Elementos básicos del álgebra lineal

Problemas para la ciencia de datos

PID_00262429

Francesc Pozo Montero
Jordi Ripoll Missé

Universitat
Oberta
de Catalunya

Francesc Pozo Montero

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Barcelona (2000) y doctor en Matemática Aplicada por la Universidad Politécnica de Cataluña (2005). Ha sido profesor asociado de la Universidad Autónoma de Barcelona y profesor asociado, colaborador y actualmente profesor agregado en la Universidad Politécnica de Cataluña. Además, es cofundador del Grupo de Innovación Matemática E-learning (GIMEL), responsable de varios proyectos de innovación docente y autor de varias publicaciones. Como miembro del grupo de investigación consolidado CoDAlab, centra su investigación en la teoría de control y las aplicaciones en ingeniería mecánica y civil, así como en el uso de la ciencia de datos para la monitorización de la integridad estructural y para la monitorización de la condición, sobre todo en turbinas eólicas.

Jordi Ripoll Missé

Licenciado en Matemáticas y doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Barcelona (2005). Profesor colaborador de la Universitat Oberta de Catalunya desde 2011 y profesor del Departamento de Informática, Matemática Aplicada y Estadística de la Universidad de Girona (UdG) desde 1996, donde actualmente es profesor agregado y desarrolla tareas de investigación en el ámbito de la biología matemática (modelos con ecuaciones en derivadas parciales y dinámica evolutiva). También ha sido profesor y tutor de la UNED en dos etapas, primero en el centro asociado de Terrassa y actualmente en el de Girona. Ha participado en numerosos proyectos de innovación docente, especialmente en cuanto al aprendizaje de las matemáticas en línea.

El encargo y la creación de este recurso de aprendizaje UOC han sido coordinados por la profesora: Cristina Cano Bastidas (2019)

Primera edición: febrero 2019
© Francesc Pozo Montero, Jordi Ripoll Missé
Todos los derechos reservados
© de esta edición, FUOC, 2019
Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Diseño: Manel Andreu
Realización editorial: Oberta UOC Publishing, SL

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares del copyright.

Índice

1. Problemas

Elementos básicos del álgebra lineal

Temas: *espacios vectoriales en dimensión finita (vectores y operaciones con vectores), subespacios generados. Matrices (diagonales, triangulares, cuadradas, rectangulares, simétricas), operaciones con matrices*. Determinantes: *cálculo e interpretación geométrica en el plano y en el espacio. Matriz inversa. Rango de una matriz. Aplicaciones lineales (entre espacios vectoriales). Producto escalar de dos vectores (ángulo entre los vectores).*

1. La teoría de matrices puede ser una herramienta muy útil para describir problemas de la vida cotidiana. Veamos un ejemplo:

Una tienda de animales que vende peces de acuario incluye una garantía: cada pez que muera durante los tres primeros meses será reemplazado de forma gratuita. Cuando el pez ha sido reemplazado una vez, ya no queda cubierto por la garantía. Por otro lado, se han recopilado los siguientes datos: el 3 % de los peces muere durante el primer mes, el 5 % de los peces que superan el primer mes muere durante el segundo mes y, finalmente, el 7 % de los peces que han cumplido dos meses muere durante el tercer mes.

Nota del ejercicio 1

Este ejercicio es una simplificación drástica de una situación real de una tienda que puede tener gran variedad de animales y ofrecer diversas garantías en función del tipo de animal y el tipo de cliente. ¡Imaginad el gran volumen de datos que podríamos codificar con este tipo de matrices!

a) Si para simplificar suponemos que los peces sin garantía no se mueren, dibujad el diagrama de estados (nodos) y las probabilidades de transición entre estados (aristas). Observad que este problema tiene cinco estados posibles: pez en el mes 1, 2 o 3 (E_1,E_2,E_3, respectivamente), pez sin garantía porque ya se ha repuesto (E_4) y pez sin garantía porque tiene más de tres meses (E_5). Para hacer este diagrama, dibujad cinco redondas con las etiquetas de los estados y, a continuación, trazad flechas entre las redondas indicando las posibles transiciones entre los estados y especificando la probabilidad correspondiente.

b) Escribid la matriz $P = (P_{ij})$ de las probabilidades de transición, es decir, P_{ij} es la probabilidad de cambiar del estado j al estado i por cada uno de los cinco estados posibles del sistema. Fijaos en que cada columna de la matriz corresponde a las probabilidades de las flechas que salen de cada estado y la suma total tiene que ser igual a 1.

c) ¿P es una matriz diagonal? ¿P es una matriz triangular? Calculad su determinante. ¿Existe la matriz P^{-1}?

d) Calculad P^2, P^3 y , P^4, es decir, el cuadrado, el cubo y la potencia cuarta de la matriz P. ¿Qué observáis? ¿Estas nuevas matrices tienen la misma estructura triangular que la matriz original?

2. Si disponemos de datos de n observaciones de individuos con m características (típicamente, $n \gg m$, es decir, muchas más observaciones que características), podemos organizar esta información en forma de una matriz A de n filas y m columnas, que en general será rectangular.

Uno de los temas importantes que trataremos más adelante es la descomposición en valores singulares (SVD), una aplicación interesante y útil en la ciencia de datos que se basa en el análisis de la matriz $A^T \cdot A$ o la matriz $A \cdot A^T$, dos nuevas matrices resultantes de multiplicar, por la derecha o por la izquierda, la matriz transpuesta (que se obtiene de cambiar filas por columnas) por la matriz original. Veamos un par de ejemplos:

a) Considerad las matrices rectangulares siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 3 \\ 0 & -7 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y calculad el rango (el número máximo de filas o de columnas linealmente independientes).

b) Para cada una de las matrices A del apartado anterior, calculad las dos matrices $B_1 = A^T \cdot A$ y . $B_2 = A \cdot A^T$ ¿Son simétricas estas nuevas matrices? ¿Tienen la misma traza (suma de los elementos de la diagonal principal)? ¿Tienen el mismo determinante? Calculad los rangos. ¿Se cumple que coinciden, es decir, rang(A) = rang(B_1) = rang(B_2)?

3. Una de las aplicaciones más directas de los determinantes, íntimamente relacionada con la definición de determinante de una matriz, es el cálculo de áreas definidas por dos vectores en el plano y el cálculo de volúmenes definidos por tres vectores en el espacio. En efecto, tres vectores en el espacio tridimensional ($\mathbb{R}^3$) generan un prisma de seis caras (paralelepípedo en que las caras son paralelogramos paralelos dos a dos). Para calcular el volumen de esta pieza basta con calcular el determinante en valor absoluto de la matriz A, formada por los tres vectores (en filas o en columnas). En símbolos, si tenemos los vectores $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w} = (w_1,w_2,w_3)$, entonces el volumen generado es:

$$V = |det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})| = \begin{vmatrix} u_1 & v_2 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \geq 0$$

El determinante se tiene que calcular en valor absoluto, puesto que el volumen de la figura es independiente del orden en que escogemos los vectores y siempre es un valor positivo. Además, podríamos poner los vectores por filas en la matriz, en vez de hacerlo por columnas, puesto que el determinante de la matriz transpuesta coincide con el determinante de la matriz: $\det(A^T) = \det(A)$.

a) Dados los puntos en el espacio $P = (-2,6,7)$, $Q = (5,-6,8)$, $R = (8,4,-9)$ y $S = (9,5,1)$, construid tres vectores a partir de uno de los vértices (por ejemplo, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$) y calculad el volumen del prisma generado.

b) Considerad ahora un tetraedro (pirámide de base triangular, es decir, un poliedro de cuatro caras triangulares) formado por los cuatro puntos P,Q,R y S del ejercicio anterior. Teniendo en cuenta que el volumen de un tetraedro es una sexta parte del volumen del prisma que lo contiene, calculad el volumen del tetraedro $PQRS$.

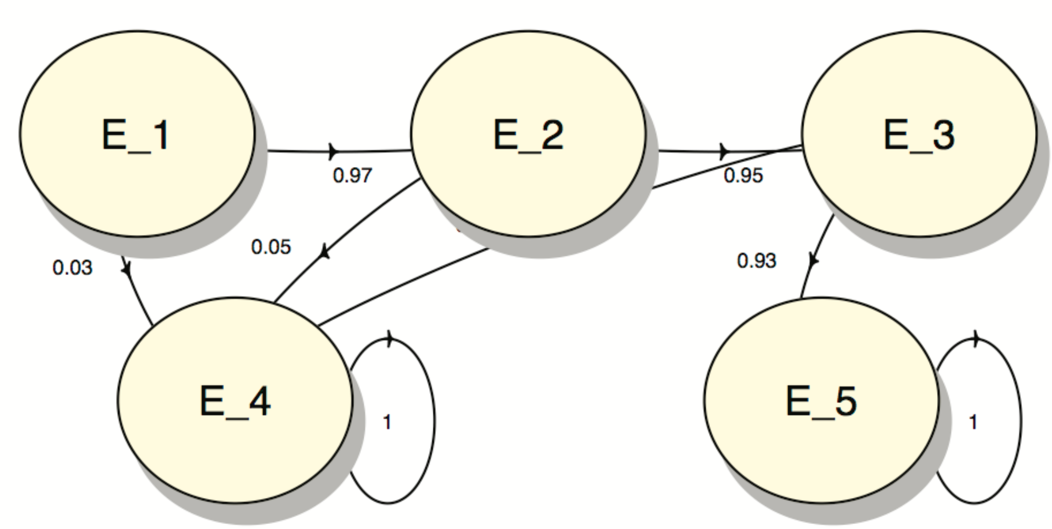
c) Considerad dos tetraedros en el espacio tridimensional. Los vértices del primer tetraedro son $P = (0,3,8)$, $Q = (2,17,8)$, $R = (-1,6,9)$ y $S = (-2,6,7)$, y los vértices del segundo, P, $Q' = (2,-19,8)$, R y S. Comprobad que tienen el mismo volumen. ¿Por qué? ¿ Cuál es este volumen? Explicad los resultados obtenidos.

2. Soluciones

1. Problema con cinco estados posibles.

a) Diagrama de estados y las probabilidades de transición entre los cinco estados posibles: pez en el mes 1, 2 o 3 (E_1,E_2,E_3, respectivamente), pez sin garantía porque ya se ha repuesto (E_4) y pez sin garantía porque tiene más de tres meses (E_5):

Diagrama de estados y probabilidades de transición



b) La matriz P de las probabilidades de transición es:

$$
\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array}
\begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \\ \end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \\
\hline
E_1 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0 & 0 \\
E_2 & 0.97 & 0.00 & 0.00 & 0 & 0 \\
E_3 & 0.00 & 0.95 & 0.00 & 0 & 0 \\
E_4 & 0.03 & 0.05 & 0.07 & 1 & 0 \\
E_5 & 0.00 & 0.00 & 0.93 & 0 & 1
\end{array}
$$

Fijaos en que cada columna de P son las posibilidades que puede tener cada uno de los estados. Por ejemplo, el primer estado, E_1, tiene dos transiciones hacia E_2 y E_4 con las probabilidades 97 % y 3 %, respectivamente, etc.

c) La matriz *P* no es diagonal, pero es una matriz triangular. Su determinante vale 0, puesto que en este caso es el producto de la diagonal principal. En consecuencia, no existe la matriz inversa.

d) Las potencias de la matriz *P* son, a su vez, matrices triangulares. A continuación tenéis el código R para calcularlas:

```
> Etiquetas <- c("E_1", "E_2", "E_3", "E_4", "E_5")
> MatrizP <- matrix(c(0,0.97,0,0.03,0,0,0,0.95,0.05,0,0,0,0,0.07,0.93,
+             0,0,0,1,0,0,0,0,0,1), 5,5, dimnames = list(Etiquetas, Etiquetas))
> det(MatrizP)  # determinante de la matriz P

[1] 0

> library(expm)
> # Potencias de la matriz de transición
> MatrizP

     E_1  E_2  E_3 E_4 E_5
E_1 0.00 0.00 0.00   0   0
E_2 0.97 0.00 0.00   0   0
E_3 0.00 0.95 0.00   0   0
E_4 0.03 0.05 0.07   1   0
E_5 0.00 0.00 0.93   0   1

> MatrizP %^% 2 # cuadrado

       E_1    E_2  E_3 E_4 E_5
E_1 0.0000 0.0000 0.00   0   0
E_2 0.0000 0.0000 0.00   0   0
E_3 0.9215 0.0000 0.00   0   0
E_4 0.0785 0.1165 0.07   1   0
E_5 0.0000 0.8835 0.93   0   1

> MatrizP %^% 3 # cubo

         E_1    E_2  E_3 E_4 E_5
E_1 0.000000 0.0000 0.00   0   0
E_2 0.000000 0.0000 0.00   0   0
E_3 0.000000 0.0000 0.00   0   0
E_4 0.143005 0.1165 0.07   1   0
E_5 0.856995 0.8835 0.93   0   1

> MatrizP %^% 4 # potencia cuarta

         E_1    E_2  E_3 E_4 E_5
E_1 0.000000 0.0000 0.00   0   0
E_2 0.000000 0.0000 0.00   0   0
E_3 0.000000 0.0000 0.00   0   0
E_4 0.143005 0.1165 0.07   1   0
E_5 0.856995 0.8835 0.93   0   1
```

La matriz de este problema corresponde a una *cadena de Markov* (modelo matricial lineal), un tema que trataremos más adelante. De todas maneras, podéis ver a continuación las instrucciones básicas con R para definirla y visualizarla:

```
> # install.packages("markovchain")
> library(markovchain)
> # Creamos un nuevo objeto que es una cadena de Markov (por columnas)
> CM_tienda <- new("markovchain", states = Etiquetas, byrow = F,
+                  transitionMatrix = MatrizP, name = "Tienda de animales")
> # install.packages("diagram")
> library(diagram)
> # Dibujo del diagrama de estados y probabilidades de transición
> plotmat(MatrizP, pos = c(3,2), lwd = 1, box.lwd = 1,cex.txt = 0.5,
+         box.size = 0.1, box.type = "circle", box.prop = 0.5,
+         box.col = " light yellow", arr.length=.1, arr.width=.1,
+         self.cex = .4, self.shifty = -.01, self.shiftx = .13,
+         main = "Diagrama de estados y probabilidades de transición")
```

2. A partir de la matriz rectangular de los datos A, construimos dos nuevas matrices simétricas, $B_1 = A^T \cdot A$ y $B_2 = A \cdot A^T$, y calculamos los rangos, las trazas y los determinantes.
Primer ejemplo ($n = 4 \times m = 2$). Código R de resolución:

```
> Etiqueta_fila <- c(" ind 1", " ind 2", " ind 3", " ind 4")
> Etiqueta_col <- c(" car 1", " car 2")
> A <- matrix(c(1,3,4,-1,2,1,0,3), 4,2,
+             dimnames = list(Etiqueta_fila, Etiqueta_col))
> A  # matriz de los datos

      car 1 car 2
ind 1     1     2
ind 2     3     1
ind 3     4     0
ind 4    -1     3

> rangA <- rankMatrix(A)[1]
> rangA

[1] 2

> B1 <- t(A) %*% A; B2 <- A %*% t(A);
> B1

      car 1 car 2
car 1    27     2
car 2     2    14

> B2
```

```
      ind 1 ind 2 ind 3 ind 4
ind 1     5     5     4     5
ind 2     5    10    12     0
ind 3     4    12    16    -4
ind 4     5     0    -4    10

> # Sí, son matrices simétricas
>
> tr1 <- sum(diag(B1)); tr2 <- sum(diag(B2));
> tr1; tr2

[1] 41

[1] 41

> # las trazas de las matrices coinciden
>
> rangB1 <- rankMatrix(B1)[1]; rangB2 <- rankMatrix(B2)[1]
> rangA; rangB1; rangB2

[1] 2

[1] 2

[1] 2

> # Sí, los rangos coinciden
>
> (det(B1)); (det(B2))

[1] 374

[1] 0

> # Los determinantes son diferentes
```

Segundo ejemplo ($n = 3 \times m = 4$). Código R de resolución:

```
> Etiqueta_fila <- c(" ind 1", " ind 2", " ind 3")
> Etiqueta_col <- c(" car 1", " car 2"," car 3", " car 4")
> A <- matrix(c(3,0,4,2,-7,1,9,1,-1,3,4,2), 3,4,
+              dimnames = list(Etiqueta_fila, Etiqueta_col))
> A  # matriz de los datos

      car 1 car 2 car 3 car 4
ind 1     3     2     9     3
ind 2     0    -7     1     4
ind 3     4     1    -1     2

> rangA <- rankMatrix(A)[1]
> rangA

[1] 3
```

```
> B1 <- t(A) %*% A; B2 <- A %*% t(A);
> B1

      car 1 car 2 car 3 car 4
car 1    25    10    23    17
car 2    10    54    10   -20
car 3    23    10    83    29
car 4    17   -20    29    29

> B2

      ind 1 ind 2 ind 3
ind 1   103     7    11
ind 2     7    66     0
ind 3    11     0    22

> # Sí, son matrices simétricas
>
> tr1 <- sum(diag(B1)); tr2 <- sum(diag(B2));
> tr1; tr2

[1] 191

[1] 191

> # las trazas de las matrices coinciden
>
> rangB1 <- rankMatrix(B1)[1]; rangB2 <- rankMatrix(B2)[1]
> rangA; rangB1; rangB2

[1] 3

[1] 3

[1] 3

> # Sí, los rangos coinciden
>
> (det(B1)); (det(B2))

[1] -1.71605e-10

[1] 140492

> # Los determinantes son diferentes
```

3. Para calcular el volumen construimos los tres vectores que inciden en un mismo vértice (por ejemplo, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$) y generamos una matriz cuadrada de dimensión 3. Finalmente, solo tenemos que calcular el determinante o una sexta parte, si se trata de un tetraedro. Código R de resolución:

```
> P <- c(-2,6,7); Q <- c(5,-6,8); R <- c(8,4,-9); S <- c(9,5,1)
> PQ <- Q-P; PR <- R-P; PS <- S-P; A <- matrix(c(PQ,PR,PS),3,3);
> A;
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    7   10   11
[2,]  -12   -2   -1
[3,]    1  -16   -6

> (V_prisma <- abs(det(A)));

[1] 1376

> (V_tetraedro <- abs(det(A))/6);

[1] 229.3333

> P <- c(0,3,8); Q <- c(2,17,8); R <- c(-1,6,9); S <- c(-2,6,7)
> QQ <- c(2,-19,8);
> PQ <- Q-P; PR <- R-P; PS <- S-P; A <- matrix(c(PQ,PR,PS),3,3);
> A;

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    2   -1   -2
[2,]   14    3    3
[3,]    0    1   -1

> (V_tetraedro <- abs(det(A))/6);

[1] 9

> PQQ <- QQ-P; PR <- R-P; PS <- S-P; A <- matrix(c(PQQ,PR,PS),3,3);
> A;

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    2   -1   -2
[2,]  -22    3    3
[3,]    0    1   -1

> (V_tetraedro <- abs(det(A))/6); # mismo volumen

[1] 9
```

Debido al valor absoluto, hay dos tetraedros simétricos que tienen el mismo volumen.