
Tractament digital de senyals analògics

Introducció al disseny de filtres digitals i a les operacions de canvi de freqüència de mostratge

PID_00262132

José Antonio López Salcedo

Temps mínim de dedicació recomanat: 3 hores



José Antonio López Salcedo

L'encàrrec i la creació d'aquest recurs d'aprenentatge UOC han estat coordinats pel professor: José Antonio Morán Moreno (2019)

Primera edició: febrer 2019
© José Antonio López Salcedo
Tots els drets reservats
© d'aquesta edició, FUOC, 2019
Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Disseny: Manel Andreu
Realització editorial: Oberta UOC Publishing, SL

Cap part d'aquesta publicació, incloent-hi el disseny general i la coberta, no pot ser copiada, reproduïda, emmagatzemada o transmesa de cap manera ni per cap mitjà, tant si és elèctric com químic, mecànic, òptic, de gravació, de fotocòpia o per altres mètodes, sense l'autorització prèvia per escrit dels titulars dels drets.

Índex

Introducció	5
Objectius	7
1. Motivació del tractament digital de senyals analògics	9
2. Operacions de delmació i interpolació	11
2.1. Delmació	12
2.2. Interpolació	14
2.3. Canvi no enter de freqüència de mostratge	15
3. Introducció al filtratge digital	17
3.1. Especificacions d'un filtre digital	17
3.2. Disseny de filtres FIR	19
3.2.1. Mètode per mostratge en freqüència	20
3.2.2. Mètode per enfinestrament	21
3.2.3. Mètode òptim d'arissament constant	24
3.3. Disseny de filtres IIR	25
3.3.1. Mètode de la transformació bilineal	25
3.4. Comparació entre filtres FIR i IIR	28
4. Implementació del filtratge en blocs	29
4.1. Mètode <i>overlap-save</i>	29
4.2. Mètode <i>overlap-add</i>	31
Exercicis d'autoavaluació	33
Solucionari	35
Bibliografia	36

Introducció

El tractament digital de senyals analògics té les seves arrels a principis de la dècada del 1980, tot coincidint amb l'auge dels circuits integrats a molt gran escala (circuits VLSI) i el desenvolupament dels primers dispositius digitals de càlcul. Aquests dispositius van constituir una revolució, ja que van permetre efectuar amb programari operacions sofisticades que fins aleshores es duïen a terme de manera manual o mecanitzada. La programació de dispositius digitals va aportar una gran flexibilitat en permetre modificar de manera senzilla les operacions que es duen a terme, facilitar-ne la repetitivitat i, per tant, l'automatització de manera sistemàtica. A més, l'ús de sistemes digitals va aportar, en general, més fiabilitat i precisió en comparació amb els sistemes analògics. Finalment, el cost baix que té, a causa de les economies de gran escala adoptades en la indústria electrònica, han fet que actualment els dispositius digitals tinguin presència en gairebé tots els sistemes que ens envolten, tant en l'àmbit professional com en l'àmbit de consum.

Dins dels sistemes digitals cal destacar el paper que han desenvolupat els processadors de senyals digitals (DSP). Aquests dispositius són específicament dissenyats per implementar de manera eficient les operacions bàsiques del tractament de senyals i sistemes lineals, com ara la convolució, i permeten que les operacions que abans es duïen a terme mitjançant circuits analògics puguin ser implementades de manera eficient mitjançant DSP. Per fer-ho, cal dur a terme tres passos:

- 1) Convertir els senyals analògics al domini discret en què treballen els dispositius digitals.
- 2) Dur a terme el tractament digital del senyal mitjançant un sistema en temps discret.
- 3) Convertir el resultat en un senyal analògic, de manera que, d'extrem a extrem, el resultat sigui equivalent a haver utilitzat un sistema analògic.

A part d'algunes consideracions dels sistemes digitals, com ara les possibles pèrdues de quantificació o el fet que el senyal d'entrada hagi d'estar limitat en banda, el comportament d'extrem a extrem del sistema depèn principalment de la tria de la freqüència de mostreig i del sistema en temps discret que s'implementi. Com que l'anàlisi d'aquests dos aspectes ja ha estat objecte d'estudi en assignatures anteriors, en aquest mòdul farem un pas més enllà i ens centrarem en aspectes pràctics relacionats amb el següent:

- Com canviar la freqüència de mostratge d'un senyal en temps discret que ja ha estat mostrejat (apartat 2).
- Com implementar un sistema lineal i invariant en temps discret a partir d'una sèrie d'especificacions de la seva resposta freqüencial, de manera que donin lloc al disseny de filtres digitals (apartat 3), i com implementar-los de manera eficient (apartat 4).

Aquest últim aspecte inclou un camp molt ampli d'estudi del qual, lluny d'oferir un tractament exhaustiu, aquest mòdul pretén donar una visió introductòria que permeti als estudiants adquirir els coneixements bàsics.

Objectius

Els objectius d'aquest mòdul són els següents:

1. Comprendre l'interès del tractament digital de senyals analògics.
2. Entendre la relació entre la resposta d'un sistema en temps continu i la seva equivalència en el domini del temps discret.
3. Conèixer les operacions de delmació i interpolació per dur a terme canvis en la freqüència de mostratge i comprendre l'impacte que tenen en el domini freqüencial.
4. Reconèixer les alternatives per implementar sistemes en temps discret, lineals i invariants per a una resposta freqüencial determinada.
5. Distingir els tipus de filtres FIR en funció de la longitud i la simetria de la seva resposta impulsional.
6. Conèixer els paràmetres clau a l'hora d'especificar la resposta freqüencial d'un filtre.
7. Aplicar els mètodes bàsics de disseny de filtres FIR i filtre IIR i conèixer-ne els avantatges i les limitacions.
8. Conèixer els mètodes bàsics de filtratge en bloc per implementar de manera eficient l'operació de filtratge de senyals de durada molt llarga amb filtres FIR.

1. Motivació del tractament digital de senyals analògics

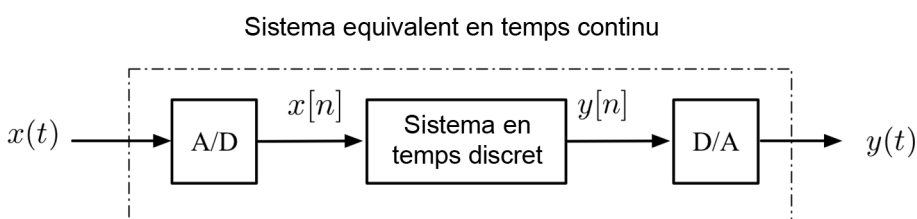
Hi ha nombroses aplicacions en què cal processar un senyal i condicionar-lo perquè sigui emmagatzemat, transmès o analitzat per tal d'extreure'n certa informació. N'és un exemple el processament de senyals d'àudio, la recepció de senyals de comunicacions o l'anàlisi de senyals geofísics, biomèdics o de sistemes de radar. En tots aquests casos és habitual processar els senyals en qüestió mitjançant un sistema lineal i invariant que típicament es destina a reduir el nivell de soroll, eliminar contribucions no desitjades (per exemple, interferències) o a seleccionar un determinat component espectral del senyal rebut (per exemple, com succeeix en sistemes amb accés múltiple per divisió de freqüència). Com s'ha descrit en la introducció del mòdul, el tractament digital d'aquests senyals ofereix grans avantatges en termes de flexibilitat, senzillesa d'implementació, més fiabilitat i reducció de costos en comparació amb l'ús de tècniques i circuits analògics.

Pel que fa als conceptes, el tractament digital de senyals analògics consta de tres passos:

- 1) convertir els senyals analògics al domini en temps discret;
- 2) dur a terme el tractament digital del senyal utilitzant un sistema en temps discret;
- 3) tornar a convertir el resultat del tractament digital en un senyal analògic, de manera que el resultat d'extrem a extrem sigui equivalent a haver utilitzat un sistema analògic.

Aquests tres passos es corresponen amb els tres blocs que surten a la figura 1. Com es pot observar, el resultat equivalent a tot el procés és un senyal analògic d'entrada $x(t)$ que és processat i convertit en un senyal analògic de sortida $y(t)$, en què les operacions intermèdies s'entenen com a equivalents (dins d'una sèrie de condicionants) a les que duria a terme un sistema analògic.

Figura 1. Representació en forma de diagrama de blocs del tractament digital de senyals analògics i l'equivalència corresponent amb un sistema en temps continu



Nota

Els passos corresponents a la conversió A/D i D/A ja han estat objecte d'estudi en altres assignatures, com també la caracterització i les propietats dels sistemes en temps discret. En aquest sentit, els conceptes esmentats es donaran per fets en aquest mòdul.

La limitació més important d'aquest esquema és el fet que el senyal $x(t)$ hagi d'estar limitat en banda; és a dir, $X(\Omega) = 0$ per a $|\Omega| \geq \pi/T$ amb $X(\Omega)$ la transformada de Fourier de $x(t)$ i T el temps de mostratge. Com ja és sabut, aquest requisit és necessari per garantir que la seva conversió al domini en temps discret no incorri en aliàsing. De la mateixa manera, també es donaran per fetes les possibles pèrdues que introdueix la quantificació del convertidor analògic-digital (A/D) i que fan que la correspondència entre un sistema analògic i la seva implementació digital no sigui perfecta. En aquest cas, però, en ajustar el nombre de bits del quantificador o en tenir en compte les operacions que es duen a terme en el domini del temps discret és possible acotar l'impacte de la quantificació i fer que pugui arribar a ser negligible.

La importància de la figura 1 és que, al capdavant, un senyal analògic d'entrada $x(t)$ és convertit en un altre senyal analògic de sortida $y(t)$. Per tant, la resposta global d'entrada/sortida es pot entendre com un sistema analògic, independentment que algun dels seus blocs intermedis estiguin implementats en temps discret. De fet, es pot demostrar que el senyal de sortida $y(t)$ és donat per la convolució del senyal d'entrada $x(t)$ mitjançant un sistema analògic equivalent $h_{eq}(t)$,

$$Y(\Omega) = H_{eq}(\Omega)X(\Omega) \quad (1)$$

amb $\{X(\Omega), Y(\Omega), H_{eq}(\Omega)\}$ les transformades de Fourier dels senyals $\{x(t), y(t)\}$ i del sistema equivalent amb resposta impulsional $h_{eq}(t)$, respectivament. Tenint en compte la limitació en banda de $x(t)$, la resposta freqüencial d'aquest sistema equivalent ha de ser determinada per:

$$H_{eq}(\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} & , \quad |\Omega| < \pi/T \\ 0 & , \quad |\Omega| \geq \pi/T \end{cases} \quad (2)$$

en què $H(e^{j\omega})$ és la resposta freqüencial del sistema en temps discret que mostra la figura 1. En definitiva, el senyal de sortida $y(t)$ es pot veure com a resultat de processar el senyal d'entrada $x(t)$ mitjançant un sistema en temps continu amb una resposta freqüencial que és determinada per (2). Aquest resultat connecta la resposta del sistema que es desitja en temps continu amb la resposta del sistema que s'ha d'implementar en temps discret.

La motivació d'aquest mòdul és aprofundir en aquesta direcció i, per tant, tractar sobre el disseny de sistemes en temps discret que presenten el mateix comportament que un sistema determinat en temps continu. A vegades aquest problema implica fer operacions prèvies que comporten un canvi de la freqüència de mostratge, un problema recollit en l'apartat 2. Un cop dut a terme, el disseny de sistemes lineals invariants en temps discret (filtres digitals) es tracta en l'apartat 3, i la implementació pràctica corresponent, en l'apartat 4.

2. Operacions de delmació i interpolació

A vegades cal canviar la freqüència de mostratge amb què fou adquirit un senyal, sigui per reduir-lo o per incrementar-lo.

Penseu, per exemple, en un senyal en temps continu $x(t)$ amb amplada de banda B_x que és mostreat a la freqüència mínima de mostratge $F_m = 2B_x$ d'acord amb el criteri de Nyquist. El resultat és un senyal o seqüència en temps discret $x[n]$. A continuació, aquesta seqüència pateix un procés de filtratge digital que origina una nova seqüència $x_f[n]$, l'amplada de banda del qual B_f és molt inferior al del senyal original $x[n]$, per exemple, $B_f = B_x/10$. La freqüència de mostratge de la seqüència filtrada $x_f[n]$ és ara molt superior a la que podria haver tingut si hagués estat mostrejada des del començament segons la seva amplada de banda B_f . En aquest cas, la freqüència mínima de mostratge podria haver estat $F_m' = 2B_f = B_x/5 = F_m/10$, deu vegades inferior a la freqüència de mostratge inicial. La importància d'aquesta observació rau en el fet que moltes implementacions de maquinari són sensibles a la freqüència de mostratge, ja que aquesta té un impacte important en termes de consum de potència, complexitat d'implementació i, per tant, de cost. Per això, davant un exemple com el que acabem d'il·lustrar, es fa necessari poder efectuar un canvi de freqüència de mostratge per passar de F_m a una F_m' molt més petita a la sortida del filtratge digital. Aquesta operació de reducció de freqüència de mostratge, en general per un factor M , es coneix com a delmació.

Una situació com la que acabem de descriure s'esdevé, per exemple, en sistemes de comunicacions basats en accés per divisió de freqüència (FDMA), en què l'estació base necessita desmultiplexar cadascun dels usuaris individuals (amb una amplada de banda petita) a partir del senyal que rep amb tots els usuaris multiplexats en freqüència (l'amplada de banda és gran, ja que depèn del nombre d'usuaris).

Per contra, hi ha situacions en què, més que reduir la freqüència de mostratge, el que interessa és augmentar-la. D'acord amb l'exemple d'un sistema FDMA, seria el cas d'un transmissor que, a partir dels senyals en temps discret de cada usuari individual, ha de generar un senyal en temps discret d'amplada de banda molt més gran i que contingui tots aquests usuaris multiplexats en freqüència. L'operació d'augment de freqüència de mostratge, en general per un factor L , es coneix com a interpolació.

Totes dues operacions, delmació i interpolació, seran objecte d'estudi en aquest apartat.

2.1. Delmació

La delmació és una operació que redueix la freqüència a la qual ha estat mostrejada una seqüència $x[n]$ passant de $F_m = 1/T_m$ (o $\Omega_m = 2\pi/T_m$ en rad/s) a $F'_m = 1/MT_m$ (o $\Omega'_m = 2\pi/MT_m$ en rad/s). A partir de la seqüència $x[n]$,

$$x_d[n] = x(nT_m) \quad (3)$$

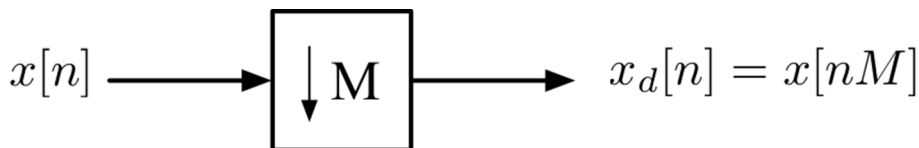
el resultat del procés de delmació és una seqüència $x_d[n]$ segons:

$$x_d[n] = x[Mn] = x(nMT_m) = x(nT_m). \quad (4)$$

S'hi pot observar que el nou temps entre mostres del senyal original $x(t)$ esdevé $T'_m = MT_m$, la qual cosa correspon, efectivament, a una reducció de la freqüència de mostreig per un factor M .

L'operació de delmació se sol representar en forma de diagrama de blocs, tal com s'indica en la figura següent:

Figura 2. Representació en forma de diagrama de blocs de l'operació de delmació



en què el bloc que fa el canvi de freqüència de mostreig es coneix com a compressor.

Pel que fa al temps, la delmació es pot entendre com una operació que genera una nova seqüència $x_d[n]$ i conserva una de cada M mostres del senyal original $x[n]$ i, per tant, negligint les $M - 1$ restants. Per tant, en el temps equivalent a M mostres de la seqüència original, la seqüència delmada conté només una mostra, que és precisament el que passa en utilitzar una freqüència de mostreig M vegades més petita.

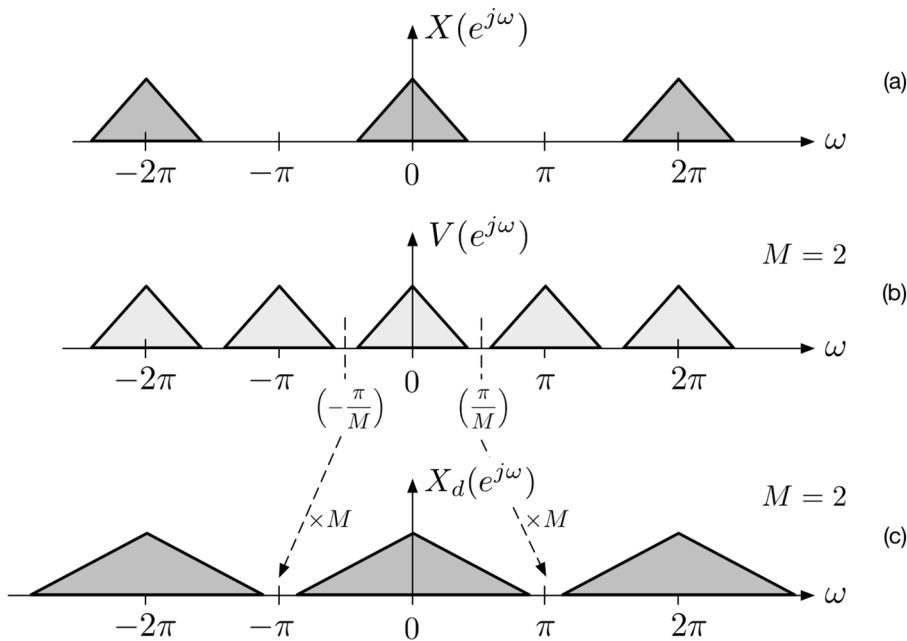
Pel que fa a la freqüència, l'operació de delmació implica una sèrie de transformacions que és interessant analitzar amb tots els detalls, ja que té conseqüències importants en la seqüència de sortida. L'operació de delmació es porta a terme en dos passos, que impliquen:

1) Multiplicar la seqüència original $x[n]$ amb un tren de deltes que selecciona una mostra de cada M . Això origina una seqüència intermèdia $v[n]$ la representació freqüencial de la qual es mostra en la figura 3b, que presenta en rèpliques de la transformada de Fourier de la seqüència $x[n]$ freqüències múltiples de $2\pi/M$.

2) Comprimir l'eix temporal de la seqüència $v[n]$ per eliminar les mostres nul·les que hi ha entre les mostres seleccionades, fent, per tant, que el temps entre mostres no nul·les sigui $T'_m = MT_m$. En el domini freqüencial això implica una expansió de l'eix de freqüències que dona lloc a la representació que recull la figura 3c, que es correspon amb la transformada de Fourier de la seqüència delmada.

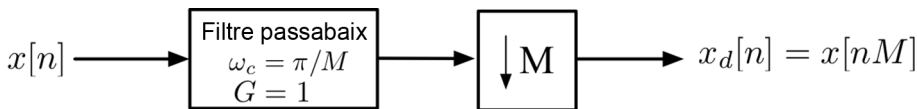
És interessant observar que, com a resultat del procés de delmació, la seqüència resultant, $x_d[n]$, presenta una amplada de banda que, en temps discret, és M vegades més gran que la de la seqüència inicial $x[n]$, tal com es pot observar comparant la figura 5a amb la 5c.

Figura 3. Representació freqüencial de l'operació de delmació



D'altra banda, cal tenir en compte que, tal com s'observa en la transformada de Fourier de la seqüència $v[n]$ (vegeu la figura 3b), l'aparició de rèpliques en freqüències múltiples de $2\pi/M$ implica que l'amplada de banda de la seqüència original $x[n]$ ha d'estar limitada a π/M . En cas contrari, apareixerà aliàsing en la seqüència intermèdia $v[n]$ i, per tant, també en la seqüència delmada $x_d[n]$. En algunes aplicacions pot ser que l'aparició d' aliàsing no sigui una cosa gaire crítica. Si no és el cas, llavors caldrà assegurar-se que la seqüència original $x[n]$ es filtra amb un filtre passabaix per garantir que no hi ha components freqüencials més enllà de la freqüència discreta $\omega = \pi/M$. En termes del senyal analògic $x(t)$, això implica assegurar que no hi ha components freqüencials més enllà de la freqüència $F = F_m/2M$ o, equivalentment, $\Omega = \pi/MT_m$.

Figura 4. Representació en forma de diagrama de blocs de l'operació de delmació, incloent-hi el filtre passabaix per limitar en banda la seqüència a la qual cal aplicar delmació per evitar, així, el possible alíasing



Finalment, és important esmentar que, si bé l'operació de delmació és lineal i estable, no és, tanmateix, causal ni invariant. Això s'ha de tenir en compte a l'hora d'analitzar sistemes en temps discret que facin ús d'aquesta operació.

2.2. Interpolació

La interpolació és una operació que implica l'augment de la freqüència a la qual ha estat mostrejada una seqüència $x[n]$ passant de $F_m = 1/T_m$ a $F'_m = L/T_m = 1/T'_m$ amb T_m el temps de mostratge inicial i $T'_m = T_m/L$ el temps de mostratge final. Partint de la seqüència:

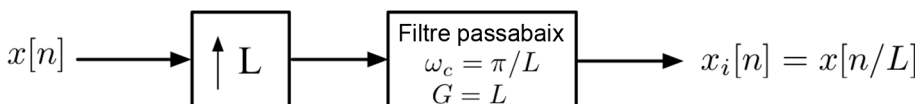
$$x[n] = x(nT_m) \quad (5)$$

l'objectiu és, per tant, arribar a una nova seqüència:

$$x_i[n] = x[n/L] = x(nT_m/L) = x(nT'_m). \quad (6)$$

L'operació d'interpolació es representa en forma de diagrama de blocs, tal com indica la figura que hi ha a continuació:

Figura 5. Representació en forma de diagrama de blocs de l'operació d'interpolació



Pel que fa al temps, la nova seqüència $x_i[n]$ es genera introduint $L - 1$ mostres noves entre cadascuna de les mostres del senyal inicial $x[n]$. El procés es resumeix en els passos següents:

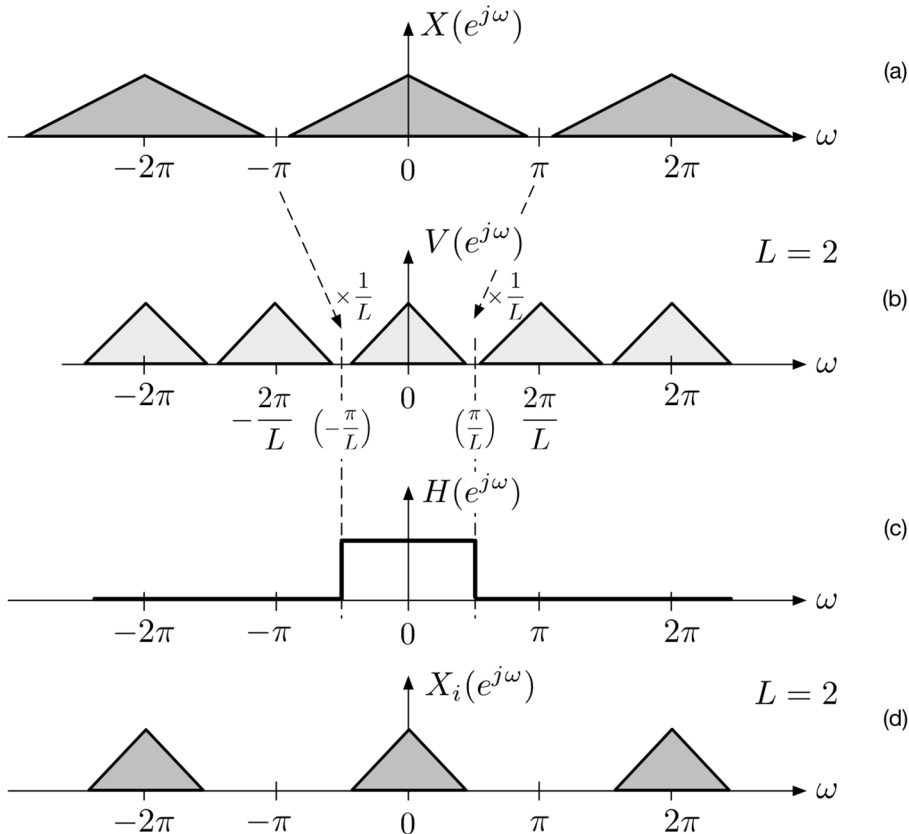
1) S'expandeix l'eix temporal introduint $L - 1$ noves mostres de valor zero entre cada mostra de la seqüència $x[n]$, la qual cosa fa que el nou temps de mostratge sigui $T'_m = T_m/L$. Aquest pas és equivalent a generar una seqüència intermèdia

$$v[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(n - kL)$$

basada en un tren de deltes. En el domini freqüencial, la transformada de Fourier d'aquesta seqüència intermèdia consisteix en rèpliques de la transformada de Fourier de la seqüència inicial centrades en freqüències múltiples de $2\pi/L$, tal com mostra la figura 6b.

2) Es filtra la seqüència $v[n]$ amb un filtre passabaix que fa de filtre interpolador i la representació freqüencial es mostra en la figura 5c. Aquest filtratge passabaix elimina les rèpliques per donar lloc a la representació freqüencial de la seqüència interpolada, tal com recull la figura 6d.

Figura 6. Representació freqüencial de l'operació d'interpolació. Senyal original (vegeu la figura 6a), senyal interpolat amb $L = 2$ (vegeu la figura 6d)

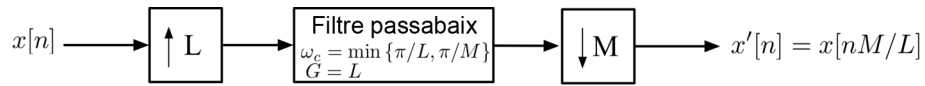


És interessant destacar que, com a resultat del procés d'interpolació, la seqüència que en resulta, $x_i[n]$, presenta una amplada de banda que, en temps discret, és aparentment L vegades més petita que la de la seqüència inicial $x[n]$, tal com es pot observar comparant les figures 6a i 6d. D'altra banda, pot demostrar-se que l'operació d'interpolació és lineal i estable, però la seva causalitat i estabilitat serà determinada pel filtre interpolador que s'utilitzi.

2.3. Canvi no enter de freqüència de mostratge

Les operacions de delmació i interpolació que s'han descrit abans suposen que el factor de canvi de freqüència de mostratge (M i L) és sempre un nombre enter. Tanmateix, és possible dur a terme un canvi de freqüència de mostratge per un factor que no sigui enter a partir de combinar en sèrie dues operacions. Això origina un esquema, com el que recull la figura 7, en què l'operació d'interpolació és seguida per l'operació de delmació, la qual cosa dona lloc a un canvi de freqüència de mostratge per un factor L/M . Cal destacar que el filtre passabaix que es considera prové de combinar els dos filtres que s'utilitzen en les dues operacions i, per tant, es pot implementar amb un sol bloc.

Figura 7. Representació en forma de diagrama de blocs de l'operació de canvi de freqüència de mostrejatge per un factor no enter



3. Introducció al filtratge digital

En aquest apartat entenem per filtres els sistemes lineals i invariants que processen un senyal d'entrada amb l'objectiu de seleccionar una certa banda de freqüències a costa d'atenuar o eliminar la resta de les freqüències. Aquests sistemes es caracteritzen de manera única per la seva resposta impulsional $h(t)$ o, equivalentment, la seva resposta en freqüència $H(\Omega)$. La implementació d'aquests filtres en el domini del temps discret, que donen lloc als anomenats filtres digitals amb resposta impulsional $h[n]$ i resposta freqüencial $H(e^{j\omega})$, resulta en dues famílies ben diferenciades de filtres: els filtres de resposta impulsional finita (FIR) i els filtres de resposta impulsional infinita (IIR). En el cas dels filtres FIR, les mostres de la resposta impulsional $h[n]$ es coneixen com a coeficients del filtre. Amb tot, en el cas dels filtres IIR, els coeficients del filtre solen ser les constants que determinen les equacions recursives, en forma de diferències finites, que caracteritzen el comportament del filtre.

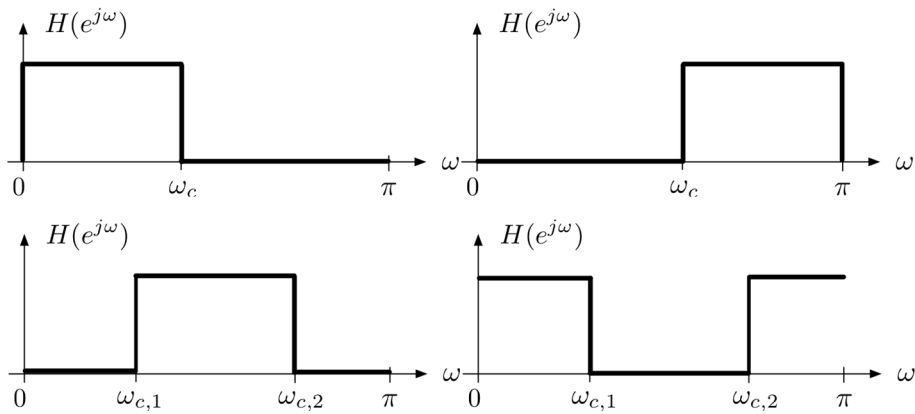
El disseny de filtres digitals és una disciplina ben coneguda i en la qual els principals avenços van tenir lloc en les últimes dues dècades del segle xx, a partir de l'aparició dels primers processadors digitals de senyal (DSP) cap a l'any 1980 (Parks, 1987). El procediment per dissenyar filtres sol ser sistemàtic i es basa en el següent:

- 1) Determinar les especificacions que cal complir.
- 2) Trobar un filtre en què la resposta en freqüència s'aproximi al màxim a les especificacions.

3.1. Especificacions d'un filtre digital

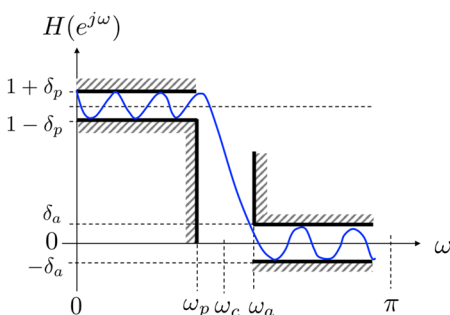
El primer pas en el disseny d'un filtre digital consisteix a determinar les especificacions que ha de tenir. Sovint, això implica determinar la resposta en freqüència que hauria de tenir el filtre (en termes de magnitud i fase o bé en forma de paràmetres com freqüències de tall, amplada de banda, nivell en banda de pas, nivell d'atenuació fora de banda, etc.). Hi ha quatre tipus de respostes freqüencials segons que es tracti d'un filtre que deixa passar només les baixes freqüències (filtre passabaix) o el cas invers, en què només deixi passar les altes freqüències (filtre passaalt). De la mateixa manera, es pot considerar un filtre que deixi passar tan sols una banda concreta de freqüències (filtre passabanda) o el cas invers, en què atenuï aquesta banda (filtre de banda eliminada). Les respostes freqüencials ideals d'aquests quatre tipus de filtres es mostren en la figura 8.

Figura 8. Resposta freqüencial ideal dels quatre tipus de filtres digitals: a) passabaix, b) passaalt, c) passabanda i d) de banda eliminada.



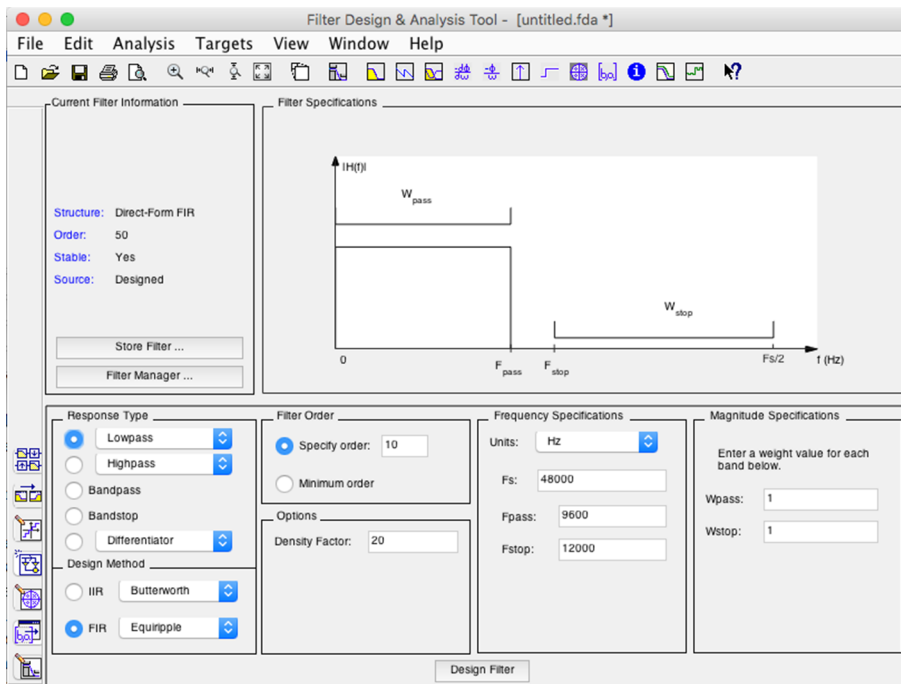
Totes les respostes freqüencials de la figura 8 es caracteritzen per tenir una banda de pas per mitjà de la qual es deixen passar certs components freqüencials del senyal que es filtra i una banda atenuada on s'atenuen o s'eliminen certes freqüències. El punt que delimita la banda de pas de la banda atenuada és la freqüència de tall, indicada segons ω_c en la figura 8. En el cas dels filtres passabanda i de banda atenuada es defineixen dues freqüències de tall, una d'inferior i una altra de superior, indicades segons $\omega_{c,1}$ i $\omega_{c,2}$. Fixeu-vos que les respostes freqüencials de la figura 8 són ideals, en el sentit que la transició de la banda de pas a la banda atenuada (o a l'inrevés) és instantània. En la pràctica, aquests canvis abruptes en freqüència ocasionen respostes molt lentes en el domini temporal, ja que fan que la longitud del filtre digital sigui molt llarga (teòricament, infinita) i, per tant, en dificultin o en facin impossible la implementació. Per això, per facilitar la implementació del filtre, es defineix la transició de la banda de pas a la banda atenuada (o a l'inrevés) mitjançant una regió de transició que va des de l'anomenada freqüència de pas ω_p fins a la freqüència atenuada ω_a , en què la freqüència de tall del punt intermedi entre totes dues, $\omega_c = (\omega_p + \omega_a)/2$. De la mateixa manera, en lloc d'especificar el nivell que presenta la banda de pas i la banda atenuada, se sol especificar una certa tolerància de $\pm\delta_p$ per a la banda de pas, respecte a un nivell nominal d'1, i $\pm\delta_a$ per a la banda atenuada, tal com mostra la figura 9. Aquesta tolerància cobreix el possible arrissament que pugui presentar la resposta freqüencial que s'obtingui en la pràctica per complir amb les especificacions fixades.

Figura 9. Plantilla d'especificacions d'un filtre digital (en el cas d'un filtre passabaix)



Un cop fixades les especificacions que cal complir, el disseny del filtre sol implicar una sèrie d'operacions matemàtiques per aproximar el disseny especificat a unes plantilles determinades, optimitzar el nombre de coeficients i les prestacions (en el cas de filtres FIR), o bé el mapatge de les especificacions a un domini transformat sobre el qual es determinen els paràmetres del filtre (en el cas de filtres IIR). Totes aquestes operacions es duen a terme actualment mitjançant paquets de programari específic, com ara *Filter design and analysis tool* de MATLAB, del qual hi ha una captura en la figura 10.

Figura 10. Captura de *Filter design and analysis tool* de MATLAB



Tot i l'existència de programari especialitzat, és important conèixer els fonaments en què se sustenten per comprendre les línies que cal seguir en el procés de disseny d'un filtre digital. A continuació es descriuen de manera resumida els mètodes més habituals per al disseny de filtres FIR i IIR que compleixen amb unes especificacions predeterminades. Es pot trobar informació detallada en diverses referències especialitzades, com ara Oppenheim (1999) i Karam (2010).

3.2. Disseny de filtres FIR

Els filtres FIR es caracteritzen per tenir una resposta freqüencial de tipus polinòmica segons:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]e^{-j\omega n} \quad (7)$$

i presenten la propietat de ser sempre filtres estables i sense distorsió de fase en el cas que es compleixin certes condicions de simetria. Els mètodes existents per al disseny de filtres FIR se centren a aconseguir filtres de fase lineal i resposta impulsional $h[n]$ amb coeficients reals. En relació amb la simetria d'aquests coeficients i la seva longitud, distingim quatre tipus de filtres FIR, tal com recull la taula 1. A més, en aquesta taula s'indica per a cada tipus de filtre el nombre de zeros K , la longitud del filtre $L = K + 1$ en nombre de coeficients, el retard $\alpha = K/2$ que introdueix en mostres i l'òfset β que presenta la fase lineal de la resposta del filtre en freqüència.

Taula 1. Resum dels quatre tipus de filtres FIR

		Simetria	
		Parell $h[n] = h[2\alpha - n]$	Imparell $h[n] = -h[2\alpha - n]$
Longitud	Imparell	Tipus I	
		Zeros forçats	-
		K	Parell
		$L = K+1$	Imparell
	$\alpha = K/2$	Enter	
	β	0	
	Tipus III		
	Zeros forçats	$z = \{1, -1\}$ $\omega = \{0, \pi\}$	
K	Parell		
$L = K+1$	Imparell		
$\alpha = K/2$	Enter		
β	$\pi/2$		
Parell	Tipus II		
	Zeros forçats	$z = -1$ $\omega = \pi$	
	K	Imparell	
	$L = K+1$	Parell	
$\alpha = K/2$	Enter + $\frac{1}{2}$		
β	0		
Tipus IV			
Zeros forçats	$z = 1$ $\omega = 0$		
K	Imparell		
$L = K+1$	Parell		
$\alpha = K/2$	Enter + $\frac{1}{2}$		
β	$\pi/2$		

Pel que fa al disseny de filtres FIR, a continuació es descriuen breument els mètodes més representatius.

3.2.1. Mètode per mostratge en freqüència

Suposant que tenim especificada una certa resposta en freqüència $H(e^{j\omega})$, una primera opció per obtenir un filtre digital que implementi de manera aproximada aquesta resposta és mostrejar $H(e^{j\omega})$ per obtenir el que seria la DFT de la resposta impulsional del filtre. És a dir,

$$H[k] = H(e^{j\omega})_{\omega=2\pi k/L} \quad \text{amb} \quad k = 0, 1, \dots, L - 1. \quad (8)$$

A continuació es poden obtenir els coeficients del filtre aplicant la IDFT a la resposta freqüencial que acabem de mostrejar:

$$h_m[n] = \text{IDFT}_L\{H[k]\}. \quad (9)$$

Els coeficients de (9) són una manera fàcil i senzilla d'obtenir un filtre FIR que es correspon exactament amb la resposta freqüencial que s'ha especificat, encara que només en aquells punts de l'eix de freqüència que han estat mostrats. El desavantatge d'aquest mètode és que, per a la resta de les freqüències intermèdies, la resposta en freqüència del filtre FIR queda fora del nostre control i potser no es correspon exactament amb la resposta especificada en $H(e^{j\omega})$.

3.2.2. Mètode per enfinestrament

Una altra opció relacionada d'alguna manera amb l'anterior consistiria a obtenir, a partir de la resposta en freqüència especificada, la seva correspondència en temps discret mitjançant la TFSD inversa,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (10)$$

La resposta impulsional que s'obté presenta en general una durada infinita, amb la qual cosa cal limitar-la a un conjunt finit de L mostres per obtenir un filtre FIR. Aquest truncament se sol dur a terme multiplicant $h[n]$ per $w[n]$, una finestra de durada L . El resultat és la resposta impulsional truncada següent:

$$h_w[n] = h[n]w[n] \quad (11)$$

que òbviament incorrerà en un cert error si es compara amb la resposta impulsional ideal. Amb el teorema de Parseval aquest error es pot calcular equivalentment tant en el domini freqüencial com en el temporal mitjançant:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_w(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] - h_w[n]|^2 \quad (12)$$

expressió que pot utilitzar-se com a funció de cost per trobar la finestra més adequada. És a dir, aquella finestra que minimitzi (12). Alguns exemples de les finestres més habituals es presenten a la taula 2.

D'altra banda, és interessant esmentar que, a causa de l'enfinestrament en (11), el filtre FIR que s'obté presenta una resposta freqüencial que és donada per la convolució (periòdica 2π) entre la resposta freqüencial ideal $H(e^{j\omega})$ i la transformada de Fourier de la finestra utilitzada, $W(e^{j\omega})$; és a dir:

$$H_w(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\lambda}) W(e^{j(\omega-\lambda)}) d\lambda \quad (13)$$

Aquest aspecte ha de ser tingut en compte a l'hora d'avaluar la conveniència d'emprar una finestra o una altra, en funció de la resposta en freqüència que s'obtingui. Per fer-ho, cal comparar la resposta freqüencial obtinguda amb l'especificada en origen i avaluar-ne l'error per mitjà de (12).

Taula 2. Exemples (amb $L = 16$) de finestres habituals en el disseny de filtres FIR per enfiestrament

Finestra	Resposta temporal / freqüencial
<p>Blackman $w[n] = 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi}{L-1}n\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi}{L-1}n\right), n = 0, 1, \dots, M-1$ en què $M = L/2$ per a L parell i $M = (L+1)/2$ per a L imparell; els coeficients corresponents a $M \leq n \leq L-1$ s'obtenen girant els coeficients per a $n=0, 1, \dots, M-1$ al voltant del punt mitjà.</p>	<p>The left plot shows the window coefficients $w[n]$ for $n=0$ to 15. The coefficients are symmetric around $n=7.5$ and follow a Blackman window shape, with a peak value of 1.0 at $n=7.5$. The right plot shows the magnitude response $H(e^{j\omega})$ in dB versus normalized frequency $\omega/2\pi$ from 0 to 0.5. The response starts at 0 dB at $\omega=0$ and exhibits a main lobe with a very low side lobe level, reaching approximately -40 dB at $\omega/2\pi = 0.5$.</p>
<p>Hamming $w[n] = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi}{L-1}n\right), n = 0, 1, \dots, L-1$</p>	<p>The left plot shows the window coefficients $w[n]$ for $n=0$ to 15. The coefficients are symmetric around $n=7.5$ and follow a Hamming window shape, with a peak value of 1.0 at $n=7.5$. The right plot shows the magnitude response $H(e^{j\omega})$ in dB versus normalized frequency $\omega/2\pi$ from 0 to 0.5. The response starts at 0 dB at $\omega=0$ and exhibits a main lobe with side lobes that are significantly higher than those of the Blackman window, reaching approximately -15 dB at $\omega/2\pi = 0.5$.</p>
<p>Hanning $w[n] = 0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L-1}n\right) \right], n = 0, 1, \dots, L-1$</p>	<p>The left plot shows the window coefficients $w[n]$ for $n=0$ to 15. The coefficients are symmetric around $n=7.5$ and follow a Hanning window shape, with a peak value of 1.0 at $n=7.5$. The right plot shows the magnitude response $H(e^{j\omega})$ in dB versus normalized frequency $\omega/2\pi$ from 0 to 0.5. The response starts at 0 dB at $\omega=0$ and exhibits a main lobe with side lobes that are higher than those of the Hamming window, reaching approximately -10 dB at $\omega/2\pi = 0.5$.</p>

3.2.3. Mètode òptim d'arrissament constant

Hi ha mètodes que utilitzen diferents criteris d'optimalitat per dissenyar filtres FIR, com ara la minimització de l'error quadràtic o l'error màxim entre la resposta freqüencial del filtre FIR i la resposta especificada (Karam, 2010). De manera similar, també és possible dissenyar el filtre FIR perquè no minimitzi una funció de cost concreta, sinó que minimitzi el nivell d'arrissament que presenta la seva resposta freqüencial, és a dir, de manera que sigui tan plana com sigui possible. Finalment s'hi afegeixen criteris pràctics, com ara minimitzar el nombre de coeficients del filtre necessaris per a una amplada de la banda de transició també mínima.

Aquests són criteris qualitius que, sovint, resulten més útils en la pràctica i no en l'establiment d'un cert valor per a l'error quadràtic. Per fer-ho, el problema se sol formular a partir de la teoria de l'aproximació utilitzant una funció de cost basada en l'error ponderat de Txeixev. La solució d'aquest problema no és senzilla ni presenta una expressió tancada, però pot obtenir-se amb relativa facilitat fent servir l'algoritme iteratiu ideat per Parks i McClellan, els detalls del qual es poden consultar, per exemple, en Karam (2010). L'algoritme tan sols necessita que li proporcionin cinc paràmetres, a partir dels quals trobarà la solució que millor s'hi ajusti. Aquests són: la longitud desitjada del filtre FIR, L , les freqüències que delimiten la banda de pas i la banda atenuada, ω_p i ω_a , com també l'error màxim en la banda de pas i en la banda atenuada, δ_p i δ_a , en definitiva, els paràmetres que es mostren a la figura 9.

Aquests cinc paràmetres estan relacionats, de manera que qualsevol d'ells depèn dels altres quatre. En la pràctica és habitual especificar els requeriments de ω_p , ω_a , δ_p i δ_a i donar llibertat a l'algoritme perquè trobi el filtre FIR que compleix millor aquests requisits (en aquest cas, la sortida de l'algoritme són els coeficients del filtre FIR i la longitud necessària). De manera aproximada, la longitud necessària en el criteri òptim d'arrissament constant és determinada per:

$$L \approx \frac{-10 \log_{10}(\delta_p \delta_a) - 13}{14.6 \Delta f} + 1 \quad (14)$$

en què $\Delta f = (\omega_a - \omega_p) / (2\pi)$ és l'amplada de la banda de transició. En general es pot concloure que els filtres FIR dissenyats amb el criteri d'arrissament constant ofereixen una atenuació (definida com a $-10 \log_{10}(\delta_p \delta_a)$), que és de l'ordre de 5 dB superior a la que ofereixen els mètodes de disseny de filtres FIR basats en l'enfinestrament per a un mateix nombre de coeficients.

3.3. Disseny de filtres IIR

Els filtres IIR presenten una resposta impulsional infinita que prové d'un sistema en què la caracterització es porta a terme mitjançant equacions en diferències finites, les quals relacionen entrades i sortides actuals amb instants passats. Això fa que la resposta freqüencial dels filtres IIR sigui de tipus racional i es basi en el quocient de dos polinomis segons:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^P b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^Q a_k e^{-j\omega k}} \quad (15)$$

en què l'ordre del filtre IIR és donat per l'ordre del denominador, Q , ja que en l'habitualment $P < Q$. L'ordre del filtre coincideix amb el nombre de mostres de sortida en instants anteriors que ha d'emmagatzemar per calcular una nova mostra a la sortida del filtre, en què els coeficients $\{a_k\}_{k=0}^Q$ i $\{b_k\}_{k=0}^P$ són les incògnites que cal determinar en el disseny del filtre. Com es pot veure, no hi ha dependència lineal entre els coeficients del filtre i la resposta freqüencial, la qual cosa fa més difícil el disseny de filtres IIR en comparació amb els FIR.

Tot i les dificultats, hi ha mètodes analítics que permeten obtenir directament la resposta d'un filtre IIR desitjat a partir de filtres de tipus de resposta analògica. Un d'aquests mètodes és l'anomenada transformació bilineal que es descriu a continuació.

3.3.1. Mètode de la transformació bilineal

La transformació bilineal és un mètode que permet convertir el problema de dissenyar un filtre IIR en temps discret, la funció de transferència del qual és $H(z)$ en el domini transformat z , en el problema de dissenyar un filtre en temps continu (és a dir, analògic), la funció de transferència del qual és $H_d(s)$ en el domini de Laplace. D'aquesta manera s'aprofita que, per al cas del disseny de filtres analògics, ja existeixen solucions ben conegudes. Un cop dissenyat el filtre analògic s'efectua la transformació per tornar al domini en temps discret, en què s'assegura que les especificacions es continuen complint.

La relació entre totes dues funcions de transferència és donada per:

$$s = K \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \quad (16)$$

en què K és un paràmetre de disseny. La transformació en (16) és, a més, invertible, ja que:

$$z^{-1} = \frac{1 - s/K}{1 + s/K} \quad (17)$$

i garanteix l'estabilitat del filtre en passar d'un domini a un altre, ja que el semiplà esquerre en el pla-S de la transformada de Laplace queda dins del cercle unitari en convertir la representació de la transformada z .

D'altra banda, l'eix imaginari en el pla-S es mapeja directament sobre el cercle unitat del pla-Z, per la qual cosa hi ha una relació directa entre les freqüències d'un domini i de l'altre. De fet, substituint $s = e^{j\Omega}$ i $z = e^{j\omega}$ en (16), obtenim:

$$\Omega = K \tan\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (18)$$

Amb el resultat a (18) es pot veure que la constant K permet mapejar una freqüència concreta en el domini analògic a una freqüència concreta del domini digital, la qual cosa és útil per controlar la posició de la freqüència de tall del filtre.

Finalment, un cop convertit el problema al domini analògic, el pas següent consisteix a seleccionar un dels filtres analògics coneguts, la resposta freqüencial del qual es pot obtenir de manera analítica. Els quatre tipus de filtres analògics més coneguts són: Butterworth, Txebixev, invers de Txebixev i el·líptic. Les seves respostes en freqüència són recollides a continuació (taula 3), en què l'atenuació $\alpha(\Omega)$ es defineix així:

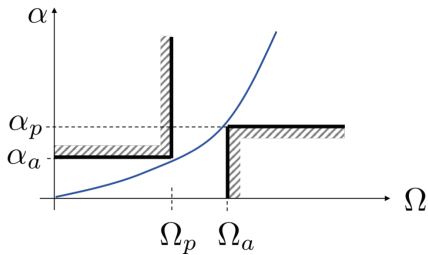
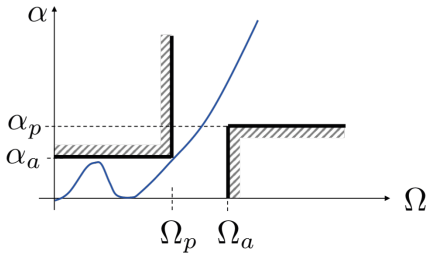
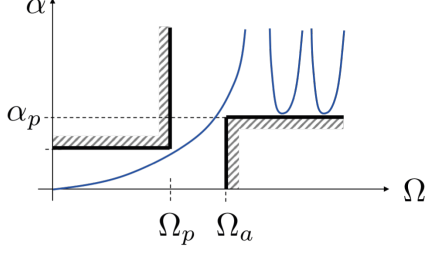
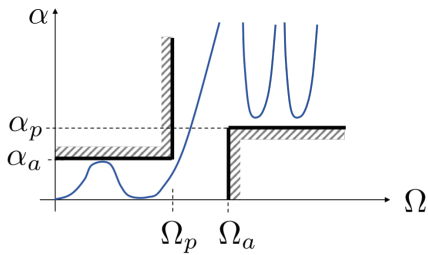
$$\alpha(\Omega) = -20 \log_{10} |H_a(\Omega)| \quad (19)$$

i, per tant,

$$\alpha_a = -20 \log_{10} \delta_a \quad (20)$$

$$\alpha_p = -20 \log_{10} \frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p}. \quad (21)$$

Taula 3. Tipus bàsics de filtres analògics i les respostes corresponents en termes d'atenuació en freqüència

Tipus de filtre	Atenuació del filtre analògic en freqüència
<p>Butterworth, ordre N:</p> $ H_a(\Omega) ^2 = \frac{1}{\left 1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right ^2}$ <p>Presenta un comportament màximament pla a la banda de pas a canvi d'una modesta selectivitat en freqüència.</p>	
<p>Txeibixev, de polinomi $T_N(x)$:</p> $ H_a(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$ <p>Presenta arissament constant en la banda de pas i decreix monòtonament en la banda atenuada. L'arissament es controla mitjançant ϵ, tot resolent:</p> $(1 - \delta_p)^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2}$	
<p>Invers de Txeibixev, de polinomi $T_N(x)$:</p> $ H_a(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \left[\epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)\right]^{-1}}$ <p>Decreix monòtonament en la banda de pas i presenta arissament constant en la banda atenuada y. L'arissament es controla mitjançant ϵ, tot resolent:</p> $(1 - \delta_p)^2 = \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2}$	
<p>El·líptic, d'ordre N:</p> $ H_a(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 E_N^2(\Omega)}$ <p>Presenta arissament constant tant en la banda atenuada com en la banda de pas i la banda de transició més estreta de tots els filtres amb la mateixa banda de pas i banda atenuada. El denominador depèn de la funció el·líptica jacobiana $E_N(\Omega)$.</p>	

A partir dels quatre tipus de filtres passabaix analògics descrits abans, el procediment per dissenyar un filtre passabaix IIR utilitzant el mètode de la transformació bilineal pot resumir-se en els passos següents:

- 1) Indicar les especificacions que ha de complir la resposta freqüencial $H(e^{j\omega})$ del filtre IIR en els termes de la figura 9 i convertir-les al domini analògic emprant la relació (18).

2) Seleccionar el filtre analògic que s'ajusta millor a les especificacions i assegurar que proporcioni una resposta causal i estable. Per fer-ho, cal comprovar que els pols de $|H_a(j\Omega)|^2$ es troben tots en el semiplà esquerre del pla-S.

3) Obtenir la funció de transferència $H(z)$ del filtre digital aplicant la transformació bilineal a $H_a(\Omega)$ utilitzant (16).

4) Obtenir la resposta en freqüència $H(e^{j\omega})$ del filtre digital substituint $z = e^{j\omega}$.

3.4. Comparació entre filtres FIR i IIR

La decisió entre l'ús d'un filtre FIR o IIR depèn d'un compromís entre estabilitat, facilitat d'implementació i selectivitat en termes de relació entre el nivell de banda de pas i el nivell de banda atenuada.

Els filtres FIR permeten dissenyar filtres causals i de fase lineal, que són molt importants en diverses aplicacions de processament de senyal, en què interessa filtrar una banda de freqüències del senyal d'entrada amb la mínima distorsió de fase. Els filtres FIR que compleixen simetria parell o imparell en resposta impulsional són els únics que poden presentar fase lineal. A més, els filtres FIR resulten en una resposta impulsional finita que permet implementar l'operació de filtratge mitjançant la convolució i, per tant, beneficiar-se de les implementacions eficients de filtratge mitjançant l'ús de l'FFT i del filtratge en blocs. La senzillesa d'implementació, sense retroalimentacions, evita possibles problemes d'estabilitat que poden sorgir en quantificar els coeficients del filtre a l'hora d'implementar-lo en *maquinari*. Com a contrapartida, els filtres FIR solen necessitar molts coeficients per aconseguir una resposta freqüencial que sigui prou selectiva per a certes aplicacions.

Quant als filtres IIR, el seu disseny és *a priori* més complex perquè implica una sèrie de transformacions per mapejar els requisits del domini digital a domini analògic i, posteriorment, de tornada al domini digital. A més, com que es tracta d'una resposta freqüencial racional, les arrels del denominador han d'escollir-se amb cura per evitar que el filtre resultant sigui inestable. No només això, sinó que els coeficients resultants han de ser analitzats també amb cura per evitar que, en arrodonir-los o quantificar-los en implementacions *de maquinari*, els pols resultants quedin desviats respecte de la seva posició inicial i el filtre es torni inestable. Això fa que l'anàlisi d'estabilitat sigui un aspecte molt important en el disseny de filtres IIR. Una altra característica dels filtres IIR és que la seva resposta impulsional infinita fa impossible l'ús de l'operador convolució. Això fa que la sortida del filtre hagi de calcular-se amb equacions en diferències finites i, per tant, realimentant la sortida del filtre cap a l'entrada. La contrapartida dels filtres IIR és que necessiten molts menys coeficients que els filtres FIR per obtenir respostes selectives en freqüència, la qual cosa els fa molt atractius en implementacions de baixa complexitat.

4. Implementació del filtratge en blocs

Una de les propietats de la transformada de Fourier és que permet implementar de manera molt senzilla la convolució entre dues seqüències, cosa que fa que aquesta operació es converteixi en un mer producte en el domini transformat. Això fa que la DFT sigui molt utilitzada en l'anàlisi de sistemes discrets i, sobretot, en la implementació de l'operació de filtratge amb filtres FIR, en què l'existència d'algoritmes que implementen la DFT de manera eficient fa que el procés de convolució en el domini freqüencial sigui encara més avançatjós (Blahut, 2010).

El filtratge de seqüències mitjançant la DFT implica utilitzar blocs de mostres de grandària limitada, ja que la complexitat de càlcul de la DFT depèn del nombre de mostres que es processen per bloc. Això fa que el filtratge de seqüències molt llargues es dugui a terme segmentant la seqüència d'entrada en blocs de mida fixa perquè puguin ser processats seqüencialment per la DFT. A més, si el que es pretén és implementar la convolució lineal entre una seqüència d'entrada i la resposta impulsional d'un cert filtre FIR, interessa evitar l'efecte de convolució circular que introdueix per defecte la DFT. Per a això hi ha diversos mètodes, com ara l'*overlap-save* i l'*overlap-add*, que es descriuen a continuació i que, precisament, tenen com a objectiu implementar de manera eficient la convolució lineal entre blocs de la seqüència d'entrada i la resposta impulsional d'un filtre FIR de L coeficients.

4.1. Mètode *overlap-save*

Aquest mètode consisteix a agafar blocs de longitud $N = K + L - 1$ mostres de la seqüència d'entrada, amb típicament $K \gg L$, i en què N passa a ser la mida de la DFT i la IDFT que duen a terme la convolució en el domini de la freqüència. Interessa, per tant, que N sigui potència de 2 per poder aplicar l'algoritme FFT al càlcul de la DFT. A partir de la resposta impulsional del filtre FIR de L coeficients, $h(n)$, s'afegeixen $K - 1$ zeros a partir de l'últim coeficient, de manera que queda una resposta impulsional amb *zero padding* fins a un total de N coeficients. D'aquesta resposta impulsional es calcula la DFT de N punts,

$$H_N[k] = DFT_N \left\{ h(0), h(1), \dots, h(L-1), \underbrace{0, \dots, 0}_{K-1} \right\} \quad (22)$$

A partir d'aquest punt es va processant la seqüència d'entrada en blocs de N mostres, per als quals se'n calcula la DFT:

$$X_{N,m}[k] = DFT_N \{ x_m(0), x_m(1), \dots, x_m(N-1) \} \quad (23)$$

amb:

$$x_m(n) = x(mN + n). \quad (24)$$

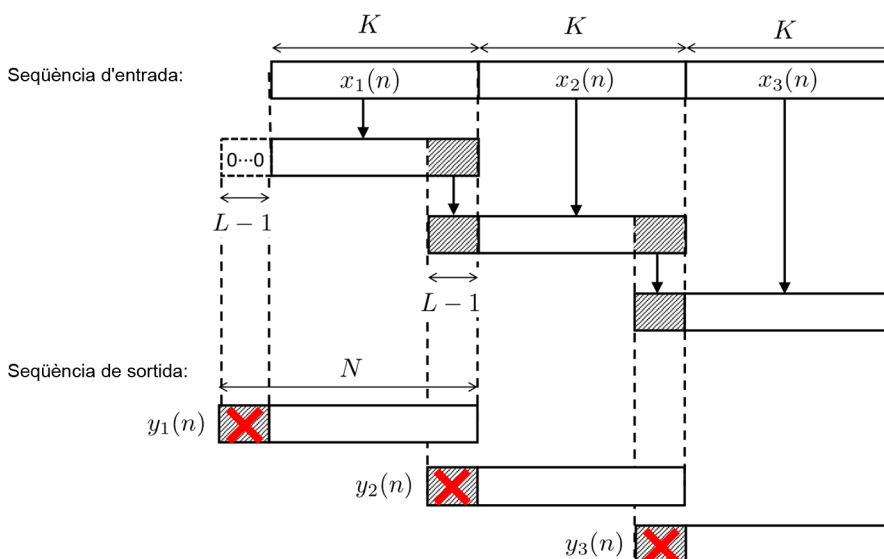
A continuació es multipliquen les dues DFT i es porta a terme la IDFT del resultat, que dona lloc a la seqüència de mostres:

$$y_m(n) = \text{IDFT}_N\{X_{N,m}[k]H_N[k]\}. \quad (25)$$

Com que estem convolucionant un segment de N mostres d'entrada amb un filtre de longitud L , si es tractés d'una convolució lineal tindríem una seqüència de sortida de longitud $N + L - 1$. No obstant això, la longitud de la seqüència de sortida $y_m(n)$ és limitada a N , la mida de la IDFT, amb la qual cosa les primeres $L - 1$ mostres hauran estat afectades per l'aliàs ocasionat per la convolució circular. Aquestes $L - 1$ primeres mostres de $y_m(n)$ cal descartar-les i quedar-se únicament amb les K mostres que hi ha a continuació, ja que coincideixen exactament amb el resultat de la convolució lineal. Per tant, per cada bloc de N mostres de la seqüència d'entrada obtenim tan sols K mostres de la seqüència filtrada. Per això, per mantenir la continuïtat de la seqüència de sortida i evitar que es perdin mostres, els blocs de mostres de la seqüència d'entrada s'han de prendre amb un encavalcament de $L - 1$ mostres entre ells. És a dir, les $L - 1$ últimes mostres del bloc $x_m(n)$ passen a ser les primeres $L - 1$ del bloc següent $x_{m+1}(n)$.

El mètode *overlap-save* es descriu gràficament en la figura 11, on s'indiquen les mostres que s'encavalquen entre blocs consecutius de mostres d'entrada i com el procediment comença inicialitzant la seqüència d'entrada amb $L - 1$ zeros per al primer bloc.

Figura 11. Il·lustració gràfica de l'operació de convolució per blocs utilitzant el mètode *overlap-save*



4.2. Mètode *overlap-add*

A diferència del mètode anterior, l'*overlap-add* evita l'efecte d'aliàsing, que apareix en filtrar blocs consecutius de la seqüència d'entrada, ja que processa blocs de mida K , mentre que la mida de la DFT i la IDFT ja té en compte la longitud del filtre de L coeficients, i és precisament de $N = K + L - 1$ punts; és a dir, la longitud que tindria la seqüència de sortida en convolucionar linealment un bloc de K mostres amb un filtre de L coeficients. Per això cal afegir $L - 1$ zeros a cada bloc de K mostres que es processa, i del qual es calcula la DFT de N punts segons:

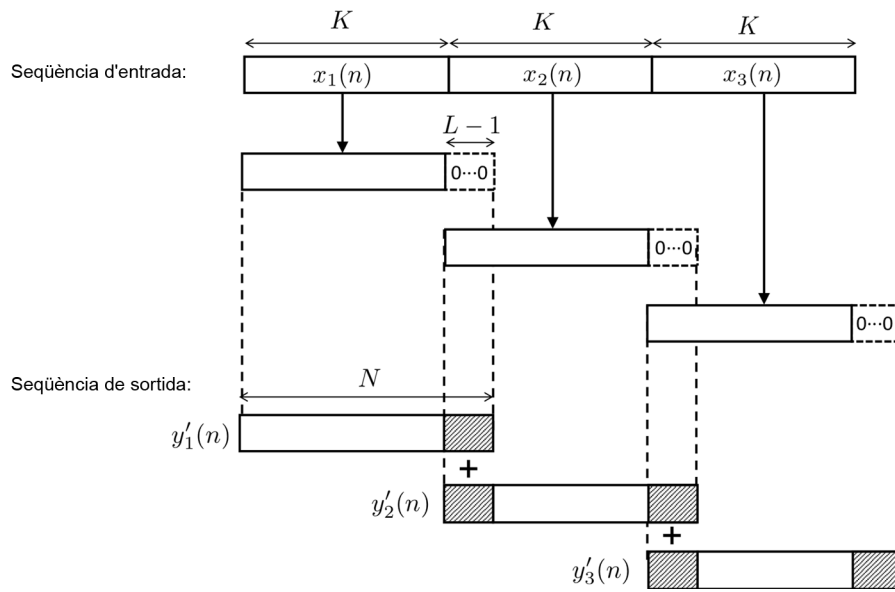
$$X'_{N,m}[k] = DFT_N \left\{ x_m(0), x_m(1), \dots, x_m(K-1), \underbrace{0, \dots, 0}_{L-1} \right\}. \quad (26)$$

A continuació es multiplica la DFT del bloc d'entrada per la DFT del filtre i es porta a terme la IDFT; això dona lloc a la seqüència de mostres:

$$y'_m(n) = IDFT_N \{ X'_{N,m}[k] H_N[k] \}. \quad (27)$$

Atès que s'ha evitat l'efecte d'aliàsing, totes les N mostres d'aquest bloc de sortida són útils i no cal descartar-ne cap. Aquestes mostres de sortida es corresponen amb les mostres $x_m(n)$ d'un cert bloc d'entrada de K mostres, amb la qual cosa, per processar el bloc següent, $x_{m+1}(n)$, cal desplaçar K mostres cap endavant. Sobre aquestes noves K mostres el procediment és similar al descrit anteriorment, és a dir, afegir $L - 1$ zeros al nou bloc de mostres segons (26), calcular la DFT del bloc, multiplicar per la DFT dels coeficients del filtre i fer la IDFT per tornar al domini temporal. Com a resultat s'obté el bloc de mostres de sortida $y'_{m+1}(n)$, en què les $L - 1$ primeres mostres han de sumar-se a les $L - 1$ últimes mostres del bloc $y'_m(n)$ anterior per garantir la continuïtat del senyal de sortida, tal com s'indica gràficament en la figura 12.

Figura 12. Il·lustració gràfica de l'operació de convolució per blocs utilitzant el mètode *overlap-add*



Exercicis d'autoavaluació

1. A partir del senyal $x[n] = \sin(\omega_0 n)$ amb $\omega_0 = 0.8\pi/3$. Si apliquem una delmació amb filtre *antialiàsing* a aquest senyal per un factor $M = 3$, la transformada de Fourier del senyal resultant presenta:

- a) Una delta en la freqüència $\omega'_0 = 0.8\pi$.
- b) Una delta en la freqüència $\omega'_0 = 0.8\pi/9$.
- c) Una delta en la freqüència $\omega'_0 = 0.8\pi$ i una altra delta en la freqüència $\omega'_0 = 1.2\pi$.
- d) Una delta en la freqüència $\omega'_0 = 0.8\pi/9$ i una altra delta en la freqüència $\omega'_0 = 2\pi - 0.8\pi/9$.

2. A partir del senyal $x[n] = \sin(\omega_0 n)$ amb $\omega_0 = 1.2\pi/3$. Si apliquem una delmació sense filtre *antialiàsing* a aquest senyal per un factor $M = 3$, la transformada de Fourier del senyal resultant presenta:

- a) Una delta en la freqüència $\omega'_0 = 1.2\pi$.
- b) Una delta en la freqüència $\omega'_0 = 1.2\pi/9$.
- c) Una delta en la freqüència $\omega'_0 = 0.8\pi$.
- d) Una delta en la freqüència $\omega'_0 = 0.8\pi$ i una altra delta en la freqüència $\omega'_0 = 1.2\pi$.

3. A partir del senyal $x[n] = \sin(\omega_0 n)$ amb $\omega_0 = 0.8\pi/3$. Si interpolem aquest senyal per un factor $L = 3$, la transformada de Fourier del senyal resultant presenta:

- a) Una delta en la freqüència $\omega'_0 = 0.8\pi$.
- b) Una delta en la freqüència $\omega'_0 = 0.8\pi/9$.
- c) Una delta en la freqüència $\omega'_0 = 0.8\pi$ i una altra delta en la freqüència $\omega'_0 = 1.2\pi$.
- d) Una delta en la freqüència $\omega'_0 = 0.8\pi/9$ i una altra delta en la freqüència $\omega'_0 = 2\pi - 0.8\pi/9$.

4. A partir del senyal $x[n] = \sin(\omega_0 n)$ amb $\omega_0 = 0.8\pi/3$. Si apliquem un canvi de freqüència per un factor $3/2$, quines afirmacions són certes?

- a) Cal implementar un filtre passabaix amb freqüència de tall $\omega_c = \pi/2$.
- b) Cal implementar un filtre passabaix amb freqüència de tall $\omega_c = \pi/3$.
- c) La transformada de Fourier del senyal resultant presenta una delta en la freqüència $\omega'_0 = 1.6\pi/9$ i una altra delta en la freqüència $\omega'_0 = 16.4\pi/9$.
- d) La transformada de Fourier del senyal resultant presenta una delta en la freqüència $\omega'_0 = 0.4\pi$ i una altra delta en la freqüència $\omega'_0 = 1.6\pi$.

5. Volem implementar un filtre FIR i que el senyal de sortida presenti un retard enter de mostres i un òfset de fase nul. Quin tipus de filtre FIR cal implementar-hi?

- a) Tipus I.
- b) Tipus II.
- c) Tipus III.
- d) Tipus IV.

6. En relació amb el disseny de filtres FIR i IIR, indiqueu quines afirmacions són vertaderes:

- a) Els filtres FIR necessiten menys coeficients que els filtres IIR per implementar respostes selectives en freqüència.
- b) Els filtres FIR són sempre causals i de fase lineal.
- c) Els filtres IIR donen lloc a implementacions de filtratge en bloc més eficients, gràcies a l'ús de la FFT.
- d) Els filtres FIR obtinguts mitjançant arissament constant tenen com a desavantatge que la seva atenuació és de l'ordre de 5 dB (pitjor que els filtres FIR obtinguts per enfiestrament).

7. En relació amb el disseny de filtres IIR, indiqueu quines afirmacions són vertaderes:

- a) Els filtres de Butterworth presenten un comportament pla en la banda de pas i una gran selectivitat en freqüència.
- b) Els filtres de Txebeixev decreixen monòtonament en la banda de pas i presenten arrissament constant a la banda atenuada.
- c) Els filtres inversos de Txebeixev presenten arrissament constant en la banda de pas i decreixen monòtonament en la banda atenuada.
- d) Els filtres el·líptics presenten arrissament constant tant en la banda de pas com en la banda atenuada.

8. Indiqueu l'expressió correcta de la transformació bilineal per al disseny de filtres IIR:

- a) $s = K \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$.
- b) $s = K \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)$.
- c) $z^{-1} = K \left(\frac{1-s^{-1}}{1+s^{-1}} \right)$.
- d) $z^{-1} = \frac{1+s/K}{1-s/K}$.

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. c

2. d

3. d

4. b c

5. a

6. b

7. d

8. a

Bibliografia

Blahut, R. E. (2010). *Fast Algorithms for Signal Processing*. Cambridge University Press.

Karam, L. J.; McClellan, J. H.; Selesnick, I. W.; Sidney, C. (2010). *Digital Signal Processing Fundamentals* (capítol 11, «Digital filtering»), *The Digital Signal Processing Handbook* (2a. ed.). CRC Press.

Oppenheim, A. V.; Schaffer, R. W.; Buck, J. R. (1999). *Discrete-Time Signal Processing* (2a. ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series.

Parks, T. W.; Burrus, C. S. (1987). *Digital Filter Design*. John Wiley & Sons.