
Aplicaciones lineales, diagonalización y vectores propios

Contextualización y objetivos para la ciencia de datos

PID_00262381

Francesc Pozo Montero
Jordi Ripoll Missé

Francesc Pozo Montero

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Barcelona (2000) y doctor en Matemática Aplicada por la Universidad Politécnica de Cataluña (2005). Ha sido profesor asociado de la Universidad Autónoma de Barcelona y profesor asociado, colaborador y actualmente profesor agregado en la Universidad Politécnica de Cataluña. Además, es cofundador del Grupo de Innovación Matemática E-learning (GIMEL), responsable de varios proyectos de innovación docente y autor de varias publicaciones. Como miembro del grupo de investigación consolidado CoDALab, centra su investigación en la teoría de control y las aplicaciones en ingeniería mecánica y civil, así como en el uso de la ciencia de datos para la monitorización de la integridad estructural y para la monitorización de la condición, sobre todo en turbinas eólicas.

Jordi Ripoll Missé

Licenciado en Matemáticas y doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Barcelona (2005). Profesor colaborador de la Universitat Oberta de Catalunya desde 2011 y profesor del Departamento de Informática, Matemática Aplicada y Estadística de la Universidad de Girona (UdG) desde 1996, donde actualmente es profesor agregado y desarrolla tareas de investigación en el ámbito de la biología matemática (modelos con ecuaciones en derivadas parciales y dinámica evolutiva). También ha sido profesor y tutor de la UNED en dos etapas, primero en el centro asociado de Terrassa y actualmente en el de Girona. Ha participado en numerosos proyectos de innovación docente, especialmente en cuanto al aprendizaje de las matemáticas en línea.

El encargo y la creación de este recurso de aprendizaje UOC han sido coordinados por la profesora: Cristina Cano Bastidas (2019)

Primera edición: febrero 2019
© Francesc Pozo Montero, Jordi Ripoll Missé
Todos los derechos reservados
© de esta edición, FUOC, 2019
Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Diseño: Manel Andreu
Realización editorial: Oberta UOC Publishing, SL

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares del copyright.

Índice

Introducción	4
Objetivos	6

Introducción

En este módulo se pretende introducir los conceptos básicos más importantes relacionados con la noción de aplicación lineal estableciendo una clara conexión entre las aplicaciones lineales y las matrices. De hecho, del mismo modo que un sistema de ecuaciones lineales (SEL) se puede representar en forma matricial, en este módulo se podrá ver que toda aplicación lineal queda determinada de manera unívoca por una matriz, y que a toda matriz también se le puede asociar una aplicación lineal. En este módulo también se presentan los conceptos clave de **vector propio** y **valor propio**, ambos conceptos asociados a un endomorfismo o aplicación lineal de un espacio en si mismo. Finalmente, en este módulo se analiza el problema de la diagonalización de matrices cuadradas o, en otras palabras, el problema de la diagonalización de endomorfismos.

Más allá del puro interés conceptual desde la perspectiva de las matemáticas, los conceptos, las nociones, las ideas y los resultados que se introducen en este módulo tienen muchas aplicaciones, tanto en ámbitos teóricos como prácticos y, en particular, en la ciencia de datos. Por un lado, y en general, se aplican en el cálculo de potencias de matrices y en la optimización de funciones de varias variables. Por otro lado, se aplican al estudio de sistemas dinámicos (sistemas que evolucionan a medida que pasa el tiempo).

Un ejemplo muy interesante de esto es el caso del motor de busca de Google, que debe su valoración y aceptación a internet, a su excelencia en la capacidad para proporcionar enlaces de utilidad. Google clasifica las páginas web siguiendo un orden de importancia que depende de dos factores: en primer lugar, del número de enlaces que apuntan a una página; en segundo lugar, de la importancia de las páginas que contienen estos enlaces. Así pues, el problema de asignar índices de impacto a las páginas web se convierte en un problema que consiste en encontrar los vectores propios y los valores propios de una matriz. Otro ejemplo curioso es el caso de la plataforma en línea Netflix. Hasta hace un tiempo, los usuarios podían dar una valoración a las películas y las series entre una y cinco estrellas, entendiendo una estrella como “no me ha gustado nada” y cinco estrellas como “me ha encantado”. Netflix usó valores y vectores propios para aplicar una técnica de factorización de bajo rango para una predicción colaborativa. De este modo, Netflix sugería al usuario que, según la predicción, tendría una valoración alta. Finalmente, un último ejemplo es la clusterización espectral, tanto en el ámbito de la biología como en el caso de imágenes médicas, de la economía, el marketing o, incluso, la criminología. Esta técnica, muy extendida, permite identificar subsistemas o patrones en conjuntos de datos muy grandes o con ruido, mediante valores propios de

la matriz de adyacencia del grafo de la red de datos.

Los conceptos de este módulo, especialmente los vectores y valores propios, son la base de técnicas muy avanzadas, como la descomposición en valores singulares que son útiles para resolver problemas en el ámbito de las matemáticas (cálculo del rango y el núcleo de una matriz, pseudoinversa de una matriz, resolución de sistemas sobredeterminados), así como en el campo de la ciencia de datos (compresión de imágenes, reducción de la dimensionalidad, extracción de características) y los modelos matriciales, que nos sirven para modelizar estadísticamente procesos aleatorios o para resolver sistemas dinámicos discretos.

Objetivos

El objetivo general de este módulo es presentar los principales conceptos y resultados asociados a la teoría de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales. En concreto, los objetivos docentes que se pretenden conseguir con este módulo son los siguientes:

- 1.** Comprender la utilidad de los conceptos de aplicación lineal, vectores y valores propios en el ámbito de la ciencia de datos.
- 2.** Conocer las aplicaciones lineales y aprender a representarlas en forma de matriz.
- 3.** Entender el concepto de vectores y valores propios, así como la manera de calcularlos y su interpretación geométrica.
- 4.** Ser capaces de resolver problemas de diagonalización de matrices cuadradas.
- 5.** Utilizar software matemático para operaciones matriciales, en general, y calcular de manera automatizada valores y vectores propios, en particular.

