
La transformada discreta de Fourier

Análisis de secuencias de duración finita, propiedades, muestreo en frecuencia de la TFSD, convolución circular

PID_00262131

Gonzalo Seco Granados

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 4 horas



Gonzalo Seco Granados

El encargo y la creación de este recurso de aprendizaje UOC han sido coordinados por el profesor: José Antonio Morán Moreno (2019)

Primera edición: febrero 2019
© Gonzalo Seco Granados
Todos los derechos reservados
© de esta edición, FUOC, 2019
Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Diseño: Manel Andreu
Realización editorial: Oberta UOC Publishing, SL

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea este eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares de los derechos.

Índice

Introducción	5
Objetivos	6
1. Definición de la transformada discreta de Fourier e interpretaciones	7
1.1. Definición de la DFT y de la IDFT	7
1.2. Relación entre la DFT y la TFSD	10
1.3. Relación entre la DFT y la serie discreta de Fourier	11
1.4. Representación matricial de la DFT	12
2. Muestreo en frecuencia de la TFSD	16
3. Propiedades de la DFT	20
3.1. Linealidad	20
3.2. Desplazamiento circular	20
3.3. Dualidad	22
3.4. Propiedades de simetría	23
3.5. Modulación	25
3.6. Convolución circular	26
3.7. Producto (o enventanado) de secuencias	30
3.8. Igualdad de Parseval	31
3.9. Resumen de las propiedades de la DFT	31
4. Convolución lineal mediante la DFT	33
5. Cálculo de la DFT	36
Ejercicios de autoevaluación	41
Solucionario	43
Bibliografía	44

Introducción

En este módulo se estudia la transformada discreta de Fourier (DFT, siglas en inglés de *Discrete Fourier Transform*), que es la transformación más característica en el ámbito del procesamiento de señales en tiempo discreto. Las transformadas estudiadas hasta ahora, la TFSD y la TZ, son herramientas muy útiles para el análisis de señales y sistemas en tiempo discreto, pero tanto la TFSD como la TZ son funciones de una variable continua y, por lo tanto, no se pueden calcular o representar o almacenar fácilmente en dispositivos de procesamiento de señal como FPGA, DSP o procesadores de propósito general, ni facilitan que dichos dispositivos realicen operaciones en la señal directamente en el dominio transformado. Sin embargo, la DFT supera estas limitaciones porque permite representar una secuencia de longitud finita mediante otra secuencia de longitud finita en el dominio de la frecuencia. Por lo tanto, la DFT mantiene todas las ventajas y relevancia de la representación frecuencial de las señales y, además, añade el hecho de que esa representación sea simplemente un vector de números, con lo que se puede almacenar y operar con él fácilmente en dispositivos de procesamiento de señal. Por este motivo decimos que la DFT es la transformación más característica en el ámbito del procesamiento de señales en tiempo discreto, porque tanto el dominio temporal como en el frecuencial se trabaja con secuencias de números y se pone de manifiesto de la forma más clara posible la dualidad entre ambos. Existen además algoritmos computacionalmente muy eficientes para calcular la DFT. Este hecho ha facilitado que la DFT sea una herramienta utilizada de forma extraordinariamente amplia. Sus aplicaciones no se limitan al análisis de señales, sino que es el elemento clave en la implementación de las modulaciones multiportadoras. Estas modulaciones facilitan el aprovechamiento óptimo del canal y se han podido utilizar la mayoría de los sistemas modernos de telecomunicaciones gracias a la existencia de algoritmos eficientes para el cálculo de IDFT.

En este módulo presentaremos la DFT y su transformada inversa, así como la relación con otras transformaciones; enunciaremos y demostraremos las principales propiedades de la DFT; haremos especial énfasis en una nueva operación entre secuencias denominada *convolución circular*; analizaremos el concepto de muestreo en frecuencia, que surge de forma natural con la DFT y que es en cierta manera dual del muestreo en tiempo que está en el origen del procesamiento digital. Como introducción a temas que se extenderán, en el siguiente módulo presentaremos la manera en la que la DFT permite la implementación de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, o sea, cómo permite calcular la convolución lineal.

Objetivos

Los objetivos de este módulo son los siguientes:

1. Conocer la definición de la DFT y de la DFT inversa.
2. Asimilar la relación de la DFT con la TFSD y con la serie de Fourier.
3. Comprender el concepto de muestreo en frecuencia.
4. Expresar de varias maneras equivalentes la extensión periódica de una señal.
5. Relacionar los efectos del muestreo en frecuencia con la circularidad que surge en numerosas operaciones, como el desplazamiento circular o la convolución circular.
6. Calcular la convolución circular de dos secuencias.
7. Enunciar y demostrar las principales propiedades de la DFT.
8. Familiarizarse con la diferencia entre convolución lineal y circular, además de saber obtener la convolución lineal de dos secuencias utilizando de forma adecuada únicamente la DFT.
9. Entender la propiedad en la que se basan muchos algoritmos de cálculo eficiente de la DFT.

1. Definición de la transformada discreta de Fourier e interpretaciones

1.1. Definición de la DFT y de la IDFT

En el caso de señales analógicas, tanto la propia señal como su transformada de Fourier son funciones de una variable real; en el caso de la señal es el tiempo y en el caso de la transformada de Fourier es la frecuencia analógica (F) o la pulsación analógica (Ω). En cambio, esto no ocurre al realizar la transformada de Fourier de una señal discreta: mientras la señal discreta es una secuencia de números, su transformada de Fourier (TFSD) es una función de una variable real de la frecuencia discreta (f) o de la pulsación discreta (ω). Esta falta de dualidad para las señales discretas entre el dominio temporal y el dominio frecuencial hace que las ventajas que aporta la TFSD en el análisis de señales y sistemas discretos se vean reducidos por el hecho de que la manipulación numérica de funciones de una variable real es más compleja que la manipulación de secuencias de números.

La facilidad de almacenar, transformar, etc. secuencias de números en lugar de funciones es una de las razones primordiales del interés en el procesamiento de señales discretas. De forma natural surge la necesidad de establecer una transformación que, conservando la relevancia conceptual de la transformada de Fourier, genere una secuencia en el dominio transformado; estos intereses los satisface la transformada discreta de Fourier, que abreviadamente se suele denominar DFT de acuerdo con las siglas de su denominación inglesa Discrete Fourier Transform. En definitiva, la DFT nos permitirá transformar una secuencia de duración finita de números en otra secuencia de duración finita en el dominio transformado, mientras que la TFSD nos habría proporcionado una función de una variable real.

Consideremos una secuencia $x[n]$ de longitud finita, concretamente de longitud N muestras, lo que significa que $x[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \leq n \leq N - 1$. En muchos casos, nos puede interesar asumir que la secuencia tiene longitud N incluso si su longitud es $M \leq N$. En esos casos, simplemente asumiremos que las últimas $(N - M)$ muestras son cero.

La transformada discreta de Fourier o DFT de la secuencia $x[n]$ se define como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1)$$

En ocasiones se hace explícito el valor de N mediante la denominación DFT de N puntos (o N -point DFT, en inglés). Obsérvese que la DFT es también una secuencia de N muestras. La secuencia temporal puede recuperarse a partir de los valores $X[k]$ mediante la transformada discreta de Fourier inversa o IDFT, que viene dada por:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2)$$

Si es necesario hacer explícito el valor de N , se utiliza la denominación IDFT de N puntos (o N -point IDFT, en inglés). Para comprobar que podemos recuperar la secuencia temporal, vamos a sustituir la expresión de la DFT en (2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} km} e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x[m] e^{j \frac{2\pi}{N} k(n-m)} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k(n-m)} \end{aligned} \quad (3)$$

El último sumatorio de (3) solo es diferente de cero cuando $n-m$ es cero o un múltiplo de N , y en este caso vale 1. Por lo tanto, dicho término se puede escribir como:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k(n-m)} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n+rN-m] \quad (4)$$

Podemos definir el tren periódico de impulsos:

$$f[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n+rN] \quad (5)$$

lo que nos permite reescribir (3) como:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] f[n-m] = x[n] * f[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN] \quad (6)$$

a partir de la cual definimos la extensión periódica de la secuencia $x[n]$ con periodo N muestras:

$$\tilde{x}[n] \triangleq \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN] \quad (7)$$

El resultado en (6) demuestra que si la expresión de la IDFT en (2) se evalúa para valores de $n=0, \dots, N-1$, se recupera justamente la secuencia $x[n]$, mientras que también se puede evaluar para cualquier valor de n ; en cuyo caso se obtiene la extensión periódica de $x[n]$. Lo mismo ocurre para la expresión de la DFT en (1): si se evalúa para cualquier valor de k , también se obtiene una secuencia periódica, puesto que las exponenciales presentes en (1) cumplen:

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+rN)n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \forall r \quad (8)$$

La relación entre las secuencias $x[n]$ y $X[k]$ dadas por las expresiones (1) y (2) se suele expresar a veces de forma compacta de la siguiente manera (donde el valor de N se puede omitir si está claro por el contexto):

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}_N} X[k] \quad (9)$$

o equivalentemente:

$$x[n] = \text{DFT}_N\{X[k]\} \quad (10)$$

$$X[k] = \text{IDFT}_N\{x[n]\} \quad (11)$$

Implícitamente se entiende que tanto n como k se evalúan solo en el intervalo $[0, N-1]$ y que, por tanto, $x[n]=0$ fuera de $0 \leq n \leq N-1$ y $X[k]=0$ fuera de $0 \leq k \leq N-1$. Esto es una forma de decir que estamos interesados en los valores de $x[n]$ solo en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$, porque $x[n]=0$ es realmente cero fuera de este intervalo, y estamos interesados en los valores de $X[k]$ solo en el intervalo $0 \leq k \leq N-1$, porque son los únicos que se necesitan en la expresión de IDFT en (2). No obstante, si las expresiones (1) y (2) se evalúan para valores de n y k fuera de este intervalo, se obtienen secuencias periódicas de periodo N . Esta periodicidad inherente está siempre presente. A veces causa dificultades y a veces puede ser provechosa, pero no se puede ignorar.

Antes de continuar vamos a definir una notación que se utilizará más adelante.

Mediante $(n)_N$ expresamos la operación n módulo N :

$$(n)_N = n \bmod N \quad (12)$$

Por ejemplo, $(14)_5 = 4$ porque $14 = 4 + 5 \times 2$, y $(-25)_9 = 2$ porque $-25 = 2 + 9 \times (-3)$. La expresión $(n)_N$ siempre devuelve un número en el intervalo $[0, N-1]$. Con esta notación, la extensión periódica de una señal $x[n]$ de duración N también se puede expresar como:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN] = x\left[\left(\frac{n}{N}\right)_N\right] \quad (13)$$

Nótese que esta expresión no sería válida si la longitud de $x[n]$ fuera mayor N muestras y se produjera solape entre las diferentes réplicas en el sumatorio.

1.2. Relación entre la DFT y la TFSD

Recordamos la expresión genérica de la TFSD presentada en el módulo 2:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (14)$$

Vamos a particularizarla para una señal $x[n]$ de duración N , lo que se entiende siempre, a no ser que se diga lo contrario, como que la señal es cero fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$. En este caso, la TFSD se puede escribir como:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} \quad (15)$$

Comparando la expresión (1) y (15), la siguiente relación entre la DFT y la TFSD es evidente:

$$X[k] = X(e^{j\omega})_{\omega=2\pi\frac{k}{N}} \quad (16)$$

O sea, la DFT coincide con las muestras de la TFSD en las pulsaciones $\omega = 2\pi\frac{k}{N}$.

Es muy importante recalcar que esta igualdad se da cuando el número de puntos de la DFT es igual o superior a la longitud de la señal $x[n]$. Para profundizar en esto, imaginemos el caso contrario, o sea, que $x[n]$ tiene longitud M siendo $M > N$. En este caso, las muestras no nulas de $x[n]$ sobrepasan el intervalo $[0, \dots, N-1]$ y, al calcular la DFT de N puntos según (1), se están descartando muestras de $x[n]$. Realmente se está calculando la DFT de la señal $x[n]$ enventanada por una ventana rectangular $p_N[n]$ de N muestras:

$$v[n] = x[n]p_N[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{para otro } n \end{cases} \quad (17)$$

siendo:

$$p_N[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{para otro } n \end{cases} \quad (18)$$

La TFSD de $v[n]$ es:

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\theta}) P_N(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (19)$$

siendo:

$$P_N(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (20)$$

Finalmente, podemos expresar mediante fórmulas que, en este caso particular que estamos considerando, la DFT son las muestras de la TFSD de la señal enventanada:

$$X[k] = V(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} \quad (21)$$

Es evidente que cuando la longitud M de la señal $x[n]$ no supera el número de puntos N de la DFT, entonces estamos en las condiciones de partida para la cuales se definió la DFT en el subapartado 1.1 y el enventado no tiene ningún efecto, por lo que se recupera la expresión (16).

En el apartado 2, analizaremos una situación que viene a ser hasta cierto punto la recíproca a la planteada en este ejemplo. Ahora acabamos de ver que si realizamos la DFT con menos puntos que la longitud de la señal, el resultado coincide con las muestras de la TFSD de la señal enventanada. La situación recíproca se da cuando se toman muestras de la TFSD de la señal original, o sea, de $X(e^{j\omega})$, y se realiza su IDFT. Es decir, en el primer caso se realizará primero la DFT y luego se mirará con qué coincide el resultado; mientras que en el apartado 2, primero realizaremos la TFSD, la muestrearemos, realizaremos la IDFT y entonces miraremos con qué coincide el resultado.

1.3. Relación entre la DFT y la serie discreta de Fourier

Como se vio en el módulo 2 cualquier señal periódica se puede expresar mediante su serie discreta de Fourier (SDF o también conocida como DFS por sus siglas de su nombre en inglés, Discrete Fourier Series). Sea $z[n]$ una señal discreta periódica de periodo N , o sea, $z[n] = z[n+rN], \forall r$, entonces su expresión en SDF es:

$$z[n] = \sum_{k=0}^{N-1} z_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (22)$$

donde los coeficientes de la SDF son:

$$z_k = \text{SDF}\{z[n]\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (23)$$

Imaginemos el caso particular que como señal periódica tomamos la extensión periódica que hemos presentado anteriormente, $\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN]$, y calculamos los coeficientes de su SDF mediante (22), que denominamos x_k . Por simple observación de (22) y de la definición de la DFT en (1), es evidente que la relación entre la SDF y la DFT es:

$$x_k = \frac{1}{N} X[k] \quad (24)$$

o lo mismo, expresado mediante otra notación:

$$\text{SDF}\left\{\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN]\right\} = \frac{1}{N} \text{DFT}_N\{x[n]\} \quad (25)$$

Utilizando (16) y (25) también podemos escribir:

$$\text{SDF}\left\{\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rN]\right\} = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})_{\omega=2\pi\frac{k}{N}} \quad (26)$$

Nótese que (16), (24) y (25) se cumplen si y solo si $x[n]$ es una secuencia de longitud igual o inferior a N . En cambio, aunque parezca sorprendente ahora mismo, (26) se cumple siempre, independientemente de si la longitud de $x[n]$ es menor, igual o mayor que N . Esto se demostrará en el apartado 2.

1.4. Representación matricial de la DFT

Suponiendo de nuevo que $x[n]$ es una secuencia de longitud N , podemos organizar sus muestras en un vector columna de dimensiones $N \times 1$:

$$x = [x[0] \ x[1] \ \dots \ x[N-2] \ x[N-1]]^T \quad (27)$$

El superíndice T indica la operación de transponer (i. e., cambiar filas por columnas) y, como es habitual, los vectores y matrices se denotan en negrita. De forma similar, podemos ordenar los valores de la DFT en otro vector:

$$X = [X[0] \ X[1] \ \dots \ X[N-2] \ X[N-1]]^T \quad (28)$$

Definimos la siguiente matriz de tamaño $N \times N$, que se denomina matriz de la DFT. En MATLAB se puede obtener mediante la función `dftmtx(N)`.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Es una matriz simétrica y ortogonal (i. e., cualquier fila es ortogonal a todas las demás, y lo mismo ocurre para las columnas) y su inversa cumple:

$$\begin{aligned} F^{-1} &= \frac{1}{N} F^* \\ FF^* &= NI \end{aligned} \quad (30)$$

donde I es la matriz identidad y el superíndice $*$ indica el complejo conjugado.

A partir de estas definiciones y de la simple observación de (1) y (2), se puede escribir directamente la DFT, se puede calcular de forma matricial como:

$$X = FX \quad (31)$$

y la IDFT como:

$$x = \frac{1}{N} F^* X \quad (32)$$

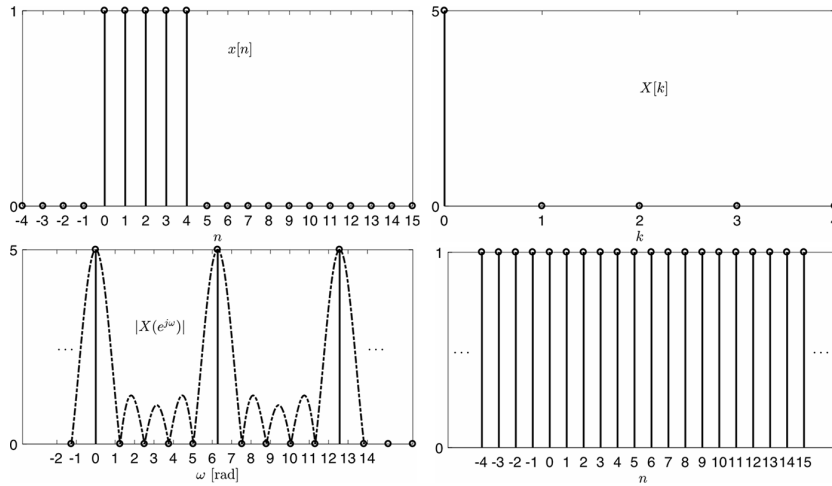
Ejemplo 1. DFT de un pulso rectangular

Para ilustrar el cálculo de la DFT de una secuencia de duración finita, consideramos la $x[n]$ mostrada en la figura 1a. Se trata de un pulso rectangular de 5 muestras, así que podemos considerar que longitud es cualquier valor igual o superior a 5. Elegimos en primer lugar un valor $N = 5$. La DFT, que se muestra en la figura 1b, vale:

$$X[k] = \sum_{n=0}^4 e^{-j\frac{2\pi}{5}kn} = \begin{cases} 5, & k=0 \\ 0 & k=1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (33)$$

En la figura 1c se comprueba que la DFT coincide con las muestras de $X(e^{j\omega})$ tomadas en las pulsaciones $\omega = \frac{2\pi}{5}k$. El hecho de que la DFT solo tenga una muestra para $k=0$ es coherente con el hecho de que la extensión periódica de $x[n]$ con periodo 5 muestras, denominada $\tilde{x}[n]$, es una secuencia constante, como se puede observar en la figura 1d. En el desarrollo en serie de Fourier de una secuencia constante, el único coeficiente diferente de cero es el primero, ya que corresponde a la frecuencia cero. Dada la relación entre la DFT y el SDF, es lógico que solo el primer coeficiente de la DFT puede ser diferente de cero.

Figura 1. Ejemplo de cálculo de la DFT



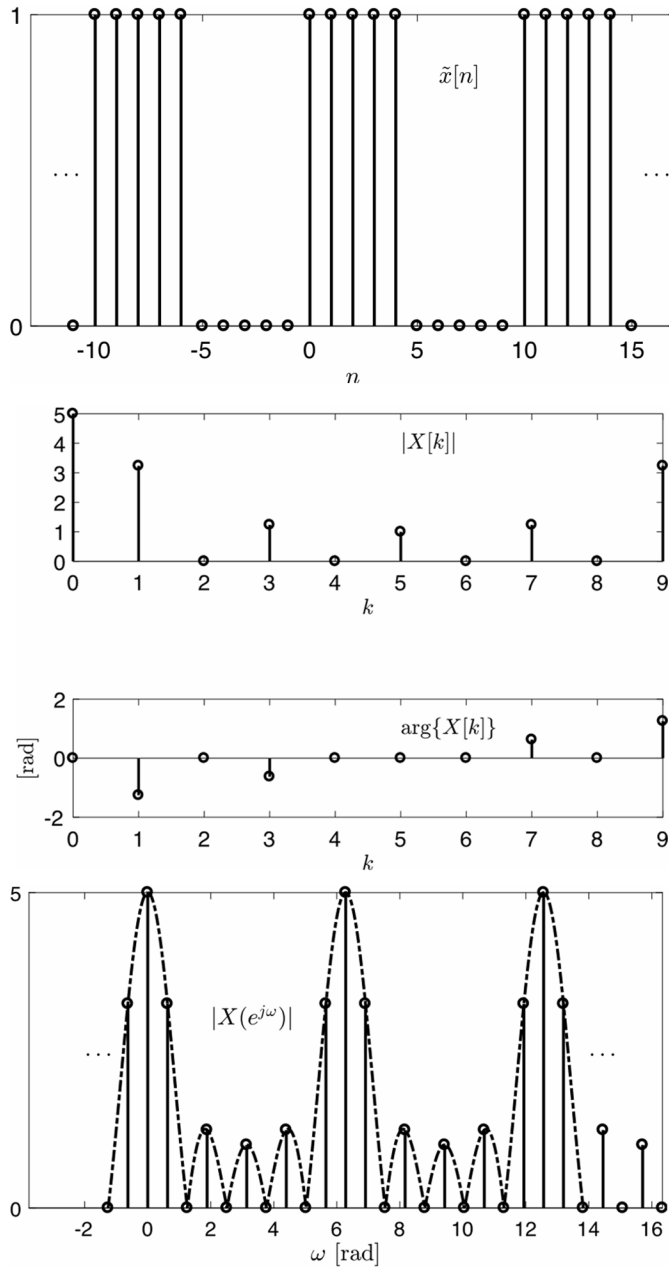
(a) Pulso rectangular $X[n]$. (b) DFT de $X[n]$ para $N = 5$. (c) Muestreo en frecuencia de $X(e^{j\omega})$. (d) Extensión periódica $\tilde{X}[n]$ para $N = 5$.

En segundo lugar, elegimos un valor $N = 10$. En este caso, la extensión periódica, que se muestra en la figura 2a, ya no es una señal continua. Por lo tanto, la DFT ya no podrá ser no nula solo en el caso de $k = 0$. Concretamente los valores de la DFT son:

$$X[k] = \sum_{n=0}^4 e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k5}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k}} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{5}k}} \quad (34)$$

Se trata de valores complejos en general, cuyo módulo y fase aparecen en la figura 2b. Al igual que en el caso anterior, los valores de la DFT se pueden obtener como las muestras de $X(e^{j\omega})$. Hay que destacar que el valor de $X(e^{j\omega})$ no ha cambiado; es la TFSD de un pulso de 5 muestras, independientemente del valor de N , que es un parámetro que se necesita para la DFT, pero no para la TFSD. Lo que sí han cambiado son los puntos de muestreo en frecuencia, que en este caso son $\omega = \frac{2\pi}{5}k$.

Figura 2. Ejemplo de cálculo de la DFT



(a) Extensión periódica $\tilde{x}[n]$ para $N = 10$. (b) DFT de $x[n]$ para $N = 10$. (c) Muestreo en frecuencia de $X(e^{j\omega})$.

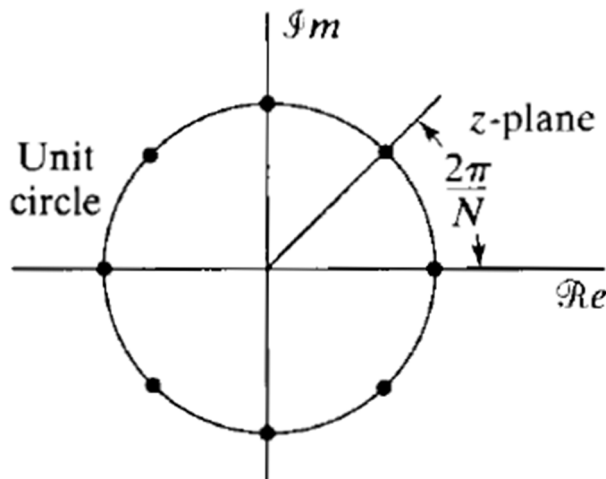
2. Muestreo en frecuencia de la TFSD

En este apartado vamos a discutir de forma general la relación entre una secuencia cualquiera $y[n]$ con transformada de Fourier $Y(e^{j\omega})$ y la secuencia obtenida al aplicar la IDFT a muestras equiespaciadas en frecuencia de $Y(e^{j\omega})$. Dado que en principio la señal de partida es absolutamente general y no tiene ni que ser tan siquiera de longitud finita, hemos preferido denominarla $y[n]$, en lugar de $x[n]$, para evitar confusiones.

Sea $\tilde{Y}[k]$ la secuencia obtenida muestreando la TFSD de $y[n]$ en las pulsaciones $\omega_k = 2\pi k/N$, como se representa en la figura 3.

$$\tilde{Y}[k] = Y(e^{j\omega})_{\omega=2\pi\frac{k}{N}} \quad (35)$$

Figura 3. Puntos del círculo unidad en los que se muestrea la TFSD ($N = 8$)



Ahora calculamos la IDFT de N puntos de $\tilde{Y}[k]$:

$$\tilde{y}[n] = \text{IDFT}_N\{\tilde{Y}[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Y}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (36)$$

Dado que no hemos realizado ninguna suposición sobre $y[n]$, su TFSD se puede expresar como:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j\omega n} \quad (37)$$

Sustituimos (37) en (35) y el resultado a su vez lo sustituimos en (36), con lo que queda:

$$\tilde{y}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m] e^{-j2\pi \frac{k}{N} m} e^{j2\pi \frac{k}{N} kn} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k}{N} k(n-m)} \quad (38)$$

donde hemos intercambiado el orden de los sumatorios en el último paso. El último sumatorio que aparece en (38) ya fue evaluado a raíz de la ecuación (3) y, por lo tanto, ya podemos escribir directamente:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m] \delta[n-m] = y[n] * \delta[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} y[n+rN] \quad (39)$$

que significa que obtenemos la extensión periódica de $y[n]$. Esto quiere decir que si realizamos la IDFT de N puntos de N muestras equiespaciadas en frecuencia de $Y(e^{j\omega})$ obtenemos la extensión periódica de $y[n]$, que está formada por la suma de infinitas réplicas de $y[n]$ desplazadas a todos los múltiplos de N .

Este resultado también lo podemos escribir como:

$$\text{IDFT}_N \left\{ Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} \right\} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} y[n+rN] \quad (40)$$

Podemos distinguir dos situaciones:

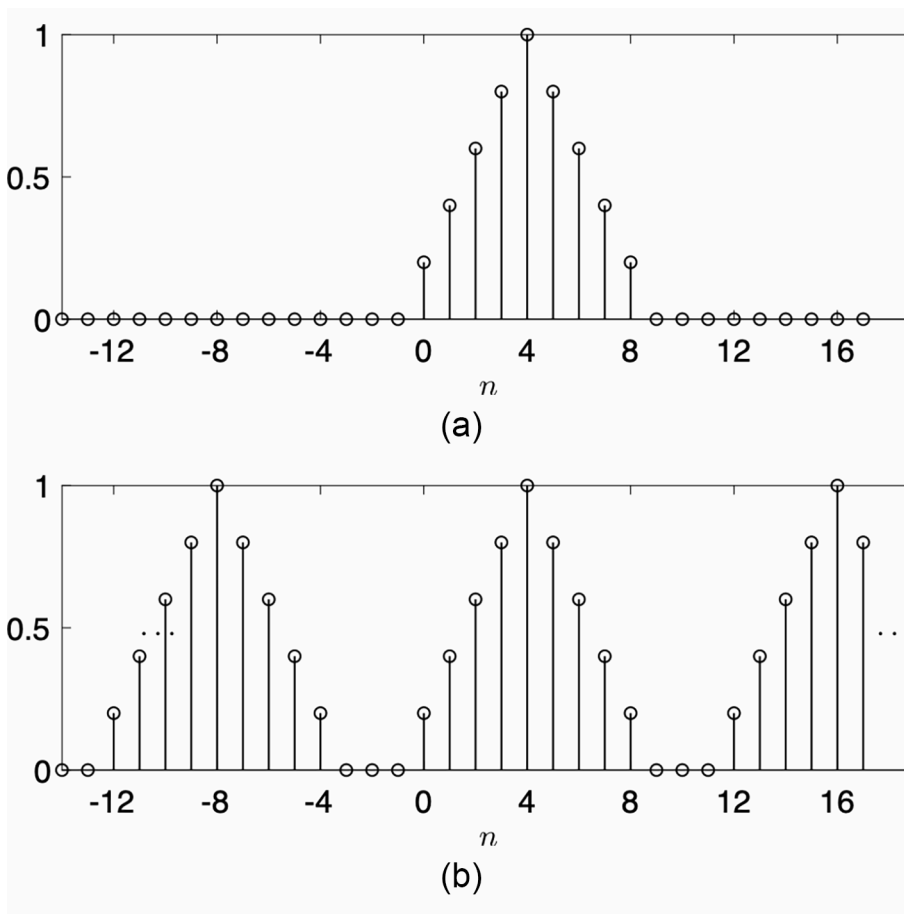
Caso 1: La longitud de $y[n]$ es menor o igual que N . Este caso corresponde al planteamiento realizado en los subapartados 1.1 y 1.2. En la extensión periódica

$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} y[n+rN]$ no se produce solapamiento entre las réplicas y, al hacer la

IDFT de las muestras de la TFSD, recuperamos las muestras de la señal original, como se representa en el ejemplo de la figura 4. A partir de un periodo de la extensión periódica recuperamos la señal original, lo que es equivalente a decir que a partir de las muestras $Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}}$ de la TFSD podemos recuperar

la $Y(e^{j\omega})$ por completo. Esto es bastante lógico porque la señal $y[n]$ tiene una longitud de $M=9$ muestras y hemos tomado 12 muestras en frecuencia, que son suficientes para representar la señal original. Se puede plantear la interpolación de $Y(e^{j\omega})$ a partir de sus muestras, pero esto queda fuera de los objetivos del curso.

Figura 4. (a) Señal $y[n]$ de longitud 9 muestras. (b) Extensión periódica de $y[n]$, obtenida al muestrear la TFSD en $N = 12$ puntos y hacer la IDFT



Caso 2: La longitud de $y[n]$ es mayor que N . En este caso se produce solapamiento entre las réplicas $\sum_{r=-\infty}^{+\infty} y[n+rN]$ y, al hacer la IDFT de las muestras de la TFSD, no recuperamos las muestras de la señal original, como se representa en el ejemplo de la figura 5. En este caso un periodo de la extensión periódica de $y[n]$ no coincide con $y[n]$. Equivalentemente, esto quiere decir que en el dominio de la frecuencia a partir de 7 muestras $Y(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi\frac{k}{N}}$ no podemos recuperar $Y(e^{j\omega})$ por completo. No hemos podido representar una señal de longitud 9 muestras mediante únicamente 7 muestras en frecuencia. Al intentar hacerlo, se ha producido un efecto de *aliasing* temporal, que es el dual al efecto de *aliasing* en frecuencia cuando se muestrea una señal analógica a una frecuencia demasiado baja.

3. Propiedades de la DFT

En este apartado se presentarán las principales propiedades de la DFT de secuencias de duración finita (como no puede ser de otra manera, porque la DFT solo está definida para secuencias de duración finita). Algunas de las propiedades tienen un paralelismo total con las propiedades de la TFSD, como es lógico, dado que, bajo ciertas condiciones y como se ha explicado en el subapartado 1.2, la DFT coincide con muestras de la TFSD, en cuyo caso la presentación de la propiedad correspondiente se hará de forma concisa, ya que se hará énfasis únicamente en los aspectos diferenciales de la DFT con respecto a la TFSD. Por otro lado, las propiedades específicas de la DFT, que no presentan un paralelismo directo con la TFSD, se presentarán en detalle.

3.1. Linealidad

Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ secuencias de longitudes N_1 y N_2 , respectivamente. La combinación lineal de estas secuencias es:

$$x_3[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \quad (41)$$

Si se escoge un valor de N tal que $N \geq \max\{N_1, N_2\}$, entonces se cumple:

$$x_3[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}_N} a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k] \quad (42)$$

siendo:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\xleftrightarrow{\text{DFT}_N} X_1[k] \\ x_2[n] &\xleftrightarrow{\text{DFT}_N} X_2[k] \end{aligned} \quad (43)$$

3.2. Desplazamiento circular

Recordemos, en primer lugar, la propiedad de desplazamiento de la TFSD. Si $X(e^{j\omega})$ es la TFSD de la secuencia $x[n]$, entonces $X(e^{j\omega})e^{-j\omega m}$ es la TFSD de la secuencia desplazada m muestras, $x[n-m]$. Esta propiedad no se puede aplicar directamente a la DFT porque, al aplicar un desplazamiento de m muestras, el soporte de la $x[n-m]$ deja de ser $0 \leq n \leq N-1$, aun cuando este sea el soporte de la secuencia $x[n]$. Esto haría que quedaran muestras de $x[n-m]$ fuera de la ventana de la DFT al aplicar esta transformada directamente a $x[n-m]$. En el

caso de la DFT, existe una propiedad similar a la propiedad de desplazamiento de la TFSD si utilizamos el desplazamiento circular (también llamado cíclico en ocasiones). Podemos enunciar la propiedad como:

$$\begin{aligned} x[n] &\xleftrightarrow{DFT_N} X[k] \\ x[(n-m)_N] &\xleftrightarrow{DFT_N} X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \end{aligned} \quad (44)$$

La demostración es sencilla a partir de resultados que ya se han presentado. Dado que $X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$ son las muestras en frecuencia de $X(e^{j\omega})e^{-j\omega m}$, cuya TFSD inversa es $x[n-m]$, entonces, utilizando la propiedad de muestreo frecuencial (40), podemos escribir:

$$\text{IDFT}_N\{X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\} = \text{IDFT}_N\left\{X(e^{j\omega})e^{-j\omega m}\bigg|_{\omega=2\pi\frac{k}{N}}\right\} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-m+rN] \quad (45)$$

Finalmente, recordando la notación de (12) y (13) para expresar la operación módulo, el último término de (45) se puede expresar como sigue y, de esta manera, obtenemos el resultado que queríamos demostrar:

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-m+rN] = x[(n-m)_N] \quad (46)$$

En definitiva, la multiplicación de la DFT por el factor $e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$ se traduce en un desplazamiento de m muestras de la extensión periódica de la secuencia $x[n]$, que equivale a un desplazamiento circular de $x[n]$.

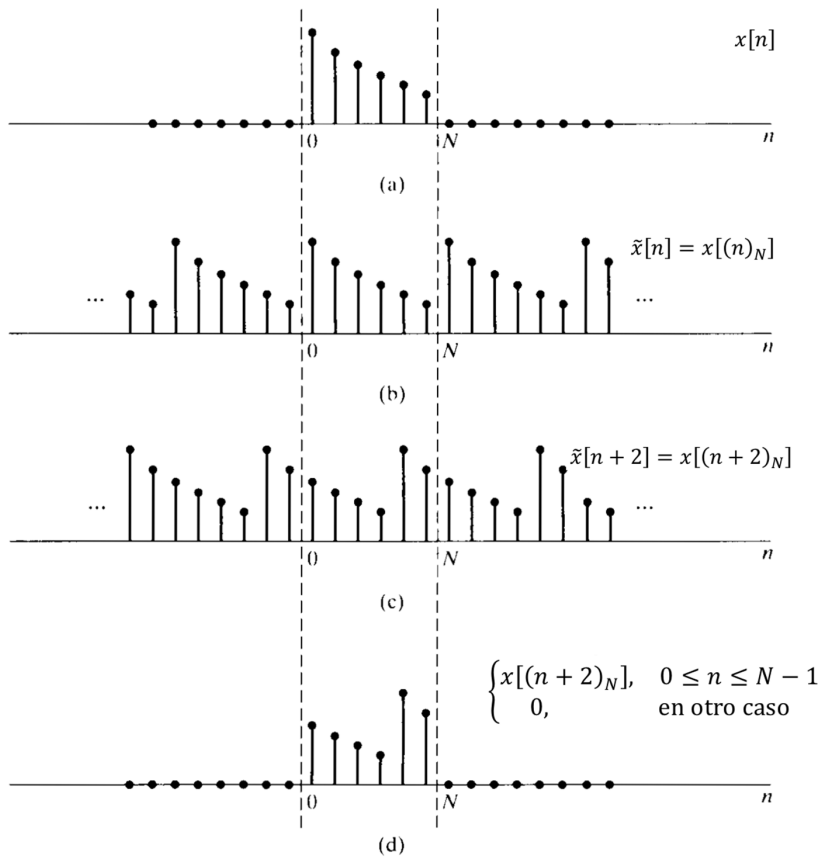
Es habitual denominar a la operación de desplazamiento circular también como rotación.

Ejemplo 2. Desplazamiento circular de una secuencia

El procedimiento del desplazamiento circular se ilustra gráficamente en la figura 6 para el caso de $m = -2$ y $N = 6$. En la figura 6a se muestra la señal original $x[n]$ y se quiere calcular $x[(n+2)_6]$, que es la señal cuya DFT es $X[k]e^{-j\frac{2\pi}{3}k}$. En la figura 6b se muestra la extensión periódica de $x[n]$, mientras que en la figura 6c se dibuja dicha extensión periódica adelantada 2 muestras, y que una vez restringida de nuevo al intervalo $0 \leq n \leq 5$ resulta en la figura 6d. Comparando la figura 6a y la figura 6d resulta evidente que esta última no es el resultado de aplicar un desplazamiento lineal a la primera, sino que las muestras que «salen» por un extremo del intervalo $[0, N-1]$ se introducen por el otro lado del intervalo.

Otra observación interesante que se puede realizar es que el resultado sería el mismo de haber considerado $m = 4$, puesto que desplazar circularmente la secuencia 2 muestras en un sentido es equivalente a desplazarla circularmente 4 muestras en el otro sentido. En el dominio de la DFT, esto mismo se obtiene porque $e^{-j\frac{2\pi}{6}k(-2)} = e^{-j\frac{2\pi}{6}k(6-2)} = e^{-j\frac{2\pi}{6}k4}$.

Figura 6. Desplazamiento circular de una secuencia; efecto en el dominio temporal de la multiplicación de la DFT por un factor de fase lineal



3.3. Dualidad

Dada la similitud entre las expresiones de la DFT (1) y de la IDFT (2), que solo se diferencian en el factor N y en el signo de la exponencial, es natural que la DFT muestre dualidad, como ocurre con la SDF. Se debe recordar, no obstante, que la TFSD no tiene la propiedad de dualidad, en cambio sí que se daba con la transformada de Fourier de señales analógicas.

La propiedad de dualidad de la DFT se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 x[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X[k] \\
 X[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} Nx[(-k)_N], \quad 0 \leq k \leq N-1
 \end{aligned}
 \tag{47}$$

Se puede demostrar como sigue:

$$DFT_N\{X[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} X[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = N\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right) = N\left(\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X[l]e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)l}\right)
 \tag{48}$$

siendo el último término entre paréntesis de la expresión anterior igual a la IDFT de $X[k]$, o sea, la secuencia original, pero evaluada en la muestra 0 para $k=0$ y en la muestra $N-k$ para $k=1, \dots, N-1$.

Ejemplo 3. Dualidad

Sea $x[n]$ una secuencia de longitud N , para la cual calcula su DFT y el resultado lo denomina $y[k]$. Seguidamente, realiza la DFT de $y[k]$, y el resultado lo denomina $z[n]$. En MATLAB®, esto sería tan sencillo como hacer: `z=fft(fft(x))`.

La aplicación directa de la propiedad (47) permite escribir:

$$\begin{aligned} z[0] &= Nx[0] \\ z[1] &= Nx[N-1] \\ z[2] &= Nx[N-2] \\ &\vdots \\ z[N-2] &= Nx[2] \\ z[N-1] &= Nx[1] \end{aligned} \quad (49)$$

Si $x[n]=\{1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, 0\}$ y $N=10$, entonces $z[n]=\{10, 0, 0, 0, 0, 0, 50, 40, 30, 20\}$.

3.4. Propiedades de simetría

Consideremos en primer lugar las siguientes dos propiedades:

$$\begin{aligned} x[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X[k] \\ x^*[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X^*[-k]_N, \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} x[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X[k] \\ x^*[-n]_N, \quad 0 \leq n \leq N-1 &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X^*[k] \end{aligned} \quad (51)$$

Ambas se pueden obtener fácilmente a partir de la correspondiente propiedad de la TFSD y de la relación entre la DFT y las muestras de la TFSD presentada en el subapartado 1.2. Esto lo dejamos como ejercicio del estudiante y aquí vamos a presentar la demostración directa. Para demostrar (50) podemos escribir:

$$DFT_N\{x^*[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right)^* = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n} \right)^* \quad (52)$$

donde el último término dentro de los paréntesis es la DFT de $x[n]$ evaluada en la muestra 0 para $k=0$ y en la muestra $N-k$ para $k=1, \dots, N-1$.

Podemos demostrar (51) mediante la siguiente sucesión de igualdades, donde todos los pasos triviales son triviales manipulaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
 DFT_N \left\{ x^* \left[(-n)_N \right] \right\} &= x^*[0] + \sum_{N-1}^{n=1} x^*[N-n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \\
 &= x^*[0] + \sum_{N-1}^{l=1} x^*[l] e^{-j \frac{2\pi}{N} k(N-l)} = \sum_{N-1}^{l=0} x^*[l] e^{j \frac{2\pi}{N} kl} = \left(\sum_{N-1}^{l=0} x^*[l] e^{-j \frac{2\pi}{N} kl} \right)^* \quad (53)
 \end{aligned}$$

Combinando (50) y (51), es inmediato comprobar que:

$$x \left[(-n)_N \right], \quad 0 \leq n \leq N-1 \xleftrightarrow{DFT_N} X \left[(-k)_N \right], \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (54)$$

A partir de (50), también es directo obtener que si $x[n]$ es una secuencia real, entonces:

$$X[k] = X^* \left[(-k)_N \right], \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (55)$$

que es una propiedad análoga a la simetría hermítica de la TFSD de secuencias reales.

Utilizando estas propiedades de dualidad (47) y la simetría (54), podemos observar que la IDFT se puede implementar mediante la DFT. Imaginemos que tenemos los valores de $X[k]$ y queremos calcular su IDFT, pero solo disponemos de una función que nos permite calcular la DFT. Una forma de solventar esto es aprovechar que:

$$\frac{1}{N} DFT_N \left\{ X \left[(-n)_N \right] \right\} = x[k] \quad (56)$$

Se puede comprobar este resultado con MATLAB®. En primer lugar, se debe calcular la DFT de $x[n]$ y el resultado se denomina $y[n]$, o sea, $y = \text{fft}(x)$. Ahora, si se quiere recuperar el valor de x a partir de y , una forma es evidentemente realizar $\text{ifft}(y)$, pero si por algún motivo el *software* no dispusiera de la función $\text{ifft}()$, obtendría el mismo resultado realizando $1/N * \text{fft}(y([0 \ N-1:-1:1]))$.

Para presentar un segundo conjunto de propiedades pasamos a definir dos secuencias:

1) componente periódica hermítica de $x[n]$, denominada $x_{ep}[n]$.

$$x_{ph}[n] = \frac{1}{2} \left(x[n] + x^* \left[(-n)_N \right] \right) = \begin{cases} \text{Re}\{x[0]\}, & n=0 \\ \frac{1}{2} (x[n] + x^*[N-n]), & 1 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otras } n \end{cases} \quad (57)$$

2) componente periódica antihermítica de $x[n]$, denominada $x_{pa}[n]$.

$$x_{pa}[n] = \frac{1}{2} \begin{cases} j \operatorname{Im}\{x[0]\}, & n=0 \\ (x[n] - x^*[-n]_N), & 1 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otras } n \end{cases} \quad (58)$$

Si $x_{ph}[n]$ o $x_{pa}[n]$ son secuencias reales, se denominan componente periódica par o componente periódica impar, respectivamente.

Utilizando (51) se obtiene directamente:

$$\begin{aligned} x_{ph}[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} \operatorname{Re}\{X[k]\} \\ x_{pa}[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} \operatorname{Im}\{X[k]\} \end{aligned} \quad (59)$$

Utilizando (50) se pueden escribir los siguientes pares de transformadas:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{x[n]\} &= \frac{1}{2}(x[n] + x^*[n]) \stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_{ph}[k] \\ \operatorname{Im}\{x[n]\} &= \frac{1}{2}(x[n] - x^*[n]) \stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_{pa}[k] \end{aligned} \quad (60)$$

donde las componentes periódicas conjugadas simétrica y antisimétrica de la transformada se definen de manera análoga a (57) y (58), o sea,

$$X_{ph}[k] = \frac{1}{2}(X[k] + X[-k]_N) \text{ y } X_{pa}[k] = \frac{1}{2}(X[k] - X[-k]_N).$$

Para finalizar, únicamente apuntar que $x_{ph}[n]$ y $x_{pa}[n]$ no son lo mismo que las componentes hermítica y antihermítica de $x[n]$ definidas al estudiar las propiedades de la TFSD. Dichas componentes hermítica e antihermítica se definen como:

$$\begin{aligned} x_h[n] &= \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) \\ x_a[n] &= \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) \end{aligned} \quad (61)$$

cuya relación con las componentes definidas anteriormente es:

$$\begin{aligned} x_{ph}[n] &= x_h[n] + x_h^*[n-N], & 0 \leq n \leq N-1 \\ x_{pa}[n] &= x_a[n] + x_a^*[n-N], & 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad (62)$$

3.5. Modulación

Al igual que ocurre con la TFSD, el hecho de multiplicar la señal en el dominio temporal por una exponencial compleja se traduce en un desplazamiento frecuencial. No obstante, al trabajar con la DFT esto no ocurre para cualquier

frecuencia de modulación, sino únicamente cuando la frecuencia de modulación coincide con algunos de los puntos en los que la DFT muestrea el dominio de la frecuencia, o sea, para $\omega_l = \frac{2\pi}{N} l$.

Por lo tanto, la propiedad de modulación se puede enunciar como:

$$\begin{aligned} x[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X[k] \\ x[n]e^{j\frac{2\pi}{N}ln} &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X[(k-l)_N], \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (63)$$

Esta propiedad puede establecerse aplicando la propiedad desplazamiento circular (44) a la relación dual expresada en (47).

Para otras frecuencias de modulación, no existe ninguna expresión sencilla que relacione la DFT de la secuencia modulada con la DFT de la secuencia original. En estos casos, únicamente se puede decir que la DFT de la secuencia modulada son las muestras de la TFSD de esta secuencia, y esta TFSD sí que se obtiene desplazando la TFSD de la secuencia original.

3.6. Convolución circular

Sabemos que la TFSD de la convolución (a veces denominada convolución lineal, para distinguirla de la que veremos a continuación) de dos secuencias es el producto de las TFSD. Ahora queremos obtener una propiedad similar para el caso de la DFT. Para ello consideremos dos secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$ de longitud N , con sus respectivas DFT. Recordemos que:

$$x_1[n] * x_2[n] \stackrel{TFSD}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) \quad (64)$$

Queremos determinar la secuencia cuya DFT es igual a $X_1[k]X_2[k]$. Dado que $X_1[k]X_2[k]$ son las muestras en frecuencia de $X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$, utilizando los resultados del apartado 2, sabemos que la IDFT de $X_1[k]X_2[k]$ es igual a la extensión periódica de $\tilde{c}[n] = x_1[n] * x_2[n]$. Utilizamos el signo tilde para denotar la extensión periódica, y entonces:

$$\tilde{c}[n], \quad 0 \leq n \leq N-1 \stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_1[k]X_2[k] \quad (65)$$

Ahora recuperamos las diferentes formas de escribir la extensión periódica introducidas en el subapartado 1.1 para poder expresar:

$$\tilde{c}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c[n+rN] = c[n] * \tilde{t}[n] = x_1[n] * x_2[n] * \tilde{t}[n] \quad (66)$$

Dado que la convolución cumple las propiedades conmutativa y asociativa, $\tilde{c}[n]$ se puede escribir de dos maneras equivalentes:

$$\begin{aligned}\tilde{c}[n] &= (x_1[n] * t[n]) * x_2[n] = \tilde{x}_1[n] * x_2[n] \\ \tilde{c}[n] &= x_1[n] * (x_2[n] * t[n]) = x_1[n] * \tilde{x}_2[n]\end{aligned}\quad (67)$$

que se trata de la convolución de una de las secuencias con la extensión periódica de la otra (que no es la convolución de las dos extensiones periódicas). La operación resultante de calcular las muestras de $\tilde{c}[n]$ en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$ se denomina *convolución circular (o cíclica) de N puntos* y se denota como $x_1[n] \otimes x_2[n]$.

Finalmente, podemos enunciar el teorema de convolución circular como:

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}_N} X_1[k] X_2[k] \quad (68)$$

Expresiones explícitas de la convolución circular son:

$$\begin{aligned}x_1[n] \otimes x_2[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \tilde{x}_2[n-m] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n-m] x_2[m] = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[(n-m)_N] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[(n-m)_N] x_2[m]\end{aligned}\quad (69)$$

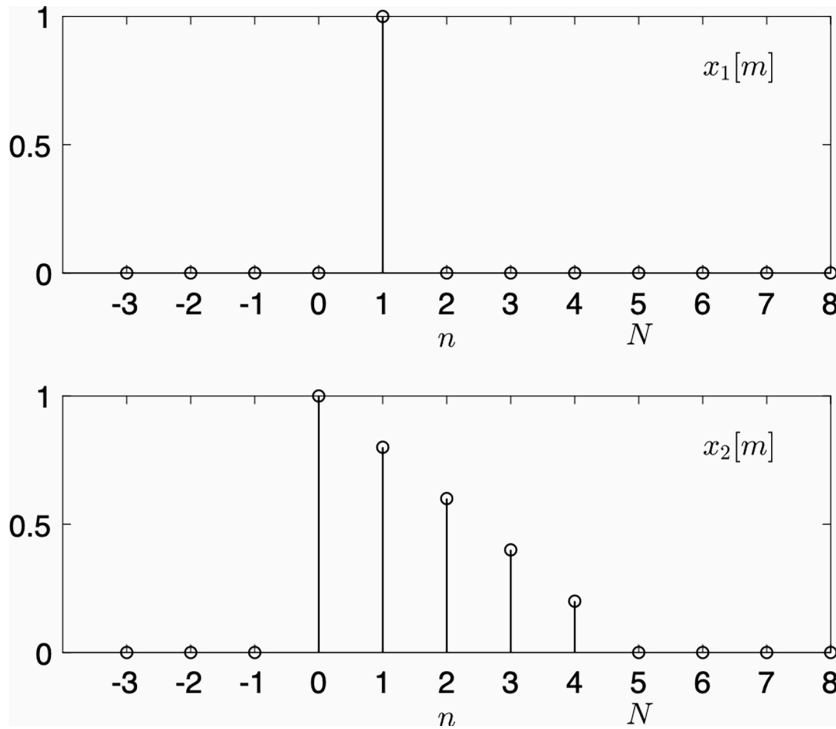
a partir de las cuales, queda claramente justificado su nombre. Mientras la convolución lineal se calcula multiplicando una secuencia por una versión invertida en tiempo y sucesivamente desplazada de la otra secuencia, la convolución circular se obtiene multiplicando una secuencia por una versión circularmente invertida en tiempo y circularmente desplazada de la otra secuencia. Esta interpretación permite visualizar fácilmente la convolución circular de forma gráfica, como veremos en los ejemplos siguientes.

Es evidente que la convolución circular, al igual que la convolución lineal, satisface la propiedad conmutativa. Pero a diferencia de la convolución lineal, cuyo resultado depende únicamente de las secuencias, el resultado de la convolución circular depende del valor de N . Al hablar de la convolución circular tiene que estar claro qué valor de N se está utilizando; sin el valor de N la convolución circular no está definida.

Ejemplo 4. Convolución circular con un impulso retrasado

Sea $x_1[n] = \delta[n-1]$ y $x_2[n]$ dos secuencias tal y como se muestra en la figura 7. Efectivamente, el valor de $N = 5$ cumple que es igual o mayor que la longitud de ambas secuencias.

Figura 7. Representación gráfica de las señales del ejemplo



En la figura 8 se puede observar el aspecto de $x_2[(n-m)_N]$ para dos valores de n . Esta secuencia es la que se tiene que multiplicar muestra a muestra por $x_1[m]$ para obtener la convolución circular, según (69), y que aparece en la figura 9. El resultado coincide con un desplazamiento circular de una muestra a la derecha de la señal $x_2[n]$.

Este mismo resultado se podría haber obtenido de forma más sencilla mediante el teorema de la convolución circular y la propiedad del desplazamiento circular de la DFT. El producto de $X_2[k]$ por $X_1[k] = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ es justamente $e^{j\frac{2\pi}{N}k} X_2[k]$, y aplicando (44) se obtiene directamente que su IDFT es $x_2[(n-1)_N]$.

Figura 8. Efecto de invertir circularmente en tiempo y desplazar circularmente la secuencia x_2

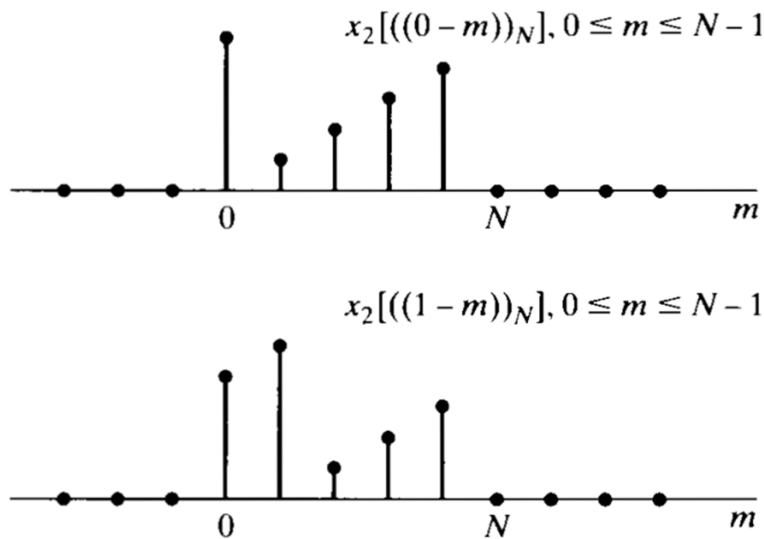
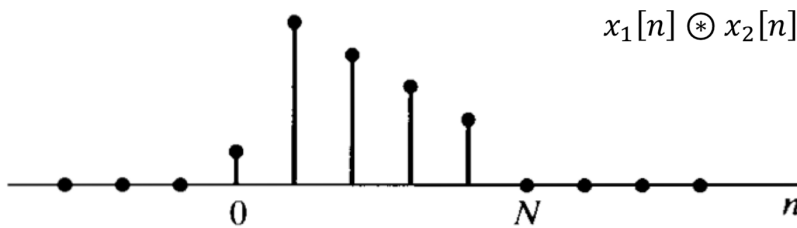


Figura 9. Resultado de la convolución circular



Ejemplo 5. Convolución circular de dos pulsos rectangulares

Vamos a realizar la convolución de dos pulsos rectangulares, mostrados en la figura 10, de longitud $L = 6$ muestras. En este caso se cumple que $x_1[n]=x_2[n]$ y vamos a considerar dos posibles valores de N para comprobar que efectivamente la correlación circular depende del valor de N .

En primer lugar, elegimos $N = 6$. Como cualquier rotación circular de la secuencia $x_2[n]$ da también un pulso rectangular de 6 muestras, entonces todos los términos del $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[(n-m)_N]$ valen 1 y su suma es igual a 6. Por lo tanto, $x_1[n] \otimes x_2[n]$ es un pulso rectangular de amplitud igual a 6. Este resultado también se habría obtenido fácilmente trabajando en el dominio de la frecuencia, dado que:

$$X_1[k] = X_2[k] = \begin{cases} 6, & k = 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (70)$$

y, por lo tanto, $X_1[k]X_2[k]$ es solo diferente de 0 para $k = 0$ y en este punto vale 36.

En segundo lugar, elegimos $N = 12$. Vamos a calcular la convolución circular mediante

la expresión $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[(n-m)_N]$ que aparece en (70). Para ello mostramos en la figura

11 la secuencia $x_2[(n-m)_N]$ para dos valores de n . Al multiplicar esta secuencia por $x_1[m]$ y sumar las muestras se calcula el valor de la convolución circular para el correspondiente valor de n . Es fácil obtener gráficamente que el resultado final es el que se muestra en la figura 12. Se puede comprobar el resultado utilizando la función de la convolución circular en MATLAB®: `cconv(x1, x2, 12)`. En este caso, obtener la serie temporal a partir de las DFT habría sido más complicado, puesto que:

$$X_1[k]X_2[k] = \left(\frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}LN}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}}} \right)^2 \quad (71)$$

Figura 10. Señales de partida y convolución circular

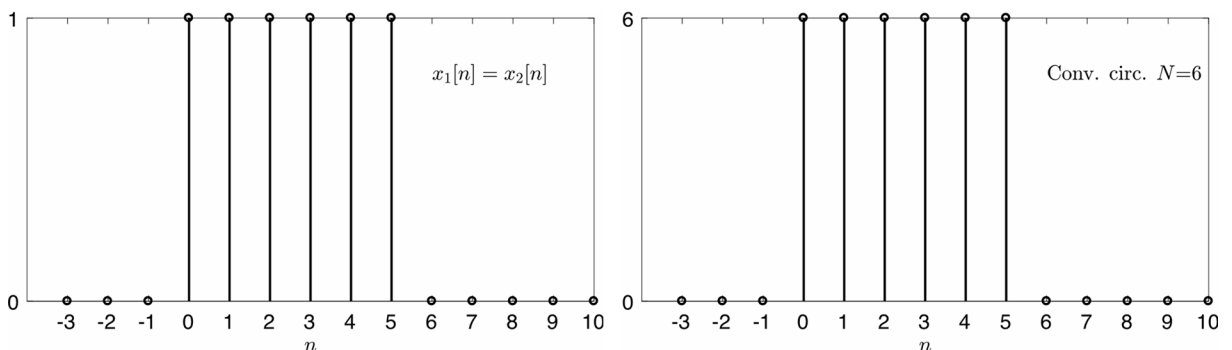


Figura 11. Efecto de invertir circularmente en tiempo y desplazar circularmente la secuencia x_2

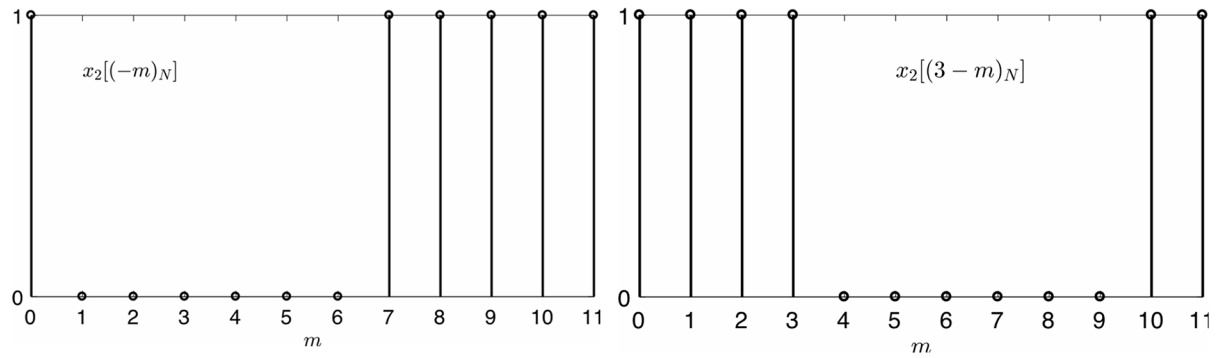
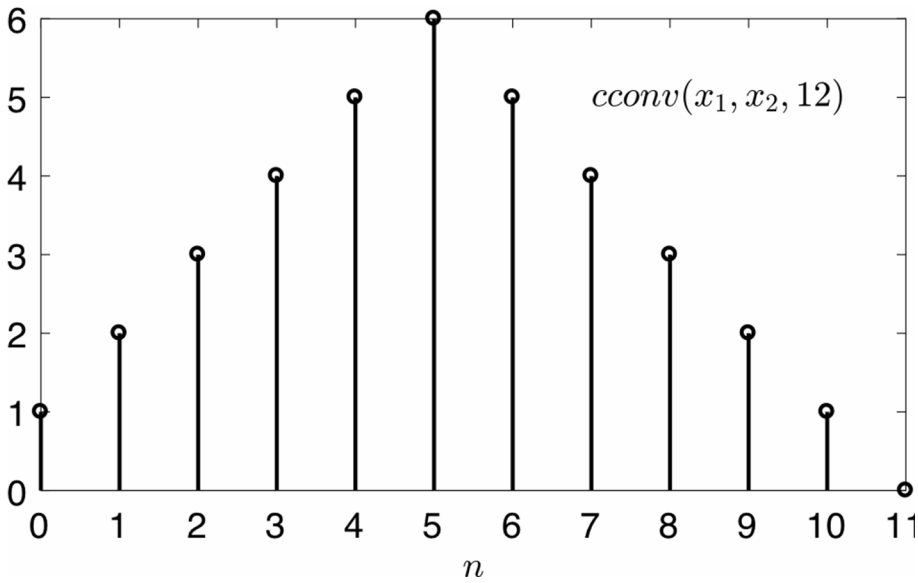


Figura 12. Convolución circular de dos pulsos rectangulares de 6 muestras utilizando $N = 12$



3.7. Producto (o enventanado) de secuencias

A partir del teorema de la convolución circular y de la propiedad de dualidad podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 x_1[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_1[k] \\
 x_2[n] &\stackrel{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_2[k] \\
 x_1[n]x_2[n] &\stackrel{DFT_{N/1}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} X_1[k] \otimes X_2[k]
 \end{aligned}
 \tag{72}$$

3.8. Igualdad de Parseval

La igualdad de Parseval establece que la energía de una secuencia se puede calcular de la misma manera (salvo un factor de escala) a partir de su representación temporal y de su representación frecuencial:

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \quad (73)$$

La demostración de esta propiedad es fácil a partir de la representación matricial de la DFT explicada en el subapartado 1.4:

$$E_x = x^H x = \left(\frac{1}{N} F^* X\right)^H \left(\frac{1}{N} F^* X\right) = \frac{1}{N^2} X^H F F^* X = \frac{1}{N^2} X^H (NI) X = \frac{1}{N} X^H X \quad (74)$$

donde el superíndice H indica el cálculo de la hermítica, o sea, la conjugación y transposición. También se puede demostrar la igualdad de Parseval a partir de la relación de la convolución circular con la DFT. Haciendo uso de las definiciones de convolución circular y de la IDFT:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \left(x[n] \circledast x^*[-n]_N\right)_{n=0} = \text{IDFT}\{X[k]X^*[k]\}_{n=0} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]X^*[k] \quad (75)$$

3.9. Resumen de las propiedades de la DFT

La tabla 1 contiene un resumen de las propiedades de la DFT explicadas en los subapartados anteriores.

Tabla 1. Propiedades fundamentales de la DFT

Propiedad	Señal temporal	DFT
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X[k]$ $X_1[k]$ $X_2[k]$
Linealidad	$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$	$a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k]$ es necesario que $N \geq \max\{N_1, N_2\}$
Desplazamiento circular	$x[(n-m)_N]$	$X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$
Dualidad	$X[n]$	$Nx[(-k)_N]$
Conjugación compleja	$x^*[n]$	$X^*[(-k)_N]$
Conjugación compleja e inversión temporal circular	$x^*[-n]_N$	$X^*[k]$

Propiedad	Señal temporal	DFT
Inversión temporal circular	$x[(-n)_N]$	$X[(-k)_N]$
Modulación	$x[n]e^{j\frac{2\pi}{N}ln}$	$X[(k-l)_N]$
Convolución circular	$x_1[n] \otimes x_2[n]$	$X_1[k]X_2[k]$
Producto o eventanado	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N} X_1[k] \otimes X_2[k]$
Igualdad de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] ^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] ^2$	
Componente periódica hermítica	$x_{ph}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[(-n)_N])$	$\text{Re}\{X[k]\}$
Componente periódica antihermítica	$x_{pa}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[(-n)_N])$	$\text{Im}\{X[k]\}$
Parte real	$\text{Re}\{x[n]\}$	$X_{ph}[k] = \frac{1}{2}(X[k] + X[(-k)_N])$
Parte imaginaria	$\text{Im}\{x[n]\}$	$X_{pa}[k] = \frac{1}{2}(X[k] - X[(-k)_N])$
Las siguientes propiedades, que son casos particulares de las anteriores, solo son válidas cuando $x[n]$ es real.		
		$X[k] = X^*[(-k)_N]$
Componente periódica par	$x_{ph}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[(-n)_N])$	$\text{Re}\{X[k]\}$
Componente periódica impar	$x_{pa}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[(-n)_N])$	$\text{Im}\{X[k]\}$

4. Convolución lineal mediante la DFT

En muchas aplicaciones, estamos interesados en calcular la convolución lineal entre dos secuencias porque esta es la operación que realizan los sistemas LIT entre la secuencia de entrada y la respuesta impulsional del filtro. Por otro lado, nos gustaría poder realizar esta operación mediante la DFT, ya que existen algoritmos que permiten calcular la DFT de forma muy eficiente computacionalmente. Estos algoritmos se conocen en conjunto como algoritmos FFT (siglas en inglés de *Fast Fourier Transform*).

Consideremos dos secuencias $x[n]$ y $h[n]$ de longitudes L y M , respectivamente. Queremos obtener $y[n] = x[n] * h[n]$. Aplicando directamente la fórmula de la convolución lineal, necesitaríamos aproximadamente $\min\{L, M\}$ multiplicaciones para calcular cada muestra de la salida.

Nos gustaría calcular $y[n]$ realizando los siguientes pasos:

- Calcular las DFTs $X[k]$ de N puntos de $x[n]$ y $h[n]$, respectivamente.
- Calcular el producto $X[k]H[k]$ para $0 \leq k \leq N - 1$.
- Obtener la secuencia $z[n] = x[n] \otimes h[n]$ como la IDFT de $X[k]H[k]$.

Sin embargo, el problema es que $z[n]$ no es igual a $y[n]$. Ahora vamos a estudiar bajo qué condiciones se puede obtener $y[n]$ o alguna de sus muestras a partir de $z[n]$.

En primer lugar, tenemos que recordar que la máxima longitud de $y[n]$ es $L + M - 1$. Por otro lado, por las propiedades de DFT sabemos que $z[n]$ es igual a un periodo de la extensión periódica de $y[n]$. Mediante fórmulas esto se expresa como:

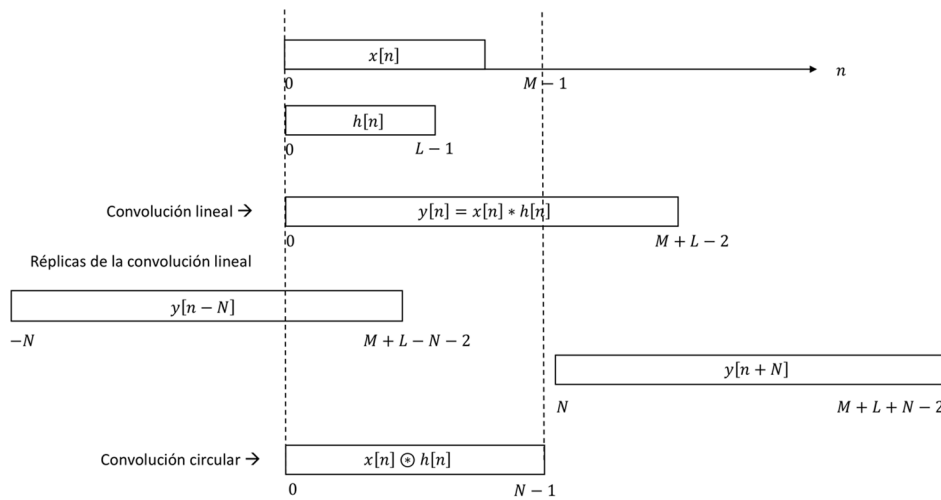
$$z[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} y[n + rN], \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (76)$$

y se representa gráficamente en la figura 13.

Eficiencia computacional de un algoritmo

La eficiencia computacional de un algoritmo se refiere al número de operaciones necesarias para implementar el algoritmo. Por operaciones se entiende normalmente sumas y multiplicaciones, o bien solo estas últimas, ya que son las que necesitan más recursos *hardware* para ser realizadas.

Figura 13. Representación de la convolución circular a partir de las réplicas de convolución lineal



La convolución circular $z[n]$ es igual a la convolución lineal $y[n]$ más las réplicas de esta. Por lo tanto, para hacer que ambas coincidan en el intervalo tiene que ocurrir que no haya solape con las réplicas en ese intervalo. A partir de la figura 13, es fácil observar la condición para que esto ocurra, que es que:

$$N \geq L + M - 1 \quad (77)$$

Si esto se cumple, entonces la convolución circular y la convolución lineal coinciden y podemos calcular $y[n]$ con los tres pasos indicados anteriormente. Supongamos que disponemos de un algoritmo que necesita $\frac{N}{2} \log_2 N$ multiplicaciones para calcular la DFT (y la IDFT) de N puntos –daremos más detalles sobre esto en el apartado 5. El coste computacional, en términos de número de multiplicaciones, de estos tres pasos es:

- Dos DFT $\rightarrow N \log_2 N$ multiplicaciones
- Producto de dos secuencias de longitud $N \rightarrow N$ multiplicaciones
- Una IDFT $\rightarrow \frac{N}{2} \log_2 N$

El número total de multiplicaciones es $\frac{3N}{2} \log_2 N + N$ para calcular las $L + M - 1$ muestras de la salida, por lo tanto, el coste computacional por muestra es:

$$C = \frac{\frac{3N}{2} \log_2 N + N}{L + M - 1} \quad (78)$$

que es en general mucho menor que el coste del cálculo directo de la convolución lineal, $\min\{L, M\}$, para los valores prácticos de N (o sea, valores que cumplen la condición (77) incluso excediéndola en algún orden de magnitud). Se puede ver con un ejemplo: queremos realizar la convolución lineal de dos se-

cuencias de longitudes $L = 2048$ y $M = 512$ por el método directo, esto supone 512 multiplicaciones por muestra de $y[n]$, mientras que utilizando el método de la DFT con $N = 4098$ resulta $C \approx 30$ multiplicaciones/muestra.

Si utilizamos un valor de N que no cumple (77), aún podemos obtener correctamente algunas muestras de $y[n]$. Esto se puede deducir también de la observación de la figura 13. Obviamente, N tiene que ser mayor o igual que L y que M , porque, en caso contrario, no se están descartando muestras de alguna de las dos secuencias de entrada al calcular sus DFT. Por lo tanto, supongamos que utilizamos un valor de N que cumple $\max\{L, M\} \leq N < L + M - 1$. Las muestras de $z[n]$ en el intervalo $L + M - N - 1 \leq n \leq N - 1$ sí que coinciden con las correspondientes muestras de $y[n]$.

Si alguno, o los dos valores L y M , son muy grandes utilizando las reglas anteriores, esto también conduce a valores muy grandes de N , que pueden ser excesivos para el cálculo de la DFT. Esto sucede por ejemplo cuando se quiere filtrar una señal $x[n]$ que se va recibiendo de forma continua o que es arbitrariamente larga. En este caso, el filtrado también se puede hacer de forma eficiente con la DFT, pero previamente la señal $x[n]$ se tiene que dividir en bloques de tamaño más reducido. Esta idea se denomina, de forma lógica, convolución por bloques. Los tres pasos mencionados al principio del apartado se pueden aplicar esencialmente a cada bloque, pero algunas modificaciones son necesarias para tratar adecuadamente las transiciones o el solape entre bloques. Esto conduce a dos conocidos algoritmos, *overlap-add* y *overlap-save*, que se presentarán en el módulo siguiente. Estos algoritmos son una aplicación práctica de la idea de convolución mediante la DFT y se basan en los tres pasos descritos al principio del apartado.

5. Cálculo de la DFT

La evaluación directa de la ecuación (1) implica el cálculo de N multiplicaciones complejas y $N - 1$ sumas complejas para cada valor de k . Esto equivale a $4N$ multiplicaciones reales y $(4N - 2)$ sumas reales. Teniendo en cuenta que $X[k]$ se tiene que calcular para N valores de k , el cálculo directo de la DFT supone $4N^2$ multiplicaciones reales y $N(4N - 2)$ sumas reales. En definitiva, el orden con el que crece el número de operaciones es N^2 .

El número de operaciones se puede reducir teniendo en cuenta que el factor $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ tiene periodo N en k y n , que los términos coseno y seno en que se puede desarrollar este factor tienen simetría par e impar, respectivamente, y que pueden valer cero en algunos puntos. Así se consigue una reducción del factor que multiplica a N^2 , pero la tendencia del número de operaciones sigue siendo N^2 . La posibilidad de una reducción mucho más significativa pasó desapercibida hasta el año 1965 aproximadamente, cuando Cooley y Tukey publicaron un algoritmo para el cálculo de la DFT válido donde N es el producto de dos números enteros. La publicación de este artículo dio lugar a una gran actividad en la aplicación de la DFT en procesamiento de señal y condujo al descubrimiento de varios algoritmos computacionalmente muy eficientes, englobados bajo el término genérico de FFT.

Los algoritmos FFT se basan en el principio fundamental de descomponer sucesivamente la DFT en unas DFT de menos puntos. La manera en la que se implementa este principio lleva a una variedad de diferentes algoritmos. Las dos clases básicas de algoritmos FFT son las denominadas como algoritmos de diezmado en tiempo y algoritmos de diezmado en frecuencia. En la primera de ellas, la secuencia $x[n]$ se divide sucesivamente en secuencias más cortas para poder implementar la transformación como una sucesión de transformaciones más pequeñas. En la segunda clase de algoritmos, se realiza algo similar pero con $X[k]$. A continuación veremos, de forma muy preliminar, la base de los algoritmos de diezmado en tiempo. Los algoritmos FFT constituyen un tema muy amplio y de notable complejidad; su estudio completo requeriría prácticamente un curso entero, así que aquí únicamente lo esbozamos.

Para introducir los algoritmos de diezmado en tiempo, consideramos el caso particular, pero también habitual, de que N sea una potencia de 2, o sea, $N = 2^v$ para algún valor de v . Se observa que, en general, cuando N se restringe a un conjunto de valores, es posible obtener algoritmos más eficientes que para va-

Enlace de interés

Una implementación en código abierto de la FFT que se utiliza en muchas aplicaciones se puede encontrar en <http://fttw.org>. Esta implementación, de hecho, combina múltiples algoritmos y dependiendo del valor de N se utiliza uno u otro. Esta web se da solo como referencia; la comprensión de lo que allí se explica está fuera de los objetivos del curso.

lores generales de N y el conjunto de las potencias de 2 es muy habitual. También existen algoritmos para potencias de 3, 5, etc. y para sumas de potencias de dichos números.

Dado que N es una potencia de 2, es un número par y se puede dividir en dos secuencias de longitud $N/2$ correspondientes a los índices pares e impares:

$$X[k] = \sum_{n \text{ par}} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n \text{ impar}} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (79)$$

Podemos realizar la siguiente sustitución de variables $n=2r$ para n par y $n=2r+1$ para n impar:

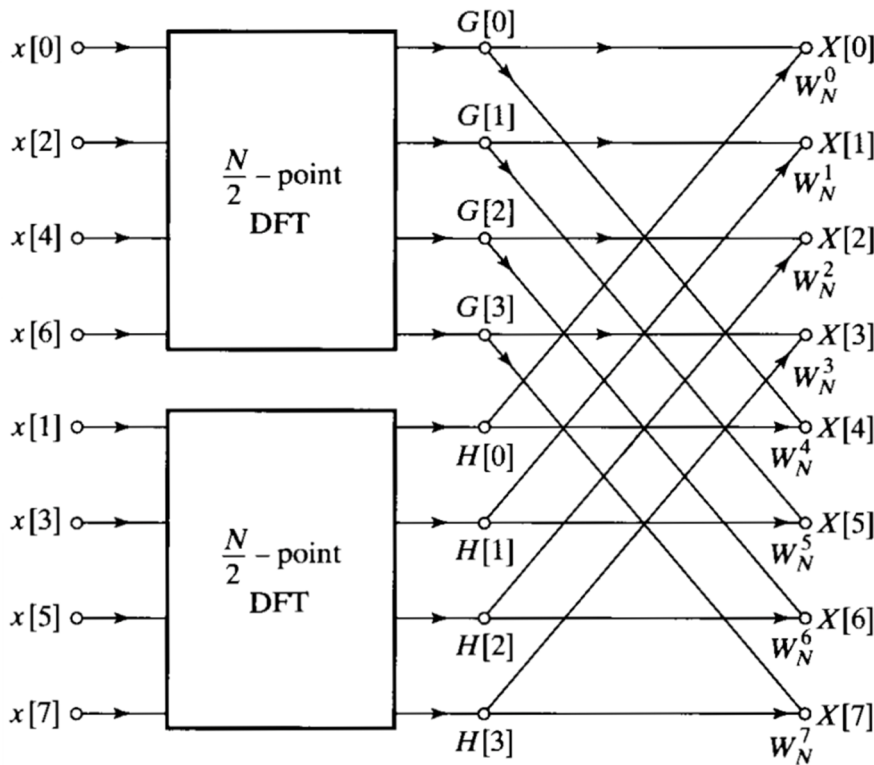
$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] e^{-j\frac{2\pi}{N}k2r} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2r+1)} \quad (80)$$

Esta ecuación se puede reescribir como:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] e^{-j\frac{2\pi}{N}kr} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] e^{-j\frac{2\pi}{N}kr} = G[k] + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} H[k] \quad (81)$$

donde $G[k]$ y $H[k]$ son las DFT de $N/2$ puntos de las muestras pares e impares, respectivamente, de la secuencia original. Como se puede observar, aunque (81) se tiene que evaluar en $k=0, \dots, N-1$, a $G[k]$ y $H[k]$ solo se tiene que calcular para $k=0, \dots, N/2-1$, puesto que son funciones periódicas en k con periodo $N/2$. El resultado de esta descomposición se muestra en la figura 14, donde la confluencia de dos flechas indica la suma y un valor sobre una flecha indica el producto.

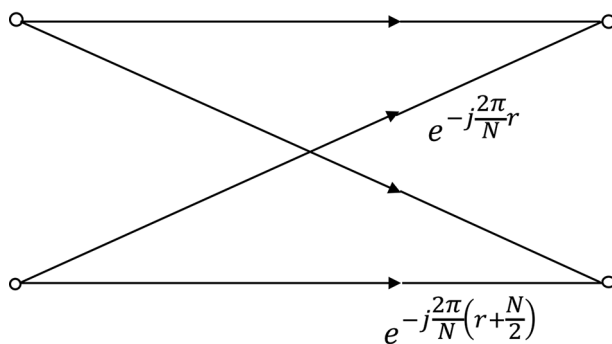
Figura 14. Descomposición de la DFT de N puntos en dos DFT de $N/2$ puntos seguidas de una red de combinación para $N = 8$



La descomposición que acabamos de presentar se puede aplicar en cada una de las DFT de $N/2$ puntos, dando lugar cada una de ellas a dos DFT de $N/4$ puntos, y así sucesivamente. Como en cada etapa el tamaño de la DFT se divide por 2, se realizan en total $v = \log_2 N$ etapas. La red de combinación que aparece en cada etapa supone el cálculo de N sumas y N multiplicaciones. Por lo tanto, el orden de magnitud del número de operaciones es $N \log_2 N$, que contrasta con las N^2 del cálculo directo.

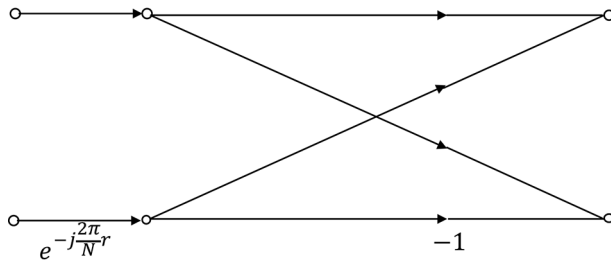
La red de combinación que aparece en cualquiera de las etapas está formada por los elementos individuales de la figura 15, que por su aspecto se conoce como «mariposa» (en inglés, *butterfly*).

Figura 15. Representación de las operaciones básicas en que se descompone el cálculo de la DFT, conocido como elemento mariposa



Aprovechando que $e^{j\frac{2\pi}{N}(r+\frac{N}{2})} = -e^{j\frac{2\pi}{N}r}$, el elemento mariposa aún se puede simplificar más, como aparece en la figura 16. Dado que al desarrollar todas las etapas del algoritmo de diezmado en tiempo, los bloques de la DFT desaparecen y todo el cálculo se realiza con las operaciones de la red de combinación, se concluye que la DFT completa de la secuencia original se puede realizar únicamente mediante las redes de operaciones básicas del tipo *butterfly*.

Figura 16. Representación del elemento mariposa con una única multiplicación compleja



Ejercicios de autoevaluación

1. La señal $x[n]$ tiene una DFT de $N = 8$ puntos que toma estos valores:
 $X[k] = \{1, e^{j0.2}, -1, 2, 1, e^{-j0.3}, 2e^{-j0.2}, 3\}$ ¿Cuánto vale la energía de la señal?

- a) 22
- b) 2.75
- c) $7.8955 - j0.494$
- d) 1

2. Sean las secuencias: $x_1[n] = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1\}$ y $x_2[n] = \{0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$ donde la muestra subrayada corresponde a $n = 0$. Se define: $y[n] = IDFT\{X_1[k] \cdot X_2[k]\}$ donde $X_1[k]$ y $X_2[k]$ son las DFT de $N = 9$ puntos correspondientes a $x_1[n]$ y $x_2[n]$, respectivamente. ¿Cuál de las siguientes secuencias es realmente la secuencia $y[n]$?

- a) $y[n] = \{\underline{5}, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5\}$
- b) $y[n] = \{\underline{3}, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 3\}$
- c) $y[n] = \{\underline{3}, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 3, 3\}$
- d) $y[n] = \{\underline{2}, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 3, 2\}$

3. Sean las secuencias: $x_1[n] = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1\}$ y $x_2[n] = \{0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$ donde la muestra subrayada corresponde a $n = 0$. Se define: $y[n] = IDFT\{X_1[k] \cdot X_2^*[k]\}$ donde $X_1[k]$ y $X_2[k]$ son las DFT de $N = 9$ puntos correspondientes a $x_1[n]$ y $x_2[n]$, respectivamente. ¿Cuál de las siguientes secuencias es realmente la secuencia $y[n]$?

- a) $y[n] = \{\underline{3}, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 3\}$
- b) $y[n] = \{\underline{3}, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 3\}$
- c) $y[n] = \{\underline{3}, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 3, 3\}$
- d) $y[n] = \{\underline{2}, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 3, 2\}$

4. Considere el siguiente vector $x[n]$ de 8 muestras:
 $x[n] = \{1, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10\}$ cuya transformada de Fourier se denota como $X(e^{jw})$. Se cogen las siguientes 5 muestras de $X(e^{jw})$: $Y[k] = X(e^{jw})|_{w=2\pi k/5}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Se realiza la IDFT de $Y[k]$. ¿Cuál es el resultado?

- a) $y[n] = \{1, 2, 3, 5, -1\}$
- b) $y[n] = \{-5, 10, 13, 5, -1\}$
- c) $y[n] = \{1, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10\}$
- d) $y[n] = \{-5, 10, 13, 6, 1\}$

5. Considere el siguiente vector $x[n]$ de 8 muestras: $x[n] = \{1, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10\}$ cuya DFT de $N = 9$ muestras se denota como $X[k]$, $k = 0, 1, \dots, 8$. La IDFT de $X^*[k]$ es igual a:

- a) $\{1, 10, 8, -6, -1, 5, 3, 2, 0\}$
- b) $\{1, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10, 0\}$
- c) $\{0, 1, 2, 3, 5, -1, -6, 8, 10\}$
- d) $\{1, 0, 10, 8, -6, -1, 5, 3, 2\}$

6. Sea la secuencia: $x[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n+1] + 3\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$ ¿Cuánto vale $X[k]$ para $k = 0$?

- a) 0
- b) 5
- c) -3
- d) e^{5j}

7. Las muestras de la DFT de una secuencia $x[n]$ con $N = 8$ puntos vienen dados por la expresión $X[k] = 2\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{14\pi k}{8}\right) + 2\sin(\pi k)$. ¿Cuál de las siguientes secuencias se corresponde con $x[n]$ en el intervalo $0 \leq n \leq 7$?

- a) $x[n] = \delta[n-2] + \delta[n-6] + j\delta[n-7] - j\delta[n-1] + j\delta[n]$
- b) $x[n] = \delta[n-2] + \delta[n-6] + j\delta[n-7] - j\delta[n-1]$
- c) $x[n] = \delta[n-2] + \delta[n-6] + j\delta[n-7] - j\delta[n-1] + \delta[n]$
- d) $x[n] = \delta[n-2] + \delta[n+2] + j\delta[n-7] - j\delta[n+7]$

8. Dada una secuencia definida $x[n] = \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-5] + j\delta[n-1] - j\delta[n-5]$, ¿cuál de las siguientes expresiones define la DFT de $x[n]$ con $N = 6$ puntos?

- a) $X[k] = \cos\frac{\pi k}{3} - 2\sin\frac{5\pi k}{3}$
- b) $X[k] = \cos\frac{\pi k}{6} - 2\sin\frac{5\pi k}{6}$
- c) $X[k] = 2\cos\frac{\pi k}{3} + 2\sin\frac{10\pi k}{6}$
- d) $X[k] = \cos\frac{\pi k}{3} - 2\cos\frac{5\pi k}{3}$

Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1. b

2. c

3. a

4. b

5. d

6. b

7. b

8. a

Bibliografía

Oppenheim, A. V.; Schafer, R. W.; Buck, J. R. (1999). *Discrete-Time Signal Processing* (2.^a ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series.

Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S.; Nawab, S. H. (1996). *Signals & Systems* (2.^a ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series.

Palm III, W. J. (2010). *Introduction to MATLAB for Engineers* (3.^a ed.). McGraw-Hill.

Proakis, J. G.; Manolakis, D. G. (2007). *Digital Signal Processing* (4.^a ed.). Prentice Hall.