
Instrumentació Electrònica

Material complementari

PID_00257314

Ferran Reverter Cubarsí

Temps mínim de dedicació recomanat: 3 hores



Ferran Reverter Cubarsí

L'encàrrec i la creació d'aquest recurs d'aprenentatge UOC han estat coordinats pel professor: Carlos Manuel Monzo Sánchez (2019)

Primera edició: febrer 2019
© Ferran Reverter Cubarsí
Tots els drets reservats
© d'aquesta edició, FUOC, 2019
Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Disseny: Manel Andreu
Realització editorial: Oberta UOC Publishing, SL

Cap part d'aquesta publicació, incloent-hi el disseny general i la coberta, no pot ser copiada, reproduïda, emmagatzemada o transmesa de cap manera ni per cap mitjà, tant si és elèctric com químic, mecànic, òptic, de gravació, de fotocòpia o per altres mètodes, sense l'autorització prèvia per escrit dels titulars del copyright.

Índex

Introducció	5
Objectius	6
1. Mòdul 1	7
1.1. Propagació d'errors	7
1.2. Característica dinàmica	10
2. Mòdul 2	14
2.1. Característiques estàtiques dels amplificadors operacionals	14
2.2. Característiques dinàmiques dels amplificadors operacionals	17
3. Mòdul 3	20
3.1. Filtres per a convertidors de senyal	20
4. Mòdul 4	23
4.1. Linealització de termistors (NTC)	23
Bibliografia	27

Introducció

El material d'aquest document està destinat a complementar la informació i els conceptes explicats als mòduls 1, 2, 3 i 4 de l'assignatura Instrumentació electrònica corresponent al Màster de Telecomunicacions de la UOC.

L'elaboració d'aquest material complementari ha estat motivada principalment per dues raons. Per un costat, els comentaris i/o dubtes dels estudiants dels darrers semestres sobre determinats conceptes. Com que aquests comentaris i/o dubtes han estat reiteratius en alguns conceptes específics, s'ha cregut convenient que les explicacions corresponents fossin millorades i/o amplia- des. Un exemple que generava aquests dubtes als estudiants és el concepte de propagació d'errors tractat al mòdul 1.

Per altra banda, també tenim l'experiència acadèmica i professional del nou professorat involucrat a l'assignatura. Tenint en compte aquesta experiència, s'ha considerat oportú introduir nous conceptes i/o ampliar alguns dels existents. Un exemple seria el concepte guany-amplada de banda d'un amplificador operacional, que no es tractava amb la profunditat desitjada al mòdul 2.

Els conceptes tractats en aquest material complementari estan acompanyats d'exemples al final de cadascuna de les subseccions. Aquests posen en pràctica els conceptes, fórmules, circuits, etc. introduïts prèviament amb l'objectiu de facilitar la seva comprensió.

El contingut d'aquest document s'ha estructurat en funció dels mòduls complementats, de tal manera que els apartats 1, 2, 3 i 4 proporcionen la informació addicional associada als mòduls 1, 2, 3 i 4, respectivament.

Objectius

Els objectius que ha d'assolir l'estudiant mitjançant aquest material complementari són els següents:

- 1.** Saber aplicar la llei de propagació d'errors en mesures d'instrumentació electrònica.
- 2.** Entendre la resposta dinàmica dels sistemes de mesura de primer i segon ordre i identificar-ne les diferències.
- 3.** Saber analitzar els efectes de les limitacions en contínua d'un amplificador operacional a la seva sortida.
- 4.** Entendre el concepte de guany-amplada de banda d'un amplificador operacional i saber analitzar-ne els efectes.
- 5.** Saber aplicar els conceptes de filtratge en els convertidors de senyal, en particular per determinar la relació senyal-soroll que causa l'aliàsing.
- 6.** Entendre els diferents mètodes per linealitzar la resposta d'un sensor de temperatura tipus NTC.

1. Mòdul 1

1.1. Propagació d'errors

En el camp de la instrumentació electrònica sovint es realitzen **mesures indirectes**, és a dir: la magnitud d'interès Y , que està relacionada matemàticament amb altres N magnituds X_i , es determina a partir de la mesura directa de X_i . Per exemple: el valor d'una resistència elèctrica pot ser determinat a partir de les mesures directes de la caiguda de tensió i el corrent que hi circula i aplicant, posteriorment, la llei d'Ohm. Com que la mesura de les magnituds X_i té associada un error o incertesa (ΔX_i), el valor calculat de Y a partir de X_i també tindrà associat un error o incertesa (ΔY) que dependrà de ΔX_i .

Error o incertesa

En el camp de la instrumentació electrònica, el concepte d'error ha sigut i encara és àmpliament utilitzat, però actualment el concepte d'incertesa és més acceptat. En aquest document, ambdós conceptes s'utilitzen com a sinònims.

Suposem que la magnitud Y està relacionada funcionalment amb les magnituds X_i de la següent manera:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (1)$$

Per determinar ΔY a partir de ΔX_i cal aplicar **la llei de propagació d'errors o incerteses**. Aquesta llei es pot aplicar tot fent una suma normal de les diferents contribucions, és a dir:

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| \Delta X_i \quad (2)$$

On $\left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|$ és el valor absolut de la derivada parcial de f respecte X_i . Però la llei també es pot aplicar tot fent una suma quadràtica de la següent manera:

$$\Delta Y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|^2 \Delta X_i^2} \quad (3)$$

L'expressió [2] considera el pitjor cas, mentre que l'expressió [3] considera un cas estadísticament més probable, tot fent que el valor de ΔY obtingut a partir de [2] sigui superior a aquell estimat mitjançant l'aplicació de [3]. Si fem un paral·lisme amb el trànsit viari, podríem entendre que l'expressió [2] considera que tots els semàfors que hi ha en un determinat trajecte es troben en color vermell, mentre que l'expressió [3] assumeix que només alguns es troben en vermell i, per tant, la durada del trajecte és menor. Des del punt de vista

d'instrumentació electrònica, es recomana aplicar l'expressió [3] si les mesures de X_i són independents entre elles, per exemple: quan aquestes s'han dut a terme amb instruments diferents.

Exemple

Per determinar el valor d'una resistència elèctrica es mesura la caiguda de tensió (V) i el corrent que hi circula (I). Aquestes mesures proporcionen els següents valors: $V = 1,215 \text{ V} \pm 15 \text{ mV}$ i $I = 1,055 \text{ mA} \pm 25 \text{ } \mu\text{A}$. Calculeu el valor de la resistència i la seva incertesa aplicant la llei de propagació d'incerteses.

Solució

En primer lloc, el valor de la resistència es pot obtenir aplicant directament la llei d'Ohm:

$$R = \frac{V}{I} = 1.152 \text{ } \Omega \quad (4)$$

Per determinar el valor de la incertesa (ΔR) associada a la mesura indirecta d'aquesta resistència, hem de calcular inicialment les derivades parcials:

$$\frac{\partial R}{\partial V} = \frac{1}{I} \quad (5)$$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{V}{I^2} \quad (6)$$

Si ara apliquem l'expressió [2], el resultat és:

$$\Delta R = \left| \frac{\partial R}{\partial V} \right| \Delta V + \left| \frac{\partial R}{\partial I} \right| \Delta I = \frac{1}{I} \Delta V + \frac{V}{I^2} \Delta I = 42 \text{ } \Omega \quad (7)$$

On $\Delta V = 15 \text{ mV}$ i $\Delta I = 25 \text{ } \mu\text{A}$. En el cas d'aplicar l'expressió [3], el resultat seria el següent:

$$\Delta R = \sqrt{\left| \frac{\partial R}{\partial V} \right|^2 \Delta V^2 + \left| \frac{\partial R}{\partial I} \right|^2 \Delta I^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I} \right)^2 \Delta V^2 + \left(\frac{V}{I^2} \right)^2 \Delta I^2} = 31 \text{ } \Omega \quad (8)$$

Per tant, el resultat d'aquesta mesura indirecta de resistència s'ha d'expressar com: $R = 1.152 \text{ } \Omega \pm 42 \text{ } \Omega$ (o $\pm 31 \text{ } \Omega$). Si les mesures de tensió i corrent es fan amb aparells diferents (és a dir: un voltímetre i un amperímetre, respectivament) té més sentit expressar el resultat com $1.152 \text{ } \Omega \pm 31 \text{ } \Omega$.

La llei de propagació d'errors o incerteses també és vàlida per quantificar els efectes de la tolerància d'uns determinats components electrònics (per exemple: resistències o condensadors) en una determinada expressió que depèn d'aquests components. En aquest cas, si els diferents components que intervenen en l'expressió provenen de lots de fabricació diferents, es pot aplicar l'expressió [3], ja que es pot assumir que les diferents fonts d'error són independents. En canvi, si els components són del mateix lot de fabricació (per exemple: dues resistències fabricades consecutivament una darrera l'altra) és preferible aplicar l'expressió [2], ja que no es pot assegurar que les fonts d'error siguin independents. En cas de dubte, us aconsellem que apliqueu l'expressió [2], ja que considera el pitjor cas.

La tolerància

La tolerància és la incertesa d'un determinat component respecte el seu valor nominal. Per exemple: una resistència elèctrica amb un valor nominal d'1 kΩ pot tenir una tolerància del 10% i, per tant, el seu valor real pot estar comprès entre 900 i 1.100 Ω.

Exemple

Dues resistències R_1 i R_2 amb una tolerància del 10% s'interconnecten en sèrie. Si $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ i $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, determineu el valor de la resistència equivalent (R_{eq}) i la seva incertesa (ΔR_{eq}).

Solució

En primer lloc, el valor de la R_{eq} es pot obtenir directament fent la suma, ja que les resistències es troben en sèrie:

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 = 2.000 \ \Omega \quad (9)$$

Per determinar el valor de ΔR_{eq} deguda a la tolerància de R_1 i R_2 (ΔR_1 i ΔR_2 , respectivament) hem de calcular inicialment les derivades parcials:

$$\frac{\partial R_{\text{eq}}}{\partial R_1} = 1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial R_{\text{eq}}}{\partial R_2} = 1 \quad (11)$$

Aplicant l'expressió [2], el resultat és el següent:

$$\Delta R_{\text{eq}} = \left| \frac{\partial R_{\text{eq}}}{\partial R_1} \right| \Delta R_1 + \left| \frac{\partial R_{\text{eq}}}{\partial R_2} \right| \Delta R_2 = \Delta R_1 + \Delta R_2 = 200 \ \Omega \quad (12)$$

on $\Delta R_1 = \Delta R_2 = 10\% \cdot 1 \text{ k}\Omega$. Aplicant l'expressió [3], el resultat seria el següent:

$$\Delta R_{\text{eq}} = \sqrt{\left| \frac{\partial R_{\text{eq}}}{\partial R_1} \right|^2 \Delta R_1^2 + \left| \frac{\partial R_{\text{eq}}}{\partial R_2} \right|^2 \Delta R_2^2} = \sqrt{\Delta R_1^2 + \Delta R_2^2} = 141 \ \Omega \quad (13)$$

Per tant, la resistència equivalent cal expressar-la com: $R_{\text{eq}} = 2.000 \ \Omega \pm 200 \ \Omega$ (o $\pm 141 \ \Omega$). En funció de si les resistències emprades són del mateix lot de fabricació o no, caldrà

usar el resultat de [12] o [13], respectivament. En cas de dubte, és preferible utilitzar el resultat obtingut mitjançant [12].

Segons el resultat obtingut a [12], la resistència equivalent té una incertesa relativa expressada en percentatge (és a dir: $\frac{200}{2.000} \cdot 100 = 10\%$) que és igual a la tolerància de les resistències R_1 i R_2 . Matemàticament, això es pot demostrar de la següent manera. En primer lloc, expressem:

$$\Delta R_{eq} = \Delta R_1 + \Delta R_2 \quad (14)$$

A ambdós costats de l'expressió prèvia, dividim entre R_{eq} tot obtenint:

$$\frac{\Delta R_{eq}}{R_{eq}} = \frac{\Delta R_1 + \Delta R_2}{R_{eq}} \quad (15)$$

Com que $R_1 = R_2$ i $\Delta R_1 = \Delta R_2$, l'expressió [15] es pot reescriure de la següent manera:

$$\frac{\Delta R_{eq}}{R_{eq}} = \frac{2\Delta R_1}{2R_1} = \frac{\Delta R_1}{R_1} \quad (16)$$

Que reafirma la hipòtesis de partida.

1.2. Característica dinàmica

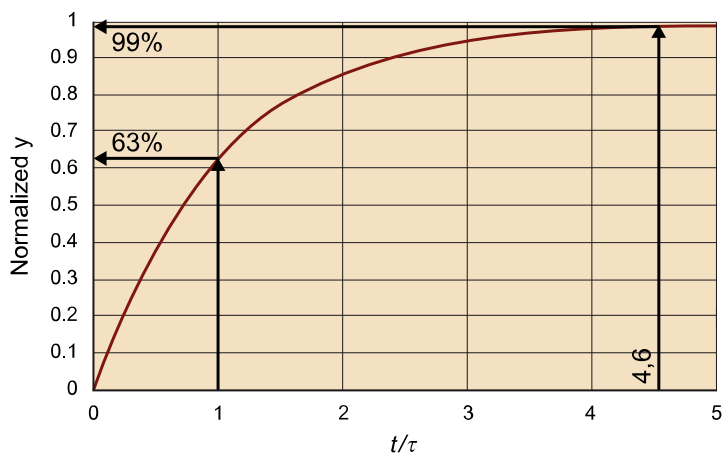
Els sistemes de primer ordre presenten una funció de transferència on el denominador és un polinomi de primer ordre en el domini de Laplace. Aquests sistemes són bastant habituals en el camp de la instrumentació electrònica, i en particular aquells que tenen una resposta de tipus passa-baix. Alguns exemples de sensors i circuits que es comporten com a tal són els següents: (1) un sensor resistiu tèrmic, amb una resistència de sortida que depèn de la temperatura aplicada, i (2) un amplificador operacional compensat internament en freqüència. Aquests sistemes de primer ordre, davant d'una entrada de tipus escaló, presenten una sortida y amb una resposta transitòria que es pot expressar de la manera següent:

$$y(t) = Y_F(1 - e^{-t/\tau}) \quad (17)$$

On Y_F és el valor final de la variable y en règim estacionari i τ és una constant de temps que determina la velocitat de resposta del sistema. Per exemple, en un circuit electrònic format per una resistència (R) i un condensador (C), aquesta constant de temps val $R \cdot C$. Un sistema amb una τ petita és preferible des del punt de vista de velocitat, però no pel que fa a soroll i, en conseqüència, quant a variabilitat de les mesures en estat estacionari. Dit d'una altra manera, un valor petit de τ té associat una freqüència de tall gran i, per tant, el sistema és més susceptible a soroll i a interferències.

La figura 1 mostra la típica resposta dinàmica d'un sistema de primer ordre passa-baix davant d'una entrada de tipus escaló. El temps que passa des de l'aplicació de l'escaló fins que el sistema proporciona una sortida amb un determinat error respecte al valor final es coneix com el **temps d'establiment** (t_s). Com més petit sigui l'error, més llarg serà el temps d'establiment. Per exemple, si $t_s = \tau$, s'obté un error relatiu del 37%, que òbviament és un valor elevat. Per altra banda, si $t_s = 4,6\tau$, s'obté un error relatiu de l'1%. Aquests valors es poden obtenir matemàticament a partir de l'expressió [17] o gràficament mitjançant la figura 1. La taula 1 mostra quant ha de valer el temps d'establiment en funció de τ per tal que l'error a causa de la resposta dinàmica sigui d'un determinat percentatge. Observeu que per tal de disminuir l'error relatiu un factor de 10 cal esperar $2,3 \tau$ més. Per altra banda, la resposta de la figura 1 no presenta sobreoscil·lacions; aquestes són típiques de sistemes amb un ordre superior a 1.

Figura 1. Resposta transitòria d'un sistema de primer ordre passa-baix davant d'una entrada de tipus escaló.



Taula 1. Relació entre el temps d'establiment i l'error relatiu a causa de la resposta dinàmica d'un sistema de primer ordre tipus passa-baix.

Error relatiu (%)	Temps d'establiment
10	$2,3 \tau$
1	$4,6 \tau$
0,1	$6,9 \tau$
0,01	$9,2 \tau$

Exemple

Un determinat sistema electrònic alimentat amb bateries realitza una mesura de la concentració de monòxid de carboni cada deu minuts, i s'adorm entre mesura i mesura per tal d'allargar la vida de les bateries. En el moment en què s'activa l'alimentació del sistema per dur a terme la mesura, la tensió de sortida (v_o) del circuit condicionador, que serà posteriorment digitalitzada pel convertidor analògic-digital, evoluciona dinàmicament en el domini del temps de la següent manera:

$$v_o(t) = V_F(1 - e^{-t/\tau}) \quad (18)$$

On V_F és el valor final de tensió i τ és la constant de temps. Trobeu l'expressió algebraica (en funció de τ) del temps d'establiment per tal que l'error relatiu a causa de la resposta dinàmica sigui del 5%. Calculeu el valor numèric d'aquest temps d'establiment si $V_F = 1 \text{ V}$ i $\tau = 10 \text{ ms}$.

Solució

Si es desitja que l'error relatiu sigui del 5%, cal complir el següent:

$$\left| \frac{V_F(1 - e^{-t_s/\tau}) - V_F}{V_F} \right| \cdot 100 = 5\% \quad (19)$$

Aïllant t_s de l'expressió anterior s'obté:

$$e^{-t_s/\tau} = 0,05 \rightarrow -t_s = \tau \ln 0,05 \rightarrow t_s = 3\tau \quad (20)$$

Com que $\tau = 10 \text{ ms}$, el temps d'establiment val 30 ms .

Els **sistemes de segon ordre** presenten una funció de transferència on el denominador és un polinomi de segon ordre en el domini de Laplace. La resposta dinàmica d'aquests sistemes depèn de dos paràmetres: (1) el coeficient d'esmoreïment (δ) que quantifica en quina mesura les oscil·lacions de la sortida decauen temporalment quan el sistema experimenta un canvi a la seva entrada, i (2) la freqüència natural no esmoreïda (ω_0) que correspon a la freqüència a la qual oscil·laria la sortida del sistema si no hi hagués esmoreïment ($\delta = 0$). La situació que s'observa amb més freqüència en un sistema real és aquella en què $0 < \delta < 1$ (conegut com a **règim sota-esmoreït**) amb una sortida que presenta oscil·lacions esmoreïdes abans d'arribar a l'estat estacionari. En aquestes condicions, davant d'una entrada de tipus escaló, el sistema presenta una sortida y amb resposta transitòria que es pot expressar de la següent manera:

$$y(t) = Y_F(1 - C \cdot e^{-\delta\omega_0 t} \sin(\omega_n t + \theta)) \quad (21)$$

On Y_F és el valor de la variable y en règim estacionari i

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \quad (22)$$

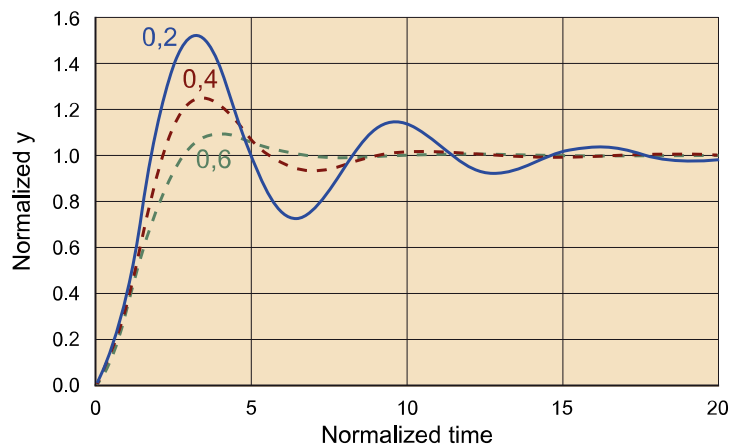
$$\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \delta^2} \quad (23)$$

$$\theta = \cos^{-1} \delta \quad (24)$$

La variable ω_n de l'expressió [23] és coneguda com la freqüència natural esmorteïda.

La figura 2 mostra la típica resposta dinàmica d'un sistema de segon ordre passa-baix davant d'una entrada tipus escaló i per diferents valors del coeficient d'esmoreïment. Aquesta resposta, a diferència del que passa a la figura 1, sí que presenta sobreoscil·lacions que incrementen en disminuir el valor de δ . La sobreoscil·lació d'un sistema es quantifica generalment tot calculant l'error relatiu (en percentatge) entre el valor màxim obtingut i el valor final en règim estacionari.

Figura 2. Resposta transitòria d'un sistema de segon ordre sota-esmoreït davant d'una entrada de tipus escaló, per diferents valors del coeficient d'esmoreïment.



Exemple

Donat el comportament de la figura 2, calculeu la sobreoscil·lació quan $\delta = 0,2$.

Solució

Segons la figura 2, per $\delta = 0,2$, la resposta dinàmica presenta un valor màxim (normalitzat) de 1,53. Per tant, atès que el valor final en règim estacionari és 1, la sobreoscil·lació val: $(1,53 - 1)/1 \cdot 100 = 53\%$.

2. Mòdul 2

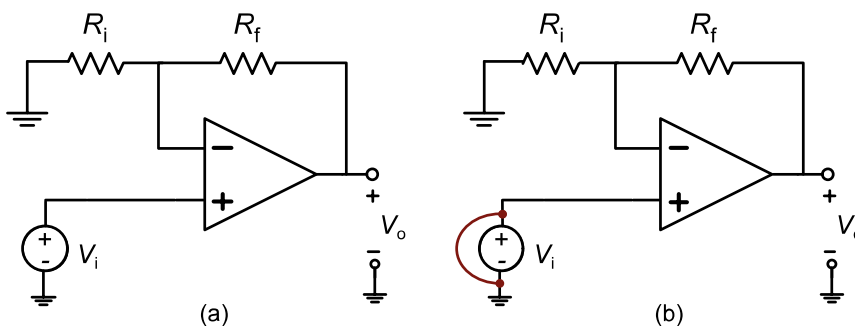
2.1. Característiques estàtiques dels amplificadors operacionals

Els amplificadors operacionals (AO) presenten diverses limitacions en contínua que provoquen que la tensió de sortida presenti un error en contínua respecte al valor esperat. Entre aquestes limitacions, les més crítiques solen ser la **tensió d'òfset d'entrada** (V_{io}) (en anglès, *input offset voltage*) i els **corrents de polarització** (I_{b+} i I_{b-}) de l'entrada no inversora i inversora, respectivament. Per analitzar els efectes d'aquestes limitacions a la sortida de l'AO, es recomana seguir els següents passos:

- Elimineu les fonts independents del circuit.
- Substituïu l'AO pel seu model real que inclou V_{io} , I_{b+} i I_{b-} .
- Apliqueu el teorema de superposició i analitzeu independentment els efectes de V_{io} , I_{b+} i I_{b-} a la sortida.
- Calculeu la magnitud de l'error a la sortida sumant, tal com s'indica més endavant, les diferents contribucions.

A continuació, el mètode d'anàlisi anterior és aplicat a l'amplificador no inversor de la figura 3(a). Tal com indica el pas a), en primer lloc cal eliminar la font independent V_i que, en tractar-se d'una font de tensió, s'ha de curtcircuitar, com podeu veure a la figura 3(b).

Figura 3. (a) Amplificador no inversor amb un guany $1+R_f/R_i$, (b) amb la font independent eliminada.



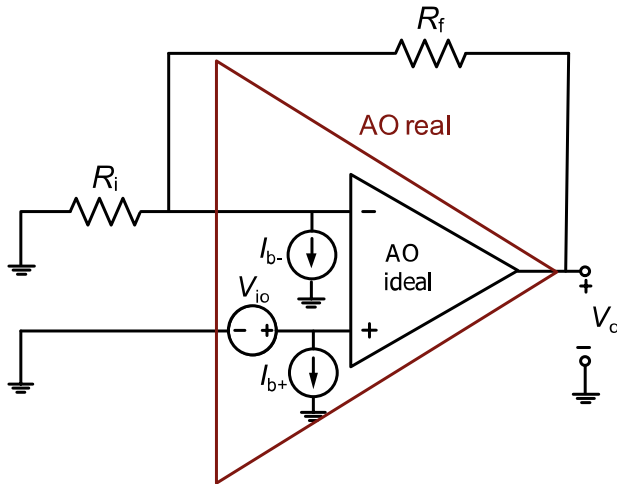
En segon lloc, cal substituir l'AO pel seu model real, marcat en color vermell a la figura 4, i que inclou V_{io} , I_{b+} i I_{b-} . Pel que fa a la polaritat de V_{io} , I_{b+} i I_{b-} , es pot escollir la de la figura o l'oposada, però sí que és important que les fonts

Corrents de polarització

Els fabricants d'AO no proporcionen directament aquests corrents, sinó que donen la mitjana dels dos (en anglès, *input bias current*, I_B) i el valor absolut de la diferència (en anglès, *input offset current*, I_{io}). Aquests corrents es relacionen entre ells de la següent manera: $I_{b+} = I_B \pm I_{io}/2$ i $I_{b-} = I_B \mp I_{io}/2$.

de corrent I_{b+} i I_{b-} tinguin la mateixa polaritat entre elles. En tercer lloc, cal aplicar el teorema de superposició i analitzar independentment els efectes de V_{io} , I_{b+} i I_{b-} a la sortida, tal com es mostra a la figura 5.

Figura 4. Amplificador no inversor de la figura 3(b) considerant el model real de l'AO que inclou V_{io} , I_{b+} i I_{b-} .



A la figura 5(a), en què s'analitzen els efectes de V_{io} , podem veure que aquesta tensió és amplificada pel factor $1 + R_f/R_i$. De fet, els circuits de les figures 3(a) i 5(a) són equivalents, però en el segon cas la tensió que passa a la sortida amplificada pel factor $1 + R_f/R_i$ és la V_{io} , en lloc de V_i . Per tant, la tensió de sortida es pot expressar com:

$$V_{O,1} = V_{io} \left(1 + \frac{R_f}{R_i} \right) \quad (25)$$

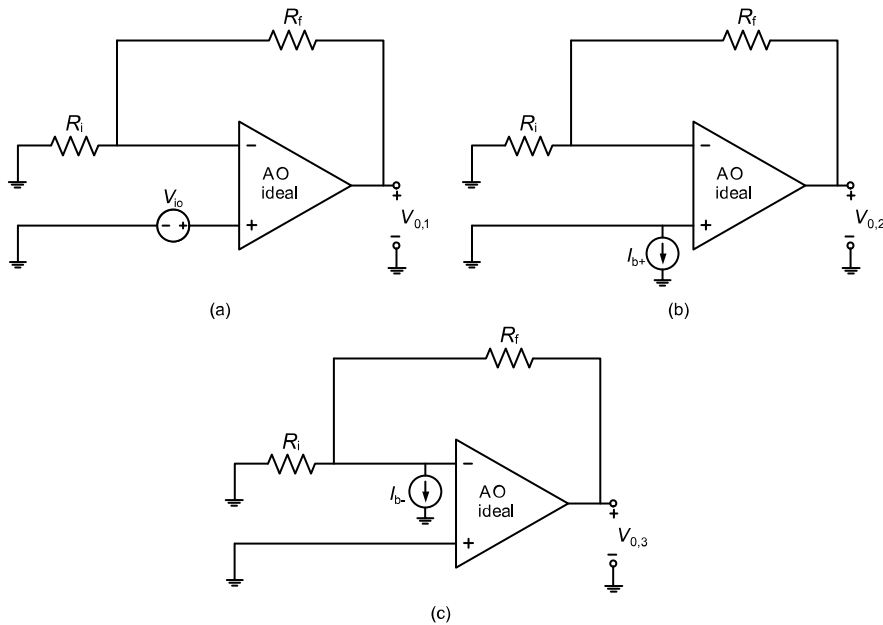
A la figura 5(b), en què s'analitzen els efectes d' I_{b+} , podem veure que aquest corrent no circula a través de cap resistència i, per tant, l'entrada no inversora de l'AO es troba a zero volts, tot fent que la tensió de sortida valgui:

$$V_{O,2} = 0 \left(1 + \frac{R_f}{R_i} \right) = 0 \quad (26)$$

Per últim, a la figura 5(c), on s'analitzen els efectes d' I_{b-} , podem observar que aquest corrent circula per la resistència de realimentació tot generant una tensió de sortida igual a:

$$V_{O,3} = I_{b-} \cdot R_f \quad (27)$$

Fixeu-vos que en el circuit de la figura 5(c), la resistència R_i és supèrflua, ja que el terminal de l'esquerre es troba connectat a massa i en el terminal de la dreta hi ha la massa virtual generada per la realimentació negativa de l'amplificador operacional.

Figura 5. Anàlisi dels efectes de (a) V_{io} , (b) I_{b+} i (c) I_{b-} a la tensió de sortida.

El darrer pas és el càlcul de la magnitud de l'error a la sortida com a suma de les diferents contribucions. Aquestes s'han de sumar de la següent manera:

$$V_{O,T} = \pm (|V_{O,1}| + |V_{O,2} + V_{O,3}|) \quad (28)$$

Entre les contribucions d' I_{b+} i I_{b-} és possible (però no ocorre en el cas analitzat anteriorment) que hi hagi certa compensació dels seus efectes i, per aquesta raó, les tensions de sortida respectives ($V_{O,2}$ i $V_{O,3}$) es sumen tal qual. Ara bé, aquests efectes s'han de sumar en valor absolut amb aquells generats per la V_{io} per tal de considerar el pitjor cas en què els efectes en mode tensió i en mode corrent tenen el mateix signe. Per últim, atès que no coneixem la polaritat real de V_{io} , I_{b+} i I_{b-} , el resultat de l'error de sortida pot ser positiu o negatiu i, per això, hi ha el signe “ \pm ” al principi de l'expressió [28]. Teòricament, no podem saber a priori quina polaritat (positiu o negatiu) tindrà aquest error de la tensió de sortida. Experimentalment, per cada unitat testejada d'un determinat model d'AO, s'obté un error particular (positiu o negatiu) que estaria comprès dins del marge definit per [28].

Exemple

Donat el circuit de la figura 3(a) amb $R_f = 1 \text{ M}\Omega$, $R_i = 10 \text{ k}\Omega$, $V_{io} = 1 \text{ mV}$, $I_B = 80 \text{ nA}$ i $I_{io} = 20 \text{ nA}$, calculeu l'error de tensió en mV a la sortida de l'AO.

Solució

Aplicant les equacions [25], [26] i [27] i l'expressió d' I_{b-} donada al quadre informatiu del subapartat 2.1. (Corrents de polarització), s'obté el següent:

$$V_{O,1} = V_{io} \left(1 + \frac{R_F}{R_i} \right) = 1 \text{ mV} \cdot 101 = 101 \text{ mV} \quad (29)$$

$$V_{O,2} = 0 \quad (30)$$

$$V_{O,3} = I_{b-} \cdot R_F = \left(I_{B\mp} \mp \frac{I_{io}}{2} \right) 1 \text{ M}\Omega = [70,90] \text{ mV} \quad (31)$$

On el valor mínim i màxim de l'interval obtingut a [31] resulten de considerar el signe “-” i “+” en el valor d' I_{b-} , respectivament. Assumint ara el màxim valor obtingut a [31] i aplicant [28], la tensió d'error a la sortida de l'AO val, en el pitjor cas, el següent:

$$V_{O,T} = \pm (101 + 10 + 90) = \pm 191 \text{ mV} \quad (32)$$

Si assumim una tensió de fons d'escala de 5 V, la tensió d'error anterior representa un error relatiu del $\pm 4\%$. Òbviament, en el mercat es disposa d'AO amb prestacions més bones quant a V_{io} , I_{b+} i I_{b-} , per tal de disminuir aquest error.

2.2. Característiques dinàmiques dels amplificadors operacionals

Una de les principals limitacions dinàmiques dels AO és la seva **resposta en freqüència**. Suposem l'amplificador no inversor de la figura 3(a) amb una relació de resistències tal que $1 + R_f/R_i = 100$. Aquest guany de 100 és el que proporciona el circuit si a l'entrada hi ha una tensió contínua o de baixa freqüència, per exemple: si a l'entrada tenim connectat un sensor de temperatura. Ara bé, si un sensor d'ultrasons que proporciona una tensió amb una freqüència de 40 kHz és connectat a l'entrada, no podem assegurar de manera immediata que el circuit en qüestió proporcionarà un guany de 100. Això és a causa que el guany real del circuit depèn de la freqüència que vulguem amplificar. Per regla general, com més gran sigui la freqüència, més petit serà el guany real de l'amplificador, actuant com un filtre passa-baix tot i voler un circuit amplificador passa-tot.

Per descriure aquesta limitació dels AO, els fabricants proporcionen un paràmetre que és anomenat de diferents maneres: *unity-gain frequency*, *gain-bandwidth product* o *bandwidth*, essent el segon el més habitual. El **producte guany-amplada de banda** ens diu que el producte entre el guany (en contínua) del circuit i l'amplada de banda és constant. Per tant, hi ha un **compromís** clar entre aquests dos valors. Un circuit amplificador amb un guany (en contínua) elevat, tindrà una amplada de banda petita i, en conseqüència, podrà amplificar pel guany esperat només a freqüències baixes. Per altra banda, un circuit amplificador amb un guany (en contínua) reduït, tindrà una amplada de banda gran i, per tant, podrà amplificar pel guany esperat fins a freqüències més altes.

Compromís guany-amplada de banda

En el mercat podem trobar amplificadors operacionals especials anomenats CFA (*Current Feedback Amplifier*) en què aquest compromís entre el guany i l'amplada de banda no existeix i, per tant, aquests es poden ajustar de manera independent. En contrapartida, però, els CFA no presenten bones característiques estàtiques.

Matemàticament, la relació anterior es pot expressar de la següent manera:

$$f_T = G_{dc} \cdot f_c \quad (33)$$

On f_T és el producte guany-amplada de banda proporcionat pel fabricant, G_{dc} és el guany del circuit en contínua (que està determinat per la relació de resistències) i f_c és la freqüència de tall (o l'amplada de banda) del circuit amplificador que actua, encara que no sigui la nostra intenció, com a filtre passa-baix. Per exemple, si es dissenya un circuit amplificador amb un AO que té una $f_T = 1$ MHz, f_c valdrà 100 kHz, 10 kHz i 1 kHz en el cas que G_{dc} valgui 10, 100 i 1.000, respectivament.

Aquest comportament de tipus filtre passa-baix present en circuits amplificadors és habitualment de primer ordre¹, és a dir: amb un pendent de -20 dB/dec a la banda freqüencial atenuada. Matemàticament, aquest guany (G) que depèn de la freqüència es pot expressar en el domini de Laplace com:

$$G(s) = \frac{G_{dc}}{1 + \frac{1}{2\pi f_c} s} \quad (34)$$

Essent aquesta vàlida per l'amplificador inversor, no inversor i els seus derivats. L'expressió anterior es pot traslladar al domini freqüencial, tot obtenint:

$$G(jf) = \frac{G_{dc}}{1 + j\frac{f}{f_c}} \quad (35)$$

On el seu mòdul val:

$$|G(jf)| = \frac{G_{dc}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \quad (36)$$

De l'expressió anterior podem observar que quan la freqüència (f) del senyal amplificat és igual a f_c , el guany real és igual a $0,7 \cdot G_{dc}$, és a dir: 3 dB menys del guany esperat, tal com ocorre en filtres passa-baix de primer ordre.

Exemple

El circuit de la figura 3(a) s'implementa amb $R_i = 1$ k Ω , $R_f = 1$ M Ω i amb un amplificador operacional que té una $f_T = 1$ MHz. Determineu l'amplitud de la tensió de sortida si la tensió d'entrada és un senyal sinusoidal amb una amplitud de 10 mV i una freqüència de 10 kHz.

Solució

El que no podem dir de cap de les maneres és que la sortida valdrà $10 \text{ mV} \cdot (1 + 1\text{M}\Omega/1\text{k}\Omega) = 10,01 \text{ V}$, sinó que cal procedir de la següent manera. En primer lloc, cal calcular la freqüència de tall del circuit com:

⁽¹⁾Assumint que l'AO està compensat internament en freqüència, és a dir: el seu guany diferencial en llaç obert presenta una caiguda amb un pendent de -20 dB/dec fins arribar als 0 dB.

$$f_c = \frac{f_T}{G_{dc}} = \frac{1 \text{ MHz}}{1 + R_f/R_i} \approx 1 \text{ kHz} \quad (37)$$

En segon lloc, cal utilitzar l'expressió [36]:

$$|G(jf)| = \frac{G_{dc}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} = \frac{1 + R_f/R_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{10k}{1k}\right)^2}} = 99,6 \quad (38)$$

Per tant, l'amplitud de la tensió de sortida valdrà $10 \text{ mV} \cdot 99,6 \approx 1 \text{ V}$, que és deu vegades més petit que el valor calculat inicialment.

Exemple

Un senyal d'àudio, amb una amplada de banda d'interès fins a 20 kHz, és amplificat amb un amplificador no inversor com el de la figura 3(a) amb $1 + R_f/R_i = 1.000$ i $f_T = 3 \text{ MHz}$. Discutiu si el disseny és vàlid i, en cas contrari, proposeu millores.

Solució

Amb les dades donades a l'enunciat, podem calcular la freqüència de tall del circuit com:

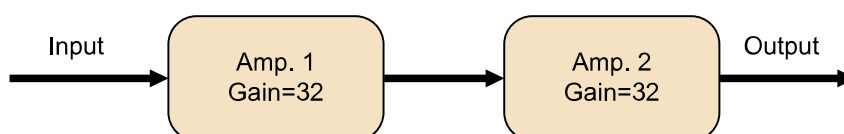
$$f_c = \frac{f_T}{G_{dc}} = \frac{3 \text{ MHz}}{1 + R_f/R_i} = 3 \text{ kHz} \quad (39)$$

Per tant, les freqüències compreses entre 3 kHz i 20 kHz serien amplificades per un guany inferior al desitjat, que en aquest cas no ens interessa. Per solucionar aquest problema, hi ha diverses opcions possibles. L'opció més ràpida, tot i que implica utilitzar un component més costós, és escollir un AO amb una f_T superior. Aquesta hauria de ser com a mínim de 20 MHz. Una altra opció és utilitzar dues etapes d'amplificació en cascada, tal com es mostra a la figura 6. Per exemple, es podrien usar dues etapes d'amplificació, cadascuna d'elles amb un guany de 32, per obtenir un guany total de 1.000 ($\approx 32^2$). Per altra banda, un guany de 32 implica una freqüència de tall igual a:

$$f_c = \frac{f_T}{G_{dc}} = \frac{3 \text{ MHz}}{32} = 94 \text{ kHz} \quad (40)$$

En aquest disseny, basat en dues etapes, cadascuna d'elles aportaria la meitat de l'amplificació requerida i en cap cas s'atenuarien les freqüències d'interès inferiors a 20 kHz. Observeu que la freqüència de tall particular de cada subcircuit és quasi cinc vegades més gran que la màxima freqüència a amplificar.

Figura 6. Disseny d'un circuit amplificador basat en dues etapes.



3. Mòdul 3

3.1. Filtres per a convertidors de senyal

Tant en els convertidors analògic-digital (A/D) com en els convertidors digital-analògic (D/A), els filtres hi juguen un paper molt rellevant. En la conversió A/D, la presència d'un filtre abans del circuit de mostreig i retenció és vital per evitar fenòmens d'aliàsing. Per altra banda, en la conversió D/A, la presència d'un filtre després de l'interpolador/mantenidor d'ordre zero és bàsic per acabar d'eliminar/atenuar les restes de les rèpliques no filtrades pel mateix mantenidor d'ordre zero. Tant en un cas com en l'altre, els filtres són de tipus passa-baix i s'anomenen filtre antialiàsing en el primer cas i filtre antiimatge o suavitzador en el segon.

A continuació, es descriuen matemàticament els filtres. En primer lloc, el mòdul de la resposta en freqüència d'un filtre passa-baix de primer ordre es pot expressar de la següent manera:

$$|H(jf)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \quad (41)$$

On H_0 és el guany del filtre a la banda passant (és a dir: a freqüències baixes) i f_c és la freqüència de tall del filtre amb una atenuació de 3 dB respecte a la banda passant. A la banda eliminada, el filtre de primer ordre presenta una atenuació de -20 dB/dec. En el cas d'un filtre passiu passa-baix implementat amb una resistència (R) i un condensador (C), la $f_c = (2 \cdot \pi \cdot R \cdot C)^{-1}$. Fixeu-vos que les expressions [36] i [41] són equivalents, ja que, tal com s'ha indicat abans, un circuit amplificador actua com un filtre passa-baix de primer ordre. Si en lloc de ser de primer ordre el filtre és d'ordre n i té una resposta de tipus Butterworth, el mòdul de la resposta en freqüència es pot expressar com:

$$|H(jf)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}} \quad (42)$$

Amb una atenuació de $-20 \cdot n$ dB/dec a la banda eliminada.

Per altra banda, si el filtre és passa-alt i de primer ordre, el mòdul de la seva resposta en freqüència val:

$$|H(jf)| = \frac{H_0 \frac{f}{f_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \quad (43)$$

On H_0 és de nou el guany del filtre a la banda passant, que en aquest cas són les freqüències altes. En la mateixa situació però d'ordre n , el mòdul es pot expressar com:

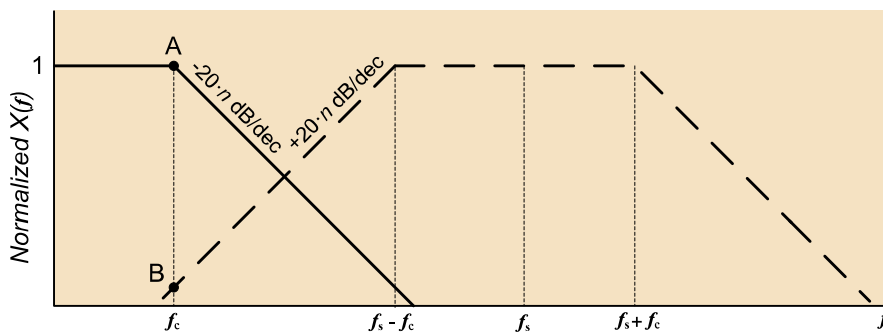
$$|H(jf)| = \frac{H_0 \left(\frac{f}{f_c}\right)^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}} \quad (44)$$

Les expressions matemàtiques anteriors han de permetre, per exemple, determinar quin és l'ordre del filtre adequat per a un determinat convertidor. Per estudiar això amb més detall, usarem com a referència la representació asimptòtica en el domini freqüencial de la figura 7, en què cal tenir present el següent. En primer lloc, l'espectre del senyal original filtrat (X) està representat en línia contínua gruixuda, amb components freqüencials d'interès fins a f_c que coincideix amb la freqüència de tall del filtre aplicat. En segon lloc, com a conseqüència del mostreig del senyal anterior a una freqüència f_s , apareix una rèplica del senyal centrada al primer múltiple de f_s que està representada en línia discontinua gruixuda. Òbviament, apareixen altres rèpliques del senyal als altres múltiples de f_s , però aquestes tenen menys efectes quantitius a la banda freqüencial d'interès, és a dir: de 0 a f_c . En el cas mostrat a la figura 7, el pitjor cas en termes d'aliàsing és la component generada a f_c , amb una amplitud B . Aquesta ha de representar com a màxim un determinat percentatge (definit per l'aplicació) respecte a l'amplitud del senyal original a aquesta mateixa freqüència (indicat mitjançant el punt A a la figura 7). Si aquest percentatge d'error provocat per l'aliàsing és més gran del que s'espera, cal o bé incrementar el valor de f_s o bé augmentar l'ordre del filtre.

Resposta de tipus Butterworth

Una resposta de tipus Butterworth és aquella que presenta un comportament màximament pla en la banda freqüencial passant. En un sistema de segon ordre, aquesta resposta correspon al cas en què el coeficient d'esmoreïment val 0,707.

Figura 7. Representació en el domini freqüencial dels efectes d'aliàsing.



Exemple

Donat el cas representat a la figura 7 amb $f_c = 2$ kHz i $n = 1$, determineu el valor mínim de f_s per tal que l'amplitud de la component d'aliàsing (punt B a la figura 7) sigui com a molt un 2% de l'amplitud del senyal original (punt A a la figura 7).

Solució

Primerament, procedim a calcular l'amplitud del senyal original a $f = f_c$. Per fer-ho, podem utilitzar l'expressió [41]:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2}} = 0,707 \quad (45)$$

On s'ha assumit que $H_0 = 1$, ja que les amplituds de la figura 7 estan normalitzades. En segon lloc, determinarem l'amplitud de la component d'aliàsing al punt B. Per fer-ho, cal emprar l'expressió [43], ja que la rèplica se superposa a la banda freqüencial d'interès en forma de filtre passa-alt amb una freqüència de tall igual a $f_s - f_c$ (vegeu la figura 7). En aquestes condicions, a $f = f_c$ tenim el següent:

$$B = \frac{\frac{f_c}{f_s - f_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{f_s - f_c}\right)^2}} \quad (46)$$

Llavors, cal que es compleixi la següent relació:

$$\frac{\frac{2k}{f_s - 2k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2k}{f_s - 2k}\right)^2}} < \frac{2}{100} \cdot 0,707 \quad (47)$$

Treballant matemàticament l'expressió anterior s'obté una equació de segon grau amb la variable f_s , i resolent-la s'obté que $f_s > 143$ kHz. Fixeu-vos que el valor anterior és bastant més gran que aquell obtingut aplicant directament el teorema de Nyquist, és a dir: $f_s > 2 \cdot 2$ kHz = 4 kHz. Això és a causa que l'exemple anterior utilitza un filtre antiàliasing de primer ordre en què els efectes de les rèpliques sobre la banda freqüencial d'interès són bastant rellevants. Com més gran sigui l'ordre del filtre, més ens podrem aproximar als 4 kHz obtinguts mitjançant el teorema de Nyquist.

⁽²⁾Aquests efectes de distorsió del senyal causats per l'aliàsing sovint també s'expressen com una relació senyal-soroll (en anglès, signal-to-noise ratio) quantificada en dB. En el cas en qüestió, tenir uns efectes inferiors al 2% corresponen a una relació senyal-soroll superior a 34 dB ($= 20 \cdot \log(\text{amplitud senyal}/2\%$ de l'amplitud senyal)).

4. Mòdul 4

4.1. Linealització de termistors (NTC)

Entre els diferents tipus de sensors de temperatura existents en el mercat, els termistors de tipus NTC presenten com a avantatges principals el seu baix cost i la seva elevada sensibilitat, però la seva limitació principal és la no linealitat. La relació no lineal entre la seva resistència (R_t) i la temperatura (T , expressada en K) es pot modelitzar de la manera següent:

$$R_t(T) = R_0 e^{\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \quad (48)$$

On R_0 és la resistència a $T = T_0$, β és la temperatura característica del material, i T_0 és la temperatura de referència que generalment és de 298 K (que corresponen a 25 °C) en aquest tipus de sensors.

Per millorar aquesta característica no lineal dels termistors hi ha dues estratègies possibles. La primera consisteix a posar una resistència (R_p) en paral·lel amb el termistor, tal com es mostra a la figura 8. En aquestes condicions, tenim una resistència equivalent que val:

$$R_{eq} = \frac{R_t R_p}{R_t + R_p} \quad (49)$$

Per trobar la sensibilitat tèrmica de R_{eq} , podem substituir [48] a [49] i fer la primera derivada respecte a la temperatura, tot obtenint el següent:

$$\frac{\partial R_{eq}}{\partial T} = - \frac{R_t R_p^2 \beta}{(R_t + R_p)^2 T^2} \quad (50)$$

Per determinar el valor apropiat de R_p generalment el que es fa és forçar que la corba que relaciona R_{eq} i T tingui un punt d'inflexió en la temperatura central (T_c) del marge de mesura. Per obtenir aquest valor analíticament, cal fer la segona derivada respecte a la temperatura i igualar el resultat a zero de la següent manera:

$$\frac{\partial^2 R_{eq}}{\partial^2 T} = - \frac{R_t R_p^2 \beta}{(R_t + R_p)^2 T^3} \underbrace{\left(\frac{2R_t \beta}{(R_t + R_p) T} - \frac{\beta}{T} - 2 \right)}_{\text{Term 1}} = 0 \quad (51)$$

L'expressió [51] valdrà zero quan el terme 1 valgui zero, que implica la següent condició:

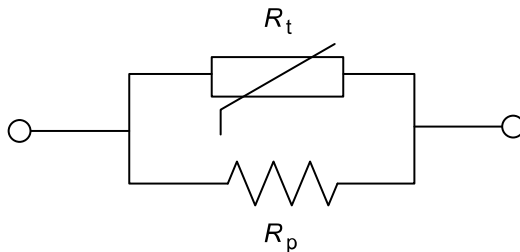
$$R_p = \frac{\beta - 2T}{\beta + 2T} R_t \quad (52)$$

Com que es desitja que el punt d'inflexió es doni quan $T = T_c$, el valor adequat de R_p val:

$$R_p = \frac{\beta - 2T_c}{\beta + 2T_c} R_{t,c} \quad (53)$$

On $R_{t,c}$ és el valor de la resistència del termistor a $T = T_c$.

Figura 8. Linealització d'un termistor mitjançant una resistència en paral·lel.



La segona estratègia per linealitzar la resposta d'un termistor consisteix a utilitzar un divisor de tensió en què el termistor es troba en sèrie amb una altra resistència (R_s), tal com es mostra a la figura 9. En aquestes condicions, tenim una tensió de sortida amb el següent valor:

$$V_o = V_{cc} \frac{R_s}{R_t + R_s} \quad (54)$$

Per trobar la sensibilitat tèrmica de V_o , podem substituir [48] a [54] i fer la primera derivada respecte a la temperatura, tot obtenint:

$$\frac{\partial V_o}{\partial T} = \frac{V_{cc} R_t R_s \beta}{(R_t + R_s)^2 T^2} \quad (55)$$

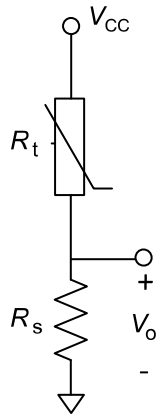
De la mateixa manera que s'ha procedit en el cas anterior, el valor apropiat de R_s es troba tot forçant que la corba que relaciona V_o i T tingui un punt d'inflexió quan $T = T_c$. Per tant, cal fer la segona derivada i igualar el resultat a zero:

$$\frac{\partial^2 V_o}{\partial^2 T} = \frac{V_{cc} R_t R_s \beta}{(R_t + R_s)^2 T^3} \underbrace{\left(\frac{2R_t \beta}{(R_t + R_s) T} - \frac{\beta}{T} - 2 \right)}_{\text{Term 1}} = 0 \quad (56)$$

El terme 1 de l'expressió [56] és el mateix que el de l'expressió [51] si s'intercanvia R_s per R_p . Conseqüentment, el valor apropiat de R_s , per tal que el punt d'inflexió es doni quan $T = T_c$, coincideix amb aquell obtingut amb la primera estratègia, és a dir:

$$R_s = \frac{\beta - 2T_c}{\beta + 2T_c} R_{t,c} \quad (57)$$

Figura 9. Linealització d'un termistor mitjançant una resistència en sèrie formant un divisor de tensió.



Exemple

El circuit de la figura 10 utilitza un termistor NTC (amb $R_0 = 2.200 \Omega$ i $B = 4.000 \text{ K}$) per mesurar temperatures entre 0°C (T_{\min}) i 50°C (T_{\max}). Calculeu el valor adequat de R_s per tal de linealitzar la resposta del circuit respecte a la temperatura. La tensió d'alimentació (V_{CC}) val 5 V .

Solució

En primer lloc, calculem la temperatura central (T_c) del marge de mesura:

$$T_c = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2} + T_{\min} = 25^\circ\text{C} \rightarrow 298 \text{ K} \quad (58)$$

En segon lloc, calculem la resistència de la NTC a aquesta temperatura:

$$R_t(T = 298) = 2.200 e^{4.000 \left(\frac{1}{298} - \frac{1}{298} \right)} = 2.200 \Omega \quad (59)$$

I, per tant, el valor apropiat de R_s val:

$$R_s = \frac{\beta - 2T_c}{\beta + 2T_c} R_{t,c} = \frac{4.000 - 2 \cdot 298}{4.000 + 2 \cdot 298} 2.200 = 1.629 \Omega \quad (60)$$

Com que el valor de resistència obtingut no és comercial, escollirem una resistència de 1.500Ω en el cas de treballar amb la sèrie E12 (amb una tolerància del 10%), o una de 1600Ω en el cas de la sèrie E24 (amb una tolerància del 5%).

Bibliografia

Franco, S. (2002). *Design with operational amplifiers and analog integrated circuits*. Nova York: McGraw-Hill.

ISO (1993). *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. Ginebra: International Organization for Standardization.

Pallàs Areny, R. (2003). *Sensores y acondicionadores de señal*. Barcelona: Marcombo.

Pallàs Areny, R. (2006). *Instrumentos electrónicos básicos*. Barcelona: Marcombo.

Pérez García, M. A.; Álvarez Antón, J. C.; Campo Rodríguez, J. C.; Ferrero Martín, F. J.; Grillo Ortega, G. J. (2004). *Instrumentación Electrónica*. Madrid: Thomson.

Salgado, M. E.; Yuz, J. I.; Rojas, R. A. (2005). *Análisis de sistemas lineales*. Madrid: Pearson-Prentice Hall.

