1[n]=x_2[n]$ i considerarem dos possibles valors de N per comprovar que, efectivament, la correlació circular depèn del valor de N .

En primer lloc, triem $N = 6$. Com que qualsevol rotació circular de la seqüència $x_2[n]$ també dona un pols rectangular de 6 mostres, tots els termes de $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[(n-m)_N]$ valen 1 i la seva suma és igual a 6. Per tant, $x_1[n] \otimes x_2[n]$ és un pols rectangular d'amplitud igual a 6. Aquest resultat també s'hauria obtingut fàcilment treballant en el domini de la freqüència, atès que:

$$X_1[k] = X_2[k] = \begin{cases} 6, & k = 0 \\ 0, & \text{en un altre cas} \end{cases} \quad (70)$$

i, per tant, $X_1[k]X_2[k]$ és només diferent de 0 per a $k = 0$ i en aquest punt val 36.

En segon lloc, escollim $N = 12$. Calcularem la convolució circular mitjançant l'expressió $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[(n-m)_N]$ que surt a (70). Per fer-ho, mostrem a la figura 11 la seqüència $x_2[(n-m)_N]$ per a dos valors de n . En multiplicar aquesta seqüència per $x_1[m]$ i sumar-ne les mostres, es calcula el valor de la convolució circular pel valor corresponent de n .

És fàcil obtenir gràficament que el resultat final sigui el que es mostra a la figura 12. Es pot comprovar el resultat utilitzant la funció de la convolució circular a MATLAB®: `cconv(x1, x2, 12)`. En aquest cas, obtenir la sèrie temporal a partir de les DFT hauria estat més complicat, ja que:

$$X_1[k]X_2[k] = \left(\frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}LN}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}}} \right)^2 \quad (71)$$

Figura 10. Senyals de partida i convolució circular

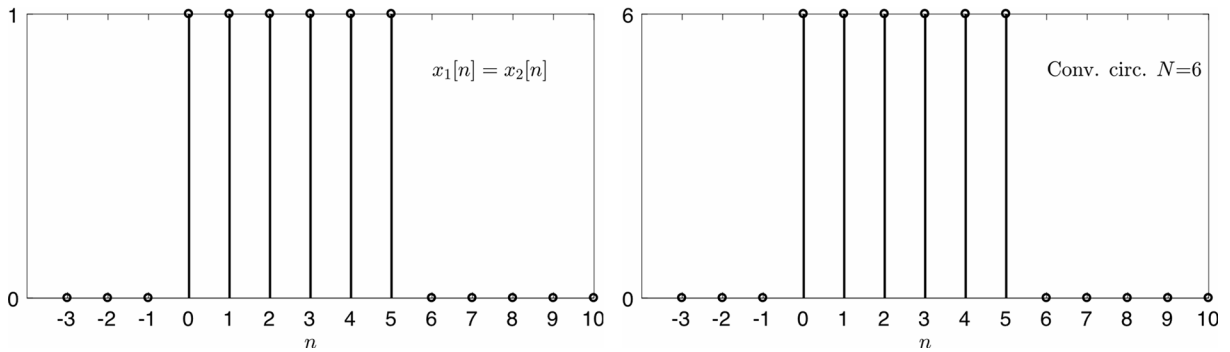


Figura 11. Efecte d'invertir circularment en temps i desplaçar circularment la seqüència x_2

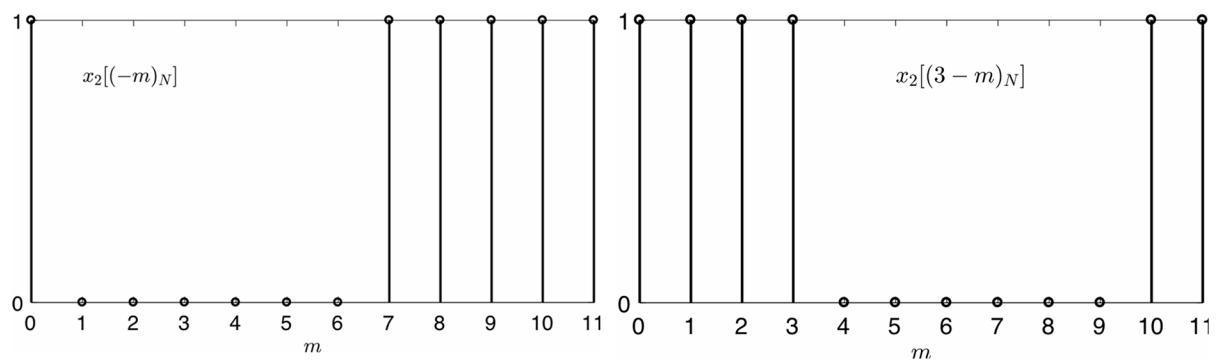
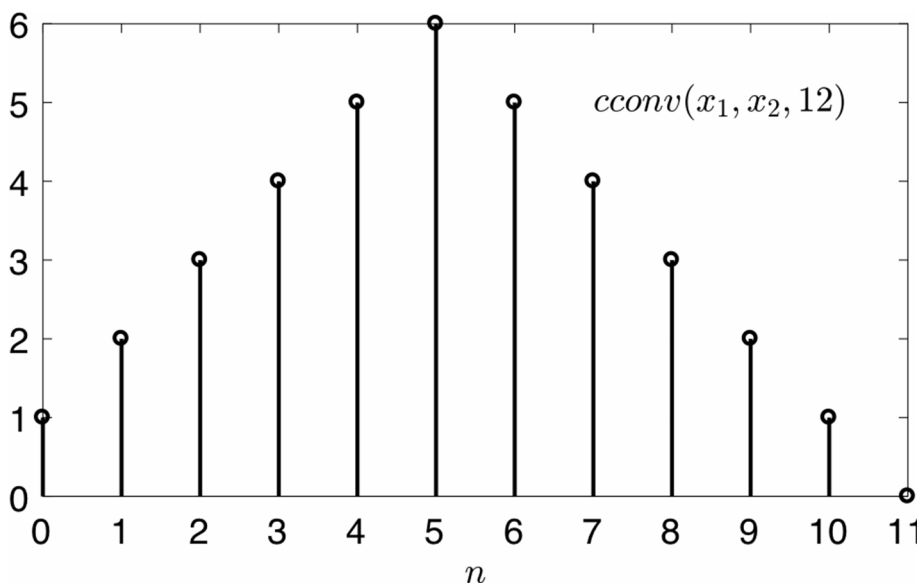


Figura 12. Convolució circular de dos polsos rectangulars de 6 mostres utilitzant $N = 12$



3.7. Producte (o enfinestrament) de seqüències

A partir del teorema de la convolució circular i de la propietat de dualitat podem escriure:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_1[k] \\ x_2[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_2[k] \\ x_1[n]x_2[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} X_1[k] \otimes X_2[k] \end{aligned} \quad (72)$$

3.8. Igualtat de Parseval

La igualtat de Parseval estableix que l'energia d'una seqüència es pot calcular de la mateixa manera (excepte un factor d'escala) a partir de la seva representació temporal i de la seva representació freqüencial:

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \quad (73)$$

La demostració d'aquesta propietat és fàcil a partir de la representació matricial de la DFT explicada en el subapartat 1.4:

$$E_x = x^H x = \left(\frac{1}{N} F^* X\right)^H \left(\frac{1}{N} F^* X\right) = \frac{1}{N^2} X^H F F^* X = \frac{1}{N^2} X^H (NI) X = \frac{1}{N} X^H X \quad (74)$$

en què el superíndex H indica el càlcul de l'hermítica, és a dir, la conjugació i transposició. També es pot demostrar la igualtat de Parseval a partir de la relació de la convolució circular amb la DFT. En fer ús de les definicions de convolució circular i de la IDFT:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = (x[n] \otimes x^*[-n]_N)_{n=0} = \text{IDFT}\{X[k]X^*[k]\}_{n=0} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]X^*[k] \quad (75)$$

3.9. Resum de les propietats de la DFT

La taula 1 conté un resum de les propietats de la DFT explicades en els subapartats anteriors.

Taula 1. Propietats fonamentals de la DFT

Propietat	Senyal temporal	DFT
	$x[n]$	$X[k]$
	$x_1[n]$	$X_1[k]$
	$x_2[n]$	$X_2[k]$

Propietat	Senyal temporal	DFT
Linealitat	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1[k] + a_2X_2[k]$ cal que $N \geq \max\{N_1, N_2\}$
Desplaçament circular	$x[(n-m)_N]$	$X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$
Dualitat	$X[n]$	$Nx[(-k)_N]$
Conjugació complexa	$x^*[n]$	$X^*[(-k)_N]$
Conjugació complexa i inversió temporal circular	$x^*[(-n)_N]$	$X^*[k]$
Inversió temporal circular	$x[(-n)_N]$	$X[(-k)_N]$
Modulació	$x[n]e^{j\frac{2\pi}{N}ln}$	$X[(k-l)_N]$
Convolució circular	$x_1[n] \otimes x_2[n]$	$X_1[k]X_2[k]$
Producte o enfinestrament	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}X_1[k] \otimes X_2[k]$
Igualtat de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] ^2$	
Component periòdica hermítica	$x_{ph}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[(-n)_N])$	$\text{Re}\{X[k]\}$
Component periòdica antihermítica	$x_{pa}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[(-n)_N])$	$\text{Im}\{X[k]\}$
Part real	$\text{Re}\{x[n]\}$	$X_{ph}[k] = \frac{1}{2}(X[k] + X[(-k)_N])$
Part imaginària	$\text{Im}\{x[n]\}$	$X_{pa}[k] = \frac{1}{2}(X[k] - X[(-k)_N])$
Les propietats següents, que són casos particulars de les anteriors, només són vàlides quan $x[n]$ és real.		
		$X[k] = X^*[(-k)_N]$
Component periòdica parell	$x_{ph}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[(-n)_N])$	$\text{Re}\{X[k]\}$
Component periòdica imparell	$x_{pa}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[(-n)_N])$	$\text{Im}\{X[k]\}$

4. Convolució lineal mitjançant la DFT

En moltes aplicacions estem interessats a calcular la convolució lineal entre dues seqüències perquè aquesta és l'operació que fan els sistemes LIT entre la seqüència d'entrada i la resposta impulsional del filtre. D'altra banda, ens agradaria poder fer aquesta operació mitjançant la DFT, ja que hi ha algoritmes que permeten calcular la DFT de manera molt eficient computacionalment. Aquests algoritmes es coneixen, en conjunt, com a algoritmes FFT (en anglès, *fast Fourier transform*).

Considerem dues seqüències $x[n]$ i $h[n]$ de longituds L i M , respectivament. Volem obtenir $y[n] = x[n] * h[n]$. Aplicant directament la fórmula de la convolució lineal, necessitaríem aproximadament $\min\{L, M\}$ multiplicacions per calcular cada mostra de la sortida.

Ens agradaria calcular $y[n]$ seguint aquests passos:

- Calcular les DFT $X[k]$ de N punts de $x[n]$ i $h[n]$, respectivament.
- Calcular el producte $X[k]H[k]$ per a $0 \leq k \leq N - 1$.
- Obtenir la seqüència $z[n] = x[n] \otimes h[n]$ com la IDFT de $X[k]H[k]$.

No obstant això, el problema és que $z[n]$ no és igual a $y[n]$. Ara estudiarem en quines condicions es pot obtenir $y[n]$ o alguna de les seves mostres a partir de $z[n]$.

En primer lloc, hem de recordar que la màxima longitud de $y[n]$ és $L + M - 1$. D'altra banda, per les propietats de DFT sabem que $z[n]$ és igual a un període de l'extensió periòdica de $y[n]$. Mitjançant fórmules això s'expressa així:

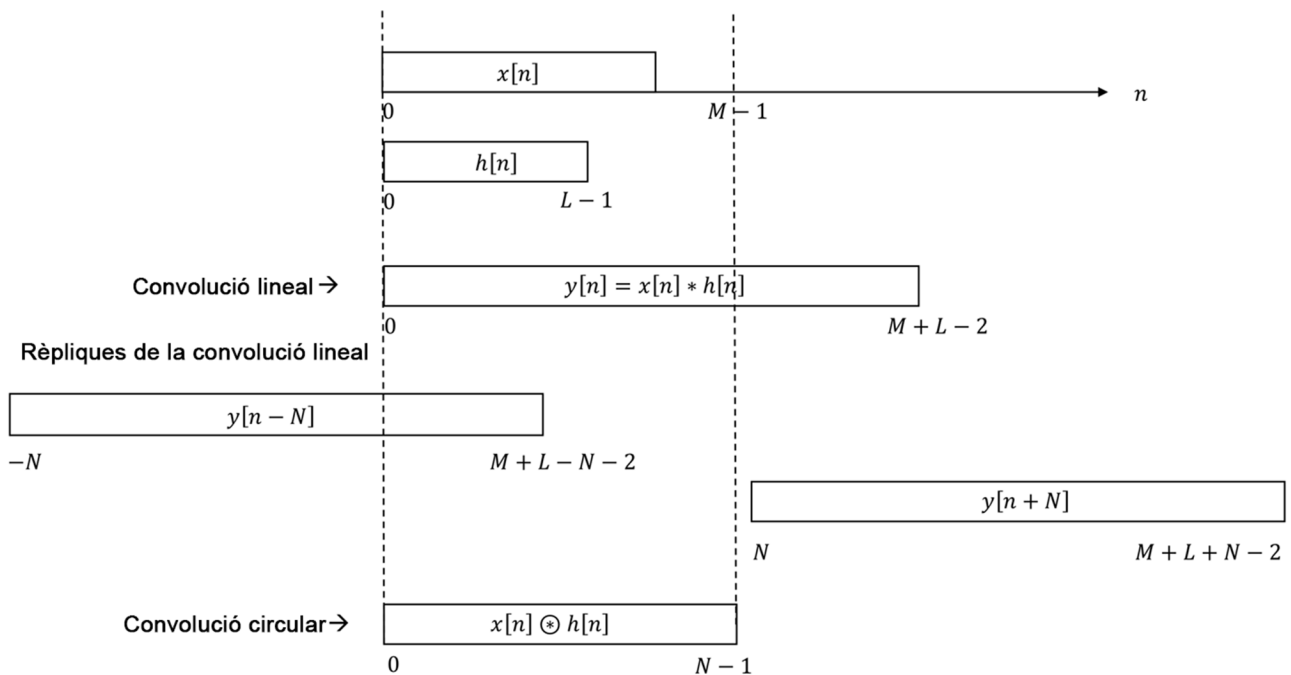
$$z[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} y[n + rN], \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (76)$$

i es representa gràficament a la figura 13.

Eficiència computacional d'un algorisme

L'eficiència computacional d'un algorisme es refereix al nombre d'operacions necessàries per implementar l'algorisme. Generalment, entenem per operacions les sumes i les multiplicacions, o només aquestes últimes, ja que són les que necessiten més recursos *de maquinari* per a ser fetes.

Figura 13. Representació de la convolució circular a partir de les rèpliques de convolució lineal



La convolució circular $z[n]$ és igual a la convolució lineal $y[n]$ més les rèpliques d'aquesta. Per tant, per fer que totes dues coincideixin en l'interval ha de passar que no hi hagi encavalcament amb les rèpliques en aquest interval. A partir de la figura 13, és fàcil observar la condició perquè això passi:

$$N \geq L + M - 1 \quad (77)$$

Si això es compleix, llavors la convolució circular i la convolució lineal coincideixen i podem calcular $y[n]$ amb els tres passos anteriors. Suposem que disposem d'un algoritme que necessita $\frac{N}{2} \log_2 N$ multiplicacions per calcular la DFT (i la IDFT) de N punts –donarem més detalls sobre aquest tema en l'apartat 5. El cost computacional, en termes de nombre de multiplicacions, d'aquests tres passos és:

- Dues DFT $\rightarrow N \log_2 N$ multiplicacions
- Producte de dues seqüències de longitud $N \rightarrow N$ multiplicacions
- Una IDFT $\rightarrow \frac{N}{2} \log_2 N$

El nombre total de multiplicacions és $\frac{3N}{2} \log_2 N + N$ per calcular les $L + M - 1$ mostres de la sortida; per tant, el cost computacional per mostra és:

$$C = \frac{\frac{3N}{2} \log_2 N + N}{L + M - 1} \quad (78)$$

que és, en general, molt menor que el cost del càlcul directe de la convolució lineal, $\min\{L, M\}$, per als valors pràctics de N (o sigui, valors que compleixen la condició (77) fins i tot excedint-la en algun ordre de magnitud). Es pot veure amb un exemple: volem fer la convolució lineal de dues seqüències de longituds $L = 2048$ i $M = 512$ pel mètode directe, la qual cosa implica 512 multiplicacions per mostra de $y[n]$, mentre que utilitzant el mètode de la DFT amb $N = 4098$ resulta $C \approx 30$ multiplicacions/mostra.

Si utilitzem un valor de N que no compleix (77), encara podem obtenir correctament algunes mostres de $y[n]$. Això es pot deduir, també, de l'observació de la figura 13. Òbviament, N ha de ser més gran o igual que L i que M , perquè, en cas contrari, no s'estan descartant mostres d'alguna de les dues seqüències d'entrada en calcular-ne les DFT. Per tant, suposem que utilitzem un valor de N que compleix $\max\{L, M\} \leq N < L + M - 1$. Les mostres de $z[n]$ en l'interval $L + M - N - 1 \leq n \leq N - 1$ sí que coincideixen amb les corresponents mostres de $y[n]$.

Si algun valor, o tots dos valors L i M , és molt gran utilitzant les regles anteriors, això també porta valors molt grans de N , que poden ser excessius per al càlcul de la DFT. Això succeeix, per exemple, quan es vol filtrar un senyal $x[n]$ que es va rebent de manera contínua o que és arbitràriament llarg. En aquest cas, el filtratge també es pot fer de manera eficient amb la DFT, però prèviament el senyal $x[n]$ s'ha de dividir en blocs de mida més reduïda. Aquesta idea s'anomena, de manera lògica, *convolució per blocs*. Els tres passos esmentats al principi de l'apartat es poden aplicar essencialment a cada bloc, però algunes modificacions són necessàries per tractar adequadament les transicions o l'encavalcament entre blocs. Això condueix a dos algoritmes coneguts, *overlap-add* i *overlap-save*, que es presentaran en el mòdul següent. Aquests algoritmes són una aplicació pràctica de la idea de convolució mitjançant la DFT i es basen en els tres passos descrits al principi de l'apartat.

5. Càlcul de la DFT

L'avaluació directa de l'equació (1) implica el càlcul de N multiplicacions complexes i $N - 1$ sumes complexes per a cada valor de k . Això equival a $4N$ multiplicacions reals i $(4N - 2)$ sumes reals. Tenint en compte que $X[k]$ s'ha de calcular per a N valors de k , el càlcul directe de la DFT suposa $4N^2$ multiplicacions reals i $N(4N - 2)$ sumes reals. En definitiva, l'ordre amb què creix el nombre d'operacions és N^2 .

El nombre d'operacions es pot reduir tenint en compte que el factor $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ té període N a k i n , que els termes cosinus i sinus en què es pot desenvolupar aquest factor tenen simetria parell i imparell, respectivament, i que poden valer zero en alguns punts. Així s'aconsegueix una reducció del factor que multiplica N^2 , però la tendència del nombre d'operacions continua essent N^2 . La possibilitat d'una reducció molt més significativa va passar desapercibuda fins a l'any 1965, aproximadament, quan Cooley i Tukey van publicar un algoritme per al càlcul de la DFT vàlid en què N és el producte de dos nombres enters. La publicació d'aquest article va generar una gran activitat en l'aplicació de la DFT en processament de senyal i va donar lloc al descobriment de diversos algorismes computacionalment molt eficients, compresos en el terme genèric FFT.

Els algorismes FFT es basen en el principi fonamental de descompondre successivament la DFT en unes DFT de menys punts. La manera en què s'implementa aquest principi porta una varietat de diferents algorismes. Els dos tipus bàsics d'algorismes FFT són els anomenats *algorismes de delmació en temps* i *algorismes de delmació en freqüència*. En el primer, la seqüència $x[n]$ es divideix successivament en seqüències més curtes per poder implementar la transformació com una successió de transformacions més petites. En el segon tipus d'algorismes es porta a terme una cosa similar, però amb $X[k]$. A continuació veurem, de manera molt preliminar, la base dels algorismes de delmació en temps. Els algorismes FFT constitueixen un tema molt ampli i de notable complexitat; com que pràcticament caldria un curs sencer per estudiar-los, aquí només en farem un esbós.

Per introduir els algorismes de delmació en temps, considerem el cas particular, però també habitual, que N , sigui una potència de 2, és a dir, $N = 2^v$ per a algun valor de v . S'observa que, en general, quan N , es restringeix a un conjunt de valors, és possible obtenir algorismes més eficients que per a valors generals de N , i el conjunt de les potències de 2 és molt habitual. També hi ha algorismes per a potències de 3, 5, etc. i per a sumes de potències d'aquests nombres.

Enllaç d'interès

Una implementació en codi obert de la FFT que s'utilitza en moltes aplicacions es pot trobar a <http://fttw.org>. Aquesta implementació, de fet, combina múltiples algorismes i, en funció del valor de N , s'utilitza l'un o l'altre. Proporcionem aquest enllaç com a referència; la comprensió del que s'hi explica queda fora dels objectius del curs.

Atès que N és una potència de 2, és un nombre parell i es pot dividir en dues seqüències de longitud $N/2$ corresponents als índexs parells i imparells:

$$X[k] = \sum_{n \text{ parell}} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n \text{ imparell}} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (79)$$

Podem fer aquesta substitució de variables $n = 2r$ per a n parell i $n = 2r + 1$ per a n imparell:

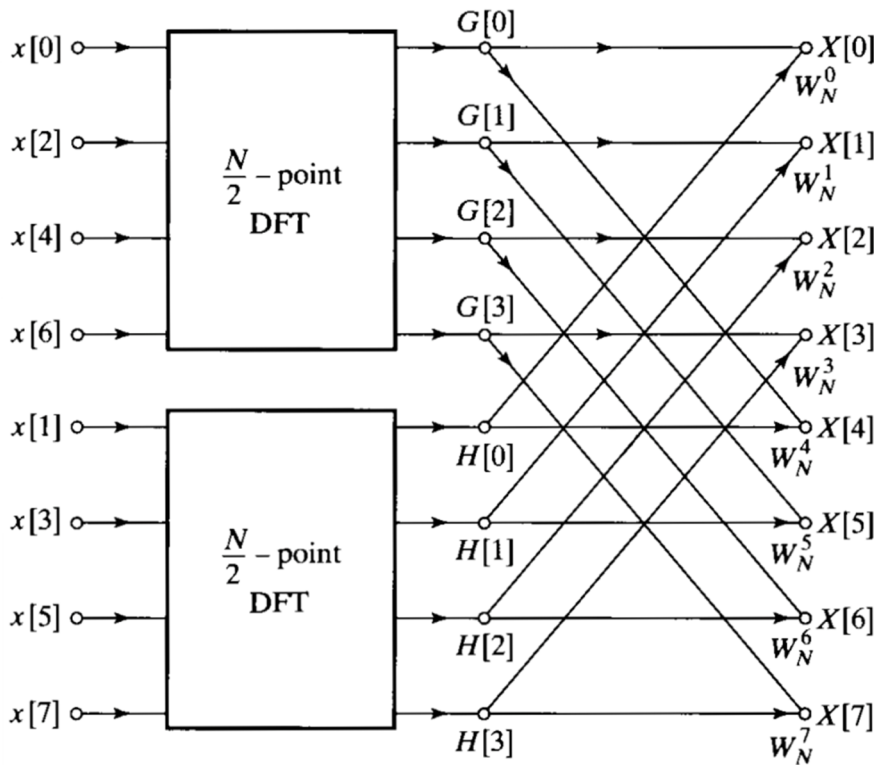
$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]e^{-j\frac{2\pi}{N}k2r} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2r+1)} \quad (80)$$

Aquesta equació es pot reescriure així:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]e^{-j\frac{2\pi}{N}kr} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]e^{-j\frac{2\pi}{N}kr} = G[k] + e^{-j\frac{2\pi}{N}k}H[k] \quad (81)$$

en què $G[k]$ i $H[k]$ són les DFT de $N/2$ punts de les mostres parells i imparells, respectivament, de la seqüència original. Com es pot observar, tot i que (81) s'ha d'avaluar a $k = 0, \dots, N - 1$, a $G[k]$ i $H[k]$ només s'ha de calcular per $k = 0, \dots, N/2 - 1$, ja que són funcions periòdiques en k amb període $N/2$. El resultat d'aquesta descomposició es mostra a la figura 14, en què la confluència de dues fletxes indica la suma i un valor sobre una fletxa indica el producte.

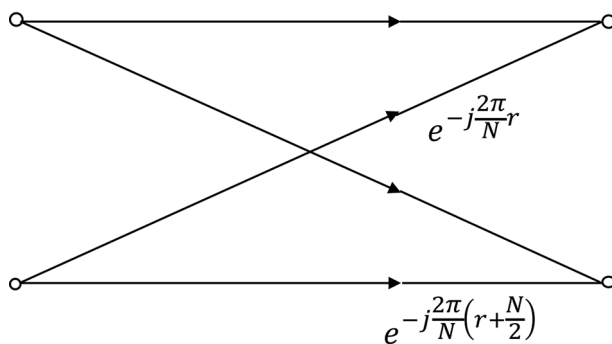
Figura 14. Descomposició de la DFT de N punts en dos DFT de $N/2$ punts seguides d'una xarxa de combinació per a $N = 8$



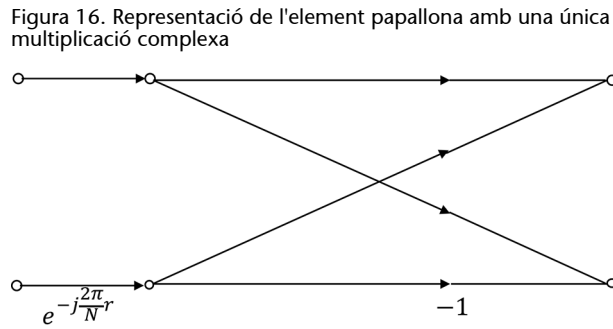
La descomposició que acabem de presentar es pot aplicar a cadascuna de les DFT de $N/2$ punts, i cadascuna d'aquestes originarà dues DFT de $N/4$ punts, i així successivament. Com que en cada etapa la mida de la DFT es divideix per 2, en total es fan $v = \log_2 N$ etapes. La xarxa de combinació que apareix en cada etapa suposa el càlcul de N sumes i N multiplicacions. Per tant, l'ordre de magnitud del nombre d'operacions és $N \log_2 N$, que contrasta amb les N^2 del càlcul directe.

La xarxa de combinació que apareix en qualsevol de les etapes està formada pels elements individuals de la figura 15, que pel seu aspecte es coneix com a papallona (en anglès, *butterfly*).

Figura 15. Representació de les operacions bàsiques en què es descompon el càlcul de la DFT, conegut com a element papallona



Aprofitant que $e^{j\frac{2\pi}{N}(r+\frac{N}{2})} = -e^{j\frac{2\pi}{N}r}$, l'element papallona encara es pot simplificar més, com apareix a la figura 16. Atès que en desenvolupar totes les etapes de l'algoritme de delmació en temps els blocs de la DFT desapareixen i que tot el càlcul es fa amb les operacions de la xarxa de combinació, es conclou que la DFT completa de la seqüència original es pot fer únicament mitjançant les xarxes d'operacions bàsiques de tipus *butterfly*.



Exercicis d'autoavaluació

1. El senyal $x[n]$ té una DFT de $N = 8$ punts que pren aquests valors: $X[k] = \{1, e^{j0.2}, -1, 2, 1, e^{-j0.3}, 2e^{-j0.2}, 3\}$ Quant val l'energia del senyal?

- a) 22
- b) 2.75
- c) $7.8955 - j0.494$
- d) 1

2. Suposem que tenim aquestes seqüències: $x_1[n] = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1\}$ i $x_2[n] = \{0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$ en què la mostra subratllada correspon a $n=0$. Es defineix: $y[n] = IDFT\{X_1[k] \cdot X_2[k]\}$ en què $X_1[k]$ i $X_2[k]$ són les DFT de $N=9$ punts corresponents a $x_1[n]$ i $x_2[n]$, respectivament. Quina de les seqüències següents és realment la seqüència $y[n]$?

- a) $y[n] = \{5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5\}$
- b) $y[n] = \{3, 4, 5, 5, 5, 5, 4, 3\}$
- c) $y[n] = \{3, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 3, 3\}$
- d) $y[n] = \{2, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 3, 2\}$

3. Suposem que tenim aquestes seqüències: $x_1[n] = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1\}$ i $x_2[n] = \{0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$ en què la mostra subratllada correspon a $n=0$. Es defineix: $y[n] = IDFT\{X_1[k] \cdot X_2^*[k]\}$ en què $X_1[k]$ i $X_2[k]$ són les DFT de $N=9$ punts corresponents a $x_1[n]$ i $x_2[n]$, respectivament. Quina de les seqüències següents és realment la seqüència $y[n]$?

- a) $y[n] = \{3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 3\}$
- b) $y[n] = \{3, 4, 5, 5, 5, 5, 4, 3\}$
- c) $y[n] = \{3, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 3, 3\}$
- d) $y[n] = \{2, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 3, 2\}$

4. Considereu el vector $x[n]$ de 8 mostres: $x[n] = \{1, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10\}$, la transformada de Fourier del qual es denota així: $X(e^{j\omega})$. Agafem les 5 mostres següents de $X(e^{j\omega})$: $Y[k] = X(e^{j\omega})_{\omega=2\pi k/5}$ per a $k=0, 1, 2, 3, 4$. Es fa la IDFT de $Y[k]$. Quin és el resultat?

- a) $y[n] = \{1, 2, 3, 5, -1\}$
- b) $y[n] = \{-5, 10, 13, 5, -1\}$
- c) $y[n] = \{1, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10\}$
- d) $y[n] = \{-5, 10, 13, 6, 1\}$

5. Considereu el vector $x[n]$ de 8 mostres: $x[n] = \{1, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10\}$, la DFT del qual de $N=9$ mostres es denota així: $X[k]$, $k=0, 1, \dots, 8$. La IDFT de $X^*[k]$ és igual a:

- a) $\{1, 10, 8, -6, -1, 5, 3, 2, 0\}$
- b) $\{1, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10, 0\}$
- c) $\{0, 1, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10\}$
- d) $\{1, 0, 10, 8, -6, -1, 5, 3, 2\}$

6. Suposem aquesta seqüència: $x[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n+1] + 3\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$ Quant val $X[k]$ per a $k=0$?

- a) 0

- b) 5
- c) -3
- d) e^{5j}

7. Les mostres de la DFT d'una seqüència $x[n]$ amb $N = 8$ punts són donats per l'expressió $X[k] = 2\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{14\pi k}{8}\right) + 2\sin(\pi k)$. Quina de les seqüències següents es correspon amb $x[n]$ en l'interval $0 \leq n \leq 7$?

- a) $x[n] = \delta[n-2] + \delta[n-6] + j\delta[n-7] - j\delta[n-1] + j\delta[n]$
- b) $x[n] = \delta[n-2] + \delta[n-6] + j\delta[n-7] - j\delta[n-1]$
- c) $x[n] = \delta[n-2] + \delta[n-6] + j\delta[n-7] - j\delta[n-1] + \delta[n]$
- d) $x[n] = \delta[n-2] + \delta[n+2] + j\delta[n-7] - j\delta[n+7]$

8. A partir d'una seqüència definida: $x[n] = \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-5] + j\delta[n-1] - j\delta[n-5]$, quina d'aquestes expressions defineix la DFT de $x[n]$ amb $N = 6$ punts?

- a) $X[k] = \cos\frac{\pi k}{3} - 2\sin\frac{5\pi k}{3}$
- b) $X[k] = \cos\frac{\pi k}{6} - 2\sin\frac{5\pi k}{6}$
- c) $X[k] = 2\cos\frac{\pi k}{3} + 2\sin\frac{10\pi k}{6}$
- d) $X[k] = \cos\frac{\pi k}{3} - 2\cos\frac{5\pi k}{3}$

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. b

2. c

3. a

4. b

5. d

6. b

7. b

8. a

Bibliografía

Oppenheim, A. V.; Schafer, R. W.; Buck, J. R. (1999). *Discrete-Time Signal Processing* (2a. ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series.

Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S.; Nawab, S. H. (1996). *Signals & Systems* (2a. ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series.

Palm III, W. J. (2010). *Introduction to MATLAB for Engineers* (3a. ed.). McGraw-Hill.

Proakis, J. G.; Manolakis, D. G. (2007). *Digital Signal Processing* (4a. ed.). Prentice Hall.